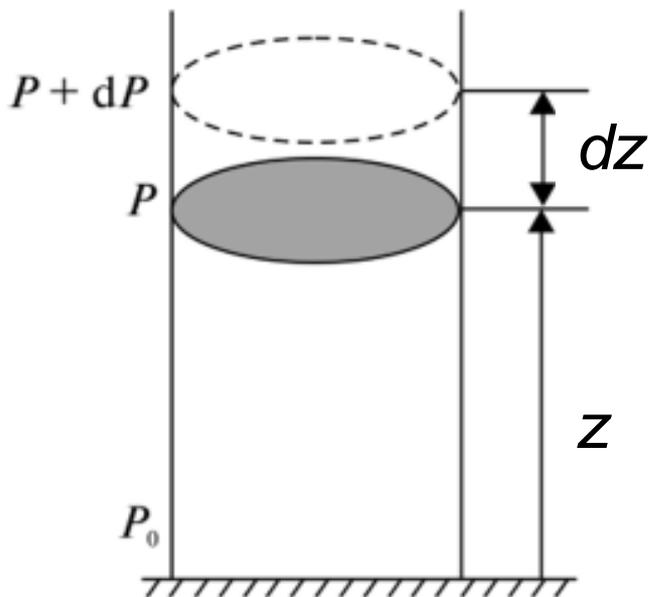


Распределение Больцмана

- **Распределение Больцмана**
- **Опыт Перрена**
- **Распределение Максвелла–Больцмана**

Распределение Больцмана

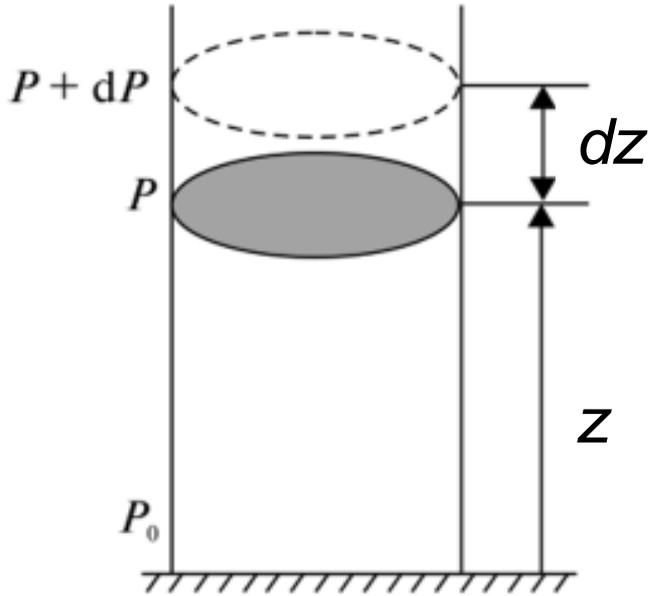


Если молекулы идеального газа, находятся при температуре T в потенциальном поле, то вероятность $dP_B(x, y, z)$, с которой молекула газа, обладающая потенциальной энергией $U(x, y, z)$, имеет координаты в интервале значений $(x, x+dx)$, $(y, y+dy)$, $(z, z+dz)$ описывается распределением Больцмана.

$$dP_B(x, y, z) = A \exp\left(-\frac{U(x, y, z)}{k_B T}\right) dx dy dz$$

Константа A находится из условия нормировки распределения.

Распределение Больцмана



- Вероятность нахождения частицы в фазовом объеме (распределение Гиббса)

