Содержание

Введение

Предмет механики

Механика – наука о движении и равновесии тел. Механическое движение – изменение взаимного расположения тел или их частей в пространстве.

Механика – основа физической науки, так как основные положения механики были сформулированы раньше других разделов физики. Поэтому многие методы механики легли в основу других разделов науки.

Пространство и время в механике Ньютона.

Пространство - однородно (во всех своих частях) и изотропно (его свойства не зависят от направления). Физическое пространство такое же, каким его представляет геометрия Евклида (евклидово пространство).

Время – абсолютно (не зависит от тел) и едино – течет одинаково во всех точках пространства.

Система отсчета

Система отсчета – тело отсчета, связанная с ним система координат и часы.

Тело отсчета – тело, относительно которого рассматривается движение других тел.

Система координат – совокупность трех некомпланарных осей, пересекающихся в одной точке с указанием масштаба на них, например декартова система координат.

Часы – прибор для измерения времени, принцип действия которого основан на сравнении длительности исследуемого временного интервала с длительностью выбранного за эталон периодического процесса.

Эталоны длины и времени

метр – длина пути, проходимого в вакууме светом за 1/299792458 секунды (1983 г.)

секунда- промежуток времени, в течение которого совершается 9192631770 колебаний электромагнитного излучения, соответствующего переходу между двумя определенными сверхтонкими уровнями основногосостоянияатома цезия 133 в отсутствие внешних полей.

Синхронизация часов

Время должно быть единым во всем пространстве. Синхронизация часов путем задания одинаковых показаний в одной точке пространства, а затем переноса их в другие не подходит, так как зависит от способа переноса (см. гл.4 – Основные положения теории относительности). Необходима синхронизация с помощью сигналов. Для этого необходимо ввести понятие одновременности (события, одновременные в одной системе отсчета могут быть неодновременными в другой). Эйнштейн предложил: пусть $t_B = t_A + \tau_{AB}$ ($t_A - -$время, которое показывают часы, находящиеся в точке A,$t_B -$ -время, которое должны показывать часы , находящиеся в точке B, если они синхронизованы, τ_{AB}- время распространения светового сигнала от точки A до точки B). По определению $\tau_{BA} = \tau_{AB}$. Величину $\tau = \tau_{AB} + \tau_{BA}$ можно измерить. Следовательно $t_B = t_A + \frac{\tau}{2}$. Синхронизация по Эйнштейну не требует измерения скорости света.

Другой способ синхронизации (также основанный на предположении $\tau_{BA} = \tau_{AB}$) состоит в следующем. Пусть точка C – лежит в середине между точками A и B тогда, если световая вспышка в точке C доходит до точек A и B одновременно, то часы в этих точках показывают одинаковое время, то есть синхронизованы.

1 Кинематика и динамика простейших систем

1.1 Кинематика материальной точки и простейших систем

Кинематика – раздел механики, в котором изучают движения тел и не интересуются причинами, вызывающими эти движения.

1.1.1 Основные определения

Материальная точка – понятие, вводимое для обозначения тела, размеры которого несущественны в условиях данной задачи.

В этом случае для описания движения тела используется абстрактная модель – тело, масса которого сосредоточена в одной геометрической точке.

Радиус-вектор – вектор, начало которого лежит в начале системы координат, а конец – в той точке, где в данный момент находится материальная точка.

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} = \{x, y, z\},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ - орты системы отсчета S - $\left|\vec{i}\right| = 1$, $\left|\vec{j}\right| = 1$, $\left|\vec{k}\right| = 1$; x, y, z – координаты материальной точки в системе отсчета S.

Закон движения– зависимость радиус-вектора от времени или в проекциях на оси координат - координат материальной точки (или системы материальных точек) от времени.

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k} = \{x(t), y(t), z(t)\}$$

Траектория – кривая, по которой движется материальная точка.

Путь – длина траектории от начальной до конечной точки движения.

