

## О КОГЕРЕНТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СВЕТА С ДИСКРЕТНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕЗОНАНСНОЙ СРЕДОЙ

*Б. И. Манцызов, Р. Н. Кузьмин*

Впервые получены солитонные решения двухволновых уравнений Максвелла – Блоха, описывающих когерентное нелинейное взаимодействие света с резонансной средой в условиях дифракции в одномерной структуре. Рассмотрены условия формирования и динамические свойства нового типа локализованных возмущений – «двухволнового» солитона. В задаче сверхизлучения найдено устойчивое нестационарное решение для поля и возбуждения среды – двухволновой бризер. Предсказаны явления самоиндуцированного нелинейного подавления дифракционного отражения поля на границе и рассеяния в среде, а также эффект «запаздывающего» отражения импульса поля.

### 1. Введение

Нелинейные когерентные процессы взаимодействия излучения с веществом традиционно вызывают большой интерес исследователей. Это связано прежде всего с появлением качественно новых физических эффектов, не существующих в линейном случае: спонтанного образования и когерентного распада макроскопического коллективного состояния системы осцилляторов (сверхизлучение – СИ) [1–3]; проявления долгоживущей псевдоспиновой памяти системы – светового эха [2, 4]; образования незапускающих импульсов поля и возбуждения среды, оптических солитонов (самоиндуцированная прозрачность – СИП) [5, 2]. Теоретические и экспериментальные исследования нелинейных эффектов проводились до настоящего времени главным образом в приближении слабого взаимодействия мод поля (поле в сплошной среде). Исключение составляют работы [6, 7], где рассматривалась динамика СИ в условиях дифракции в квантовом модовом [6] и полуклассическом [7] описаниях для частного случая коротких сред. Однако, как следует из краткого сообщения [8], учет когерентных нелинейных эффектов при исследовании дифракционных процессов в резонансных протяженных средах приводит к новым физическим закономерностям, в частности к самоиндуцированному подавлению дифракционного рассеяния импульса поля и к его локализации в среде.

В настоящей работе приведен вывод полной системы двухволновых уравнений типа Максвелла – Блоха для описания нелинейной дифракции в одномерной резонансной периодической среде. Впервые получено их полное многосолитонное решение в бесконечной среде. Путем численного интегрирования и аналитически подробно исследовано односолитонное решение: описаны процессы образования, распространения и распада двухволновых солитонов в ограниченной среде. При моделировании нелинейного дифракционного отражения импульсов поля обнаружено запаздывание отраженного сигнала. Впервые показано, что результатом эволюции сверхизлучающей протяженной системы может быть нетривиальное устойчивое состояние возбужденной среды и поля.

### 2. Двухволновые уравнения Максвелла – Блоха

Взаимодействие поля с резонансной средой будем описывать в рамках полуклассического метода: классическое поле взаимодействует с квантовыми осцилляторами [2]. Дискретная одномерная периодическая резо-

нанная среда представляет собой совокупность периодически расположенных тонких слоев толщиной  $a \ll \lambda$  ( $\lambda$  — длина волны излучения), содержащих двухуровневые атомы. Для обеспечения требования дискретности период  $d$  такой структуры должен удовлетворять условию  $d \gg \lambda$ . Одномерность среды дает возможность выбора наиболее простого вида решения уравнений поля в случае СИ, когда источники излучения находятся внутри среды. Необходимо, чтобы во-первых, выполнялось приближение плоской волны, во-вторых, количество волн ограничивалось возможно меньшим числом. Этим условиям удовлетворяет среда в виде стержня длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $s$ , для которого число Френеля  $F = s/\lambda \approx 1$ . Резонансные плоскости располагаются перпендикулярно оси стержня. В задаче СИП, когда с невозбужденной средой когерентно взаимодействует внешнее поле, достаточно наложить условие плоских волн  $F > 1$  (образец в форме диска) и ограничить число брэгговских мод (две диаметрально противоположные точки на сфере Эвальда).

Таким образом, решение волнового уравнения Максвелла

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - c^{-2} \mathbf{A}_{tt}(\mathbf{r}, t) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (1)$$

для векторного потенциала электромагнитного поля  $\mathbf{A}$  и плотности тока связанных зарядов  $\mathbf{J}$  будем искать в виде двух плоских волн с комплексными, медленно меняющимися амплитудами, распространяющихся в противоположных направлениях:

$$\mathbf{A}(x, t) = \mathbf{A}^+(x, t) \exp[i(kx - \omega t)] + \mathbf{A}^-(x, t) \exp[-i(kx + \omega t)] + \text{к.с.}, \quad (2)$$

$$|\mathbf{A}_x^\pm| \ll |\mathbf{A}^\pm|, \quad |\mathbf{A}_t^\pm| \ll |\omega \mathbf{A}^\pm|, \quad (3)$$

где  $k = \omega/c$ ,  $\omega$  — частота резонансного перехода.

Перейдем к уравнениям для медленных амплитуд. Для этого подставим решение (2) в уравнение (1) и пренебрежем членами, содержащими вторые производные, полагая их малыми по отношению к членам с первой производной; проведем усреднение по промежутку времени  $\Delta t \gg \omega^{-1}$ , но меньшему характерных времен изменения  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{J}$ , используя временное условие (3) и разделяя таким образом уравнения для  $\mathbf{A}^\pm$  и  $(\mathbf{A}^\pm)^*$ . В результате получим

$$(\mathbf{A}_x^+ + c^{-1} \mathbf{A}_t^+) e^{ikx} + (-\mathbf{A}_x^- + c^{-1} \mathbf{A}_t^-) e^{-ikx} = (2\pi i/\omega) \langle \mathbf{J} e^{i\omega t} \rangle_t, \quad (4)$$

где скобки  $\langle \dots \rangle_t$  обозначают указанное усреднение по  $\Delta t$ . В уравнении (4) опущены векторы, так как для простоты рассматривается лишь одна поляризация поля и токов перехода. Квантовомеханически средняя плотность тока дипольного перехода кристалла в случае точного резонанса выражается в виде [9, 10]

$$\langle \mathbf{J}(t, \mathbf{r}) e^{i\omega t} \rangle_t = \sum_j \mathbf{a}_0^*(t, \mathbf{r}_j) \mathbf{a}_1(t, \mathbf{r}_j) \mathbf{J}_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad (5)$$

где медленно меняющиеся функции  $\mathbf{a}_0(t, \mathbf{r}_j)$  и  $\mathbf{a}_1(t, \mathbf{r}_j)$  определяют суперпозиционное состояние  $j$ -го двухуровневого атома, которое описывается волновой функцией

$$\Psi_j(t) = a_1(t, \mathbf{r}_j) \Psi_1 + a_0(t, \mathbf{r}_j) \Psi_0,$$

$\Psi_1$ ,  $\Psi_0$  — невозмущенные волновые функции верхнего и нижнего состояний атома;  $\mathbf{J}_j$  — матричный элемент проекции тока дипольного перехода атома на направление поляризации вектора-потенциала  $\mathbf{A}$ ,  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$  —  $\delta$ -функция Дирака.

