Глава 9. Основы гидро и аэромеханики

П.9.1.Основы гидро- и аэростатики.

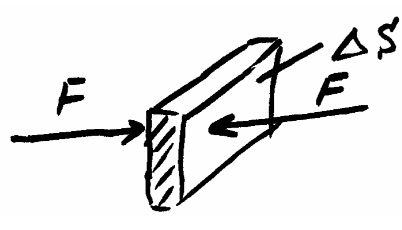
П.9.1.1. Закон Паскаля.

Всякий объем жидкости или газа может изменить свою форму под действием сколь угодно малой силы.

В жидкостях и газообразных веществах отсутствуют касательные напряжения.

Если жидкость неравновесна (в ней происходит движение отдельных слоев друг относительно друга), то касательные напряжения в такой жидкости существуют – они связаны с вязким трением слоев друг относительно друга. Если пренебречь вязкостью, то такую жидкость (или газ) называют идеальной жидкостью (или газом).

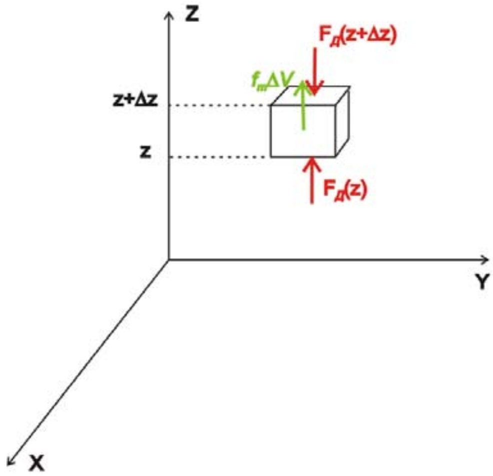
Другая особенность жидкостей и газов – отсутствие в них напряжений растяжения. Напряжения в жидкости создаются только при сжатии жидкости или газа. Кроме того, для покоящейся жидкости сила напряжения всегда перпендикулярна грани выделенного объема так как касательные напряжения отсутствуют. Для каждой площадки в жидкости существует только нормальное напряжение



$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S},$$
которое называют давлением в жидкости или газе.
Давление не зависит от расположения площадки.
Это справедливо также, когда на жидкость действуют и массовые силы (силы, действующие не на внешнюю поверхность, а на каждый элементарный объем жидкости или газа).

Закон Паскаля.

Пусть массовые силы отсутствуют, тогда « *Внешнее давление передается жидкостью или газом по всем направлениям без изменений»*. Если действует массовая сила, то изменение давления на поверхности жидкости приводит к изменению на эту же величину давления во всех точках жидкости или газа.



9.1.2.Основное уравнение гидростатики.

Рассмотрим элементарный объем покоящейся жидкости, см.рисунок. Здесь $f_m \cdot \Delta V$ - массовая (объемная) сила, f_m- плотность массовой силы.
Условие равновесия объема имеет вид.
$$\vec{F}_\partial(z) + \vec{F}_\partial(z+\Delta z) + \vec{f}_m \Delta V = 0.$$

В проекции на ось z получаем:
$$-\frac{\partial p}{\partial z} \cdot \Delta z \Delta S_z + f_{mz} \Delta V = 0.$$
Аналогичные соотношения выполняются и для проекций на другие оси.
Отсюда следует
$$\begin{cases} f_{mz} - \dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 \\ f_{my} - \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ f_{mx} - \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{cases}$$
То есть
$\vec{f}_m - grad p = 0$ - ***основное уравнение гидростатики***

9.1.3.Сжимаемость жидкостей и газов.

