Магнитный векторный потенциал

$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0$ - уравнение Максвелла для дивергенции $\boldsymbol{B}$.

Из векторного анализа: $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) \equiv 0$

-для любой дифференцируемой векторной функции $\boldsymbol{A}$.

Если предположить $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$, то уравнение Максвелла будет автоматически выполняться.

Полезно вспомнить, что аналогично был получен скалярный потенциал φ:

так как в электростатике $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = 0$ и $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi) \equiv 0$, то

$\Rightarrow \boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}(\varphi)$.

Кстати, отсюда видно, что величина $\boldsymbol{A}$ определена с точностью до градиента произвольной функции:

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\,\psi) = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} + \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\psi) = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}.$$

Величина, ротор которой равен индукции магнитного поля, называется магнитным векторным потенциалом. Чем оправдано введение векторного потенциала ?

(1) В квантовой механике он имеет глубокий физический смысл (даже если B=0, но $A \neq 0$ – поле $\exists$, (см. Фейнман, том 6, стр.15; эффект Аронова-Бома).

(2) С его помощью уравнения электростатики и магнитостатики можно записать в красивом «аналогичном» виде.

(3) Иногда с его помощью проще вычислить индукцию магнитного поля.

Пункт (1) мы оставим курсу «Квантовой механики». Пункт (2) попробуем продемонстрировать. Для этого воспользуемся еще одной формулой из векторного анализа: $\nabla^2 \boldsymbol{A} = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\, \boldsymbol{A}) - \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{A})$

Ее можно получить, используя свойства оператора «набла»: $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A}$; $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$ и формулу для двойного векторного произведения (“bac-cab”).

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$$

Операция $\nabla^2\boldsymbol{A}$ («лапласиан вектора») дает вектор, декартовы компонента которого равны:

$$(\nabla^2\boldsymbol{A})_x = \partial^2 A_x/\partial x^2 + \partial^2 A_x/\partial y^2 + \partial^2 A_x/\partial z^2 = \Delta A_x$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{A})_y = \partial^2 A_y/\partial x^2 + \partial^2 A_y/\partial y^2 + \partial^2 A_y/\partial z^2 = \Delta A_y$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{A})_z = \partial^2 A_z/\partial x^2 + \partial^2 A_z/\partial y^2 + \partial^2 A_z/\partial z^2 = \Delta A_z$$

Поскольку $\boldsymbol{A}$ определен с точностью до градиента произвольной функции можно наложить на него дополнительное условие, например, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=0.$

Это условие называется <u>калибровкой Даламбера</u>.

В этом случае, $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})= \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}) -\nabla^2\boldsymbol{A} =-\nabla^2\boldsymbol{A}$.

Так как $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})= \mathrm{rot}(\boldsymbol{B}) =\mu_0\boldsymbol{j}$

(теорема о циркуляции в дифференциальной форме),

то $-\nabla^2\boldsymbol{A}=\mu_0\boldsymbol{j}$, или в записи для проекций:

$$\Delta A_x=-\mu_0 j_x;$$

$$\Delta A_y=-\mu_0 j_y;$$

$$\Delta A_z=-\mu_0 j_z.$$

В электростатике уравнения такого вида мы называли уравнением Пуассона (там оно имело вид $\Delta\varphi=-\rho/\varepsilon_0$).

Решение уравнения Пуассона:

$$\varphi=(1/4\pi\varepsilon_0)\int\rho dV/r$$

Так как «одинаковые уравнения имеют одинаковые решения»:

$$A_x=(\mu_0/4\pi)\int j_x dV/r$$

$$A_y=(\mu_0/4\pi)\int j_y dV/r$$

$$A_z=(\mu_0/4\pi)\int j_z dV/r$$

Из этих формул, следует, например, что векторный потенциал (∞) длинного прямого тонкого проводника с током, направленного, к примеру, вдоль оси аппликат (оси z), имеет только одну ненулевую компоненту A_z.