Для разделения амплитуд  $A^+$  и  $A^-$  необходимо поочередно умножить (4) на  $\exp(\pm ikx)$  и усреднить по объему  $V_0 \sim \lambda^3$ . В одномерной модели атомы, расположенные с поверхностной плотностью  $\sigma$  в каждой резонансной плоскости, необходимо считать находящимися в тождественных состояниях. Кроме того, условие  $d \gg \lambda$  исключает усреднение поляризации и инверсии соседних плоскостей, и мы по-прежнему можем рассматривать систему как дискретный набор  $i$ -х плоскостей. После подстановки (5) в (4) и усреднения с учетом (3) получим

$$\begin{aligned} & \pm A_{\pm}^{\pm}(x, t) + c^{-1} A_{\pm}^{\pm}(x, t) = \\ & = \frac{2\pi i}{\omega} \frac{\sigma}{\lambda} J_z \sum_i \exp(\mp ikx_i) a_0(x_i, t) a_1(x_i, t) \delta(x - x_i). \end{aligned} \quad (6)$$

Функция  $\delta(x - x_i) = 1$  при  $x \in (x_i \pm \lambda/2)$  и нулю в любых других точках.

Из уравнения Шредингера традиционным способом (см., например, [11]) нетрудно получить оптические уравнения Блоха для атома  $i$ -й плоскости в поле (2):

$$\begin{aligned} P_i(x_i, t) &= \alpha n(x_i, t) [A^+(x_i, t) \exp(ikx_i) + A^-(x_i, t) \exp(-ikx_i)] - T_2^{-1} P(x_i, t), \\ n_i(x_i, t) &= -(\alpha/\lambda) \operatorname{Re}\{P^*(x_i, t) [A^+(x_i, t) \exp(ikx_i) + A^-(x_i, t) \exp(-ikx_i)]\} - \\ & \quad - T_1^{-1} (n(x_i, t) + 1), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $P(x_i, t) = -2|J_z|^{-1} (a_0^* a_1 J_z)_i$  — безразмерная характеристика «поляризации» атома;  $n(x_i, t) = |a_1(x_i, t)|^2 - |a_0(x_i, t)|^2$  — инверсионная населенность атома,  $\alpha = 2i|J_z|/\hbar c = 2i\omega\mu_z/\hbar c$ ,  $\mu_z$  — матричный элемент  $z$ -проекции дипольного момента перехода,  $T_1$ ,  $T_2$  — времена продольной и поперечной релаксации вектора Блоха  $\mathbf{R}_i = \{\operatorname{Re} P_i, \operatorname{Im} P_i, n_i\}$ . Наконец, домножив уравнения (6) на  $\alpha$ , перепишем всю систему самосогласованных двухволновых уравнений Максвелла — Блоха (6), (7) в удобном для дальнейшего анализа виде (без учета спонтанных некогерентных релаксаций вектора Блоха):

$$c\Omega_x^+(x, t) + \Omega_i^+(x, t) = \tau_c^{-2} \sum_i \exp(-ikx_i) P(x_i, t) \delta(x - x_i), \quad (8a)$$

$$-c\Omega_x^-(x, t) + \Omega_i^-(x, t) = \tau_c^{-2} \sum_i \exp(ikx_i) P(x_i, t) \delta(x - x_i), \quad (8b)$$

$$P_i(x_i, t) = n(x_i, t) [\Omega^+(x_i, t) \exp(ikx_i) + \Omega^-(x_i, t) \exp(-ikx_i)], \quad (8в)$$

$$n_i(x_i, t) = -\operatorname{Re}\{P^*(x_i, t) [\Omega^+(x_i, t) \exp(ikx_i) + \Omega^-(x_i, t) \exp(-ikx_i)]\}, \quad (8г)$$

где  $\Omega^{\pm}(x, t) = \alpha A^{\pm}(x, t) = 2(\mu_z/\hbar) E_0^{\pm}$ ,  $E_0^{\pm}$  — комплексные амплитуды электромагнитного поля,  $\tau_c^2 = 8\pi T_1/3c\rho\lambda^2$  (при условии  $d = \lambda$ ),  $\rho$  — плотность резонансных атомов. Кооперативное время  $\tau_c$  является важным параметром когерентного взаимодействия, оно характеризует среднее время жизни фотона в среде до его резонансного поглощения [12]. Величину  $\tau_c$  следует отличать от обратной частоты Раби [2], которой соответствует среднее время возбуждения атома в резонансном поле. Частота Раби не зависит от  $\rho$ .

## 2. Самоиндуцированная прозрачность в условиях двухволновой дифракции

Самоиндуцированная прозрачность сплошной среды возникает при когерентном взаимодействии импульса света с резонансной средой. Интенсивный импульс площадью  $2\lambda$ , распространяясь вдоль образца, затрачивает

часть своей энергии на возбуждение резонансных атомов, а затем вызывает их индуцированный распад, причем в силу одномодовости задачи (когерентная бегущая накачка сплошной среды) энергия возвращается возбуждающему импульсу. В результате энергия и площадь импульса не меняются, среда становится прозрачной. Подобная ситуация не может повториться в брэгговском случае, когда энергия, переизлучаемая атомами, уже не возвращается в единственную моду поля, а делится между двумя противоположно бегущими, сильно взаимодействующими брэгговскими волнами. На первый взгляд это неминуемо приведет к распыливанию импульса в среде. Ниже показано, что при достаточно большой интенсивности падающего на среду импульса поля брэгговское отражение на границе селективно (для части импульса) подавляется, а в образце распространяется устойчивый импульс поля и возбуждения среды, отличный от традиционного  $2\pi$ -импульса.