Давление в данной точке жидкости и газа зависит от степени сжатия в этой точке. Величина давления (напряжение) определяет объемное сжатие.
Объемная упругость жидкости и газа количественно характеризуется коэффициентом сжимаемости:

$$\gamma = -\frac{\Delta V}{V\Delta p} = -\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta p} \ ,$$

или модулем сжатия

$$K = \frac{1}{\gamma} = -V\frac{\Delta p}{\Delta V}$$

Коэффициенты сжатия и модуль сжатия зависят от температуры, поэтому обычно их задают при фиксированном значении температуры и называют изотермическим коэффициентом и модулем всестороннего сжатия

$$\gamma = -\frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dp}\right)_{T=const}, K = -V\left(\frac{dp}{dV}\right)_{T=const}.$$

Замечание 1. Малая сжимаемость жидкостей позволяет во многих задачах рассматривать жидкость несжимаемой.

Замечание 2. При небольших изменениях объема жидкостей в них могут возникать значительные напряжения.

9.1.4. Распределение давления в покоящейся жидкости (газе) в поле сил тяжести. Барометрическая формула.

В жидкости

$$\frac{\partial p(z)}{\partial z} = \rho g$$

То есть $p(z) = \rho g z + p_0$

В газе

Рассмотрим газ, состоящий из молекул одного вещества. Для него можно записать

$$\frac{\partial p(z)}{\partial z} = \rho(z) g$$

$\rho = n \cdot m_0$, $p = nkT$

Отсюда получаем:

$p = p_0 e^{-\frac{m_0 g}{kT} z} + const$ - ***барометрическая формула***.

9.1.5. Закон Архимеда.

Выталкивающая сила – *это равнодействующая всех сил давления.*

Рассмотрим тело, полностью погруженное в жидкость. Для расчета выталкивающей силы можно воспользоваться физическими представлениями. Если мы мысленно вынем тело и заполним эту полость жидкостью, то очевидно результирующая сил давления не изменится. Так как этот объем жидкости покоится, то выталкивающая сила (сила Архимеда) равна весу этой жидкости: $F_A = m_ж g = \rho_ж \cdot V \cdot g$.

Таким образом: *на тело, погруженное в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной жидкости, приложенная к центру вытесненного объема (центру тяжести вытесненной жидкости) и направленная вертикально вверх.*

9.1.6.Условия устойчивого плавания тел.

Для того чтобы тело не тонуло необходимо, чтобы выталкивающая сила была равна весу тела. Однако для устойчивого плавания тел (в кораблестроении используется термин остойчивость) необходимо учитывать точку приложения выталкивающей силы. Рассмотрим отдельно два случая.

1-й случай.

Пусть тело полностью погружено в жидкость. Плавание тела будет устойчивым, если центр масс лежит ниже точки приложения выталкивающей силы (центра плавучести тела).

2-й случай. Тело плавает на поверхности жидкости. Для тел, плавающих в жидкости центр тяжести, как правило, расположен выше центра вытесненного объема (точки приложения выталкивающей силы). Для устойчивого (остойчивого) плавания необходимо выбирать форму днища корабля. При наклоне корабля точка приложения выталкивающей силы смещается. Точка пересечения линии действия выталкивающей силы с осью симметрии называется метацентром. Если метацентр лежит выше центра тяжести тела, плавание будет остойчивым, так как действие моментов сил тяжести и выталкивающей будет приводить выравниванию судна.

П9.2.Стационарное течение несжимаемой жидкости.

П.9.2.1. Идеальная жидкость.Линии тока. Трубки тока.

Идеальная жидкость – *жидкость, лишенная вязкости.*

Течение жидкости – ***стационарное***, если все величины (скорость, давление, плотность, температура и т.д.) остаются неизменными в каждой точке пространства. ***Линии тока*** – *линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением скорости частицы.*

Трубка тока – о*бласть пространства, ограниченная замкнутой поверхностью, образованной семейством линий тока.* Если сечение трубки тока достаточно мало, то можно считать, что в поперечном сечении скорости частиц одинаковы.

