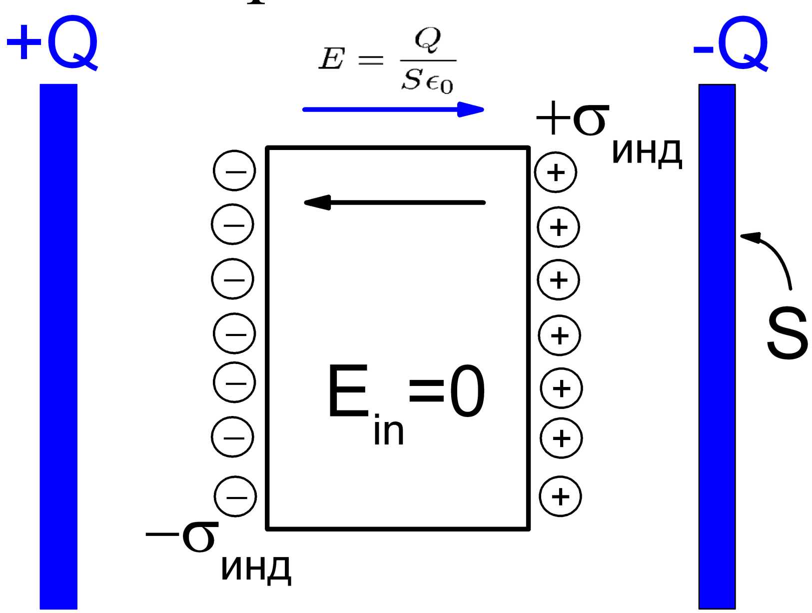
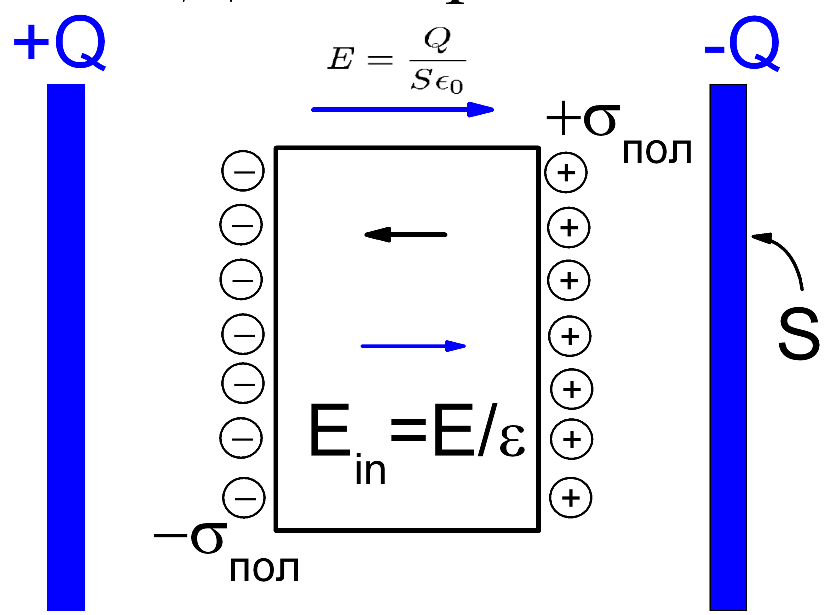
Поведение проводников и диэлектриков во внешнем электростатическом поле

Проводник



Диэлектрик



<u>Сходство</u>: (1) внешнее поле ослабляется; (2) появляются заряды, которых не было (были скомпенсированы) в отсутствие поля.

<u>Различие</u>: (1) в проводнике напряженность поля внутри равна нулю, в диэлектрике не равна нулю; (2) различная природа зарядов.

Идеальные диэлектрик – материал, в котором полностью отсутствуют свободные заряды.

Классификация диэлектриков основывается на различии их свойств <u>в нулевом внешнем поле</u>:

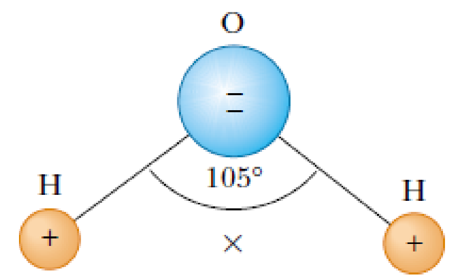
–неполярные (<u>отсутствуют</u> элементарные диполи);

–полярные (есть элементарные диполи, но их расположение <u>неупорядочено</u>);

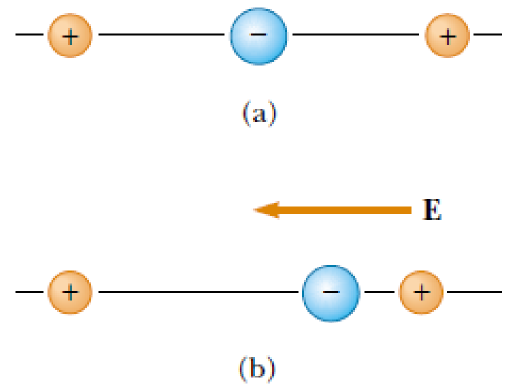
–сегнетоэлектрики (есть элементарные диполи, при этом они <u>упорядочены</u> даже в отсутствии внешнего поля).

