

## Содержание

<b>4 Основные положения теории относительности.</b>	<b>1</b>
4.1 Пространство и время в теории относительности. . . . .	1
4.1.1 Развитие взглядов на скорость света . . . . .	1
4.1.2 Основные положения специальной теории относительности . . . . .	3
4.2 Преобразования Лоренца. . . . .	4
4.3 Следствия преобразований Лоренца. . . . .	6
4.3.1 Относительность одновременности. . . . .	6
4.3.2 Замедление темпа хода движущихся часов. . . . .	6
4.3.3 Изменение длин движущихся отрезков. . . . .	7
4.4 Интервал. . . . .	7
4.5 Сложение скоростей. . . . .	8
4.6 Уравнение движения. . . . .	9
4.7 Импульс и энергия в теории относительности. . . . .	9

## 4 Основные положения теории относительности.

### 4.1 Пространство и время в теории относительности.

#### 4.1.1 Развитие взглядов на скорость света

Галилей считал скорость света конечной, но не смог предложить пригодных методов для ее измерения.

Декарт (1596-1650)-свет это давление, передаваемое через среду с бесконечной скоростью. Мысль о необходимости среды.

Гримальди (1618-1660), Гук (1625-1695), Гюйгенс (1629-1695) –волновая точка зрения на свет

Ньютон (1643-1727)- свет – поток корпускул.

#### **Определение скорости света Рёмером и Брэдли**

Опыт Рёмера (1676г.) основан на исследовании затмений спутников Юпитера. Он получил значение скорости света  $c=214300$  км/с.

Брэдли в 1727 г. подтвердил результаты Рёмера, рассматривая абerrацию света.

**Итак**

скорость света конечна.

если свет волны в эфире, то существует абсолютная скорость, а скорость света относительно различных движущихся тел должна зависеть от их скорости.

Если свет корпускулы, то их скорость относительно источника – постоянна.

### ***Инвариантность скорости света***

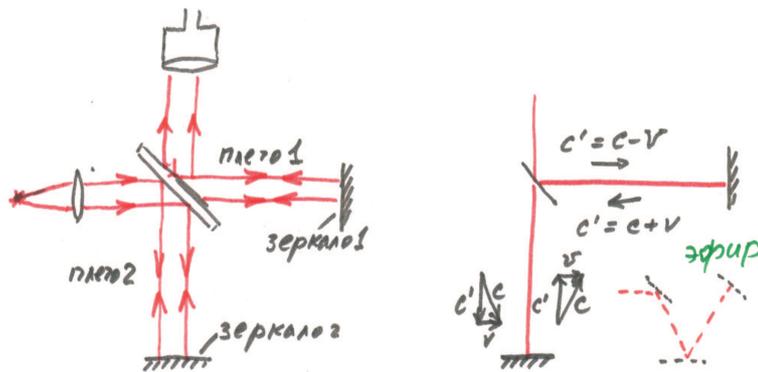
Если представления классической механики Ньютона справедливы, то скорость света в различных движущихся системах отсчета должна быть разной.

Однако экспериментальные исследования не подтверждают это соотношение и свидетельствуют о постоянстве скорости света во всех инерциальных системах отсчета, то есть  $c=inv$ .

### **Опыт Майкельсона и Морли**

Идея опыта – сравнение прохождения светом двух путей, из которых один совпадает с направлением движения тела в эфире, а другой ему перпендикулярен.

Первый надежный эксперимент, подтверждающий этот факт, выполнили Майкельсон и Морли в 1887 г. (опубликовали).