Для двух произвольных сечений трубки тока выполняется соотношение (закон сохранения массы)

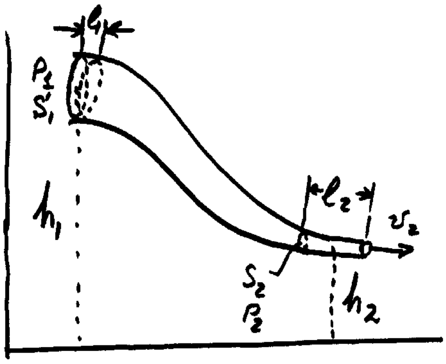
$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 .$$

Если жидкость несжимаема, то ее плотность не меняется и

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1} .$$

П.9.2.2. Уравнение Бернулли

Рассмотрим движение идеальной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести. Выделим некоторый объем произвольной трубки тока (см. рисунок). Пусть за промежуток времени dt сечение площадью S_1 смещается на расстояние l_1, а сечение, площадью S_2- на расстояние l_2 (см. рисунок). Поскольку жидкость несжимаема, то



$$V_2 = V_1 = S_1 l_1 = S_2 l_2$$

Изменение механической энергии выделенного объема равно работе сил давления

$$E_2 - E_1 = A_{дав},$$

отсюда следует, что

$$\frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 + p_2 S_2 l_2 = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 + p_1 S_1 l_1$$

Учитывая несжимаемость жидкости, получаем окончательно:

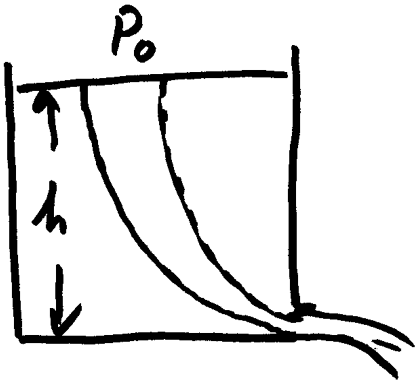
$$\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1$$

то есть

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = const$$

Это уравнение называется уравнением Бернулли.

Пример 1. Вытекание жидкости из широкого сосуда.



Пусть жидкость вытекает из широкого сосуда через маленькое отверстие. Запишем уравнение Бернулли для произвольной трубки тока. Учтем, что поскольку сосуд широкий, то скорость частиц в верхней части сосуда мала, кроме того, на жидкость действует атмосферное давление, как на поверхности, так и в области отверстия.

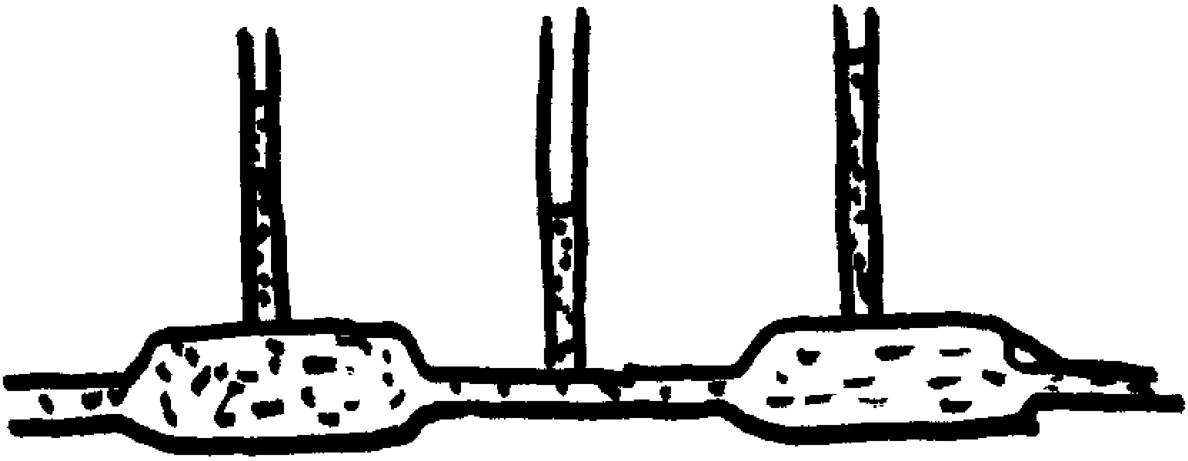
$$\rho g h + p_0 = \frac{\rho v^2}{2} + p_0;$$

