- Теоремы о равнораспределении энергии по степеням свободы

- Броуновское движение

Теоремы о равнораспределении энергии по степеням свободы

- В состоянии термодинамического равновесия кинетическая энергия молекулы, приходящаяся на каждую поступательную и вращательную степень свободы, одинакова и равна $k_Б T/2$.

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{m\left\langle v_x^2\right\rangle}{2} + \frac{m\left\langle v_y^2\right\rangle}{2} + \frac{m\left\langle v_z^2\right\rangle}{2} =$$

$$= \frac{kT}{2} + \frac{kT}{2} + \frac{kT}{2}$$

$$\frac{m\left\langle v_{0x}^2\right\rangle}{2} = \frac{m\left\langle v_{0y}^2\right\rangle}{2} = \frac{m\left\langle v_{0z}^2\right\rangle}{2} = \frac{J_x\left\langle \omega_x^2\right\rangle}{2} = \frac{J_y\left\langle \omega_y^2\right\rangle}{2} = \frac{J_z\left\langle \omega_z^2\right\rangle}{2} = \frac{kT}{2}$$

Броуновское движение

- В 1827 г. английский ботаник Р. Броун наблюдал в микроскоп с сильным увеличением беспорядочное движение субмикронных частиц (спор семян), взвешенных в воде. Интенсивность броуновского движения увеличивалась с ростом температуры среды и с уменьшением ее вязкости и размеров частиц.

- Впоследствии пришло понимание того, что Б. Д. является результатом многочисленных толчков, испытываемых субмикронной спорой со стороны окружающих ее молекул жидкости.

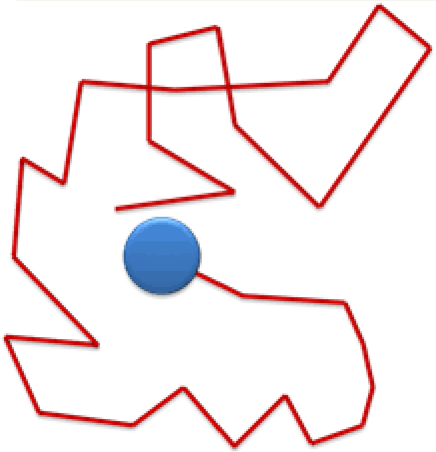
Броуновское движение

- **Броуновское движение –** это хаотическое (беспорядочное) тепловое движение взвешенной в жидкости или газе броуновской частицы под действием ударов молекул окружающей среды. Броуновская частица имеет размеры, значительно превосходящие размеры молекул среды (жидкости или газа), в которой она находится.

- **Причина броуновского движения –** флуктуации силы, действующей на броуновскую частицу со стороны молекул среды, возникающие в результате флуктуаций суммарного импульса, передаваемого молекулами среды, ударяющимися о броуновскую частицу.

Броуновское движение

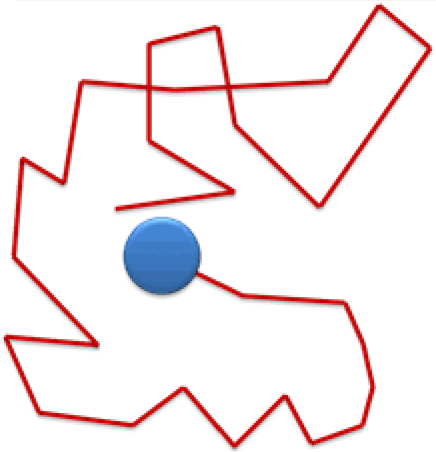
Броуновское движение



- За время наблюдения $t \gg \Delta t$ число блужданий равно за равные промежутки времени $n = t/\Delta t$.
- Пусть при каждом блуждании частица совершает случайное перемещение $\mathbf{q}_i$, тогда при блужданиях случайное смещение частицы от начальной точки (начала координат) будет определяться радиусом-вектором

