

Биномиальное распределение и его предельные формы

- Биномиальное распределение
- Предельные формы биномиального распределения
 - Распределение Пуассона
 - Распределение Гаусса
- Примеры использования для описания молекулярных явлений

Биномиальное распределение

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$$

- **$P_n(m)$** – вероятность состояния, в котором из n частиц системы m частиц находятся в благоприятных микросостояниях;
- **p** – вероятность, с которой каждая частица находится в благоприятном состоянии;
- **$q=1-p$** – вероятность, с которой каждая частица находится в неблагоприятном состоянии (с которой частица не находится в благоприятном состоянии);
- **Среднее значение** $\langle m \rangle = np$
- **Дисперсия** $\sigma_m = \sqrt{npq}$

Микроскопическое описание		m (число «решек»)	$\Gamma(n, m)$	$P(n, m)$
№ микросостояния s	Доступные микросостояния			
1	0 0 0 0	0	$\Gamma(4, 0) = C_4^0 = 1$	$1/16 = 0,0625$
2	r 0 0 0	1	$\Gamma(4, 1) = C_4^1 = 4$	$4/16 = 0,25$
3	0 r 0 0			
4	0 0 r 0			
5	0 0 0 r			
6	r r 0 0	2	$\Gamma(4, 2) = C_4^2 = 6$	$6/16 = 0,375$
7	r 0 r 0			
8	r 0 0 r			
9	0 r r 0			
10	0 r 0 r			
11	0 0 r r			
12	r r r 0	3	$\Gamma(4, 3) = C_4^3 = 4$	$4/16 = 0,25$
13	r r 0 r			
14	r 0 r r			
15	0 r r r			
16	r r r r	4	$\Gamma(4, 4) = C_4^4 = 1$	$1/16 = 0,0625$



Биномиальное распределение

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$$

Например, при бросании монеты вероятность выпадения решки $p=1/2$, а при бросании $n=10$ раз вероятность того, что выпадут две решки ($m=2$), равна

$$P_{10}(2) = \frac{10!}{2!(10-2)!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-2} = 0,043$$

Предельные формы биномиального распределения

Распределение Пуассона

- 1) число частиц (случайных величин) $n \gg 1$ (в пределе $n \rightarrow \infty$);
- 2) вероятность p реализации благоприятного события для одной случайной величины очень мала: $p \ll 1$;
- 3) $np = \text{const}$ ($\langle m \rangle = np$)

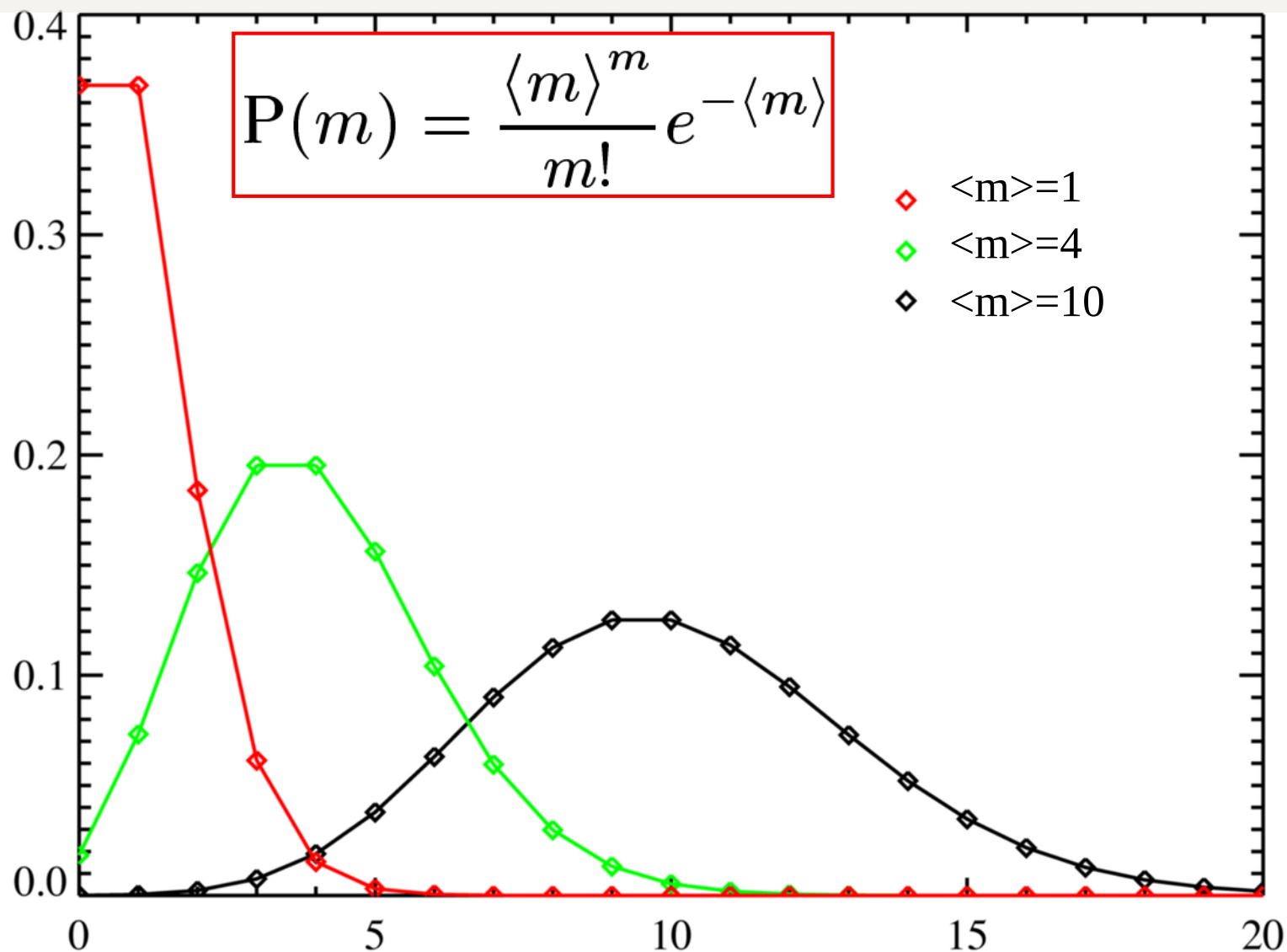
$$(p + q)^n = \sum_{m=0}^n C_n(m) p^m q^{n-m}$$