Отсюда следует

$v = \sqrt{2gh}$ -

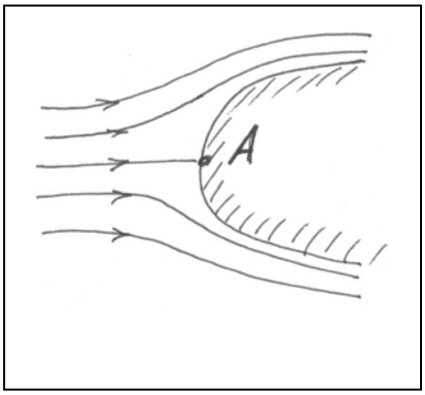
это *формула Торричелли*. Скорость жидкости, вытекающей из сосуда равна той скорости, которую получает тело, падая с той же высоты h.

Пример 2. Давление в жидкости, текущей по трубе переменного сечения.
В том случае, когда жидкость течет по горизонтальной трубке переменного сечения, давление минимально на тех участках, где скорость максимальна (то есть там, где минимально сечение трубы).
Это легко проверить на демонстрации, схема которой показана на рисунке. В трубку переменного сечения вставлены вертикальные трубки. По высоте



поднятия жидкости в этих трубках можно судить о давлении.

Пример 3. Трубка Пито и трубка Прандля.
Пусть поток жидкости обтекает произвольное тело. Качественно ход линий тока показан на рисунке. В точке A скорость жидкости обращается в ноль. Уравнение Бернулли в этом случае можно записать в виде



$$\frac{\rho v^2}{2} + p = p_0,$$

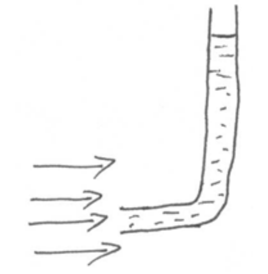
здесь p_0- максимальное давление, которое может иметь жидкость вдоль рассматриваемой трубки тока. Обычно используют следующие определения

p - *статическое давление (или просто давление),*

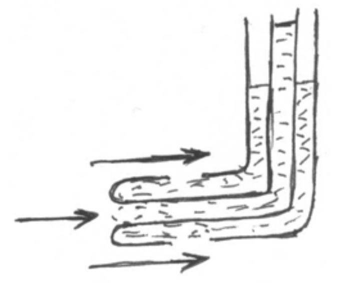
$\frac{\rho v^2}{2}$ - *динамическое давление (скоростной напор),*

$\frac{\rho v^2}{2} + p$ - *полное давление (полный напор).*

Для измерения полного напора используется трубка Пито (1695-1771). Для измерения динамического давления можно воспользоваться трубкой Прандтля (1875-1953).



Трубка Пито



трубка Прандтля

П.9.2.3.Течение вязкой жидкости. Сила вязкого трения. Формула Пуазейля.

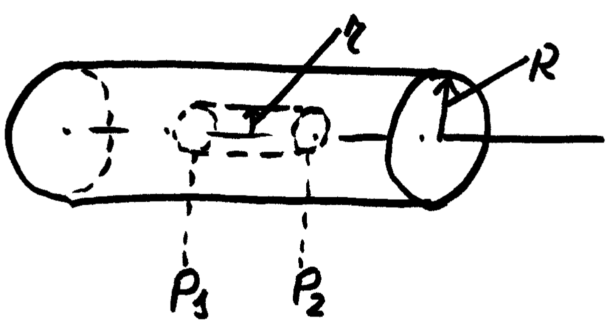
При движении жидкости возникают силы внутреннего трения.
В общем случае сила трения определяется градиентом скорости в направлении перпендикулярном направлению движения. То есть

$$F = \eta S \frac{dv}{dx}$$

В таблице представлены значения коэффициента вязкости для некоторых жидкостей и газов.