Перемещение материальной точки $\Delta\vec{r}(t)$ – вектор, начало которого находится в начальной, а конец – в конечной точке движения.

$$\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) =$$
$$\{x(t+\Delta t) - x(t), y(t+\Delta t) - y(t), z(t+\Delta t) - z(t)\}$$

1.1.2 Скорость, угловая скорость, ускорение, угловое ускорение

Скорость

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}\frac{dx}{dt} + \vec{j}\frac{dy}{dt} + \vec{k}\frac{dz}{dt}.$$

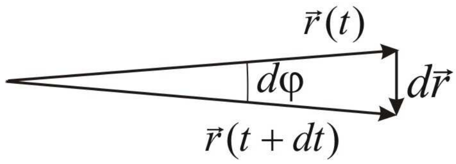
Ускорение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i}\frac{dv_x}{dt} + \vec{j}\frac{dv_y}{dt} + \vec{k}\frac{dv_z}{dt}.$$

Угловая скорость

Введем вектор элементарного углового перемещения по формуле

$$d\vec{\varphi} = \frac{[\vec{r}(t) \times \vec{r}(t+dt)]}{|\vec{r}(t)|^2},$$



где dt - малый промежуток времени, для которого угол $d\varphi$ между векторами $\vec{r}(t+dt)$ и $\vec{r}(t)$ много меньше единицы. Тогда

$$|d\vec{\varphi}| = \frac{|\vec{r}(t)| \cdot |\vec{r}(t+dt)| \cdot \sin d\varphi}{|\vec{r}(t)|^2} = d\varphi.$$

Заметим, что $d\vec{\varphi}$- псевдовектор или аксиальный вектор (его направление зависит от выбора правой или левой тройки векторов в системе координат). В физике всегда выбирается правая тройка векторов.

Определим угловую скорость как вектор

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Угловое ускорение

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Найдем связь между **скоростью** и **угловой скоростью**. Для этого представим радиус-вектор в виде:

$$\vec{r}(t+dt) = \vec{r}(t) + d\vec{r},$$

тогда

$$d\vec{\varphi} = \frac{[\vec{r}(t) \times \vec{r}(t+dt)]}{|\vec{r}(t)|^2} = \frac{[\vec{r}(t) \times d\vec{r}]}{|\vec{r}(t)|^2}.$$

Умножая это равенство векторно на радиус-вектор, получим

$$[d\vec{\varphi} \times r(t)] = -\frac{[\vec{r}(t) \times [\vec{r}(t) \times d\vec{r}]]}{|\vec{r}(t)|^2} =$$
$$= -\frac{\vec{r}(t) \cdot (\vec{r}(t) \cdot d\vec{r}) - d\vec{r}(t) \cdot (\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t))}{|\vec{r}(t)|^2}$$

Здесь использовано соотношение $\left[\vec{a} \times \left[\vec{b} \times \vec{c}\right]\right] = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$.

Представляя вектор перемещения в виде:

$$d\vec{r} = d\vec{r}_{||} + d\vec{r}_{\perp}$$

Получаем

$$d\vec{r}_{\perp} = [d\vec{\varphi} \times r(t)],$$

отсюда следует **связь между скоростью и угловой скоростью**

$$\vec{v}_{\perp} = [\vec{\omega} \times \vec{r}(t)].$$

Пример.Рассмотрим движение материальной точки по окружности постоянного радиуса. Найдем связь между **ускорением**, **угловым ускорением** и **угловой скоростью**. Воспользуемся тем, что при движении по окружности $\vec{v}_\perp = \vec{v}$, тогда продифференцировав по времени выражение для скорости получим следующее соотношение

$$\vec{a} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right] = \left[\vec{\beta} \times \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}\left[\vec{\omega} \times \vec{r}\right]\right] \quad ,$$

где

$$\left[\vec{\beta} \times \vec{r}\right] = \vec{a}_\tau$$

–тангенциальное ускорение, направлено по касательной к траектории.

$$\left[\vec{\omega}\left[\vec{\omega} \times \vec{r}\right]\right] = \vec{a}_n$$

-нормальное ускорение, направлено вдоль радиус вектора в сторону оси вращения.