$$\mathbf{r}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{q}_i$$

Броуновское движение



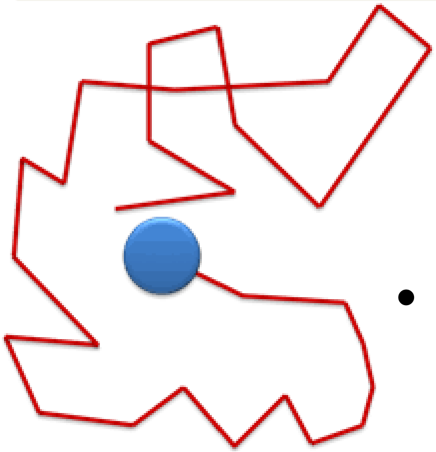
- Если проводить серию из большого числа опытов, то для среднего значения квадрата удаления частицы от начала координат можно записать

$$\langle r_n^2 \rangle = \left\langle \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle q_i^2 \rangle + \sum_{i \neq j}^{n} \langle \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j \rangle$$

- Поскольку блуждания статистически независимы, то положительные слагаемые второй суммы в среднем «уравновешиваются» точно такими же отрицательными слагаемыми

$$\sum_{i \neq j}^{n} \langle \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j \rangle = 0 \qquad\qquad \langle q_i^2 \rangle = q^2$$

Броуновское движение



$$\langle r_n^2 \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle q_i^2 \rangle = q^2 \frac{t}{\Delta t} = \alpha \cdot t$$

- При случайных блужданиях среднеквадратичное удаление частицы от начала координат пропорционально времени!

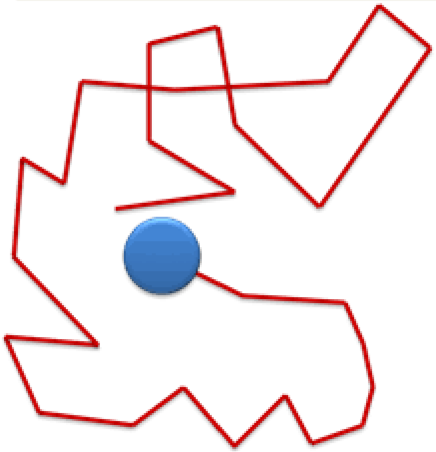
- Для движения центра масс частицы вдоль координатной оси *Ox*,можно записать уравнение движения в виде

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} + F_x$$

где *b*— коэффициент трения вязкой жидкости, F_x— проекция на координатную ось случайной силы, вызванной столкновениями.

$$\langle r_n^2 \rangle = \alpha \cdot t = \frac{6kT}{b} t$$

Броуновское движение



Подтверждение этой формулы было получено Перреном в 1906 г. на экспериментальной установке, на которой проверялось распределение Больцмана. Он фиксировал положения частиц гуммигута через интервалы времени.

- Перреном была вычислена постоянная Больцмана. Ее значение хорошо согласовывалось со значением $\kappa_Б$, полученным им в ранее описанном опыте. Все это доказывало справедливость молекулярно-кинетических представлений.
- Законами броуновского движения определяется диффузия в газах, случайные движения ионов в растворах электролитов и электронов в электрических цепях и пр.

Теоремы о равнораспределении энергии по степеням свободы

- В состоянии термодинамического равновесия кинетическая энергия молекулы, приходящаяся на каждую поступательную и вращательную степень свободы, одинакова и равна $k_Б T/2$.

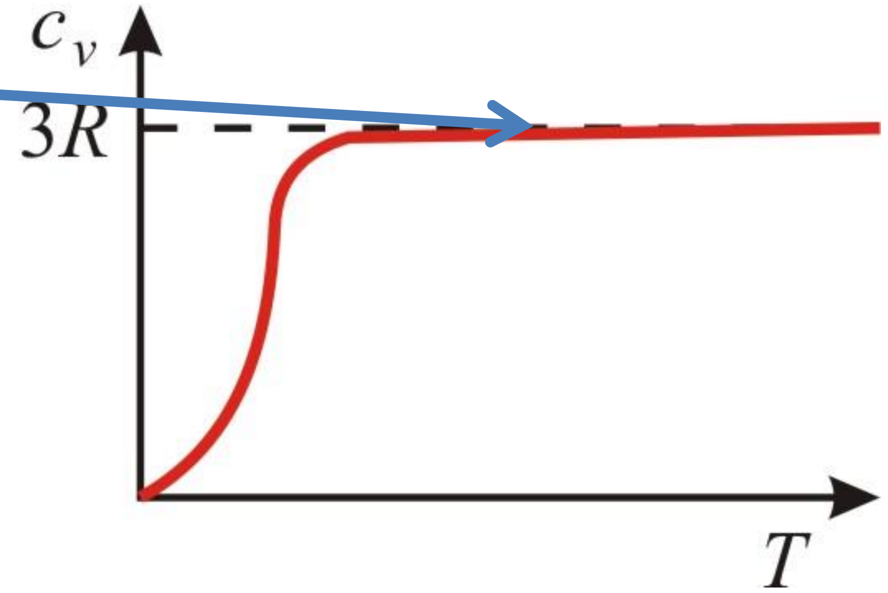
$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{m\left\langle v_x^2 \right\rangle}{2} + \frac{m\left\langle v_y^2 \right\rangle}{2} + \frac{m\left\langle v_z^2 \right\rangle}{2} =$$