Вещество	Коэффициент вязкости (Па·сек)		
	$t=0^0C$	$t=15^0C$	$t=99^0C$
Жидкости			
Глицерин	4.6	1.5	-
Вода	$1.8\ 10^{-3}$	$1.15\ 10^{-3}$	$0.29\ 10^{-3}$
Эфир	$0.29\ 10^{-3}$	$0.25\ 10^{-3}$	-
Газы			
Воздух	$1.71\ 10^{-5}$	$1.81\ 10^{-5}$	$2.2\ 10^{-5}$
Углекислый газ	$1.39\ 10^{-5}$	$1.46\ 10^{-5}$	$1.86\ 10^{-5}$
Водяной пар	$0.9\ 10^{-5}$	$0.97\ 10^{-5}$	$1.31\ 10^{-5}$

Рассмотрим **движение вязкой жидкости по трубе** круглого сечения. Мысленно выделим расположенный вдоль оси трубы цилиндр (см. рисунок). На поверхность цилиндра снаружи действует сила вязкого трения



$$F = \eta 2\pi r l \frac{dv}{dr}$$

так как скорость цилиндра постоянна, то сумма сил, действующих на него, равна нулю

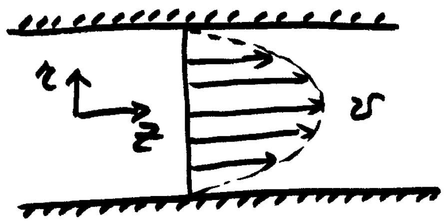
$$\eta 2\pi rl\frac{dv}{dr} + (p_1 - p_2)\pi r^2 = 0,$$

отсюда

$$dv = -\frac{(p_1 - p_2)}{2\eta l}rdr.$$

После интегрирования и учета граничных условий (у стенок трубы скорость жидкости равна нулю) получаем

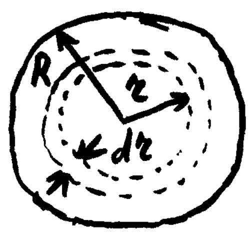
$$v(r) = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right).$$



Качественно зависимость скорости от радиуса показана на рисунке

Определим количество жидкости, протекающей через сечение трубы. Через каждое тонкое кольцо, толщиной *dr* протекает объем жидкости

$$dQ = 2\pi rdr \cdot v$$



Тогда через все сечение трубы протекает

$$Q = \int_0^R 2\pi vrdr = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l}\int_0^R (R_2 - r_2)2\pi rdr$$

После интегрирования получаем

$$Q = \frac{p_1 - p_2}{l}\frac{\pi R^4}{8\eta}$$

Эта формула носит название ***"формула Пуазейля",*** с ее помощью по скорости истечения жидкости можно определять коэффициент вязкости.

П. 9.3. Ламинарное и турбулентное течение. Обтекание тел жидкостью или газом.

П.9.3.1.Ламинарное и турбулентное течение. Число Рейнольдса.

Характер течения жидкости зависит от ее вязкости, скорости движения, геометрии системы, других характеристик. Течение, при котором движение жидкости можно представить, как скольжение отдельных слоев друг относительно друга называют **ламинарным**. В этом случае можно использовать понятия линий тока и трубок тока.

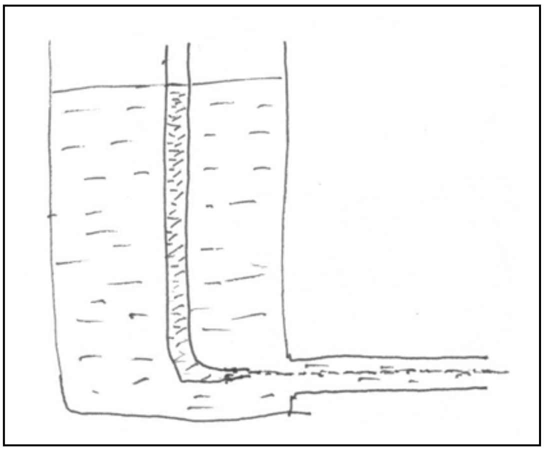
Для частного случая течения жидкости по трубе, используя формулу Пуазейля легко показать что для средней скорости выполняется соотношение

$$< v > = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{p_1 - p_2}{l}\frac{R^2}{8\eta}$$

