Распределение Максвелла

- Распределение Максвелла по компонентам скоростей
- Распределение Максвелла по абсолютным значениям скоростей
- Распределение Максвелла при различных температурах
- Характерные скорости распределения Максвелла
- Распределение по энергиям
- Экспериментальная проверка распределения Максвелла
- Частота ударов молекул о стенку
- Давление идеального газа
- Теоремы о равнораспределении энергии по степеням свободы

Распределение Максвелла по скоростям

- **Распределение Максвелла по скоростям** — это распределение по скоростям молекул газа, находящегося в состоянии термодинамического равновесия, названное по имени английского физика Дж. Максвелла, установившего это распределение в 1859 г.
- **Распределение Максвелла по скоростям** не зависит от конкретного вида взаимодействия между молекулами и справедливо не только для газов, но и для жидкостей, если для них возможно классическое описание. Важно только, чтобы ***взаимодействие молекул не зависело от их скоростей и описывалось потенциальной энергией, зависящей только от координат молекул***.

Распределение Максвелла по скоростям

Распределение Максвелла по компонентам скоростей:

$$dP(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi k_\text{B} T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2 + mv_y^2 + mv_z^2}{2k_\text{B} T}\right) dv_x dv_y dv_z$$

Плотность вероятности:

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi k_\text{B} T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2 + mv_y^2 + mv_z^2}{2k_\text{B} T}\right)$$

В силу независимости каждой из компонент скоростей, получаем:

$$dP(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_\text{B} T}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2k_\text{B} T}\right) dv_x$$

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_\text{B} T}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2k_\text{B} T}\right)$$

Распределение Максвелла по скоростям

Распределение Максвелла по абсолютным значениям скоростей:

$$dP(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}} T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_{\mathrm{B}} T}\right) 4\pi v^2 dv$$

Плотность вероятности:

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

Число частиц, модуль скорости которых находится в интервале ($v;v+dv$): $dN=NdP(v)$

Распределение Максвелла по скоростям

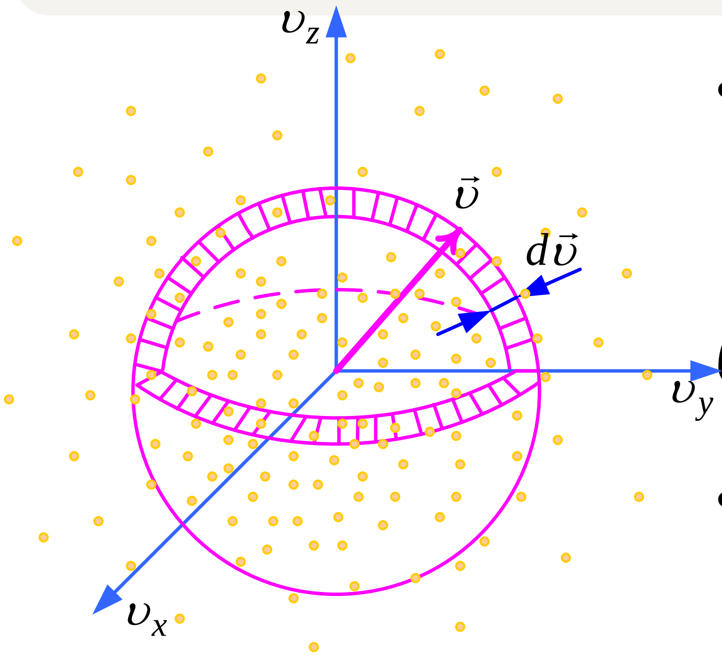


Рисунок 1.2

- Вероятность нахождения частицы в фазовом объеме (распределение Гиббса)