Примеры элементарных диполей

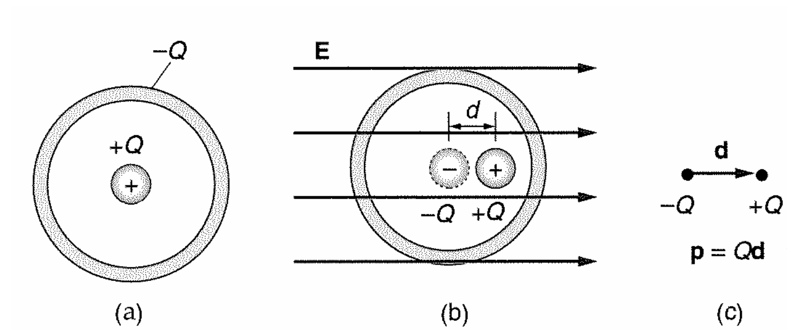
Молекула воды.
Вода – полярный диэлектрик
(ориентационная поляризация)



Молекула CO_2.
Углекислый газ –
неполярный диэлектрик
(ионная поляризация)

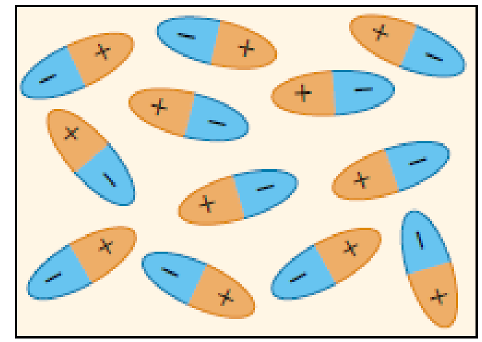


Атом водорода.
Атомарный водород
неполярный диэлектрик
(электронная поляризация)



Поведение элементарных диполей во внешнем электрическом поле. Поляризация диэлектриков.

(a) E=0
Неупорядоченное состояние

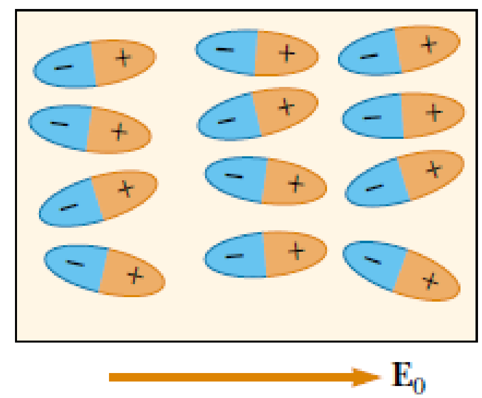


(a)

(b) E≠0
Упорядоченное состояние.

Диполи ориентируются по полю – явление поляризации диэлектрика.

Тепловое движение мешает упорядочению



(b)

Математическое описание диэлектриков.

Вектор поляризации.

(1) собственных свободных и сторонних зарядов нет ($\rho_{неполяр}$=0), есть только собственные связанные заряды.

(2) эти связанные заряды образуют диполи;

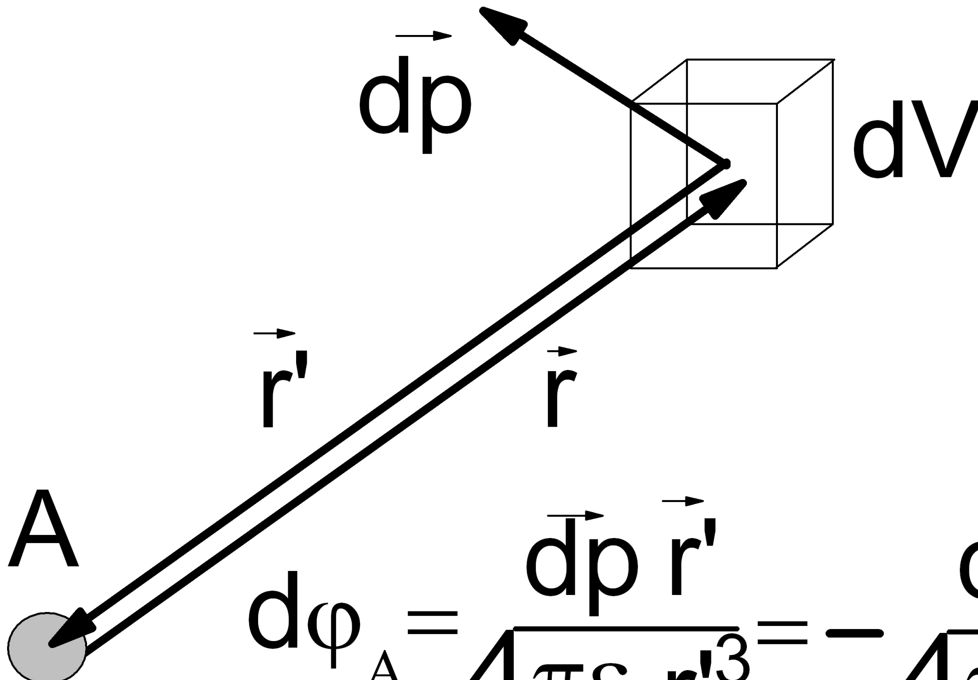
(3) средняя плотность дипольных моментов -

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i}{\Delta V}$$

вектор поляризации или поляризованность.