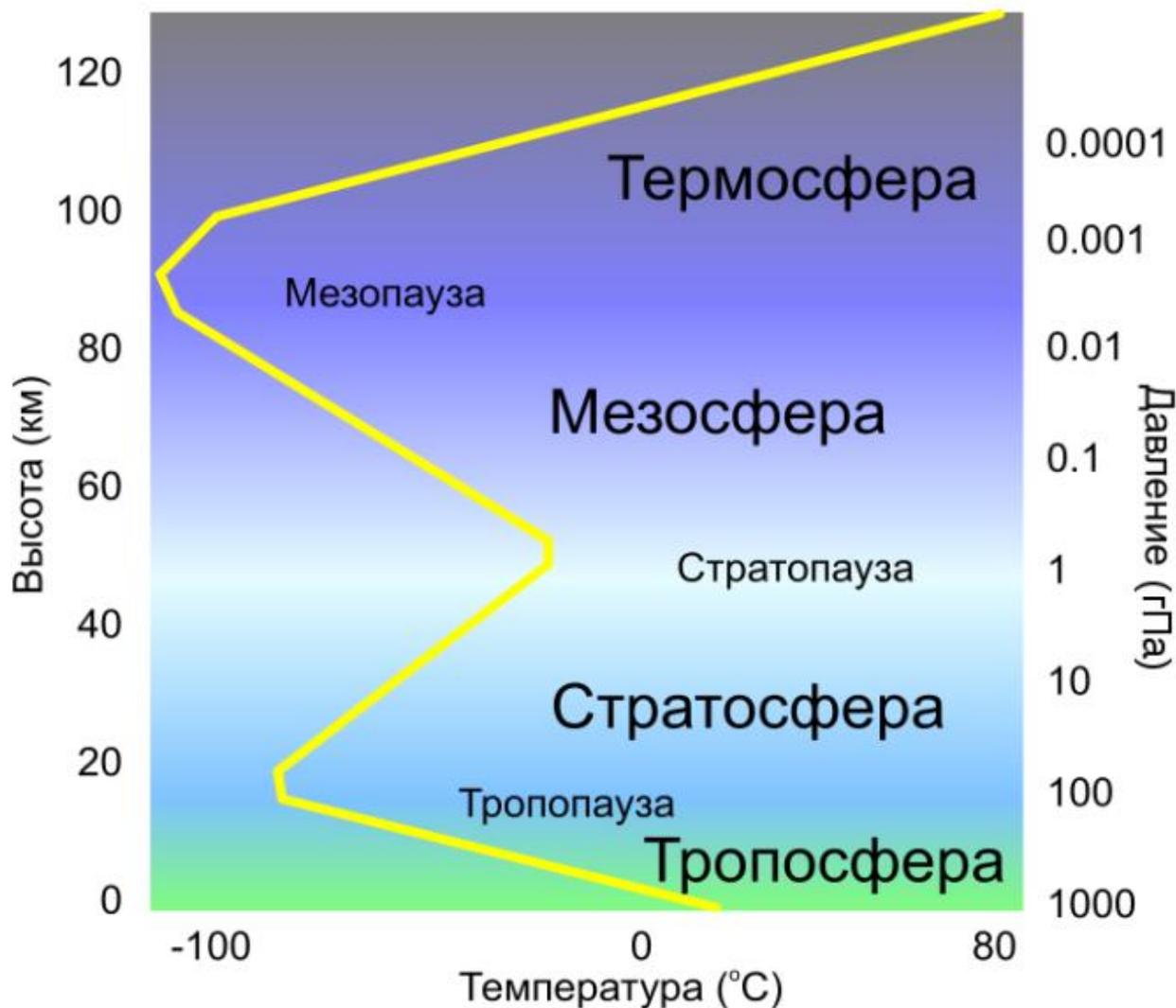
$$dP = A \exp\{-E/KT\} d\Gamma$$

- Рассмотрим идеальный газ, находящийся в термодинамическом равновесии при некоторой температуре T .
- Будем считать поле силы тяжести однородным.