Рассмотрим сначала взаимодействие когерентного резонансного поля с бесконечной дискретной периодической средой. Двухволновые уравнения (8) при точном выполнении условий Брэгга существенно упрощаются и допускают аналитическое решение. После усреднения по области  $\Delta V \gg d^3$  при условии  $\tau_n \gg d/c$ , где  $\tau_n$  — характерная длительность импульса поля, уравнения (8) принимают вид

$$(\pm c\partial/\partial x + \partial/\partial t)\Omega^\pm(x, t) = \tau_c^{-2}P(x, t), \quad (9a)$$

$$P_t(x, t) = n(x, t)(\Omega^+ + \Omega^-), \quad (9б)$$

$$n_t(x, t) = -P(x, t)(\Omega^+ + \Omega^-). \quad (9в)$$

Систему уравнений (9) приведем к одному уравнению относительно величины

$$\theta(x, t) = \int_{-\infty}^t \Omega(x, t') dt', \quad (10)$$

где  $\Omega = \Omega^+ + \Omega^-$ . Для этого последовательно сложим и вычтем уравнения (9a) и перейдем к эквивалентным уравнениям относительно функций  $\Omega$  и  $\Omega' = \Omega^+ - \Omega^-$ . Затем продифференцируем первое из полученных уравнений по  $t$ , второе — по  $x$ , сложим их и, выразив функцию  $\Omega_x'$  через  $\Omega$ , получим уравнение относительно  $\Omega$  и  $P$ :

$$-c^2\Omega_{xx} + \Omega_{tt} = 2\tau_c^{-2}P_t. \quad (11)$$

Проинтегрируем уравнение (11) по времени и, учитывая (10), а также решение блоховских уравнений (9б), (9в):

$$P = -\sin \theta, \quad n = -\cos \theta, \quad (12)$$

получим уравнение для  $\theta(x, t)$ :

$$c^2\theta_{xx} - \theta_{tt} = 2\tau_c^{-2} \sin \theta. \quad (13)$$

Невозмущенное синус-уравнение Гордона (13) имеет целый набор локализованных решений в бесконечной среде. Каждое новое решение получается из предыдущего путем применения к последнему преобразований Бэклунда [13] и описывает динамику взаимодействия различного количества устойчивых решений (солитонов и бризеров). Пусть  $\theta^{(n)}(x, t) = \hat{B}^{(n)}\theta^{(0)}(x, t)$  — решение уравнения (13), полученное  $n$ -кратным применением оператора преобразований Бэклунда. Тогда для амплитуд волн из (9a) получим

$$\Omega^\pm(x, t) = (\theta_t^{(n)} \mp c\theta_x^{(n)})/2. \quad (14)$$

Остановимся на односолитонном решении  $\theta^{(1)}$  как наиболее физически содержательном из простейших решений синус-уравнения. Именно это решение описывает в одноволновом случае сплошной среды явление СИП. Солитон

$$\theta(\xi) = 4 \operatorname{arctg} \exp(\xi/\tau) \quad (15)$$

представляет собой стационарное решение, зависящее только от переменной  $\xi = t - x/v$  ( $v$  — постоянная скорость перемещения возбуждения вдоль оси  $x$ ) и удовлетворяющее следующим граничным условиям на бесконечности:  $\theta(\xi = -\infty) = 0$ ,  $\theta(\xi = \infty) = 2\pi$ . Полуширина солитона

$$\tau = (\tau_c/2^{1/2}u) (1-u^2)^{1/2}, \quad (16)$$

где  $u = v/c$ . Подставляя (15) в (12), нетрудно убедиться в том, что импульс возбуждения среды является локализованным и стационарным, а состояние среды после прохождения импульса не меняется:  $P(\xi = \pm\infty) = 0$ ,  $n(\xi = \pm\infty) = -1$ .

В рассматриваемой задаче величина  $\Omega(\xi) = \theta$ , имеет смысл полной скорости вращения вектора Блоха в точке  $x$  в момент времени  $t$  под действием полей  $\Omega^+$  и  $\Omega^-$ , но функция  $\alpha^{-1}\Omega$  уже не является полной амплитудой поля в отличие от традиционного одноволнового случая. Для нахождения фактических амплитуд обеих мод  $\Omega^\pm$  подставим выражение (15) в (14). Тогда получим

$$\Omega^\pm(\xi) = \pm [(1 \pm u)/2u] \Omega(x, t), \quad (17)$$

где

$$\Omega(x, t) = 2\tau^{-1} \operatorname{sech}[(t-x/v)/\tau]. \quad (18)$$

Импульс поля (17), так же как и возбуждение среды, является локализованным и движется вдоль среды с постоянной скоростью

$$v = c/(1 + 2\tau^2/\tau_c^2)^{1/2}. \quad (19)$$

Полуширина импульса  $\tau$  равна (16) (рис. 1).

Таким образом, решения (15), (17) описывают СИП резонансной брэгговской структуры. Отметим, что это явление принципиально отличается от предсказанного ранее в работах [14, 15] эффекта просветления брэгговского зеркала, когда брэгговская слабая модуляция диэлектрической проницаемости среды компенсируется модуляцией, наведенной полем брэгговской стоячей волны за счет квадратичного нелинейного взаимодействия поля со средой.

#### 4. Свойства «двухволнового» солитона

Основной особенностью уединенного импульса в брэгговской среде является двухволновой характер поля (17), поэтому удобно для краткости называть его «двухволновым» солитоном, или Д-солитоном.