$$= \frac{kT}{2} + \frac{kT}{2} + \frac{kT}{2}$$

$$\frac{m\left\langle v_{0x}^2 \right\rangle}{2} = \frac{m\left\langle v_{0y}^2 \right\rangle}{2} = \frac{m\left\langle v_{0z}^2 \right\rangle}{2} = \frac{J_x\left\langle \omega_x^2 \right\rangle}{2} = \frac{J_y\left\langle \omega_y^2 \right\rangle}{2} = \frac{J_z\left\langle \omega_z^2 \right\rangle}{2} = \frac{kT}{2}$$

Закон Дюлонга и Пти

Закон Дюлонга и Пти C_V=3R

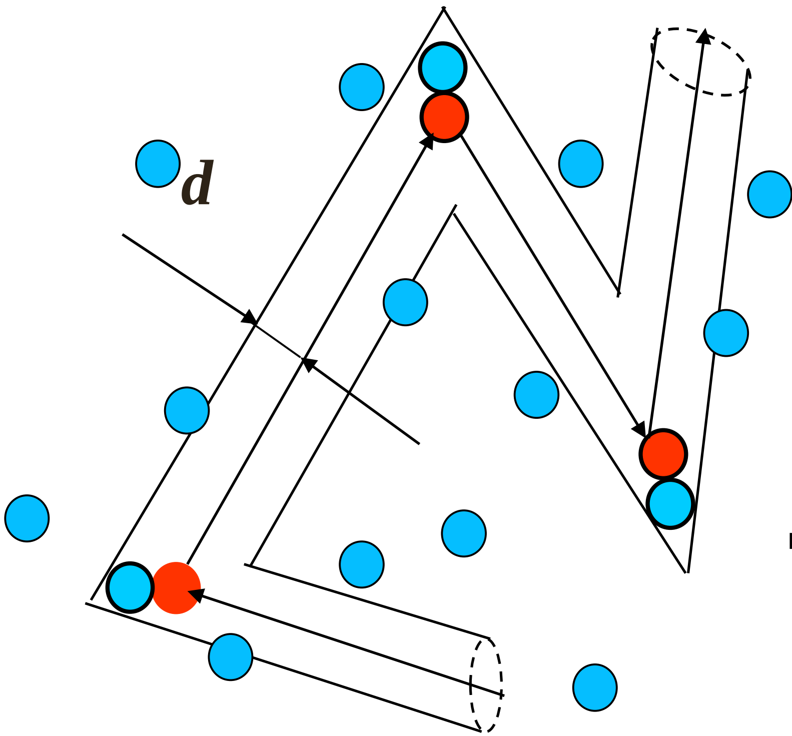


- Эксперименты показывают, что при приближении к $T = 0$ теплоемкость неметаллических твердых тел стремится к нулю по степенному закону $c_v \sim T^3$.

Молекулярно-кинетические характеристики

- Длина свободного пробега
- Частота соударений
- Газокинетический диаметр
- Рассеяние молекулярных пучков в газе
- Опыт Борна
- Молекулярно-кинетические характеристики жидкостей и твердых тел.