Связь вектора поляризации с поляризационными зарядами

Рассмотрим электрическое поле поляризованного диэлектрического тела в вакууме.



$$d\varphi_A = \frac{d\vec{p}\,\vec{r}\,'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3} = -\frac{d\vec{p}\,\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Точка A в вакууме, элемент dV внутри диэлектрика.

$$\varphi_A = \int\limits_V d\varphi_A = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_V \frac{\vec{P}\vec{r}\cdot dV}{r^3} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_V \vec{P}\cdot grad\frac{1}{r}dV =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_V div(\frac{\vec{P}}{r})\cdot dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_V \frac{-div(\vec{P})}{r}dV =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint\limits_S \frac{\vec{P}\cdot d\vec{S}}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_V \frac{-div\vec{P}}{r}dV$$

Используем

$$grad(f(r)) = \frac{df}{dr}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$div(\psi\cdot\vec{a}) = \vec{a}\cdot grad\psi +$$
$$+\psi\cdot div\vec{a}$$

$$\vec{a} = \vec{P}; \quad \psi = \frac{1}{r}$$

и теорему О-Г

$$\int\limits_V div\vec{a}\cdot dV =$$

$$= \oint\limits_S \vec{a}\cdot d\vec{S}$$

Сравнивая полученную формулу с общим решением уравнения Пуассона:

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint\limits_S \frac{\sigma dS}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_V \frac{\rho}{r} dV$$

и учитывая $\boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{S}=P_n$, получаем:

$$\boxed{\rho_{поляр}=-\mathrm{div}\,\boldsymbol{P}}$$

$$\boxed{\sigma_{поляр}= P_n}$$

Второе из этих двух уравнений верно для границы вакуум-диэлектрик, более общее уравнение для границы двух диэлектриков будет получено далее.

Вектор электрического смещения

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$$

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \boldsymbol{E} = \rho_{\text{неполяр}} + \rho_{\text{поляр}} = \rho_{\text{неполяр}} - \operatorname{div} \boldsymbol{P}$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) = \rho_{\text{неполяр}}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho_{\text{неполяр}}$$

Итак, в случае диэлектриков вводят в рассмотрение три вектора:

E – напряженность электрического поля

D – электрическое смещение

P–вектор поляризации

E определяется через силу, действующую на заряд,

P определяется как дипольный момент единицы объема,

D определяется по формуле $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$.

Теорема Остроградского-Гаусса для векторов *E, D, P* в дифференциальной форме

$$\boxed{\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0},$$

ρ - учтены все типы зарядов

$$\boxed{\operatorname{div} \boldsymbol{P} = -\rho_{\text{поляр}}},$$

$\rho_{\text{поляр}}$ – учтён только поляризационный заряд

$$\boxed{\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho_{\text{неполяр}}},$$

$\rho_{\text{неполяр}}$ – учтены все заряды, кроме поляризационных (свободные собственные, свободные и связанные сторонние)

$$\rho_{\text{неполяр}} = \rho - \rho_{\text{поляр}}$$

Теорема Остроградского-Гаусса для векторов ***E, D, P*** в интегральной форме

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Q - <u>полный заряд</u>

$$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -Q_{\text{поляр}}$$

$Q_{\text{связ}}$ – <u>поляризационный</u> заряд

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{неполяр}}$$

$Q_{\text{неполяр}}$ – сумма собственных свободных и сторонних зарядов

Материальные уравнения

Уравнения связывают значения векторов ***E*, *D*, *P*** в одной и той же точке пространства (локально).
Простейший вид материальных уравнений реализуется для изотропной, линейной среды:

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{P}=\chi\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{E}$$

ε- диэлектрическая проницаемость, χ- диэлектрическая восприимчивость. Эти формулы - определение ε и χ.
Из уравнения $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$
следует $\varepsilon = \chi + 1$
Диэлектрическая проницаемость характеризует степень ослабления эл. поля в диэлектрике (зависит от формы).

Таблица значений низкочастотной (статической) диэлектрической проницаемости и напряженности поля пробоя для некоторых материалов

Материал	диэлектрическая проницаемость	Напряжённость поля пробоя
воздух (при н.у.)	1.0006	$3 \cdot 10^6$ В/м
Стекло	4–6	$8 \cdot 10^6$ В/м
Бумага	4	$16 \cdot 10^6$ В/м
Вода (20^0C)	80	
Тефлон	2	$60 \cdot 10^6$ В/м