Абсолютная площадь импульса правой волны  $|\theta^+| > 2\pi$ , в чем легко убедиться прямой подстановкой выражения  $\Omega^+$  (17) в (10) при  $t = \infty$ . Полное же действие Д-солитона эквивалентно действию  $2\pi$ -импульса (18). Формально это объясняется противоположностью знаков угловых скоростей  $\Omega^\pm$  (17), что приводит к уменьшению полной скорости вращения вектора

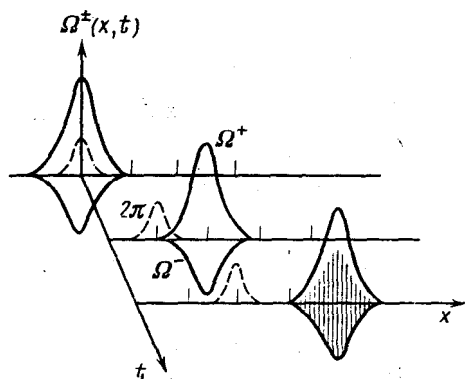


Рис. 1. Динамика  $2\pi$ -импульса в сплошной среде (штриховые кривые) и Д-солитона в дискретной среде с той же средней плотностью резонансных атомов. Скорость  $v = 2v_{2\pi}$  соответствует значениям  $u = u_{2\pi} = 2,5$ ,  $\tau = \tau_{2\pi}$

Блоха  $|\Omega^-| < |\Omega^+|$  (18). Физический механизм «выключения» части поля Д-солитона из процесса взаимодействия со средой, а также объяснение противоположности направления скорости движения импульса и волнового вектора одной из составляющих его брэгговских волн (в данном случае  $\Omega^-$ ) становятся совершенно понятными, если рассмотреть полное поле в среде:

$$E(x, t) = \frac{\hbar}{2\mu} \{ \Omega^+ \exp[i(kx - \omega t)] + \Omega^- \exp[i(-kx - \omega t)] \} + \text{к. с.} = \\ = \frac{\hbar}{\mu} [ \Omega(x, t) \cos(kx - \omega t) - 2\Omega^-(x, t) \sin(kx) \sin(\omega t) ]. \quad (20)$$

Поле моды  $(-k)$  связано в «стоячей» волне амплитуды  $2\Omega^-$  (20) с частью поля прямой волны (заштрихованная область на рис. 1). Узлы «стоячей» волны расположены на резонансных плоскостях структуры, поэтому эта часть поля эффективно не взаимодействует со средой. Взаимодействие осуществляется лишь «бегущей» компонентой поля (20) с амплитудой  $\Omega$  (18).

Физические свойства Д-солитона и традиционного  $2\pi$ -импульса в сплошной среде существенно различаются. Формально  $2\pi$ -импульс описывается выражениями (15), (18) с учетом отличной от (16) шириной импульса [2]:

$$\tau_{2\pi} = \tau_c (1-u)^{1/2} / u^{1/2}. \quad (21)$$

Используя соотношения (16) и (21), запишем отношение скоростей Д- и  $2\pi$ -импульсов при условии равенства всех прочих параметров:

$$\frac{v}{v_{2\pi}} = \frac{1+\kappa^2}{(1+2\kappa^2)^{1/2}} \Big|_{\kappa \gg 1} \approx \frac{\kappa}{2^{1/2}},$$

где  $\kappa = \tau/\tau_c$ . Таким образом, при равенстве временных ширин импульсов  $\tau = \tau_{2\pi}$  скорость Д-солитона больше, поэтому и его пространственные размеры также в  $\kappa/2^{1/2}$  раз превышают ширину  $2\pi$ -импульса (в оптическом диапазоне длин волн можно получить величину  $\kappa > 10$  [2]). Для удобства сравнения на рис. 1 представлена динамика солитонов обоих типов. Необходимо помнить, что среды их распространения различны. Отметим также, что в настоящей работе не рассматривается влияние неоднородного уширения на динамику процесса. Его учет, так же как и в случае сплошной среды, не приводит к принципиально качественным изменениям.

Характерной особенностью Д-солитона является наличие плененной, эффективно не взаимодействующей со средой части поля, которая, очевидно, обладает определенной дополнительной по сравнению с  $2\pi$ -импульсом энергией. Оценим ее величину. Энергия возбуждения среды выражается через функцию инверсии  $n(x, t)$  следующим образом:

$$\mathcal{E}_m = \rho \frac{\hbar\omega}{2} \int [n(x, t) + 1] dV,$$

Тогда с учетом решения (12)  $n = -\cos \theta = 2 \operatorname{sech}^2(\xi/\tau) - 1$  получим

$$\mathcal{E}_m = 2v\tau\rho s\hbar\omega. \quad (22)$$

Используя (20), найдем энергию поля Д-солитона, усредненную по периодам быстро меняющихся функций. Полную среднюю энергию Д-солитона запишем в виде

$$\mathcal{E} = (1+\kappa^2)\mathcal{E}' + \kappa^2\mathcal{E}'', \quad \mathcal{E}' = 2\kappa^{-2}v\tau\rho s\hbar\omega. \quad (23)$$

В аналогичных обозначениях для  $2\pi$ -импульса получим

$$\mathcal{E}_{2\pi} = \mathcal{E}_{2\pi}' + \kappa_{2\pi}^2 \mathcal{E}_{2\pi}'', \quad \mathcal{E}_{2\pi}' = 2\kappa_{2\pi}^{-2}v_{2\pi}\tau_{2\pi}\rho s\hbar\omega, \quad (24)$$

где  $\kappa_{2\pi} = \tau_{2\pi}/\tau_c$ . Первые члены в правых частях выражений (23), (24) описывают энергию поля, а вторые — энергию возбуждения среды соответствующих импульсов. Сравнивая формулы (23) и (24), приходим к следующим основным заключениям: 1) энергия поля стоячей волны Д-солитона равна энергии возбуждения среды  $\mathcal{E}_m$ , поэтому полная энергия поля всегда превышает величину  $\mathcal{E}_m$ ; 2) при равенстве основных параметров импульсов и сред ( $\tau$ ,  $\kappa$ ,  $\rho$ ) дискретная брэгговская среда может формировать и пропускать без поглощения стационарные импульсы с большей энергией, чем сплошная среда:

$$\mathcal{E}/\mathcal{E}_{2\pi}|_{\kappa \gg 1} = 2\mathcal{E}'/\mathcal{E}'_{2\pi} \approx 2^{1/2}\kappa \gg 1, \quad (25)$$

причем энергия поля Д-солитона в  $\kappa^2 \gg 1$  раз превышает энергию поля  $2\pi$ -импульса.

Используя формулы (16), (19), (23), можно записать скорость импульса в виде  $c/v = (1 + \tilde{\mathcal{E}}/\mathcal{E}')^{1/2}$ , где  $\tilde{\mathcal{E}} = 2\kappa^2\mathcal{E}'$  — средняя энергия плененного поля «стоячей» волны и возбуждения среды,  $\mathcal{E}'$  — средняя энергия эффективного поля Д-солитона. Для  $2\pi$ -импульса [13]  $c/v_{2\pi} = 1 + \mathcal{E}_m/\mathcal{E}'$ .