Время прохождения света в 1-м плече:

$$t_1 = \frac{D}{c - V} + \frac{D}{c + V} = D \frac{2c}{c^2 - V^2}$$

Время, за которое свет пройдет второе плечо:

$$t_2 = \frac{2D}{\sqrt{c^2 - V^2}}$$

Расстояние, которое прошел свет за это время  $d_1 = t_1 c = 2D \frac{c^2}{c^2 - V^2} \approx 2D \left( 1 + \frac{V^2}{c^2} \right)$ ,

$$d_2 = t_2 c = 2D \frac{c}{\sqrt{c^2 - V^2}} \approx 2D \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \right).$$

$d_1 - d_2 = D \frac{V^2}{c^2}$ . – разность хода двух лучей.

Это должно приводить к смещению интерференционных полос.

В опыте интерферометр вращался – это должно было приводить к периодическому смещению полос интерференции. Никакого смещения полос обнаружено не было. Этот опыт неоднократно повторялся. В настоящее время можно считать, что скорость эфирного ветра во всяком случае меньше 10 м/с.

Впоследствии ряд прямых и косвенных экспериментов подтвердило постулат о постоянстве скорости света. Измеренное современными методами значение скорости света равно  $c = 299792458$  м/с.

#### 4.1.2 Основные положения специальной теории относительности

А.Эйнштейн, проанализировав неудачу опытов обнаружить относительное движение относительно мирового эфира, создал новое представление о пространстве и времени - специальную теорию относительности.

В основе СТО лежат два постулата

1. Все инерциальные системы равноправны (принцип относительности)
2. Скорость света в пустоте не зависит от движения источника.

Первый постулат означает, что физические явления протекают одинаковым образом во всех инерциальных системах отсчета: все законы природы и уравнения, их описывающие, инвариантны (ковариантны), то есть не меняются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Второй постулат утверждает, что скорость света в вакууме не зависит от движения источника света и одинакова во всех направлениях. Т.е. скорость света одинакова во всех инерциальных системах отсчета.

## 4.2 Преобразования Лоренца.

Найдем преобразования координат и времени исходя из условия, что волновой фронт от точечного источника света во всех инерциальных системах имеет сферическую форму, распространяется с одной и той же скоростью  $c$ .

Рассмотрим две системы  $K$  и  $K'$  для которых начала координат при  $t=0$  совпадали, пусть в момент времени  $t=0$  в начале системы координат происходит вспышка света, тогда в обеих системах координат фронт должен представлять собой сферу, причем:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (1)$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (2)$$

Закон преобразования  $x' = \Phi(x, y, z, t)$  – должен быть линейным, иначе равномерность распространения сферического фронта будет нарушаться.

Итак

$$x' = A_1 x + A_2 y + A_3 z + A_4 t + A_5.$$

Исходя из принципа относительности следует, что  $y=y'$ ,  $z=z'$ .

Действительно, пусть вдоль оси  $y$  расположены два одинаковых стержня. Тогда, если при сближении один стержень будет больше другого, то одна из систем координат будет выделена. Это противоречит принципу относительности.

Поэтому

$$x' = A_1 x + A_4 t,$$

$$t' = at + bx.$$

При  $x' = 0$ ,  $x = Vt$ ,

$$Vt + \frac{A_4}{A_1} t = 0, \Rightarrow \frac{A_4}{A_1} = -V. \quad (3)$$

Таким образом

$$\begin{aligned} x' &= \gamma (x - Vt) \\ t' &= at + bx \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (4)$$

подставляя полученные выражения в (2) получаем

$$y^2 + z^2 + \gamma^2 (x - Vt)^2 - c^2 (at + bx)^2 = 0$$

$$y^2 + z^2 + \gamma^2 (x^2 - 2xVt + (Vt)^2) - c^2 (a^2t^2 + 2abtx + b^2x^2) = 0$$

$$\begin{aligned} (\gamma^2 - c^2b^2)x^2 + y^2 + z^2 - c^2 \left( a^2 - \gamma^2 \frac{V^2}{c^2} \right) t^2 - \\ - (2\gamma^2V + c^22ab)tx = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

отсюда и из (1) следует

$$\begin{cases} \gamma^2 - c^2b^2 = 1, \\ a^2 - \gamma^2 \frac{V^2}{c^2} = 1, \\ c^22ab + 2\gamma^2V = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Решая полученную систему уравнений, получаем

$$\begin{aligned} b &= -\frac{\gamma^2 V}{c^2}, \\ a^2 &= \gamma^2, \\ \gamma^2 &= \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Окончательно преобразования координат (преобразования Лоренца) запишутся в виде

$$\begin{aligned} x' &= \gamma (x - Vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma \left( t - \frac{V}{c^2}x \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ .