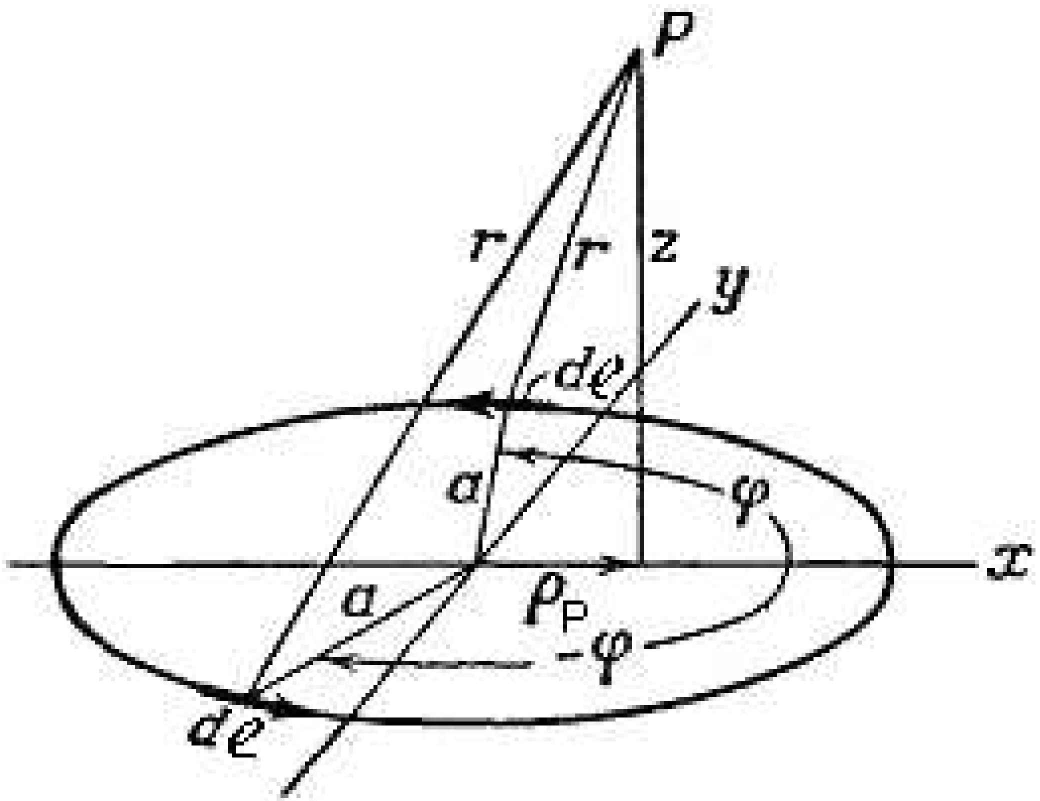
Мы воспользуемся полученными формулами для компонент векторного потенциала для нахождения индукции магнитного поля <u>элементарного тока.</u>