$$dP=A\exp\{-E/KT\}d\Gamma$$

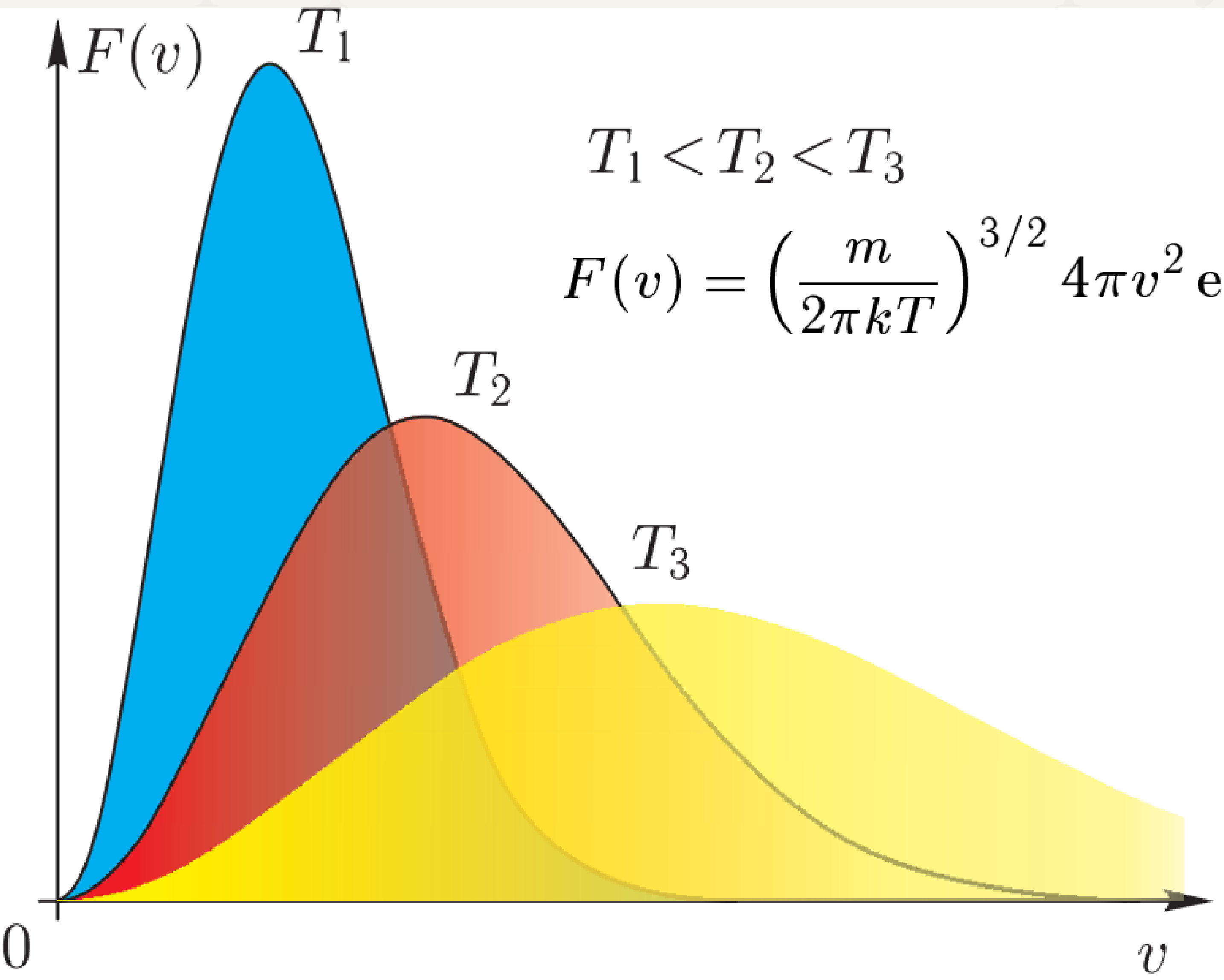
- Для практических целей важно определять число частиц, модуль скорости которых находится в интервале ($v;v+dv$)

- фазовый объем для этого случая

$$d\Gamma=4\pi v^2 dv$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha v_x^2)\,dv_x = \sqrt{\pi/\alpha}$$