Длина свободного пробега

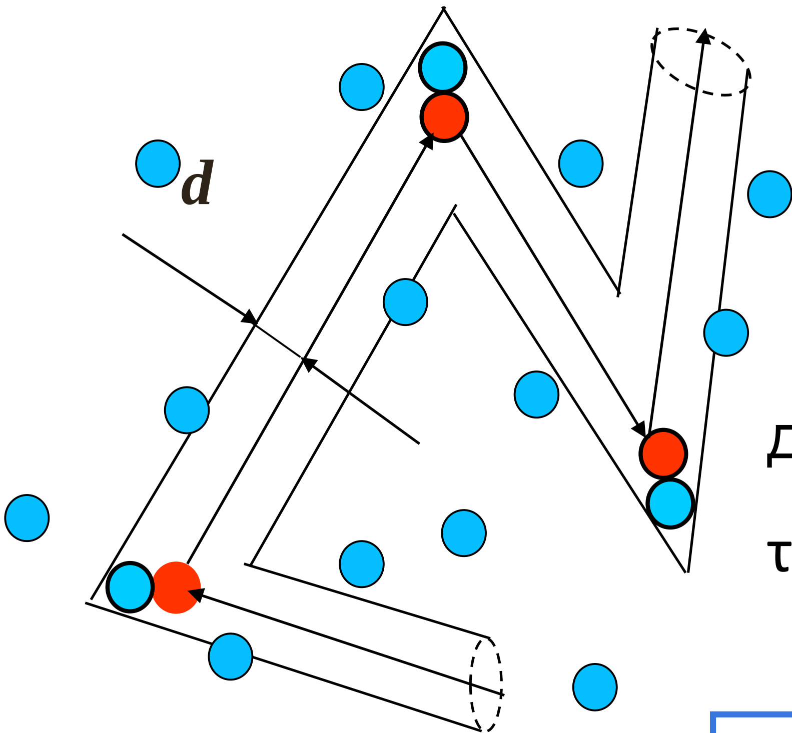


Расстояние, проходимое молекулой между двумя последовательными столкновениями называется *длиной свободного пробега*.

В кинетической теории важным параметром является **средняя длина свободного пробега** (или просто **длина свободного пробега**).

Ее вычисление наиболее просто выполнить, используя представление о частице, являющейся упругим шариком диаметром $d=2r_0$ (r_0 — радиус шарика).

Длина свободного пробега



Средняя длина свободного пробега

$$\langle\lambda\rangle = \langle\upsilon\rangle\tau$$

<*v*> - **Средняя скорость** теплового движения молекулы

τ - **время между столкновениями**

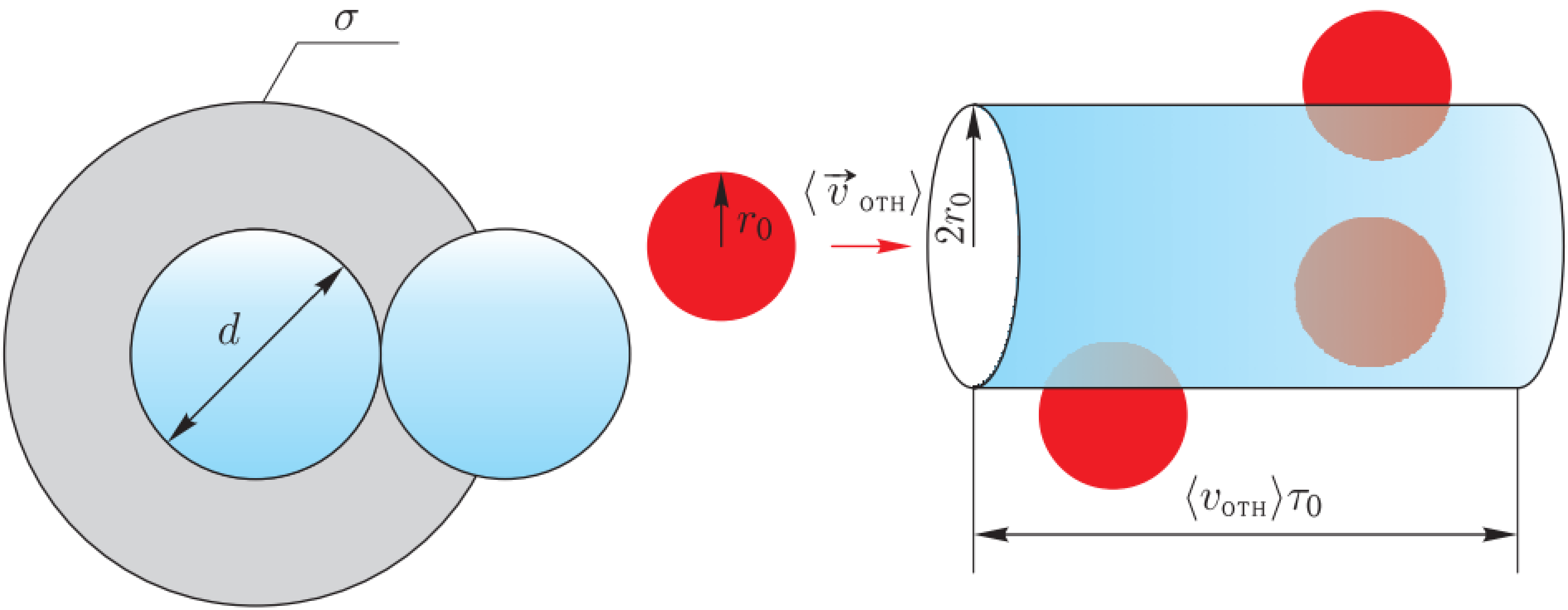
$$\langle\lambda\rangle = \frac{\langle\upsilon\rangle}{\langle z\rangle}$$