1.1.3 Способы описания движения

Векторный способ

В этом способе положение интересующей нас материальной точки задают радиусом вектором.

При движении материальной точки ее радиус-вектор меняется как по величине, так и по направлению.

Пример.

Пусть радиус –вектор точки зависит от времени следующим образом

$$\vec{r} = \vec{A}t + \vec{B}t^2,$$

где $\vec{A}$ и $\vec{B}$- постоянные векторы.

Тогда скорость

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{A} + 2\vec{B}t,$$

ускорение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{B} = \overrightarrow{const}$$

то есть приведенный пример относится к случаю движения с постоянным ускорением.

Координатный способ

В этом способе положение точки, ее скорость и ускорение описывается зависимостями координат от времени (законом движения).

Пример.

$$x = A\cos\omega t$$

$$y = A\sin\omega t$$

$$\vec{v} = \vec{i}\frac{dx}{dt} + \vec{j}\frac{dy}{dt} = -A\omega\sin\omega t\cdot\vec{i} + A\omega\cos\omega t\vec{j}$$

$$\vec{a} = \vec{i}\frac{d^2x}{dt^2} + \vec{j}\frac{d^2y}{dt^2} = -A\omega^2\cos\omega t\cdot\vec{i} - A\omega^2\sin\omega t\cdot\vec{j}$$

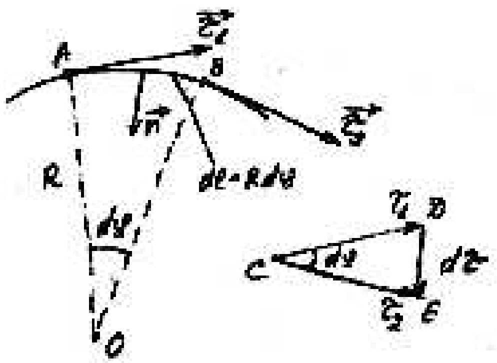
Естественный способ

Естественный способ применяют тогда, когда траектория точки известна заранее. Положение точки определяют траекторной координатой, при этом произвольно устанавливают направление отсчета.

Введем единичный вектор$\vec{\tau}$

$$\vec{v} = v_\tau\cdot\vec{\tau}$$

ускорение точки $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{dv_\tau}{dt}\cdot\vec{\tau} + v_\tau\dfrac{d\vec{\tau}}{dt}$



$$v_\tau\frac{d\vec{\tau}}{dt} = v_\tau\frac{d\vec{\tau}}{dl}\frac{dl}{dt} = v_\tau^2\frac{d\vec{\tau}}{dl} = v^2\frac{d\vec{\tau}}{dl}$$

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{dl}\right| = \frac{1}{R}$$

так как при

$$dl \to 0, d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dl} = \frac{1}{R}\vec{n}$$

действительно

$$\frac{d\tau}{dl} = \frac{\tau \cdot d\varphi}{R \cdot d\varphi} = \frac{1}{R}$$

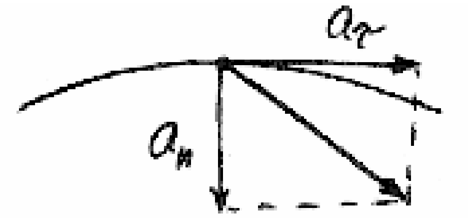
$$\vec{a} = \frac{dv_\tau}{dt} \cdot \vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

$a_\tau = \dfrac{dv_\tau}{dt}$ – изменение скорости по величине

$a_n = \dfrac{v^2}{R}$– изменение скорости по направлению

Пример.