Интересно обратить внимание на релятивистские свойства Д-солитона как частицы. Его пространственный размер  $l_u = tv$  выражается через лоренц-сокращение характерной длины взаимодействия  $l_c = \tau_c c/2^{1/2}$ :

$$l_u = l_c (1 - v^2/c^2)^{1/2},$$

а полная энергия (23) может быть представлена формулой Эйнштейна

$$\mathcal{E} = \frac{m_0}{(1 - u^2)^{1/2}} c^2, \quad (26)$$

где «масса покоя»  $m_0 = 4l_c \rho \hbar \omega / c^2$ . Для  $2\pi$ -импульса представление энергии в форме (26) невозможно, так как она равна

$$\mathcal{E}_{2\pi} = \frac{2^{1/2} l_c \rho \hbar \omega}{c^2} \frac{u^{1/2}}{(1 - u)^{1/2}} c^2.$$

### 5. Образование и распад Д-солитона в ограниченной среде. Теорема площадей

Рассмотренные выше свойства Д-солитона относятся к стационарным импульсам с площадью «бегущей» компоненты поля, равной  $2\pi$ . Для описания эволюции площади импульса  $\theta(x)$  в одноволновом случае доказана теорема площадей [2], согласно которой динамика изменения  $\theta(x)$  описывается уравнением затухающего маятника

$$\theta_x(x) = 1/2 \alpha_0 \sin \theta(x),$$

$\alpha_0$  — резонансный коэффициент поглощения. Величина  $\theta(x)$  всегда стремится к ближайшему устойчивому значению, кратному  $2\pi$ . Импульс распадается, если начальная площадь  $|\theta(0)| < \pi$ . Как эволюционирует площадь импульса в двухволновом случае?

Пусть поля  $\Omega^+(x, t)$  и  $\Omega^-(x, t)$  локализованы в пространстве и во времени. Тогда всегда найдется такое  $t_0$ , что при  $t \geq t_0$  в любой точке  $x$  поля  $\Omega^\pm(x, t) = 0$ , а площадь импульса

$$\theta(x, t > t_0) = \theta_0(x) = \int_{-\infty}^x \Omega(x, t') dt' \quad (27)$$

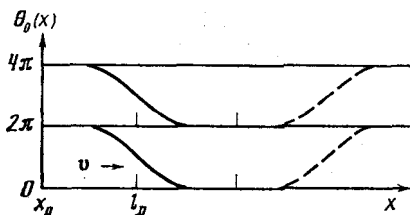


Рис. 2

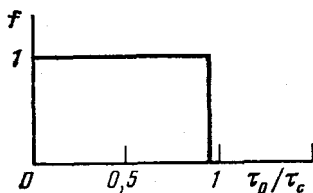


Рис. 4

Рис. 2. Эволюция площади двухволновых импульсов

Рис. 3. Временная зависимость огибающей амплитуды отраженного поля \$\Omega^-\$ (\$x=0, t\$), возникающего при падении на среду импульса \$\Omega\_0^+(t)\$ площадью \$\theta\_0^+=4\pi\$ и шириной \$\tau\_0=1,5\tau\_c\$ (верхние кривые) и \$\tau\_0 \approx \tau\_c\$ (нижние кривые)

Рис. 4. Зависимость «функции формирования» Д-солитона от ширины \$\tau\_0\$ падающего импульса \$\Omega\_0^+\$ при постоянной площади \$\theta\_0^+=4\pi\$. Функция \$f=1\$, если Д-солитон формируется, и \$f=0\$, если происходит лишь отражение поля

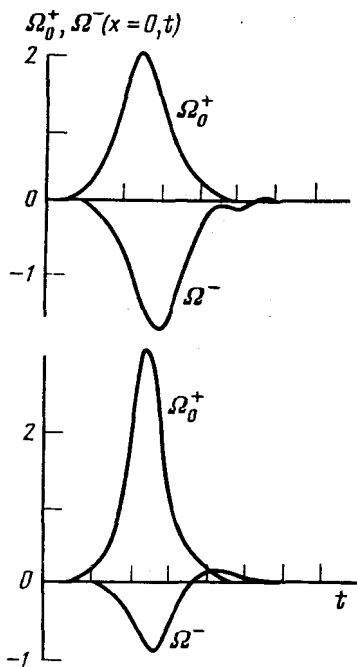


Рис. 3

не зависит от времени. Поэтому для любого  $t \geq t_0$  уравнение (13) преобразуется к виду

$$d^2\theta_0(x)/dx^2 = l_c^{-2} \sin \theta_0(x). \quad (28)$$

Это уравнение описывает динамику площади импульса при его распространении вдоль брэгговской среды. По виду оно является уравнением незатухающих маятниковых колебаний площади  $\theta_0$  с устойчивым положением равновесия  $\theta_0 = \pi$ . Его решение в случае малого начального отклонения  $\Delta \ll 1$  от положения неустойчивого равновесия  $\theta_0(x_0) = 2\pi n - \Delta$  имеет вид

$$\theta_0(x) = 2\pi n + 4 \arctg \exp[(-x + l_D)/l_c] \quad (29)$$

в области  $4ml_D \leq x \leq 2(2m+1)l_D$  и

$$\theta_0(x) = 2\pi n + 4 \arctg \exp[(x - l_D)/l_c] \quad (30)$$

в области  $2(2m+1)l_D < x < 4(m+1)l_D$ ;  $n, m = 0, 1, \dots$

На рис. 2 изображены графики решения (29) (сплошные кривые) и (30) (штриховые кривые) при  $n=0, 1, m=0, 1$ . Случаю  $(2\pi n + \Delta)$  формально соответствуют эти же кривые, но со смещенным начальным значением  $x_0$  в точку  $2l_D$ . Решение при  $n=0$  отвечает движению импульса двухволнового поля с начальной площадью активной компоненты поля  $\theta_0(x=x_0) =$



$=2\pi - \Delta$ . Перемещаясь от точки  $x_0$  вдоль оси  $x$ , импульс сохраняет площадь на участке длиной  $\Delta x \ll l_D$  и начинает распадаться по мере приближения к точке  $x = l_D = l_c \ln|4/\Delta|$ . По определению (27), уравнение (28) не описывает динамику распада импульса, так как этот процесс является нестационарным и понятие площади в смысле (27) становится неопределенным из-за появления нелокализованных полей  $\Omega^\pm$ . Однако (28) и, следовательно, его решения (29), (30) могут описывать динамику  $\theta_0(x)$  асимптотически в области  $|x - l_D| \gg l_D$ , когда площадь импульса относительно устойчива.