Легко показать, что обратные преобразования Лоренца имеют вид

$$\begin{aligned}
x &= \gamma (x' + Vt'), \\
y &= y', \\
z &= z', \\
t &= \gamma \left( t' + \frac{V}{c^2} x' \right).
\end{aligned} \tag{9}$$

### 4.3 Следствия преобразований Лоренца.

#### 4.3.1 Относительность одновременности.

Пусть в системе К происходит два события:  $A_1(x_1, t_1)$  и  $A_2(x_2, t_2)$ , тогда

$$t'_2 - t'_1 = \gamma \left( t_2 - t_1 - (x_2 - x_1) \frac{V}{c^2} \right). \tag{10}$$

Если, например, в К события происходят одновременно ( $t_2 - t_1 = 0$ ), то в К' события не одновременны. Кроме того, порядок следования событий также может измениться: так если  $t_2 - t_1 = \varepsilon > 0$ , то при  $(x_2 - x_1) \frac{V}{c} > \varepsilon$  порядок следования событий изменится ( $t'_2 - t'_1 < 0$ ).

#### 4.3.2 Замедление темпа хода движущихся часов.

Пусть часы покоятся в системе К'. Воспользуемся обратным преобразованием Лоренца. Длительность временного интервала будем измерять в одной точке пространства ( $x'_1 = x'_2$ )

$$t_2 - t_1 = \gamma \left( t'_2 + x'_2 \frac{V}{c^2} \right) - \left( t'_1 + x'_1 \frac{V}{c} \right) = \gamma (t'_2 - t'_1) \tag{11}$$

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \tag{12}$$

где  $\Delta t_0 = t'_2 - t'_1$ - собственное время.

Часы в лабораторной системе отсчета покажут больший интервал времени, чем в движущейся (в которой часы покоятся).

### 4.3.3 Изменение длин движущихся отрезков.

Пусть  $l_0 = x'_2 - x'_1$  длина отрезка, покоящегося в  $K'$ -системе.

Используя преобразования Лоренца, получаем

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - Vt_2) - \gamma(x_1 - Vt_1) \quad (13)$$

В  $K$ - системе длина  $l$  определяются как разность  $x_2 - x_1$  измеренных в один и тот же момент времени  $t_2 = t_1$ , поэтому

$$l_0 = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma l \quad (14)$$

$$l = \frac{l_0}{\gamma} = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

Лоренцево сокращение. Стержень имеет максимальную длину в той системе отсчета, в которой он покоится.

## 4.4 Интервал.

Согласно СТО ни пространственные отрезки, ни промежутки времени в общем случае не являются инвариантами преобразований при переходе от одной инерциальной СО к другой.

Инвариантом в СТО является скорость распространения света  $c$ .

Другим инвариантом является интервал

$$-c^2 t_{12}^2 + l_{12}^2 = S_{12}^2 = inv \quad (15)$$

Это утверждение можно проверить непосредственно с помощью преобразований Лоренца. Этот инвариант называют инвариантом пространственно-временного интервала.

Интервал пространственноподобный, если  $-c^2 t_{12}^2 + l_{12}^2 > 0$ ,  
временноподобный, если  $c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 > 0$ ,  
светоподобный:  $c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = 0$ .

В случае пространственноподобного интервала ни в одной системе отсчета события не могут оказать влияние друг на друга. События, разделенными светоподобными и временноподобными интервалами могут оказывать влияние друг на друга.