Точка движется по дуге радиуса R. Ее скорость зависит от дуговой координаты l по закону $v = k\sqrt{l}$. Найти угол между векторами полного ускорения и скорости точки как функцию координаты l



$tg\alpha = \dfrac{a_n}{a_\tau} a_n = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{k^2 l}{R} a_\tau = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dl}\dfrac{dl}{dt} = v\dfrac{dv}{dl} = \dfrac{k}{2\sqrt{l}} k\sqrt{l} = \dfrac{k^2}{2} tg\alpha = \dfrac{a_n}{a_\tau} = \dfrac{2l}{R}$

1.1.4 Уравнения кинематической связи

Во многих случаях на движение тел в пространстве могут быть наложены различные ограничения. Например, тело скользит по наклонной плоскости, связано нитью, перекинутой через блоки с другими телами, и др.

Уравнение кинематической связи – уравнение, связывающее кинематические характеристики тел системы.

Обычно используются два способа нахождения уравнений кинематической связи, которые надо уметь комбинировать.

Способ 1. ***Принцип независимых перемещений***. Перемещение какого-либо тела в системе связанных тел складывается из так называемых "независимых" перемещений, каждое из которых обусловлено (вызвано) перемещением соответствующего другого тела системы при покоящихся остальных телах

$$\Delta\vec{r}_i = \sum_{k \neq i} \Delta\vec{r}_i^{\,(k)}$$

Способ 2. ***Использование постоянства кинематических характеристик связей.*** Записать величины постоянных кинематических характеристик элементов связей (нитей, штанг, блоков, столов, стен и т.д.) через координаты тел системы, используя свойства этих элементов (нерастяжимость, неподвижность, недеформируемость), и продифференцировать эти величины по времени.

1.1.5 Связь между скоростями и ускорениями точки в различных системах отсчета

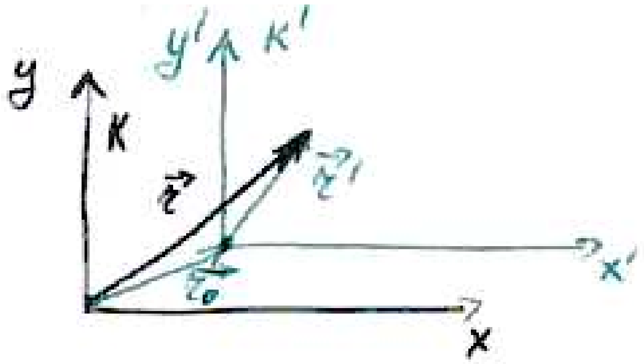
1) система K$'$ движется поступательно по отношению к системеK,тогда

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$

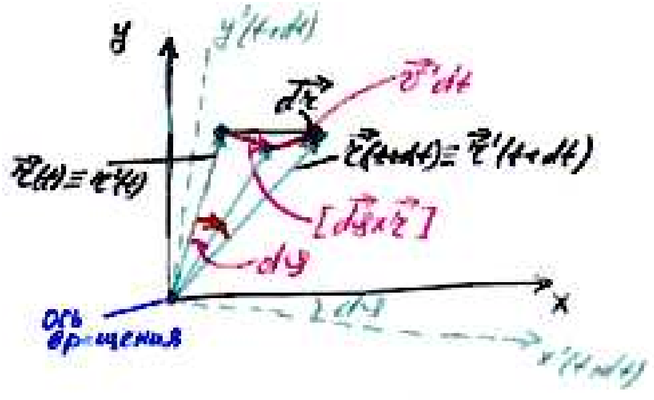
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'$$

2) система K' вращается с постоянной скоростью вокруг неподвижной в K системе оси .



y
K
y'
K'
$\vec{r}$
$\vec{r}'$
$\vec{r}_0$
x'
x



y
y'(t+dt)
$d\vec{r}$
$\vec{v}'dt$
$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t)$
$\vec{r}(t+dt) = \vec{r}'(t+dt)$
$[d\vec{\varphi} \times \vec{r}]$
$d\varphi$
x
Ось вращения
x'(t+dt)