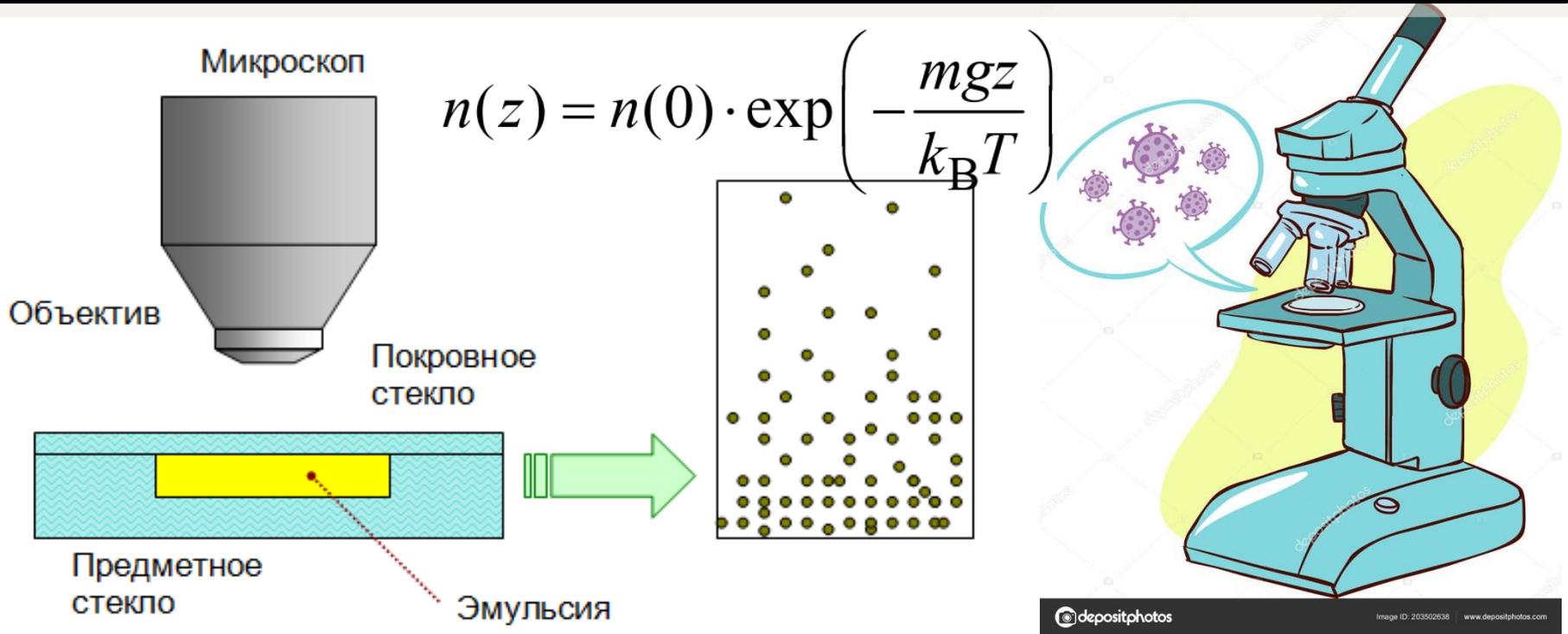
$$n(z) = n(0) \cdot \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right) \cdot U(z) = mgz$$