То есть падение давления в трубе определяется соотношением

$$p_1 - p_2 = \frac{8\eta}{R} < v > \frac{l}{R}$$

При увеличении скорости в жидкости появляются завихрения, нарушающие ламинарное течение. Такое течение называют турбулентным. При турбулентном движении падение давления в трубе резко возрастает. Оно оказывается пропорциональным уже не скорости течения жидкости, а ее квадрату.



$$p_1 - p_2 = k\rho < v >^2 \frac{l}{R}$$

здесь k- безразмерный гидравлический коэффициент.

Переход от ламинарного течения к турбулентному можно наблюдать в опыте, схема которого показана на рисунке. Для визуализации движения жидкости ее подкрашивают. При малых скоростях течения наличие вязкого трения стабилизирует движение жидкости, движение является ламинарным, увеличение скорости приводит к возникновению неустойчивости, движение становится турбулентным.

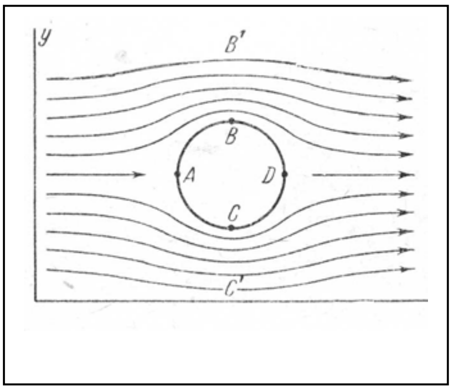
Переход от ламинарного к турбулентному течению определяется соотношением между работой силы трения и кинетической энергией в потоке. Соответствующий безразмерный параметр называется числом Рейнольдса.

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho R < v >}{\eta},$$

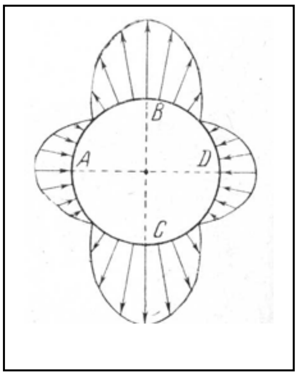
R- характерный поперечный размер системы, например радиус трубы. В рассмотренном опыте переход от ламинарного течения к турбулентному зависит от геометрии места соединения сосуда и выходной трубы. Область критических значений чисел Рейнольдса лежит в диапазоне между 1200 (незакругленный вход) и 20000 (плавный закругленный вход).

П.9.3.2. Лобовое сопротивление при обтекании тел. Парадокс Даламбера.

Возникновение лобового сопротивления рассмотрим на примере обтекания тела жидкостью. Качественно картина линий тока приведена на рисунке. В отсутствие сил сопротивления линии тока симметричны



В точке А давление равно полному напору $\frac{\rho v^2}{2} + p$. В точке В токовые линии сгущаются, давление становится меньшим среднего давления в жидкости. В областях BD и CD густота линий тока снова уменьшается, давление возрастает. В точке D токовые линии ведут себя точно так же, как и в точке A, поэтому в этой точке в соответствии с уравнением Бернулли давление тоже равно $\frac{\rho v^2}{2} + p$. Таким образом, распределение сил давления по сравнению со средней силой давления в набегающем потоке качественно соответствуют показанному на следующем рисунке. Для рассмотренного случая плавного (безотрывного) обтекания шара результирующая сила равна нулю. В этом состоит ***парадокс Даламбера***.