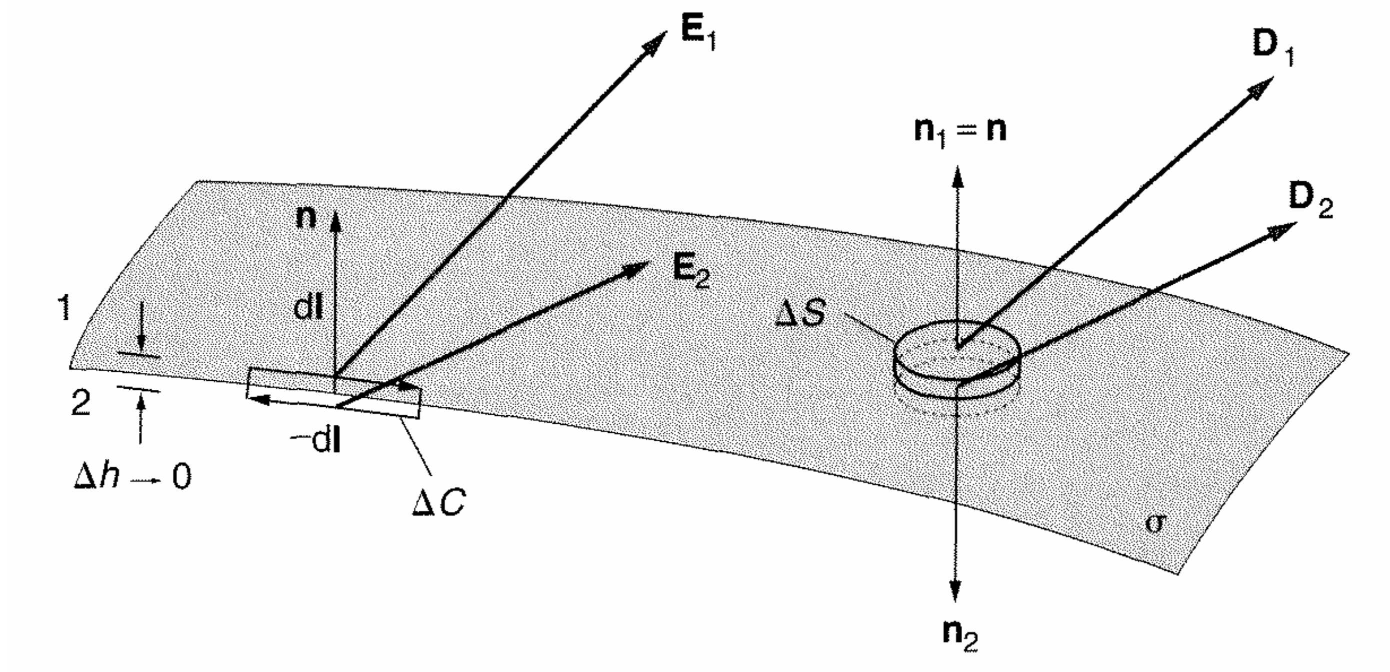
Граничные условия для векторов ***E, D, P***

Граничные условия связывают значения проекций векторов (нормальных и тангенциальных) в двух бесконечно близких точках по разные стороны от границы раздела двух сред с различными электрическими свойствами.

$$E_{t1} = E_{t2}$$

$$D_{n1} - D_{n2} = \sigma_{\text{неполяр}}$$

$$P_{n1} - P_{n2} = -\sigma_{\text{поляр}}$$



Дополнительные формулы граничных условий
для изотропных сред

$$\varepsilon_1 E_{n1} - \varepsilon_2 E_{n2} = \sigma_{неполяр}$$

$$D_{t1}/\varepsilon_1 = D_{t2}/\varepsilon_2$$

$$P_{t1}/\chi_1 = P_{t2}/\chi_2$$

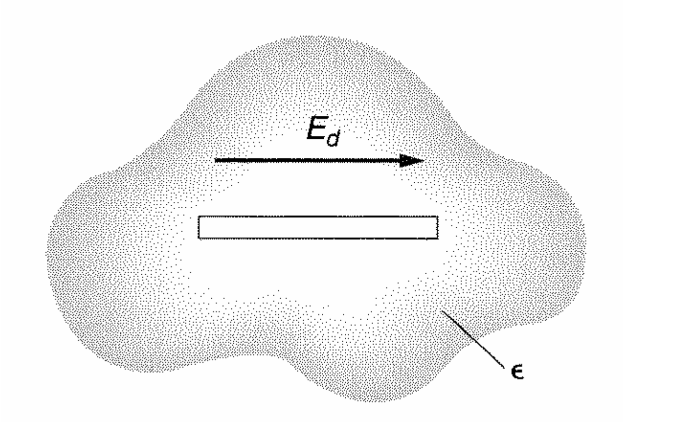
Дополнительные формулы граничных условий
для изотропных сред при отсутствии свободных и/или сторонних зарядов