Наличие инвариантного интервала позволяет нам рассматривать события как события, происходящие в 4-х мерном пространстве-времени, где в качестве 4-й координаты используется время.

Такое пространство является псевдоэвклидовым, если ввести комплексное время  $ict$ . Тогда

$$S^2 = l^2 - c^2 t^2 = l^2 + (ict)^2 = x_0^2 x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad (16)$$

Возможность существования неевклидовой геометрии была впервые показана выдающимся русским математиком Н.И.Лобачевским. Он построил геометрию без 5-й аксиомы Эвклида (о параллельных прямых). В рамках этой геометрии через точку, не лежащую на прямой может проходить сколько угодно различных параллельных прямых.

#### 4.5 Сложение скоростей.

Для вывода преобразований скоростей воспользуемся определением скорости.

$$v'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}; v'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'}; v'_z = \frac{\Delta z'}{\Delta t'} \quad (17)$$

$$v'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{x'_2 - x'_1}{t'_2 - t'_1} = \frac{\gamma(\Delta x - V\Delta t)}{\gamma\left(\Delta t - \Delta x \frac{V}{c^2}\right)} = \frac{\dot{x} - V}{1 - \dot{x} \frac{V}{c^2}} \quad (18)$$

$$v'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{y'_2 - y'_1}{t'_2 - t'_1} = \frac{(\Delta y)}{\gamma\left(\Delta t - \Delta x \frac{V}{c^2}\right)} = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - v_x \frac{V}{c^2}\right)} \quad (19)$$

Таким образом, преобразования скоростей имеют вид **прямое преобразование скоростей:**

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x \frac{V}{c^2}} \quad (20)$$

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - v_x \frac{V}{c^2}\right)} \quad (21)$$

**обратное преобразование скоростей,**

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x \frac{V}{c^2}} \quad (22)$$

$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma \left(1 + v'_x \frac{V}{c^2}\right)} - \quad (23)$$

-

#### 4.6 Уравнение движения.

С открытием электрона с массой  $m_e \approx \frac{1}{2000} m_p$ , стало возможным проводить эксперименты по изучению частиц со скоростями близкими к скорости света. Опытным путем было установлено, что уравнение движения заряженной частицы под действием силы Лоренца  $\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v} \times \vec{B}]$  имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \vec{v} \right) = \vec{F} \quad (24)$$

$$\vec{p} = \left( \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \vec{v} \right) - \quad (25)$$

релятивистский импульс.

#### 4.7 Импульс и энергия в теории относительности.

Найдем работу силы

$$\begin{aligned} \int_1^2 (\vec{F} d\vec{S}) &= \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F} \vec{v}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{d\vec{p}}{dt} \vec{v} \right) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{d\vec{p}}{dt} \vec{v} \right) dt = \int_{p_1}^{p_2} \vec{v} d\vec{p} = \vec{v} \vec{p} \Big|_{p_1}^{p_2} - \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} \vec{p} d\vec{v} \quad ; \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
\int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} \vec{p} d\vec{v} &= \int_{v_1}^{v_2} \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{v} dv = \frac{1}{2} \int_{v_1}^{v_2} \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} d(v^2) = \\
&= (-1) \frac{mc^2}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \xi^{-1/2} d\xi = -\frac{mc^2}{2} \left. \xi^{1/2} \right|_{v_1}^{v_2} = -mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \Big|_{v_1}^{v_2}
\end{aligned} \tag{27}$$

Поскольку работа равна разности кинетических энергий

$$\begin{aligned}
A_{12} &= \int_1^2 (\vec{F} d\vec{S}) = \left[ \vec{v}\vec{p} + mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \right] \Big|_{v_1}^{v_2} = \\
&= \left[ \frac{mv^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \right] \Big|_{v_1}^{v_2} = \frac{mc^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \Big|_{v_1}^{v_2} = K_2 - K_1
\end{aligned} \tag{28}$$