• Средняя энергия

Распределение давления в покоящейся газе в поле сил тяжести

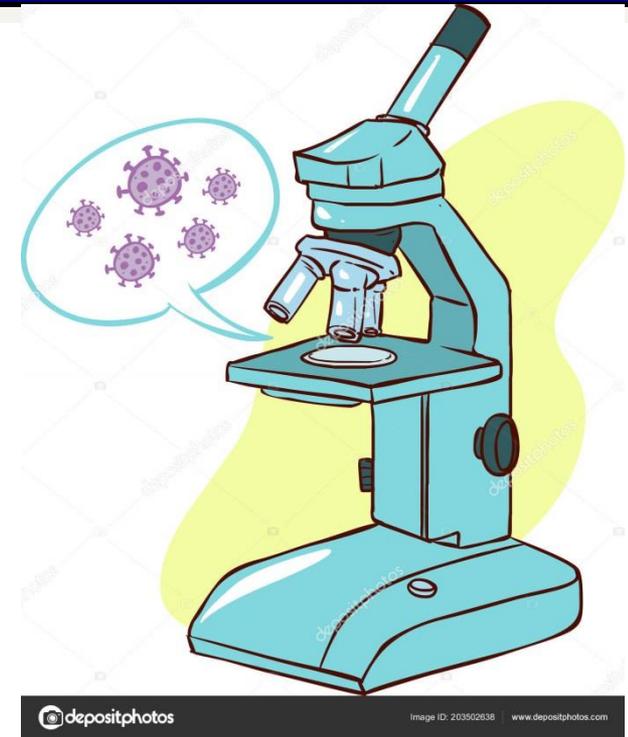
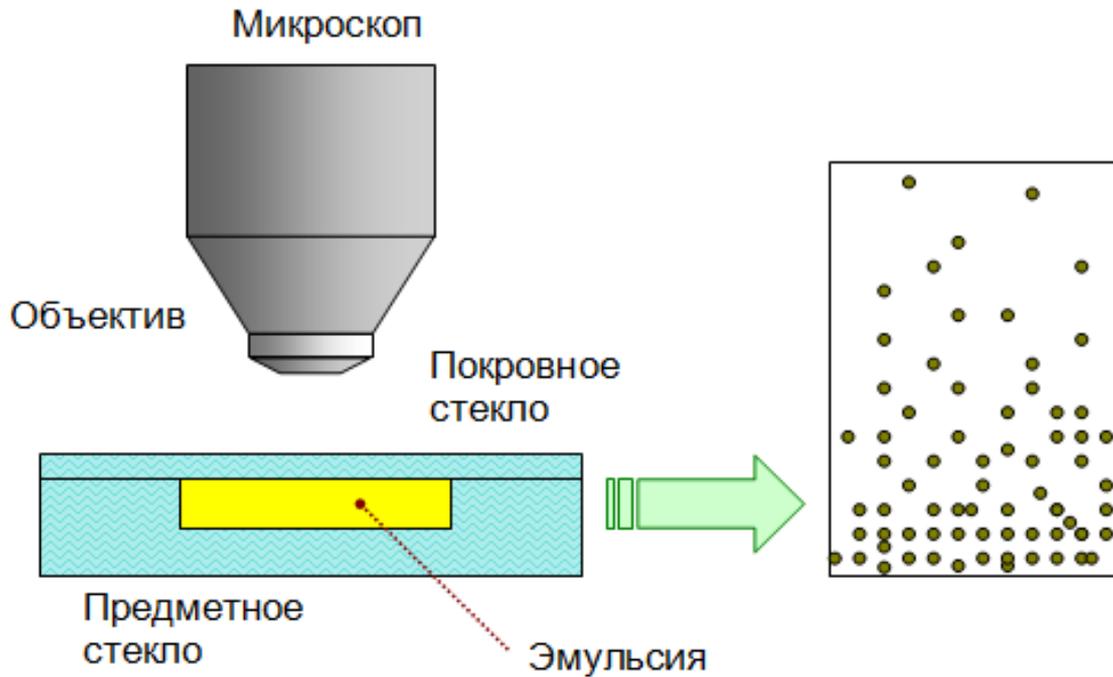