$$D_{n1} = D_{n2}$$

$$\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}$$

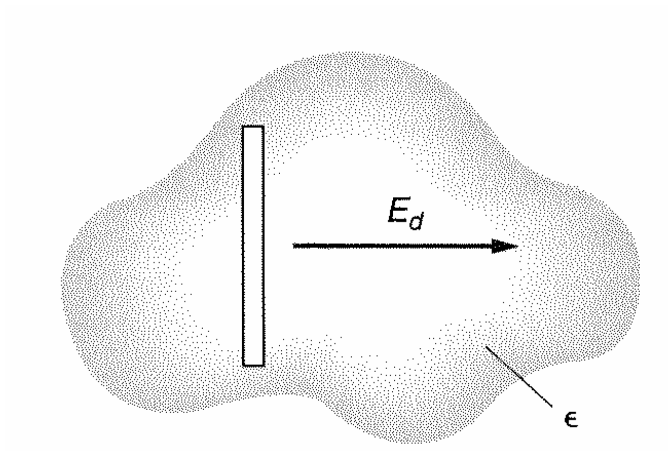
Условие $D_{n1} = D_{n2}$ – непрерывность нормальной компоненты вектора электрического смещения (верно при $\sigma_{неполяр}=0$), $E_{t1} = E_{t2}$ – непрерывность тангенциальной (касательной) компоненты вектора напряженности (верно всегда, даже для переменных полей).

Граничные условия
и экспериментальное измерение E и D внутри диэлектрика



Полость в виде «иглы», направленной вдоль поля

Внутри полости $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\mathrm{d}}$



Полость в виде «диска», перпендикулярного полю

Внутри полости $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_{\mathrm{d}}$

Связь неполяризационных и поляризационных зарядов в однородных изотропных средах

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{D} = \rho_{\text{неполяр}}$$

$$\mathrm{div}\, (\varepsilon\varepsilon_0 \boldsymbol{E}) = \rho_{\text{неполяр}}$$

$$\varepsilon\varepsilon_0 \mathrm{div}\, \boldsymbol{E} = \rho_{\text{неполяр}}$$

$$\varepsilon(\rho_{\text{неполяр}} + \rho_{\text{поляр}}) = \rho_{\text{неполяр}}$$

$$\rho_{\text{поляр}} = \rho_{\text{неполяр}}/\varepsilon - \rho_{\text{неполяр}}$$

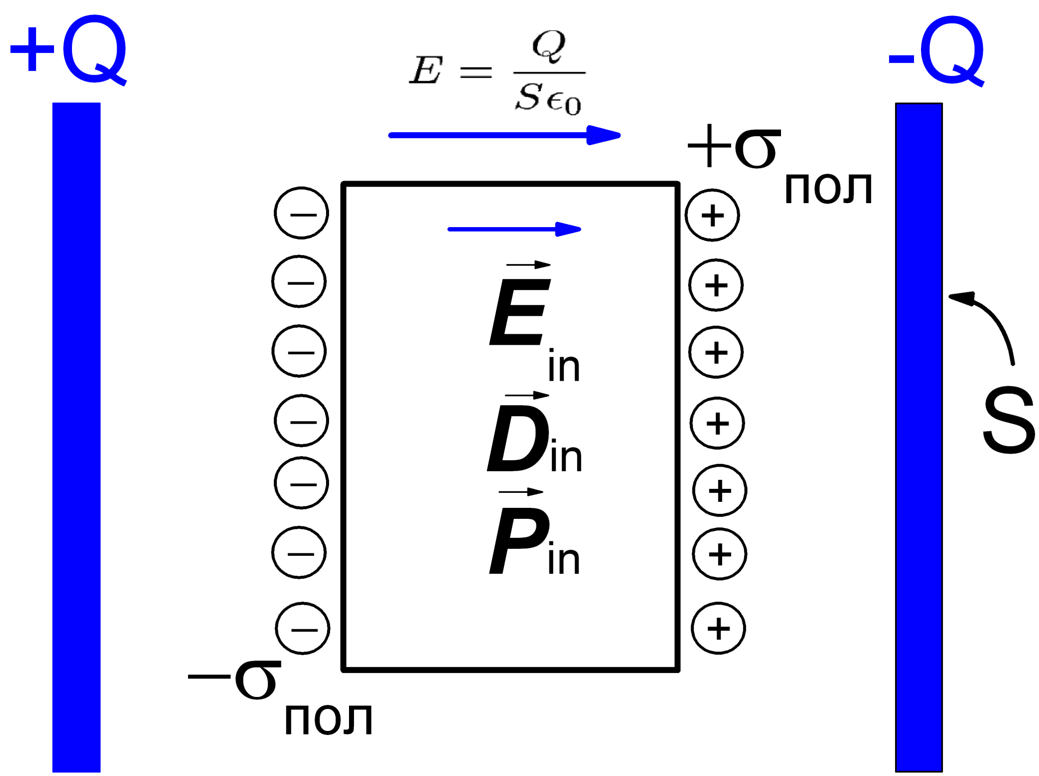
$$\boxed{\rho_{\text{поляр}} = -\rho_{\text{неполяр}}(\varepsilon - 1)/\varepsilon}$$

Если $\rho_{\text{неполяр}}=0$, то $\rho_{\text{поляр}}=0$.

Важный вывод: даже если внутри однородного изотропного диэлектрика поле неоднородно, но неполяризационные заряды отсутствуют, то все поляризационные заряды могут находиться только на поверхности.

Примеры вычисления векторов *E, D, P*

Изотропная однородная диэлектрическая пластина
в однородном поле



Все поля однородные. Нормальная компонента D непрерывна.