Магнитное поле элементарного тока

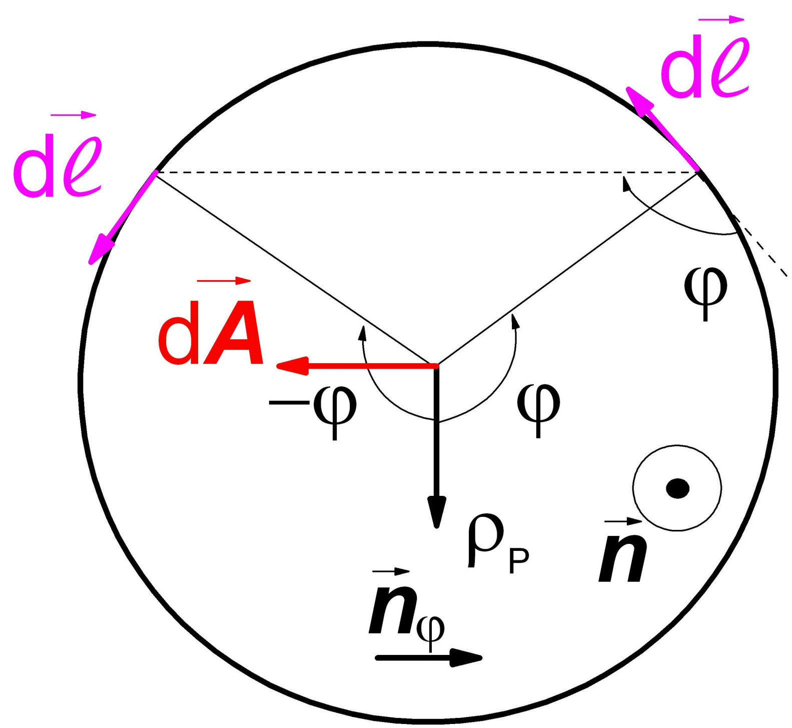
Элементарными называются замкнутые токи, текущие в области, линейные размеры которой много меньше расстояния от этой области до точек, в которых вычисляется индукция магнитного поля.

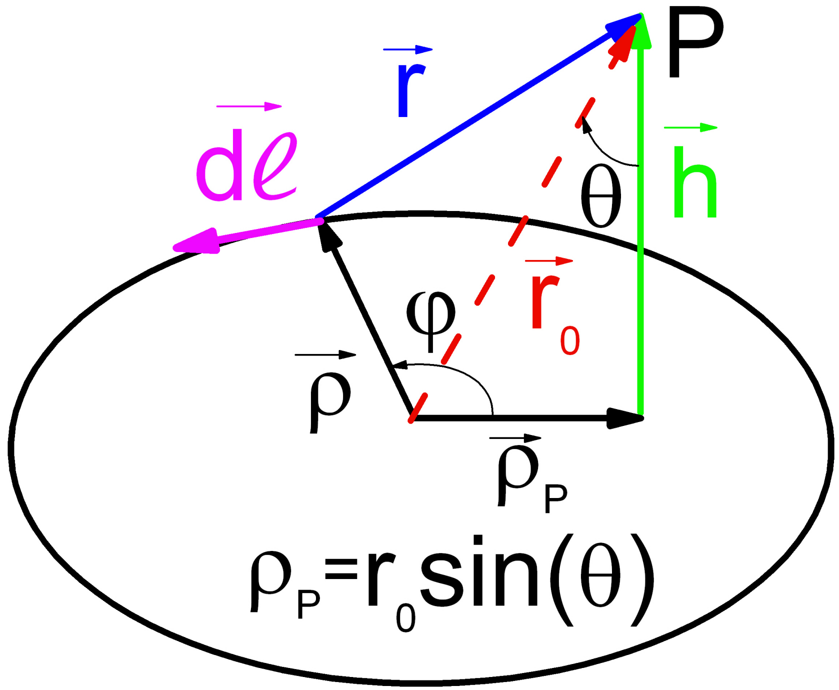
Рассмотрим простейший пример элементарного тока круглый виток с током, радиус витка много меньше расстояния от центра витка до точки, в которой вычисляется поле:

$$a \ll (\rho_P{}^2 + z^2)^{1/2}$$



Вид на виток сверху (от точки P)





$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}_P - \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{h}$$

$$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{\rho}_P + \boldsymbol{h}$$

Найдем вектор-потенциал в точке P, пользуясь сферическими координатами. Вследствие симметрии величина $\boldsymbol{A}$, очевидно, не зависит от φ. Поэтому для простоты выберем точку P в плоскости xz, где φ = 0. Объединяя попарно элементы d$\boldsymbol{l}$ с координатами ±φ видим, что результирующий вектор $\boldsymbol{A}$ направлен нормально к плоскости ρz. Следовательно, $\boldsymbol{A}$ имеет только одну компоненту A_φ.