Опыт Перрена



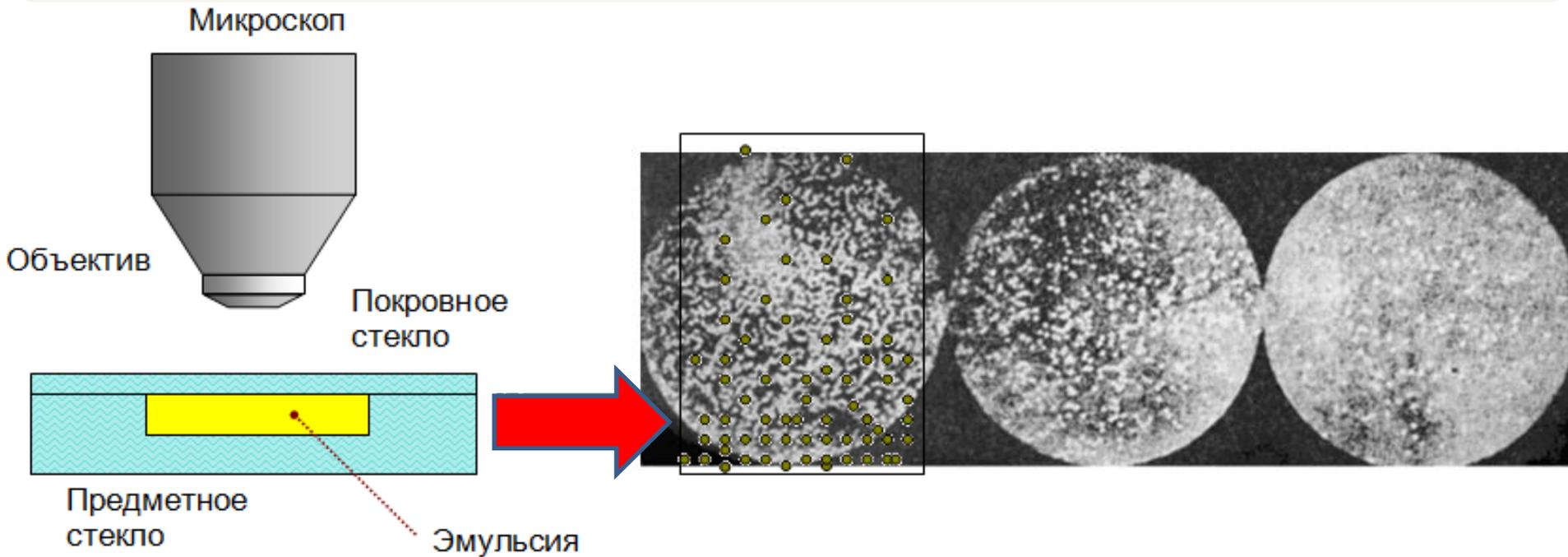
- **Эмульсия** представляла собой взвесь одинаковых сферических частиц специального древесного сока или смолы (гуммигута) в воде. Размер этих частиц (около 0,4 мкм) позволял наблюдать их в микроскоп.

Опыт Перрена



- Под микроскопом исследовалось броуновское движение частиц, которые распределялись по высоте подобно молекулам газа в поле тяготения.
- Микроскоп наводился на верхний слой эмульсии, делали через микроскоп мгновенную фотографию, подсчитывали число броуновских частиц на фотографии.

Опыт Перрена



Далее тубус микроскопа опускали на 0,01 мм, снова фотографировали и подсчитывали число броуновских частиц на фотографии. Оказалось, что на дне сосуда броуновских частиц больше, на поверхности эмульсии меньше, а в целом распределение броуновских частиц по высоте соответствует распределению Больцмана.

Распределение по энергиям

Вероятность, с которой молекула идеального газа имеет значение энергии в интервале $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$:

$$dP_L(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{k_B T} \right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T} \right) d\varepsilon$$

Плотность вероятности:

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{k_B T} \right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T} \right)$$

$$\varepsilon_{\text{НВ}} = \frac{k_B T}{2} \quad \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{3k_B T}{2}$$

Распределение Максвелла по скоростям

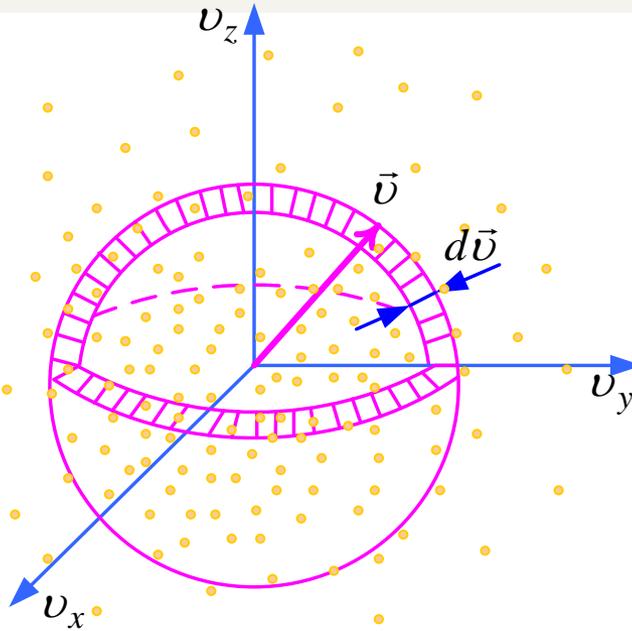


Рисунок 1.2

- Вероятность нахождения частицы в фазовом объеме (распределение Гиббса)