Для рассмотрения реальной динамики импульса и проверки формул (29), (30) было проведено численное интегрирование системы уравнений (9) с граничными условиями

$$\begin{aligned} \Omega^+(x=0, t) &= \Omega_0^+(t), & \Omega^-(x=l, t) &= 0, \\ \Omega^\pm(x, t=0) &= 0, & \theta(x, t=0) &= 0, \end{aligned} \quad (31)$$

соответствующими падению импульса внешнего поля  $\Omega_0^+(t)$  на границу  $x=0$  невозбужденной среды длиной  $l$ . Решение этой задачи позволило также ответить и на другой важный вопрос о возможности возбуждения внешним полем Д-солитона в ограниченной среде.

На верхних кривых рис. 3 представлены графики амплитуды падающего импульса  $\Omega_0^+(t) = \Omega_0 \operatorname{sech}[(t-t_0)/\tau_0]$  с площадью  $\theta_0^+ = 4\pi$  и полушириной  $\tau_0 = 1,5\tau_c$  и отраженного поля  $\Omega^-(0, t)$ . Наблюдается полное брэгговское отражение подобно случаю линейного взаимодействия. После взаимодействия среда остается полностью невозбужденной. Уменьшение длительности падающего импульса до величины  $\tau_0 = \tau_c$  приводит к резкому уменьшению отраженного сигнала — подавлению брэгговского отражения (нижние кривые рис. 3). В среде рождается Д-солитон. Численное моделирование нелинейного брэгговского отражения для импульсов  $\Omega_0^+(t)$  с различными параметрами  $\theta_0^+$  и  $\tau_0$  позволяет заключить, что для образования Д-солитона достаточно, чтобы параметры импульса удовлетворяли условиям

$$\theta_0^+ > 4\pi, \quad \tau_0 \leq \tau_c. \quad (32)$$

По поводу условий (32) сделаем два замечания. Во-первых, отметим, что для просветления резонансно поглощающей брэгговской среды недостаточно иметь импульс определенной площади (как в случае сплошной среды  $\theta_0^+ > \pi$ ), необходимо также, чтобы его длительность удовлетворяла условию (32). Это связано с необходимостью быстрого вращения вектора Блоха на угол  $\sim 2\pi$  и формирования Д-солитона, пока поле не успело покинуть среду вследствие брэгговского отражения. Таким образом, резонансная брэгговская среда осуществляет селекцию импульсов не только по площади, но и по интенсивности (рис. 4). Второй важной особенностью процесса подавления брэгговского отражения является возможность его осуществления даже в том случае, когда условия (32) выполнены лишь для части импульса (рис. 5).

Вернемся к теореме площадей. Изменяя параметры импульсов внешнего поля при численном моделировании, мы имели возможность проследить эволюцию двухволновых импульсов в среде при различной начальной площади. Анализ этих результатов позволил прийти к следующему заключению, которое отражает содержание теоремы площадей в двухволновом случае: импульсы площадью  $\theta_0 = \pm 2\pi n \mp \Delta$  ( $0 < \Delta < 2\pi$ ,  $n = 2, 3, \dots$ ), распространяясь в резонансной брэгговской среде, эволюционируют к устойчивым двухволновым локализованным импульсам с суммарной площадью  $\theta_0(x = \pm\infty) = 2\pi(\pm n \mp 1)$ , причем при  $\Delta \ll 1$  динамика импульса в областях  $x \ll l_D$  и  $x \gg l_D$  описывается формулой (29) ( $\theta_0 > 0$ ). Распад импульсов  $(2\pi n - \Delta) \rightarrow 2\pi(n-1)$  сопровождается потерями энергии по двум каналам: брэгговское рассеяние и остаточное возбуждение среды. Процесс стано-

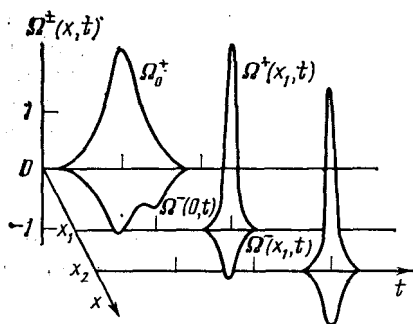


Рис. 5. Рождение Д-солитона широким импульсом с площадью  $\theta_0^+ = 10\pi$ , но относительно малой амплитудой ( $\tau_0 = 3,7\tau_c$ )

вится необратимым и «обратного» вращения блоховского маятника, т. е. возврата к прежней площади импульса, согласно формуле (30) не происходит.

Интересное явление возникает, когда внешнее поле  $\Omega_0^+$  формирует в среде двухволновой импульс с площадью  $\theta_0 = 2\pi - \Delta$ . Последний распространяется по образцу, претерпевая инверсию формы и направления скорости движения (рис. 6, а). В результате большая часть поля внешнего импульса излучается спустя некоторое время задержки, зависящее от величины отстройки площади  $\Delta$ . Происходит задержка отражения (рис. 6, б).

Нетривиальная инфраструктура поля Д-солитона проявляется и при его взаимодействии с неоднородностями среды. Наиболее существенная из них — граница среда — вакуум. Поведение Д-солитона при выходе из среды также исследовалось нами путем численного интегрирования системы (9) с граничными условиями (31). Интуитивно ясно, что возникающая на краю образца неоднородность среды должна приводить к нарушению установившегося коллективного взаимодействия поле — среда и как следствие — к освобождению «плененной» солитонной моды  $\Omega^-$ . Фактически так и происходит. Достигнув границы  $x=l$ , Д-солитон разрушается, поле правой волны выходит из среды, а освободившееся поле  $\Omega^-$  распространяется в противоположном направлении (вдоль собственного волнового вектора) и в случае короткой среды спустя некоторое время запаздывания, равное времени пробега фотона через среду, излучается в форме затухающих осцилляций малой интенсивности на границе  $x=0$ . В протяженной среде ( $l \gg l_c$ ) поле  $\Omega^-$  затухает.