то введенная таким образом кинетическая энергия определена с точностью до константы.

$$K = \frac{mc^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + K_0 \tag{29}$$

Сделаем переход к нерелятивистским скоростям

$$\begin{aligned}
K &= \frac{m_c^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = m_c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots\right) + K_0 \approx \\
&\approx m_c^2 + \frac{mv^2}{2} + K_0
\end{aligned} \tag{30}$$

В этой формуле удобно выбрать нормировку

$$K_0 = -mc^2 \tag{31}$$

Тогда для релятивистского выражения получаем

$$K = \frac{m_c^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + K_0 = mc^2 \left( \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} - 1 \right) \tag{32}$$

Если взять за абсолютное значение энергии частицы величину

$$E = \frac{mc^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}, \tag{33}$$

то  $E_0 = mc^2$ - энергия покоя частицы.

Отметим связь между кинетической энергией частицы и ее импульсом

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}. \quad (34)$$

**о понятии массы в релятивистской теории.**

Выражение (34) может служить определением понятия массы в релятивистской теории.

Действительно, определение массы как меры инертности, принятое в классической механике не может быть использовано в релятивистской теории, так как сила и ускорение не коллинеарны. Это утверждение следует из релятивистского уравнения движения. Действительно,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{v} \right) = \left( \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \cdot \vec{a} + \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \vec{F}.$$

То есть, если направления силы и скорости не совпадают, то не совпадают и направления силы и ускорения.

В релятивистской теории принято массой называть величину

$$m^2 = \frac{E^2}{c^4} - \frac{p^2}{c^2}$$

Эта определенная таким образом масса является инвариантной величиной то есть одинакова во всех инерциальных системах отсчета.

В частности, если тело покоится, то

$$E_0 = mc^2$$

и масса равна энергии покоя с точностью до постоянного множителя.

В этом случае импульс определяется как

$$\vec{p} = \frac{E_0}{c^2} \vec{v}.$$

В релятивистской теории аддитивны энергия и импульс

$$E = E_1 + E_2,$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2.$$

Масса не аддитивна, то есть масса системы тел не равна суммарной массе тел системы. Действительно,

$$m^2 = \frac{(E_1 + E_2)^2}{c^4} - \frac{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2}{c^2} \neq (m_1 + m_2)^2.$$

Масса становится аддитивной величиной лишь в нерелятивистском пределе.

**Пример 1.**

Пусть в системе действуют потенциальные силы, тогда механическая энергия частиц равна

$$W_i = K_i + U_i = E_i - E_{0i}$$

Для того, чтобы движение частиц происходило в ограниченной области необходимо, чтобы  $W_i < 0$ .

В системе центра масс составной частицы суммарный импульс равен нулю, то есть частица обладает лишь энергией покоя, а ее массу найдем из соотношения

$$E_0 = mc^2$$

Для энергии составной частицы выполняется соотношение

$$E_0 = \sum_{i=1}^N (E_{0i} + W_i) = \sum_{i=1}^N (m_i c^2 + W_i)$$

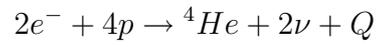
таким образом, для массы составной частицы

$$m = \sum_{i=1}^N m_i - \Delta m$$

где  $\Delta m$  – дефект массы

**Пример 2.**

На Солнце ( $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$  кг) происходит цепочка реакций синтеза. В результате полного цикла:



Полная энергия, излучаемая Солнцем в единицу времени

$$\Phi_{\text{C}} = 3.826 \cdot 10^{26} \text{Вт}$$

дефект массы за одну секунду

$$\Delta m = \frac{\Phi_{\text{C}}}{c^2} = \frac{3.826 \cdot 10^{26}}{9 \cdot 10^{16}} \approx 4.3 \cdot 10^9 \text{кг}$$