Для вязкой жидкости возникает сила лобового сопротивления, зависящая от формы тела, числа Рейнольдса, плотности кинетической энергии, площади поперечного сечения тела. В общем случае для силы лобового сопротивления можно записать

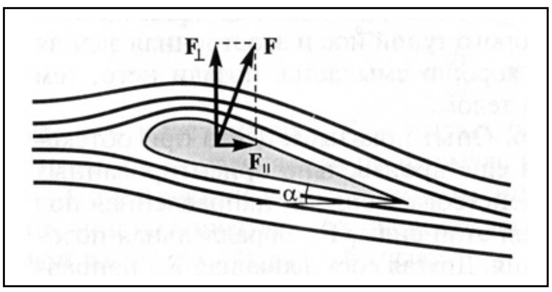
$$F_{лс} = C(\mathrm{Re})\frac{\rho v^2}{2}S,$$

здесь C(Re) – коэффициент лобового сопротивления, зависящий от формы тела и числа Рейнольдса, S – площадь поперечного сечения тела. При увеличении числа Рейнольдса роль сил вязкого трения уменьшается, и коэффициент C(Re) также уменьшается. Наименьшим коэффициентом лобового сопротивления обладает тело каплевидной формы. При обтекании тела сзади него не образуются области разряжения (области низкого давления). В зависимости от скорости жидкости обтекание может носить либо ламинарный характер, либо турбулентный. При ламинарном течении коэффициент лобового сопротивления уменьшается обратно пропорционально числу Рейнольдса, а это означает, что сила лобового сопротивления пропорциональна скорости. В частности, для шара она равна (***формула Стокса***)

$$F_{лс} = 6\pi\eta R v$$

П.9.3.3. Подъемная сила. Формула Жуковского. Эффект Магнуса.

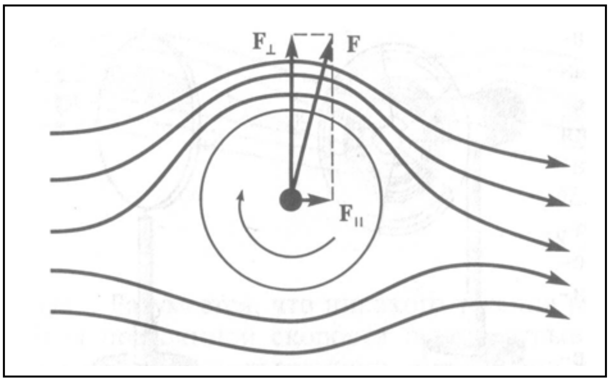
При обтекании сил несимметричной формы на тело действует сила, направленная под углом к потоку. В частности при обтекании воздухом крыла самолета возникает подъемная сила. Качественная картина линий тока показана на рисунке. Угол α называется углом атаки. Подъемная сила равна нулю при $\alpha=0$ и увеличивается при увеличении угла атаки, достигает максимального значения и начинает уменьшаться при образовании интенсивных завихрений над крылом самолета. Жуковский (1906 г.) показал, что обтекание крыла



можно представить как суперпозицию безвихревого движения жидкости и циркуляционного движения вокруг крыла.
Величина подъемной силы определяется разностью давлений снизу и сверху крыла самолета, которая в свою очередь определяется скоростью потока над и под крылом. Выражение для подъемной силы имеет вид

$$F_{\perp} = \int dF = \rho v L \int_0^b (v_в - v_н) dl = \rho v L \Gamma$$

Это ***формула Жуковского***. Величина Г называется циркуляцией и зависит от формы крыла и угла атаки.



Эффект Магнуса состоит в возникновении подъемной силы при обтекании воздухом вращающегося цилиндра. Качественно возникновение этой силы иллюстрируется на рисунке.
Силы вязкости с разных сторон цилиндра играют разную роль – сверху силы вязкости не тормозят движение воздуха в пограничном слое (и даже способствуют этому движению). Внизу наоборот воздух в пограничном слое тормозится силами вязкости. В результате смещается вниз точка лобового сопротивления, наверху сгущаются линии тока, возникает подъемная сила.