## 6. Сверхизлучение в дискретной брэгговской среде

Адекватность моделирования процесса СИ, точнее, его начальной стадии — спонтанного распада в полуклассическом описании определяется выбором начальных условий. Используемый нами метод численного интегрирования системы (8) позволяет наиболее полно проследить динамику СИ в случае стохастических начальных условий:

$$P(x_i, 0) = \sin \theta_0 \exp(i\phi_i), \quad n(x_i, 0) = \cos \theta_0, \quad (33)$$

$$\Omega^\pm(x, 0) = \Omega^+(0, t) = \Omega^-(l, t) = 0.$$

Начальный блоховский угол  $\theta_0 = 2/N^{1/2}$  ( $N$  — полное число излучателей в системе) [16, 17], а стохастическая начальная поляризация  $P(x_i, 0)$  задается независимо в каждой  $i$ -й точке случайным выбором фазы  $\phi_i$  из интервала значений  $[0, 2\pi]$ . Средняя поляризация атомов системы в начальный момент времени отсутствует ( $\langle P_i \rangle_v = 0$ ), атомы излучают независимо. Далее происходит взаимная фазировка всех  $i$ -х диполей в коллективном поле излучения (в случае точного соблюдения условия Брэгга). В системе появляется макроскопически средняя поляризация с некоторой случайной фазой, непредсказуемой для каждой конкретной реализации начальных условий  $\{\phi_i\}$ . Эволюция коллективного псевдоспина приводит систему в когерентное СИ состояние, и она интенсивно излучает. Многократное повторение численного эксперимента при различных  $\{\phi_i\}$  позволило прийти к заключению, что в брэгговской системе стохастическое за-

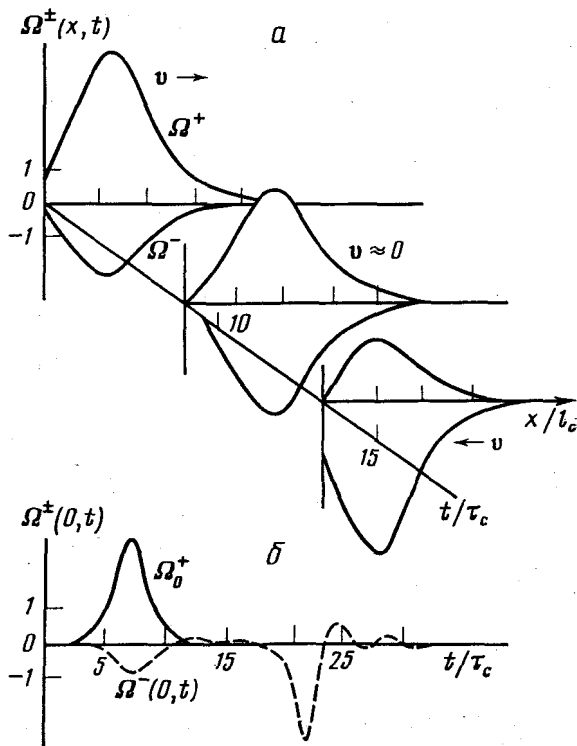


Рис. 6. *a* — эволюция импульса площадью  $\theta_0 = (2\pi - 0,6)$  при распространении вдоль брэгговской среды; *b* — огибающая амплитуды внешнего падающего импульса  $\Omega_0^+(t)$  и поля излучения  $\Omega^-(x=0, t)$  на входной границе

дание начальной поляризации приводит лишь к случайному характеру распределения задержки СИ  $\tau_b$  и к его увеличению по отношению ко времени задержки в случае когерентных начальных условий  $\varphi_i = \text{const}$  ( $\tau_{D0}$ , рис. 7). Вместе с тем форма и максимальное значение интенсивности импульсов СИ практически не меняются (изменения составляют не более 4%). Импульсы СИ при когерентных и стохастических начальных условиях практически неразличимы.

Как известно, импульс СИ формируется на нелинейной стадии процесса излучения, когда происходит быстрое изменение угла  $\theta(t)$  [3]. Поэтому обнаруженное постоянство формы импульса свидетельствует о полной фазировке всех  $i-x$ -излучателей и образовании когерентного коллективного состояния на линейной стадии взаимодействия поля со средой, причем этот результат характерен только для брэгговской системы. Нарушение пространственной когерентности ( $d \neq \lambda$ ) при случайных начальных условиях вызывает значительное непредсказуемое изменение формы импульсов СИ, а также некоррелированность излучения в противоположных направлениях. Аналогичные флуктуации формы наблюдаются при моделировании СИ сплошных сред [18, 19], где также существует лишь слабое взаимодействие встречных волн и невозможна полная фазировка всех диполей с полями обеих волн.

При численном моделировании СИ протяженной брэгговской системы длиной  $l \gg l_c$  были обнаружены локализованные устойчивые нестационарные возбуждения поля и среды. На рис. 8 представлена динамика инверсии  $n(x, t) = \cos \theta(x, t)$ , соответствующая такому возбуждению, полученному при интегрировании уравнений (8) с граничными условиями (33) при следующих параметрах процесса:  $\tau_p = l/c = 10\tau_c$ ,  $d = \lambda$ ,  $\varphi_i = 0$ ,  $\theta_0 = 10^{-5}$ .

В случае случайных начальных условий  $\{\varphi_i\}$  форма решения получается аналогичной, но с более узкой областью возбуждения и стохастическим ее смещением относительно центра среды.