$D=\varepsilon_0 E=D_{in}=\varepsilon\varepsilon_0 E_{in} \Rightarrow E_{in}=E/\varepsilon$;

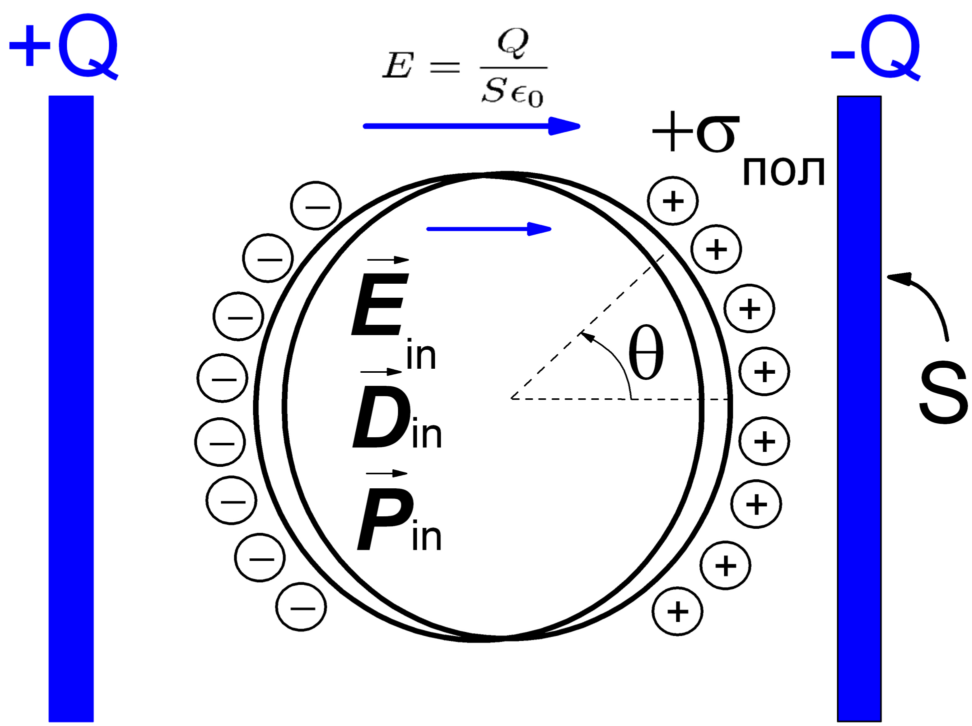
$P_{in}=\varepsilon_0(\varepsilon-1)E_{in}=\varepsilon_0(\varepsilon-1)E/\varepsilon$

$\sigma_{пол} = P_{in}=\varepsilon_0(\varepsilon-1)E/\varepsilon$

Принцип суперпозиции:

$E-\sigma_{пол}/\varepsilon_0=E/\varepsilon$

Изотропный однородный диэлектрический шар в однородном поле



Все поля однородные.

$\boldsymbol{E}_{in} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{P}_{in}/3\varepsilon_0$;

$\boldsymbol{P}_{in} = \varepsilon_0(\varepsilon-1)\boldsymbol{E}_{in}$;

Исключая $\boldsymbol{E}_{in}$ получаем:

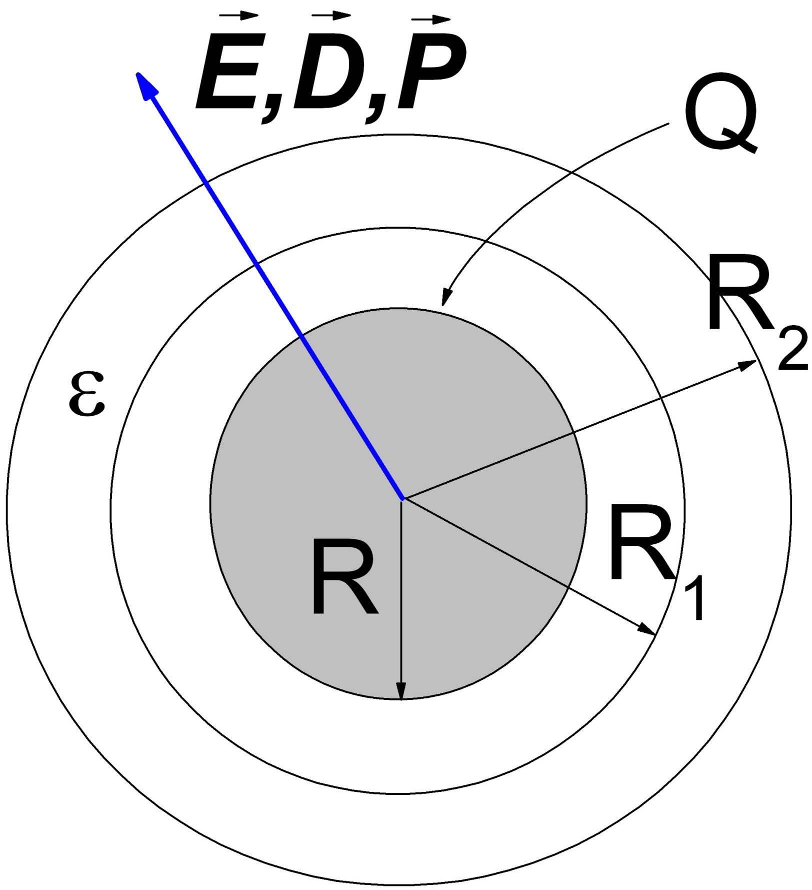
$\boldsymbol{P}_{in} = 3\varepsilon_0(\varepsilon-1)\boldsymbol{E}/(\varepsilon+2)$;