$$\langle\upsilon_{отн}\rangle = \sqrt{2}\cdot\langle\upsilon\rangle$$

$$\langle z\rangle = \sqrt{2}\pi d^2\langle\upsilon\rangle n$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$$

Длина свободного пробега

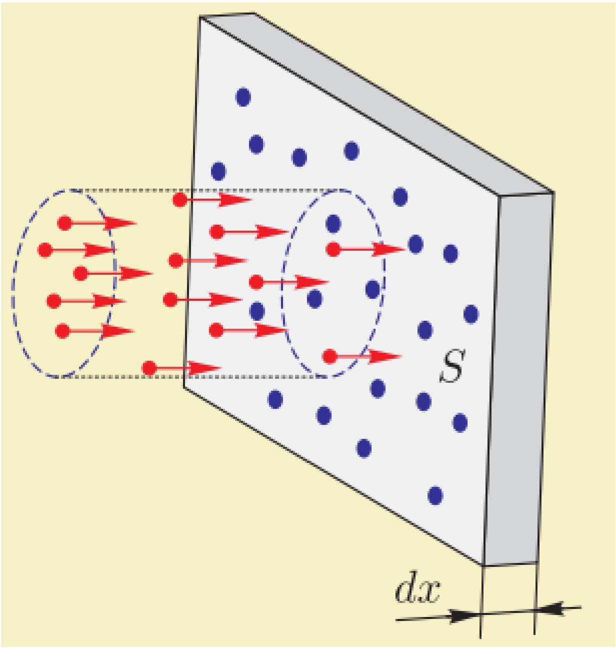


Столкновения будут только с теми молекулами, центры которых лежат внутри цилиндра радиусом d .

Если скорость частицы равна ***v***, а скорость мишени равна ***v'***, то $\boldsymbol{v}_{\text{отн}} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'$

$$\langle \mathbf{v}_{\text{отн}}^2 \rangle = \left\langle (\mathbf{v} - \mathbf{v}')^2 \right\rangle = \langle \mathbf{v}^2 \rangle - 2 \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \rangle + \langle \mathbf{v}'^2 \rangle = 2 \langle \mathbf{v}^2 \rangle$$