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\rho}_P-\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{h}\Rightarrow$$

$$r^2=(\rho_P)^2+\rho^2-2a\rho_P\cos(\varphi)+h^2=r_0^2+a^2-2a\rho_P\cos(\varphi)=$$

$$=r_0^2\,(1+\{a^2-2a\rho_P\cos(\varphi)\}/r_0^2)\Rightarrow$$

$$r^{-1}\approx r_0^{-1}(1+\{a^2-2a\rho_P\cos(\varphi)\}/r_0^2)^{-1/2}=r^{-1}=r_0^{-1}+\{a\rho_P\cos(\varphi)-a^2/2\}/r_0^3$$

$$A_\varphi=(\mu_0/4\pi)I\int dl_\varphi/r=(\mu_0/4\pi)I\int a\cos(\varphi)d\varphi/r$$

$$A_\varphi=(\mu_0/4\pi)I\,\{\int(ar^2{}_0-a^3/2)\cos(\varphi)d\varphi/r^3{}_0+\int a^2\rho_P\cos^2(\varphi)d\varphi/r_0^3\}$$

Интегрирование от 0 до $2\pi\Rightarrow$ первый интеграл равен 0.

$$A_\varphi=(\mu_0/4\pi)I\int a^2\rho_P\cos^2(\varphi)d\varphi/r_0^3=(\mu_0/4)I\,a^2\rho_P/r_0^3$$

Введем $\boldsymbol{m}=IS\boldsymbol{n}=I\pi a^2\boldsymbol{n}$ **–** дипольный магнитный момент элементарного тока.

$$\boldsymbol{A}=(\mu_0/4\pi)\,\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}_0/r_0^3$$

- магнитный векторный потенциал элементарного тока

Вектор $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор к плоскости витка, его направление определяется по правилу правой руки.

Из формулы для векторного потенциала можно получить вектор индукции магнитного поля.

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}(\boldsymbol{A}) = (\mu_0/4\pi)\mathrm{rot}(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}/r^3)$$

Так как ***m=const*** и $\mathrm{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}\nabla)\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\,\mathrm{div}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\,\mathrm{div}\boldsymbol{a}$

$$\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}(\boldsymbol{A})=(\mu_0/4\pi)\{\boldsymbol{m}\mathrm{div}(\boldsymbol{r}/r^3)-(\boldsymbol{m}\nabla)(\boldsymbol{r}/r^3)\}=-(\mu_0/4\pi)(\boldsymbol{m}\nabla)(\boldsymbol{r}/r^3)$$

Так как

$$(\boldsymbol{m}\nabla)(\boldsymbol{r}/r^3)=(m_x\partial/\partial x+m_y\partial/\partial y+m_z\partial/\partial z)\{(\boldsymbol{i}x+\boldsymbol{j}y+\boldsymbol{k}z)/(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\}$$

то $$(\boldsymbol{m}\nabla)(\boldsymbol{r}/r^3)=(1/r^3)(\boldsymbol{m}\nabla)(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{r}(\boldsymbol{m}\nabla(1/r^3));$$

$$(\boldsymbol{m}\nabla)(\boldsymbol{r})=(\boldsymbol{i}m_x+\boldsymbol{j}m_y+\boldsymbol{k}m_z)=\boldsymbol{m};$$

$$\nabla(1/r^3)=-3\boldsymbol{r}/r^5$$

$$\boldsymbol{B}=(\mu_0/4\pi)\{(3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{m}\boldsymbol{r})-\boldsymbol{m}r^2\}/r^5$$

Формулы полей электрического диполя и элементарного тока аналогичны: $\boldsymbol{E}=(1/4\pi\varepsilon_0)\{(3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{p}\boldsymbol{r})-\boldsymbol{p}r^2\}/r^5$

$\Rightarrow$ элементарный ток = магнитный диполь