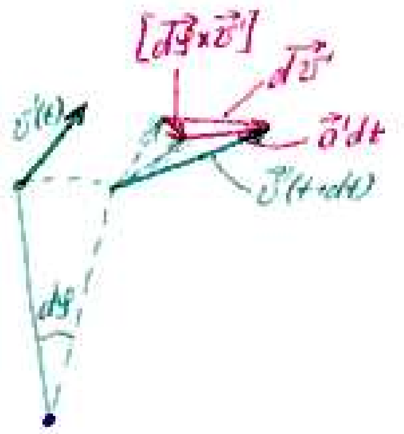
Возьмем начала отсчета для систем координат в K и K' системах в одной точке, лежащей на оси вращения. Будем считать, что ось вращения совпадает с осью z. Тогда $\vec{r} = \vec{r}'$

$$d\vec{r} = \vec{v'}dt + [d\vec{\varphi} \times \vec{r}]$$

v'- относительная скорость
отсюда

$$\vec{v} = \vec{v}' + [\vec{\omega} \times \vec{r}]$$

Далее



$d\vec{v} = d\vec{v}' + [\vec{\omega} \times d\vec{r}]$
для приращения относительной скорости получаем

$$d\vec{v}' = \vec{a}'dt + [d\vec{\varphi} \times \vec{v}']$$

$$\begin{aligned} &d\vec{v} = \vec{a}'dt + [d\vec{\varphi} \times \vec{v}'] + [\vec{\omega} \times d\vec{r}] = \\ &\vec{a}'dt + [d\vec{\varphi} \times v'] + [\vec{\omega} \times (v'dt + [d\vec{\varphi} \times \vec{r}])] \end{aligned}$$

разделив полученное соотношение на dt получим

$$\begin{aligned} &\vec{a} = \vec{a}' + \left[\frac{d\varphi}{dt} \times v'\right] + \left[\vec{\omega} \times \left(v' + \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r}\right]\right)\right] = \\ &= \vec{a}' + 2\left[\vec{\omega} \times \vec{v}'\right] + \left[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]\right] \end{aligned}$$

3) К'система вращается вокруг оси, движущейся поступательно со скоростью v_0 относительно К-системы.

Для удобства введем S систему, движущуюся поступательно со скоростью оси v_0,

Тогда $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_S = \vec{v}_0 + \vec{v}' + [\vec{\omega} \times \vec{r}_S]$, аналогично предыдущему случаю получаем для ускорения

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + 2\,[\vec{\omega} \times \vec{v}'] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}_S]]$$

1.2 Законы Ньютона

1.2.1 Инерциальные системы отсчета. Преобразования Галилея. 1-й закон Ньютона

Инерциальными системами отсчета называются системы отсчета, в которых причиной ускорения тела является взаимодействие его с внешними телами.

1-й Закон Ньютона гласит: "Существуют инерциальные системы отсчета, в которых тело остается в состоянии покоя или продолжает двигаться равномерно и прямолинейно, если на него не действуют другие тела".

Реальные системы отсчета, связанные с каким-либо телом отсчета, можно рассматривать только приближенно инерциальными. Считается, что инерциальной является гелиоцентрическая система отсчета (Солнценачало системы координат, оси которой направлены на три удаленных неподвижных звезды). Другой пример – система отсчета, в которой реликтовое излучение изотропно (относительно этой системы отсчета Солнце движется со скоростью ~400 км/с).

Любая система отсчета, движущаяся с постоянной скоростью относительно инерциальной также является инерциальной. Это утверждение легко доказать, используя соотношения, связывающие ускорения точки в различных системах отсчета (см.п.1.1.5, случай 1).

Преобразования Галилея связывают между собой координаты материальной точки в различных инерциальных системах отсчета.

Для двух произвольных инерциальных систем отсчета K и K‘ можно записать (см. п.1.1.5,случай 1)

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_{o‘} + \vec{r}‘,$$

Поскольку выбор направления осей систем координат K и K' может быть произвольным, положим $\vec{r}_0 = u_x \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$. Тогда можно записать

$$\begin{cases} x = x` + u_x t \\ y = y` \\ z = z` \\ t = t' \end{cases}$$

Эти соотношения называются преобразованиями Галилея.

Инварианты преобразований Галилея – длина, временной интервал, ускорение.