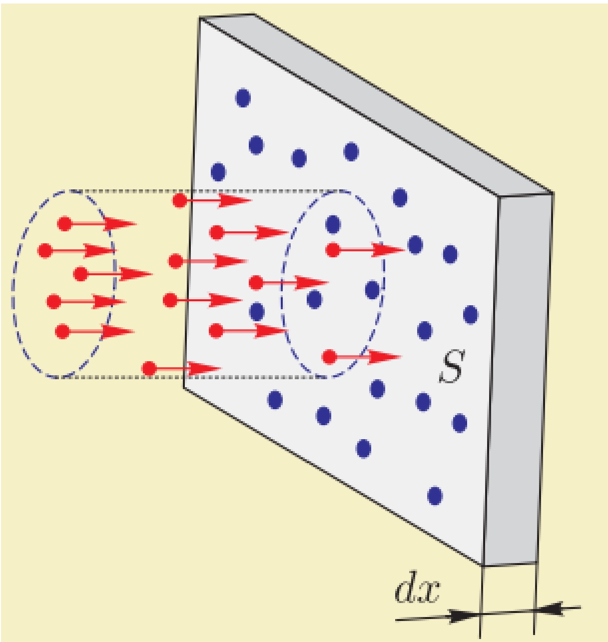
Вероятностный характер процесса столкновения



Процесс столкновения носит случайный характер: частица может пролететь самое разное расстояние между двумя ближайшими столкновениями.
Аналогично при бомбардировке вещества потоками частиц (электронами, протонами и др.) частицы могут рассеиваться.

При этом эти процессы носят случайный характер. Фундаментальной величиной процесса является ***сечение рассеяния*** σ, которое зависит от механизма взаимодействия бомбардирующих частиц с атомами вещества.

Вероятностный характер процесса столкновения

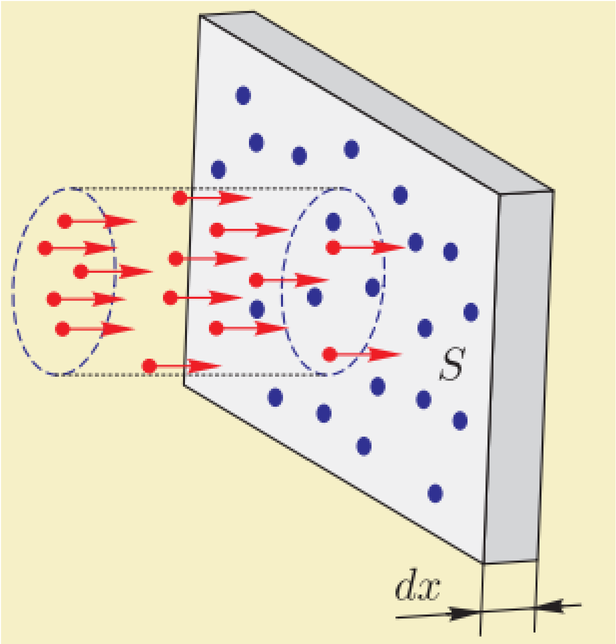


Пусть на слой рассеивающей среды площадью сечения *S* толщиной *dx*, падает поток частиц. В этом слое находится *dN=nSdx*, рассеивающих частиц среды (*n*— концентрация).

Тогда вероятность рассеяния этим слоем одной частицы равна dP=*(σ/S)dN*

$$d\mathrm{P} = \frac{\sigma\, n S\, dx}{S} = \sigma\, n\, dx$$

Вероятностный характер процесса столкновения



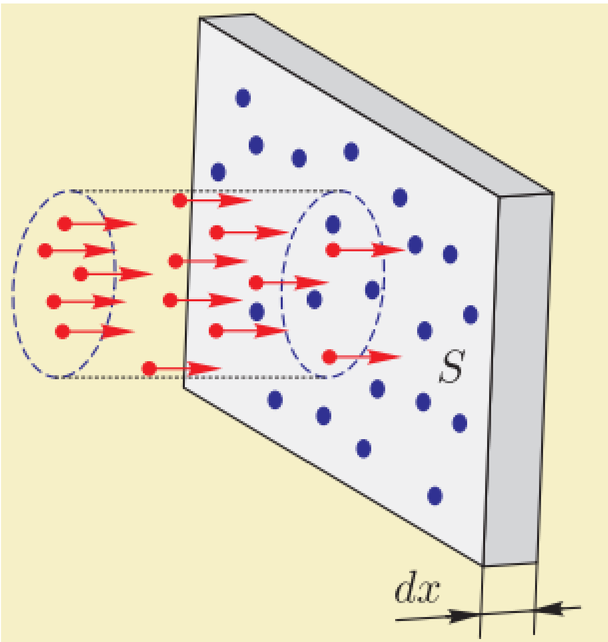
Если направить поток I_0 частиц в рассеивающую среду, то он будет постепенно ослабевать. Рассеяние в слое толщиной, приводит к уменьшению потока на величину $dI<0$. Вероятность рассеяния связана с этим изменением соотношением