Распределение Максвелла при различных температурах



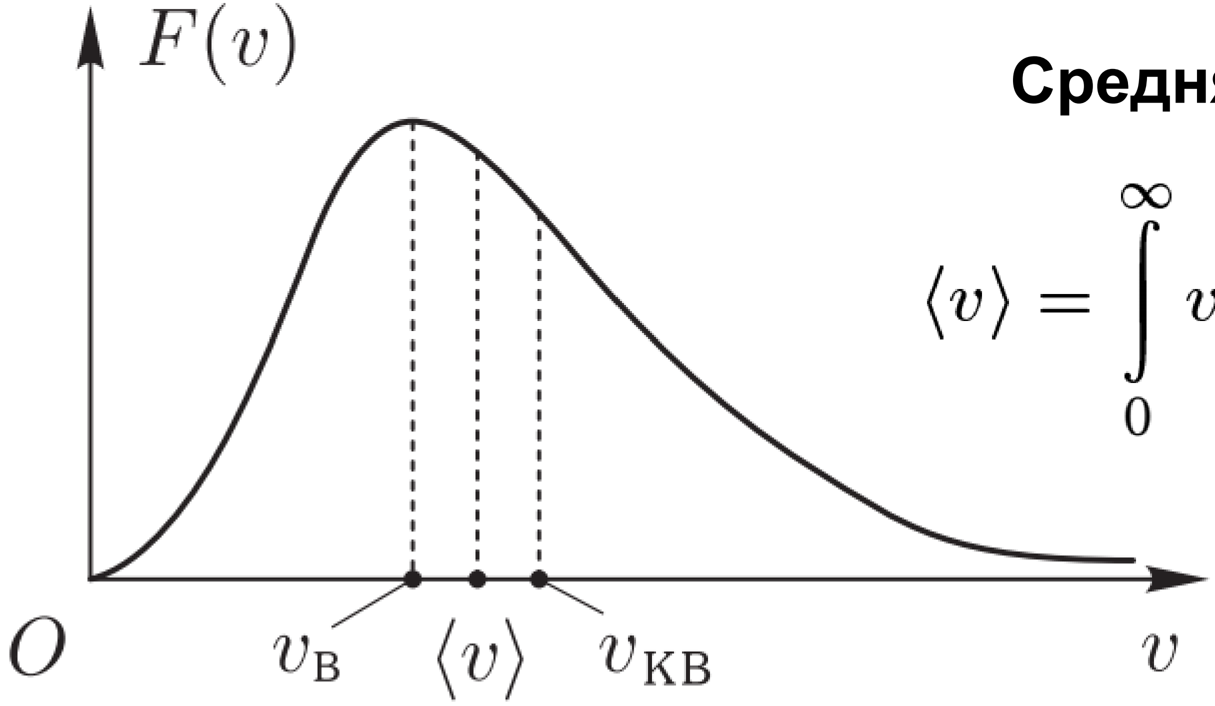
$$T_1 < T_2 < T_3$$

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

Характерные скорости распределения Максвелла

Плотность вероятности:

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$



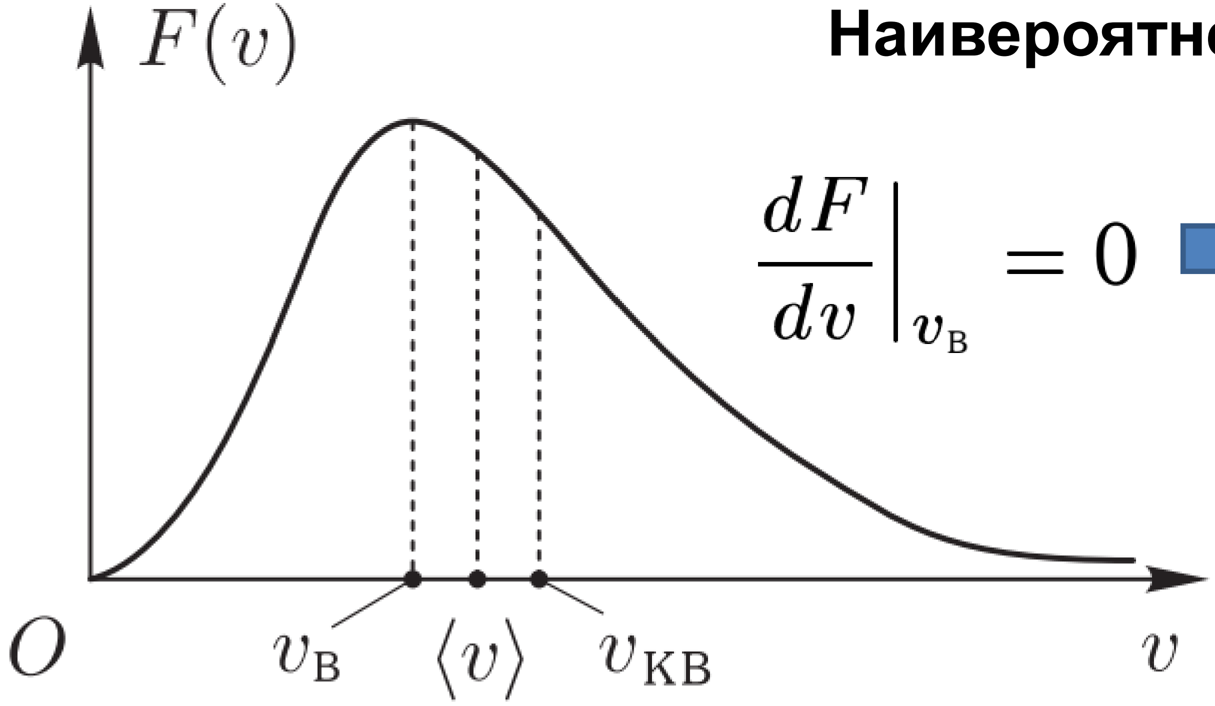
Средняя скорость:

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v \cdot F(v) \cdot dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Характерные скорости распределения Максвелла

Плотность вероятности:

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$



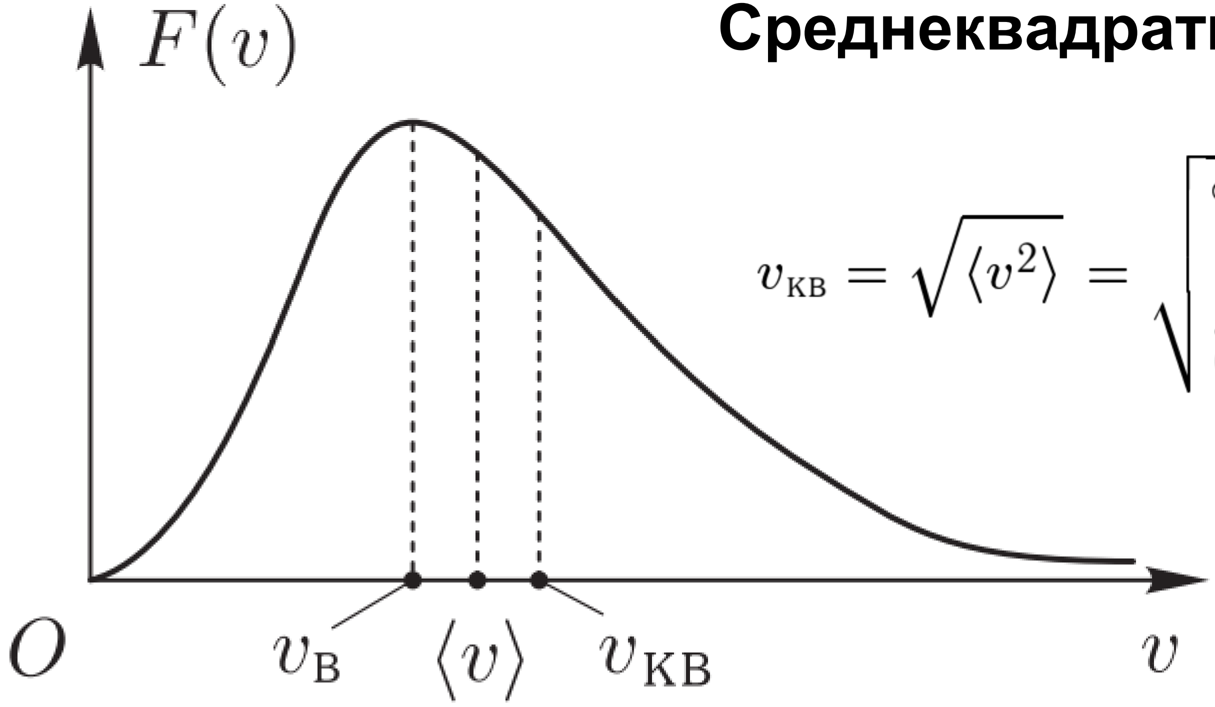
Наивероятнейшая скорость:

$$\left.\frac{dF}{dv}\right|_{v_{\text{в}}} = 0 \Rightarrow v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Характерные скорости распределения Максвелла