Принцип относительности Галилея. Все механические явления в различных ИСО подчиняются одним и тем же физическим законам.

1.2.2 Понятия массы, импульса и силы в механике Ньютона

Сила. Сила – мера взаимодействия тел. Сила – векторная физическая величина. Силы складываются как вектора. Силы равны и противоположно направлены, если при одновременном действии на тело, тело продолжает оставаться в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения. Для измерения силы нужно выбрать эталон силы.

Масса. Масса- количество материи (вещества). Поскольку материя характеризуется инертностью и гравитационным притяжением, то как физическую величину ее можно ввести, например, как меру инертности. Масса- скалярная физическая величина.

Масса системы тел равна массе тел системы.

Массы тел равны, если под действием одинаковых сил тела приобретают одинаковые ускорения.

Для измерения массы нужно выбрать эталон.

Импульс материальной точки - векторная физическая величина

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

1.2.3 2-й Закон Ньютона. Уравнение движения. Начальные условия

Второй закон Ньютона является экспериментальным фактом. В общем случае его можно записать следующим образом

$$\vec{F} = k`m\vec{a}$$

В системе СИ не выбирают эталон силы. Выбирается k'=1, величину силы находят из второго закона Ньютона и выражают в ньютонах. В результате, в системе СИ второй закон Ньютона записывается в виде.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

1.2.4 3-й Закон Ньютона

В инерциальных системах действие одних тел на другие всегда носит характер взаимодействия. В третьем законе Ньютона отражаются особенности такого взаимодействия. Выделим утверждения, содержащиеся в этом законе.

1) Силы возникают парами и приложены к разным телам.
2) Силы действуют вдоль одной прямой;
3) Силы равны;
4) Силы противоположно направлены;
5) Силы имеют одинаковую природу.

Замечание. В электродинамике наблюдается нарушение третьего закона Ньютона (формулы для взаимодействия токов). На самом деле в этом случае необходимо учитывать влияние третьего тела - электромагнитного поля, которое само может иметь импульс и отбирать или передавать его частицам.

1.3 Законы, описывающие индивидуальные свойства сил

1.3.1 Закон всемирного тяготения

Все тела притягиваются (тяготеют) друг к другу. Согласно этому закону материальная точка с массой m_1 притягивает материальную точку с массой m_2 силой равной

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{R^3}\vec{R}.$$

Здесь G=6.67 10^{-11} м^3/(кг с^2) - гравитационная постоянная, $\vec{R}$ - радиус-вектор, проведенный из второй точки в первую, m_1,m_2- называют гравитационными массами, которые пропорциональны количеству вещества.

Эксперимент показывает, что гравитационная масса равна массе инерционной (по крайней мере с точностью до 10^{-14}). Вблизи поверхности Земли на все тела действует сила тяжести

$$F_{\text{Т}} = mg,$$

где $g = G\frac{m_З}{R_З^2}$. Значение этой константы зависит от положения точки на поверхности Земли и слабо меняется из-за несферичности Земли и наличия сил инерции, связанных с вращением Земли.

1.3.2 Закон Гука

Закон Гука. Малые деформации, возникающие в теле, пропорциональны усилиям их вызывающим.

В частности для однородной деформации растяжения-сжатия:

$$F = k\Delta l.$$

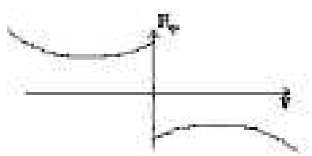
Этот же закон выполняется и при других видах однородных деформаций, например, при кручении, изгибах.