$$dP = -\frac{dI}{I(x)} = \sigma n \, dx$$

$I(x)=I_0\exp(-x/\lambda)$

Измеряя ослабление потока при разных толщинах среды, рассчитывают длину свободного пробега, а затем и сечение рассеяния.

Вероятностный характер процесса столкновения



$$\frac{-dI}{I(x)} = \frac{-dn\ u}{I(x)} = \sigma n u\, dt$$

u - скорость частиц.

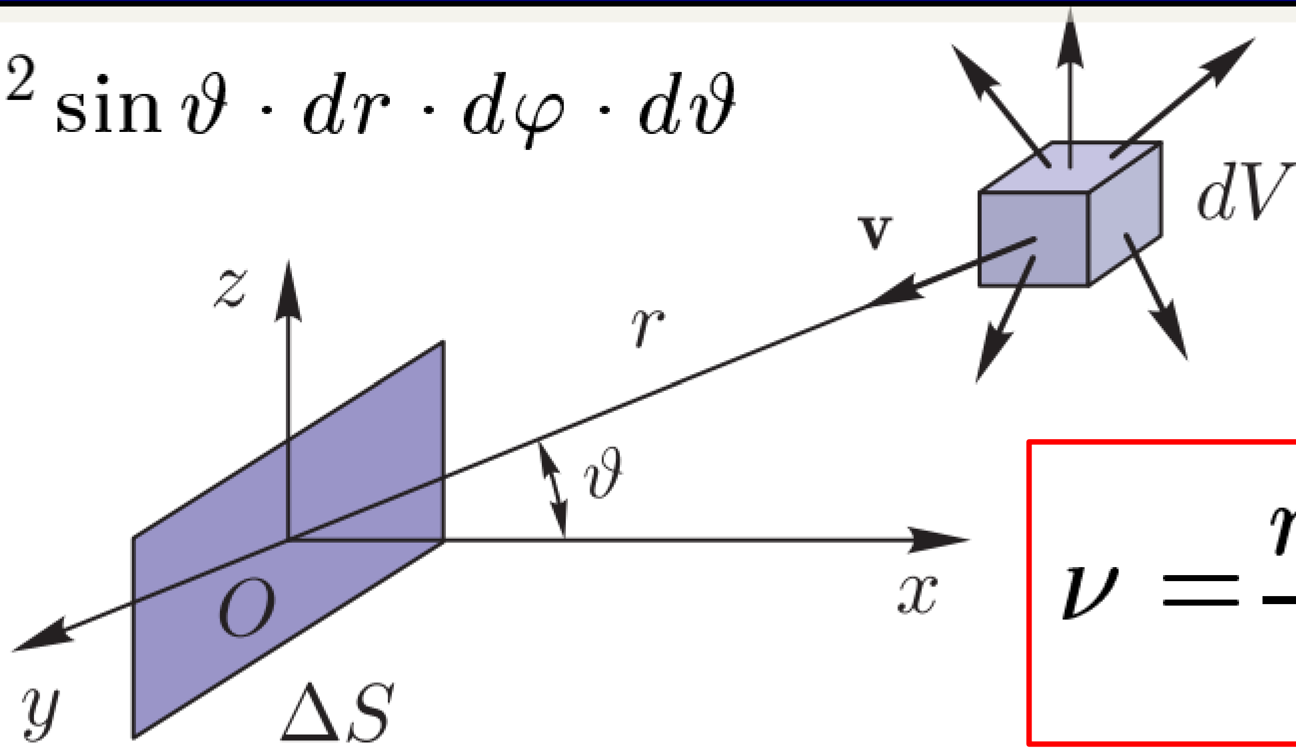
$$\sigma = \frac{1}{n}\frac{-dn'/dt}{I(x)}$$

Эффективное сечение рассеяния равно отношению числа частиц, выбывших из пучка за единицу времени при взаимодействии с одной частицей мишени, к величине потока этих частиц.