Плотность вероятности:

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$



Среднеквадратичная скорость:

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^\infty v^2 \cdot F(v) \cdot dv} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Распределение по энергиям

Вероятность, с которой молекула идеального газа имеет значение энергии в интервале (*ε*,*ε*+*dε*) :

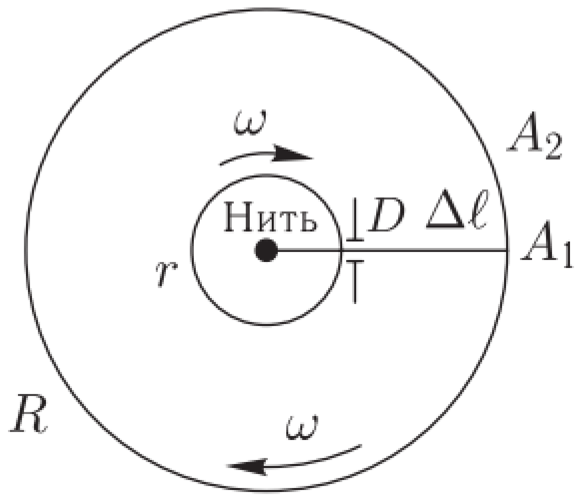
$$dP_L(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{k_\text{B}T}\right)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_\text{B}T}\right)d\varepsilon$$

Плотность вероятности:

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{k_\text{B}T}\right)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_\text{B}T}\right)$$

$$\varepsilon_\text{НВ} = \frac{k_\text{B}T}{2} \qquad \left\langle\frac{mv^2}{2}\right\rangle = \frac{3k_\text{B}T}{2}$$