1.3.3 Силы трения

Законы для сил сухого трения

Между твердыми телами возникает сила сухого трения. В том случае, когда тела не проскальзывают друг относительно друга, ***сила трения покоя*** равна силе, приложенной к телу и параллельна плоскости соприкосновения тел. Максимальное значение силы трения покоя равно

$$F_{\text{тр.п.}} = \mu N,$$



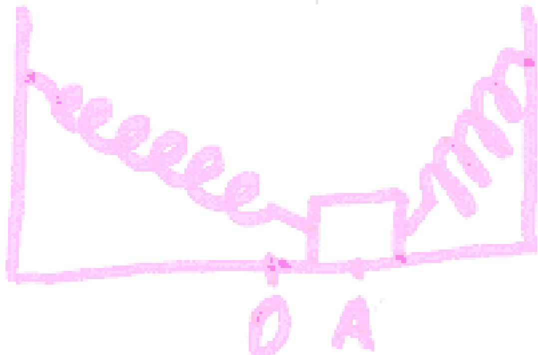
здесь N- сила нормального давления, μ–коэффициент, величина которого зависит от материала, из которого сделаны соприкасающиеся поверхности и степени их обработки. В том случае, когда тела проскальзывают друг относительно друга возникает ***сила трения скольжения***.

Она направлена в сторону противоположную направлению движения и слабо зависит от скорости. Во многих случаях можно считать

$$F_{\text{тр.ск.}} = \mu N.$$

В реальных ситуациях существует слабая зависимость силы трения от скорости, качественный вид которой представлен на графике.

Явление застоя



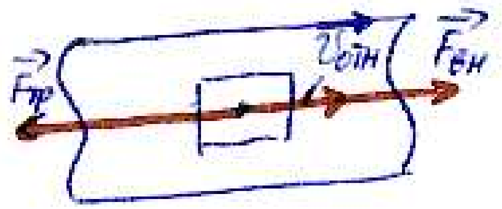
Наличие силы трения покоя приводит к тому, что для приведения тела в движение необходимо воздействовать на него с силой больше максимальной силы трения покоя. На рисунке показан случай, когда на брусок с двух сторон действуют две пружины. При отсутствии силы трения брусок может совершать колебания. При наличии силы трения колебания возможны лишь для достаточно большой амплитуды. При этом это будут затухающие колебания. В конце концов тело остановится в некоторой точке между точками А и Б.

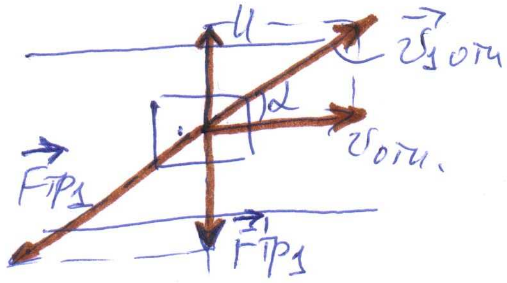
Явление застоя может влиять на точность стрелочных приборов. При наличии сухого трения стрелка не будет точно останавливаться на том делении шкалы, которое соответствует измеряемой величине.

Явление заноса

Рассмотрим тело, удерживающееся с помощью внешней силы в положении покоя на ленте движущегося транспортера.

На тело действуют две силы – сила трения и внешняя сила. При этом сила трения равна$F_{\text{тр}}$=μN. Пусть тело приобрело некоторую скорость u в направлении перпендикулярном движению ленты транспортера. Сила трения по величине для этого случая останется той же самой, но направление ее изменится (см. рисунок).)





Проекция силы трения на ось, поперечную направлению движения транспортера, равна

$$F'_{\text{тр}1} = F_{\text{тр}1} \sin\alpha = \mu N \frac{u}{v_1} = \mu N \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

Вязкое трение возникает при движении тел в жидкостях или газах.

При малых скоростях она пропорциональна скорости$\vec{F}_{\text{тр.}} = -\eta\vec{v}$, при больших скоростях зависимость становится более сложной. В частности, в широком диапазоне скоростей эта зависимость может быть квадратичной $\vec{F}_{\text{тр}} = -k \cdot v^2 \cdot \dfrac{\vec{v}}{v}$

Сила трения качения. Сила трения качения возникает при качении тел. Ее возникновение связано прежде всего с остаточными деформациями соприкасающихся тел. Проще всего природу этой силы пояснить на примере колеса, катящегося по песку. Колесо все время как бы наезжает на горку.