$\boldsymbol{E}_{in} = \boldsymbol{E} - (\varepsilon-1)\boldsymbol{E}/(\varepsilon+2) = 3\boldsymbol{E}/(\varepsilon+2)$

$D_{in} = \varepsilon\varepsilon_0 E_{in} = 3\varepsilon_0\varepsilon\boldsymbol{E}/(\varepsilon+2)$

$\sigma_{пол} = P_{in}\cos\theta$

Проводящая сфера
внутри изотропного однородного диэлектрика



Все поля радиальные.

Используем теорему Г-О для $\boldsymbol{D}$ и

$\boldsymbol{D}=\varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E}$; $\boldsymbol{P}=\varepsilon_0(\varepsilon-1)\boldsymbol{E}$

$0\le r\le R$ (проводник):

$D = 0$; $E=0$; $P=0$; $\varphi=\text{const}$.

$R\le r\le R_1$ и $R_2\le r\le\infty$ (вакуум):

$D = Q/(4\pi r^2)$;$E=D/\varepsilon_0= Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$;

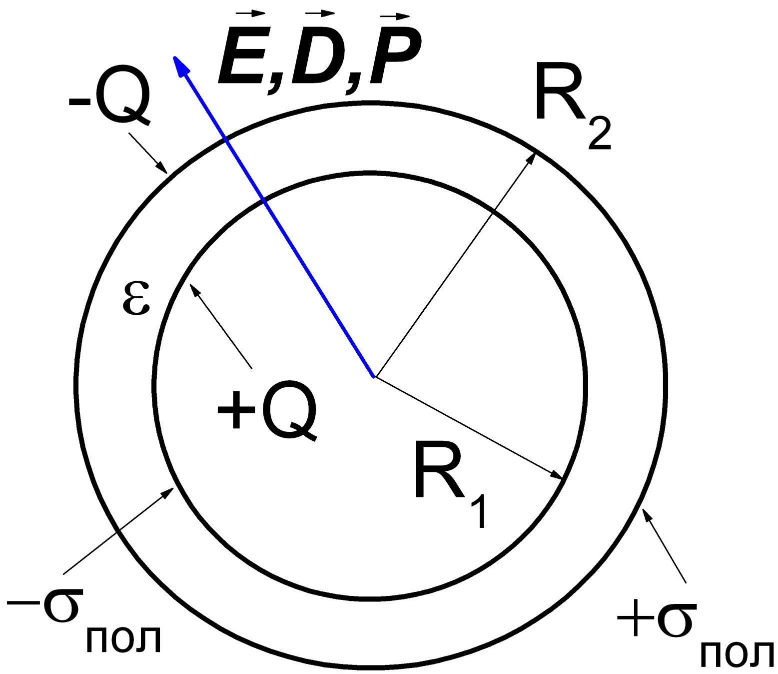
$P = 0$.

$R_1\le r\le R_2$ (диэлектрик):

$D = Q/(4\pi r^2)$;$E=D/\varepsilon\varepsilon_0= Q/(4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2)$;

$P = Q(\varepsilon-1)/(4\pi\varepsilon r^2)$.

Сферический конденсатор с диэлектриком



$0 \le r \le R$ (проводник):

$D = 0$; $E=0$; $P=0$; $\varphi=\mathrm{const}$.

$R_1 \le r \le R_2$ (диэлектрик):

$D = Q/(4\pi r^2)$;$E=D/\varepsilon\varepsilon_0=Q/(4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2)$;

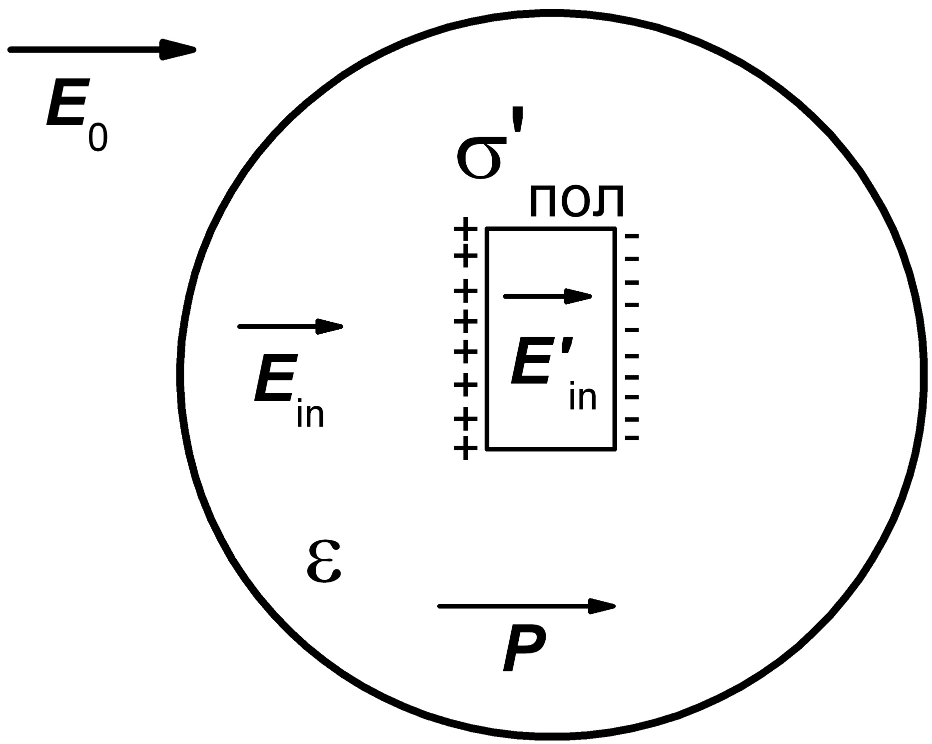
$P = Q(\varepsilon-1)/(4\pi\varepsilon r^2)$.