Возможность существования локализованных возбуждений в брэгговской системе подробно обсуждалась в предыдущих разделах, однако рассмотренное там решение (Д-солитон) явно отличается от полученного в

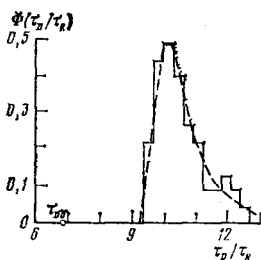


Рис. 7

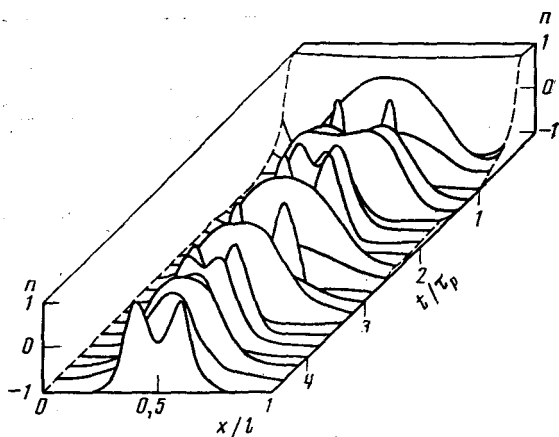


Рис. 8

Рис. 7. Функция плотности вероятности распределения времени задержки СИ  $\Phi(\tau_D/\tau_R)$ , полученная при численном моделировании СИ для ста различных реализаций стохастических начальных условий  $\{\theta_0, \varphi_i\}$ . Параметры  $\theta_0=10^{-2}$ ,  $l=l_c$ . Характерное время СИ  $\tau_R=\tau_c^2/\tau_p$ ,  $\tau_p=l/c$

Рис. 8. Эволюция инверсии при сверхизлучении протяженной среды в двухволновом случае

задаче СИ. Необходимо исследовать несолитонные устойчивые решения синус-уравнения Гордона (13) и среди них искать аналоги решения, представленного на рис. 8. Простейшим из устойчивых нестационарных решений уравнения (13) является бризер

$$\theta(\tilde{x}, \tilde{t}) = 4 \arctg \{ \operatorname{tg} v \sin(\tilde{t} \cos v) \operatorname{sech}(\tilde{x} \sin v) \}, \quad (34)$$

где параметр  $0 < v < 2\pi$  определяет характерную ширину и амплитуду бризера,  $\tilde{x} = x/l_c$ ,  $\tilde{t} = t/(\tau_c/2^{1/2})$ . Проведенное нами непосредственное сравнение графиков функции  $\cos \theta(\tilde{x}, \tilde{t})$ , вычисленной с помощью (34), с решением задачи СИ рис. 8 позволяет заключить, что локализованное нестационарное возбуждение, появляющееся в результате эволюции сверхизлучающей брэгговской системы, описывается бризерным решением (34) уравнения (13) и соответствующими выражениями для полей  $\Omega^\pm$  (14). Наблюдаемое на рис. 8 сужение области возбуждения со временем связано с диссипацией энергии за счет излучения поля с торцов образца.

## 7. Заключение

Экспериментальное обнаружение двухволнового солитона, а также наблюдение эффектов задержки и подавления отражения импульсов когерентного поля в условиях нелинейной двухволновой дифракции в одномерной резонансной среде, на наш взгляд, не требуют принципиальных изменений в традиционных схемах, используемых в современных экспериментах по когерентной нелинейной оптике [2–5, 20]. Любая резонансная среда, в которой наблюдается явление СИП или СИ, потенциально является объектом исследований. Необходимо только создать брэгговскую

структуру, в которой атомы активного вещества сосредоточены в тонких периодически расположенных плоскостях, разделенных слоями непоглощающей прозрачной среды. Простые оценки показывают, что для формирования Д-солитона в оптическом диапазоне длин волн необходимо иметь структуру с большим числом слоев ( $N \geq 100$ ). Длительность импульсов не должна превышать 10–100 пс.

Авторы благодарят А. В. Андреева, В. А. Бушуева и А. М. Леонтовича за полезные обсуждения и замечания.

### Литература

1. *Dicke R. H.* Phys. Rev., 1954, **93**, 99.
2. *Аллен Л., Эберли Дж.* Оптический резонанс и двухуровневые атомы. М.: Мир, 1978.
3. *Андреев А. В., Емельянов В. И., Ильинский Ю. А.* УФН, 1980, **131**, 653.
4. *Ребане А. К., Каарли Р. К., Саари П. М.* Письма в ЖЭТФ, 1983, **30**, 320.
5. *McCall S. L., Hahn E. L.* Phys. Rev., 1969, **183**, 457.
6. *Андреев А. В., Арутюнян Р. В., Ильинский Ю. А.* Вестн. МГУ, сер. Физика, 1979, **20**, 47.
7. *Карнюхин А. В., Кузьмин Р. Н., Намиот В. А.* ЖЭТФ, 1982, **82**, 561.
8. *Манцызов Б. И., Кузьмин Р. Н.* Письма в ЖТФ, 1984, **10**, 857.
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963.
10. *Агранович В. М., Гинзбург В. Л.* Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. М.: Наука, 1979.
11. *Микаэлян А. Л., Тер-Микаэлян М. Л., Турков Ю. Г.* Оптические генераторы на твердом теле. М.: Сов. радио, 1967.
12. *Манцызов Б. И., Бушуев В. А., Кузьмин Р. Н. и др.* ЖЭТФ, 1983, **85**, 862.
13. *Lamb G. L.* Rev. Mod. Phys., 1971, **43**, 99.
14. *Дедушенко К. Б., Маймистов А. И.* ЖПС, 1982, **37**, 653.
15. *Волощенко Ю. И., Рыжов Ю. Н., Согин В. Е.* ЖТФ, 1981, **51**, 902.
16. *Polder D., Schuurmans M., Vreken Q.* Phys. Rev., 1979, **A19**, 1192.
17. *Vreken Q., Schuurmans M.* Phys. Rev. Lett., 1979, **42**, 224.
18. *Haake F., King H., Schröder G. et al.* Phys. Rev. Lett., 1979, **42**, 1740.
19. *Haake F., King H., Schröder G. et al.* Phys. Rev., 1979, **A20**, 2047.
20. *Леонтович А. М., Можаровский А. М.* Изв. АН СССР, сер. физ., 1984, **48**, 527.

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию  
25.XII.1985

## COHERENT INTERACTION BETWEEN LIGHT AND A DISCRETE PERIODIC RESONANT MEDIUM

*B. I. Mantsyov, R. N. Kuz'min*

Soliton solutions are obtained for the two-wave Maxwell – Bloch equations which describe the coherent nonlinear interaction between light and a resonant medium under conditions of diffraction in a one-dimensional structure. The conditions for formation and the dynamic properties of a novel type of localized excitations – the «two-wave» soliton, are considered. A stable nonstationary solution for the field and excitation of the medium, the two-wave breeder, is found in the superradiance problem. The phenomenon of self-induced nonlinear suppression of diffractive reflection of the field at the boundary and of scattering in the medium is predicted as well as an effect of «delayed» reflection of a field pulse.