Экспериментальная проверка распределения Максвелла



$$\Delta l = \omega R \Delta t$$

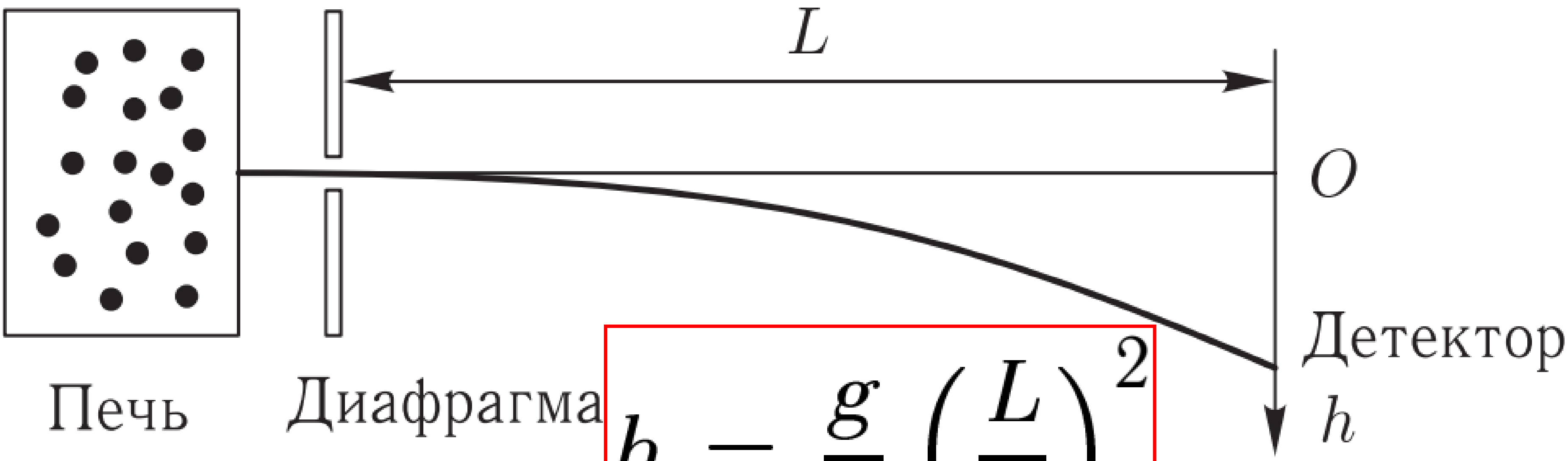
$$\Delta t = (R - r)/v$$

$$v = \omega R(R - r)/\Delta l$$

При протекании по нити электрического тока она нагревалась, и атомы серебра, пройдя через щель внутреннего цилиндра и неподвижную щелевую диафрагму D, затем оседали на внутренней поверхности охлаждаемого внешнего цилиндра.

При неподвижных цилиндрах на этой поверхности образовывалась узкая серебряная полоска в точке A1. При равномерном вращении цилиндров с угловой скоростью ω полоска смещалась в точку A2, находящуюся от первоначальной точки A1 на расстоянии Δl

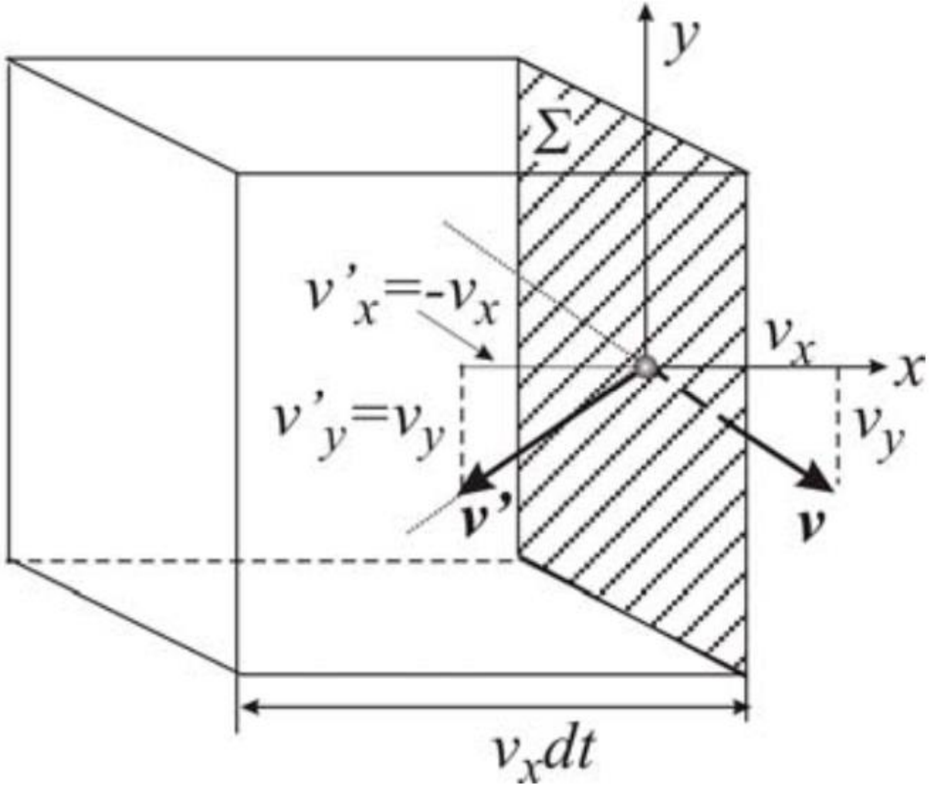
Экспериментальная проверка распределения Максвелла



$$h = \frac{g}{2}\left(\frac{L}{v}\right)^2$$

В 1947 г. И. Эстерманом, О. Симпсоном и О. Штерном были выполнены эксперименты по измерению отклонения вниз горизонтальных молекулярных пучков в поле силы тяжести. В эксперименте пучок атомов цезия вылетал через отверстие в печи с некоторой скоростью ***v*** и, пройдя диафрагму, под действием силы тяжести начинал двигаться по параболе.