$\Delta\varphi=\int E\cdot dr = Q/(4\pi\varepsilon\varepsilon_0)(1/R_1-1/R_2)$;

$C = Q/\Delta\varphi=4\pi\varepsilon\varepsilon_0(R_2R_1)/(R_2-R_1)$.

Диэлектрик может существенно увеличить емкость конденсатора.

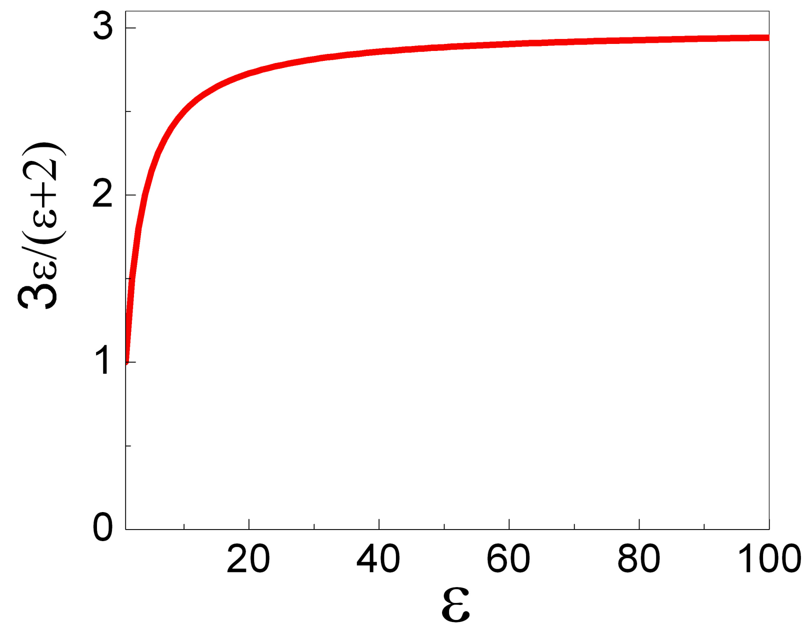
Диэлектрический шар с маленькой плоской полостью



$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{in}} = 3\boldsymbol{E}_0/(\varepsilon+2);$$

$$\boldsymbol{P} = 3\varepsilon_0(\varepsilon-1)\boldsymbol{E}_0/(\varepsilon+2);$$

$$\boldsymbol{E}'_{\mathrm{in}} = \boldsymbol{E}_{\mathrm{in}} + \boldsymbol{P}/\varepsilon_0 = 3\varepsilon\boldsymbol{E}_0/(\varepsilon+2) \geq \boldsymbol{E}_0$$



Усилитель электростатического поля
при помощи диэлектрика !

Идея усилителя – «заставить» поляризационные заряды работать не на ослабление, а на усиление внешнего поля. Используется «фактор формы». Недостаток – усиление достигается в очень малой области пространства.

Уточнение терминологии. Парные термины:

свободные заряды (могут перемещаться на макроскопические расстояния)	–	связанные заряды (могут перемещаться только расстояния порядка атомных)
собственные заряды (принадлежат телу, сумма всех собственных зарядов = 0)	–	сторонние заряды (привнесены извне, придают телу избыточный заряд)

Собственные заряды могут быть как связанными, так и свободными.
Сторонние заряды могут быть как связанными, так и свободными.
Поляризационные заряды всегда связанные и собственные.
Связанные заряды не обязательно поляризационные. Могут быть сторонние связанные заряды. Связанные атомные заряды в диэлектрике называются поляризационными только тогда, когда в процессе поляризации они образуют нескомпенсированные заряженные области (на поверхности – для однородного диэлектрика при отсутствии сторонних зарядов, или в общем случае в объеме).
В идеальном диэлектрике нет свободных зарядов, в нём могут быть только связанные собственные и сторонние заряды.
В идеальном проводнике (точнее, на проводнике, т.к. на поверхности) могут быть только свободные заряды: собственные или сторонние (избыточные).