$$dP = A \exp\{-E/KT\} d\Gamma$$

- Для практических целей важно определять число частиц, модуль скорости которых находится в интервале $(v; v+dv)$
- фазовый объем для этого случая

$$d\Gamma = 4\pi v^2 dv$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha v_x^2) dv_x = \sqrt{\pi/\alpha}$$

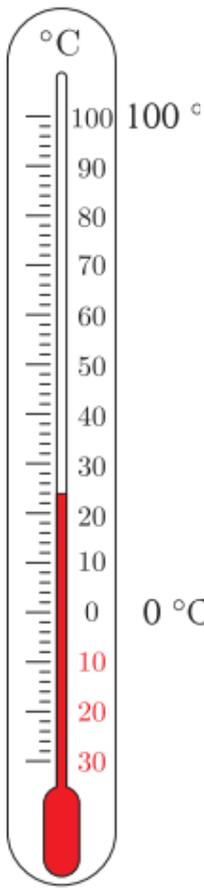
Распределение Максвелла–Больцмана

- Распределения Максвелла и Больцмана взаимосвязаны и являются составными частями распределения Гиббса.
- Итак, закон Максвелла даёт распределение частиц по значениям кинетической энергии, а закон Больцмана – распределение частиц по значениям потенциальной энергии.
- Оба распределения можно объединить в единый **закон Максвелла-Больцмана**, согласно которому, число молекул в единице объёма, скорости которых лежат в пределах от v до $v \pm dv$ равно

$$dP = \frac{\exp [-(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2mkT] \exp [-\varepsilon_{\Pi}(x, y, z)/kT] dp_x dp_y dp_z dx dy dz}{(2\pi mkT)^{3/2} \int \exp [-\varepsilon_{\Pi}(x, y, z)/kT] dx dy dz}$$

Термометры и температурные шкалы

Температурная шкала Цельсия была предложена шведским астрономом А. Цельсием в 1742 г. За $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ стали принимать температуру таяния льда, а за $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ — кипения воды.



0 °C

Термометр



Термометры и температурные шкалы

Шкала Кельвина. В 1727 г. французский физик Ж. Шарль экспериментально установил, что давление не очень плотных газов, заключенных в фиксированный объем, возрастает пропорционально их температуре в соответствии с законом

$$p = p_0(1 + \alpha t)$$

в котором температура измеряется по шкале Цельсия, p_0 — давление при температуре 0°C , коэффициент термического увеличения давления $\alpha = 273 \text{град}^{-1}$ и практически одинаков для большого числа различных газов.

$$T = t + \alpha^{-1} = t + 273$$

Это дает прекрасную возможность использовать разреженный газ в качестве термометрического тела, а давление будет термометрической величиной.

Теоремы о равномерном распределении энергии по степеням свободы

- В состоянии термодинамического равновесия кинетическая энергия молекулы, приходящаяся на каждую поступательную и вращательную степень свободы, одинакова и равна $k_B T/2$.

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon \rangle &= \frac{m \langle v_x^2 \rangle}{2} + \frac{m \langle v_y^2 \rangle}{2} + \frac{m \langle v_z^2 \rangle}{2} = \\ &= \frac{kT}{2} + \frac{kT}{2} + \frac{kT}{2}\end{aligned}$$

$$\frac{m \langle v_{0x}^2 \rangle}{2} = \frac{m \langle v_{0y}^2 \rangle}{2} = \frac{m \langle v_{0z}^2 \rangle}{2} = \frac{J_x \langle \omega_x^2 \rangle}{2} = \frac{J_y \langle \omega_y^2 \rangle}{2} = \frac{J_z \langle \omega_z^2 \rangle}{2} = \frac{kT}{2}$$