Частота ударов молекул о стенку



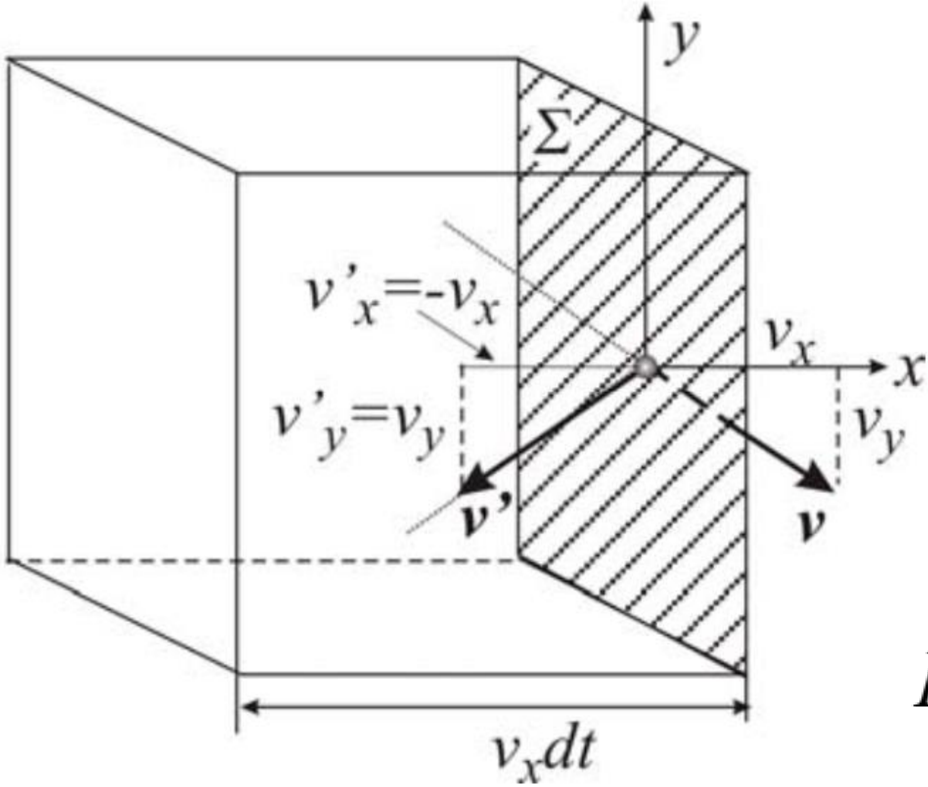
Вычислим **количество ударов молекул о стенку** единичной площади за единицу времени при их тепловом движении.

$$dV = v_x \Sigma dt$$

$$dw(v_x) = \frac{dN(v_x)}{dt \cdot \Sigma} = v_x \cdot n(v_x) = v_x n_0 f(v_x) dv_x$$

$$w = \int_0^\infty dw(v_x) = n_0 \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \int_0^\infty v_x \exp\left(-\frac{m v_x^2}{2 k_B T}\right) dv_x = n_0 \sqrt{\frac{k_B T}{2\pi m}}$$

Частота ударов молекул о стенку



Вычислим давление p идеального газа при температуре T и концентрации молекул n_0 .

$$dV = v_x \Sigma dt$$

$$p = \int_0^\infty 2mv_x^2 \{n_0 dP(v_x)\}$$

$$p = nk_{\text{B}}T$$

Теоремы о равнораспределении энергии по степеням свободы

- В состоянии термодинамического равновесия кинетическая энергия молекулы, приходящаяся на каждую поступательную и вращательную степень свободы, одинакова и равна $k_Б$T/2.

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{m\left\langle v_x^2 \right\rangle}{2} + \frac{m\left\langle v_y^2 \right\rangle}{2} + \frac{m\left\langle v_z^2 \right\rangle}{2} =$$

$$= \frac{kT}{2} + \frac{kT}{2} + \frac{kT}{2}$$

$$\frac{m\left\langle v_{0x}^2 \right\rangle}{2} = \frac{m\left\langle v_{0y}^2 \right\rangle}{2} = \frac{m\left\langle v_{0z}^2 \right\rangle}{2} = \frac{J_x\left\langle \omega_x^2 \right\rangle}{2} = \frac{J_y\left\langle \omega_y^2 \right\rangle}{2} = \frac{J_z\left\langle \omega_z^2 \right\rangle}{2} = \frac{kT}{2}$$