$$P(m) = \frac{\langle m \rangle^m}{m!} e^{-\langle m \rangle}$$

Пример 1. Представим себе, что на 100 монет приходится одна юбилейными. Какова вероятность того, что если взять 200 монет две из них окажутся юбилейными?

$$P(2) = \left(\langle 2 \rangle^2 / 2! \right) e^{-\langle 2 \rangle} = 0,27.$$

Распределение Пуассона

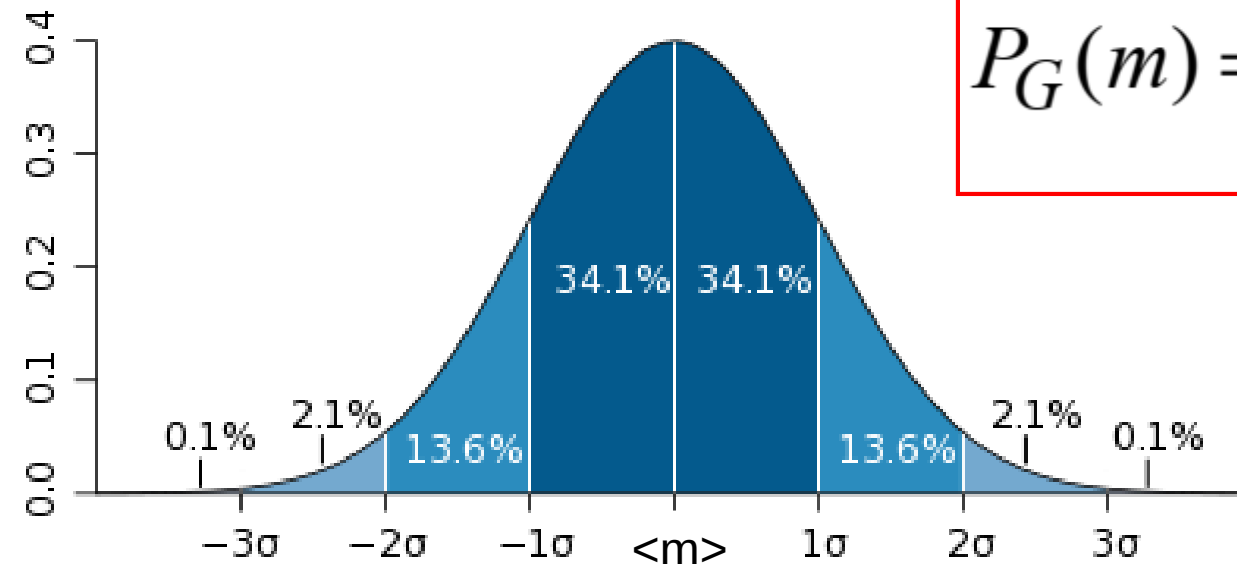


Предельные формы биномиального распределения

Распределение Гаусса

- 1) число частиц (случайных величин) $n \gg 1$ (в пределе $n \rightarrow \infty$);
- 2) для значений m , близких к $\langle m \rangle$, т.е. при отклонении от среднего значения на величину порядка стандартного отклонения.

$$P_G(m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m-\langle m \rangle)^2}{2\sigma^2}}$$



$$\frac{d \ln m!}{dm} \approx \ln m$$

Постулат равновероятности

Основной постулат статистической физики – микросостояния равновесной изолированной системы равновероятны и равны $P_s = 1/\Gamma_0$,

Эргодическая гипотеза

Эргодическая гипотеза в статистической физике, состоит в предположении, что средние по ансамблю равно среднему по времени.

(из эргодической гипотезы следует постулат равновероятности)

$$\overline{N}_1 = \langle N_1 \rangle$$

$$\overline{N}_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T N_1(t) \cdot dt.$$

Примеры использования для описания молекулярных явлений

1. Идеальный газ находится в закрытом сосуде объемом 1 м^3 . Давление равно 10^5 Па, температура равна 273 К. В сосуде выделен малый объем равный 1 см^3 . С какой вероятностью в малом объеме не окажется не одной молекулы?
2. Идеальный газ находится в закрытом сосуде объемом 1 м^3 . Давление равно 10^5 Па, температура равна 273 К. В сосуде выделен малый объем равный 1 см^3 . Какова вероятность того, что в малом объеме будет находиться на 2 молекулы меньше среднего числа молекул в этом объеме?