Эффективное поперечное сечение широко используется в ядерной и нейтронной физике для выражения вероятности протекания определенной ядерной реакции при столкновении двух частиц.

Столкновение частиц со стенкой сосуда

$$dV = r^2 \sin\vartheta \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\vartheta$$



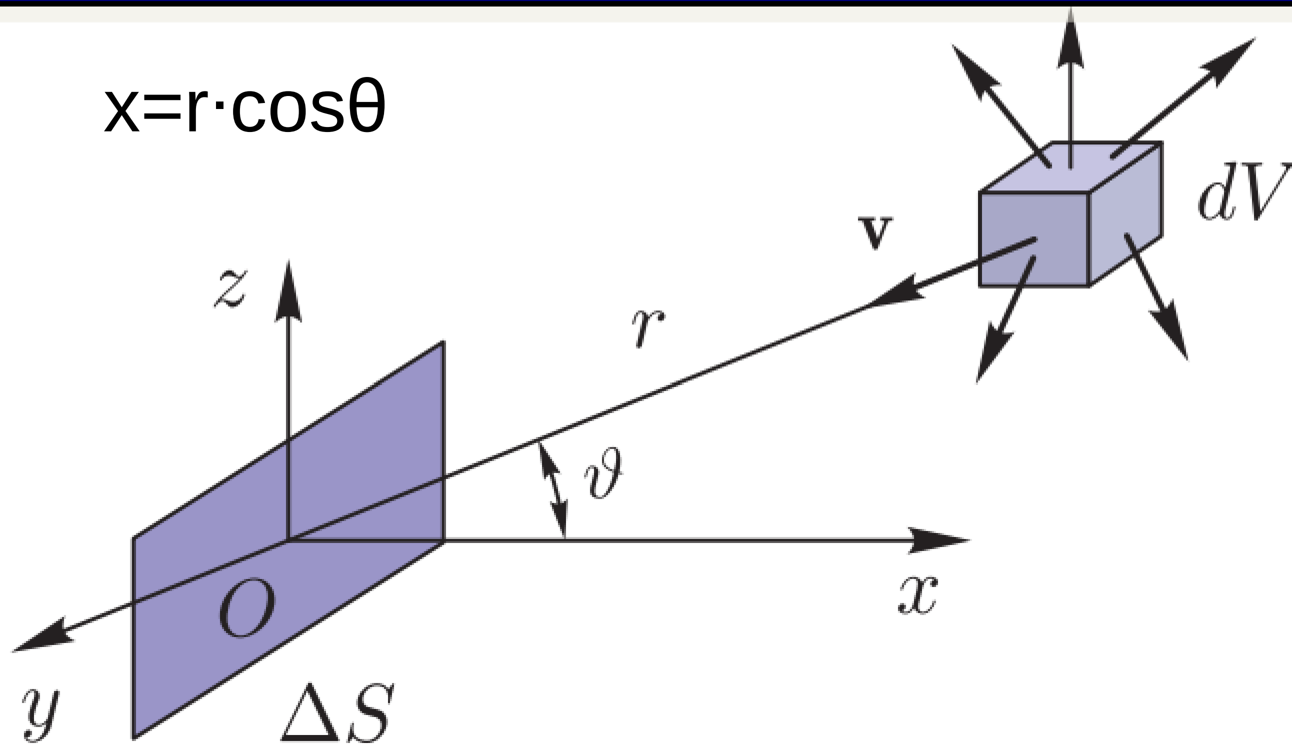
$$\boxed{\nu = \frac{n_0 \langle v \rangle}{4}}$$

Из объема *dV* изотропно по всем направлениям вылетают после столкновения частицы, число которых за время *Δt* равно

$$dN_0=(\langle v\rangle/\lambda)\Delta t \cdot n \cdot dV$$

Столкновение частиц со стенкой сосуда

$x = r \cdot \cos\theta$



Вычислим среднее удаление λ_X, частиц от стенки в момент их последнего столкновения с другими частицами. Эта величина определяется интегрированием и равна $\lambda_X = 2\lambda/3$