

# Механика

---

## Лекция 10



# План лекции

- Упругая и остаточная деформация.
- Типы деформаций.  
Деформации растяжения, сжатия, сдвига, кручения, изгиба.
- Количественные характеристики деформаций. Закон Гука.  
Модуль Юнга. Коэффициент Пуассона. Модуль сдвига.
- Связь между модулем Юнга и модулем сдвига.
- Энергия упругих деформаций.

# Основы механики деформируемых тел

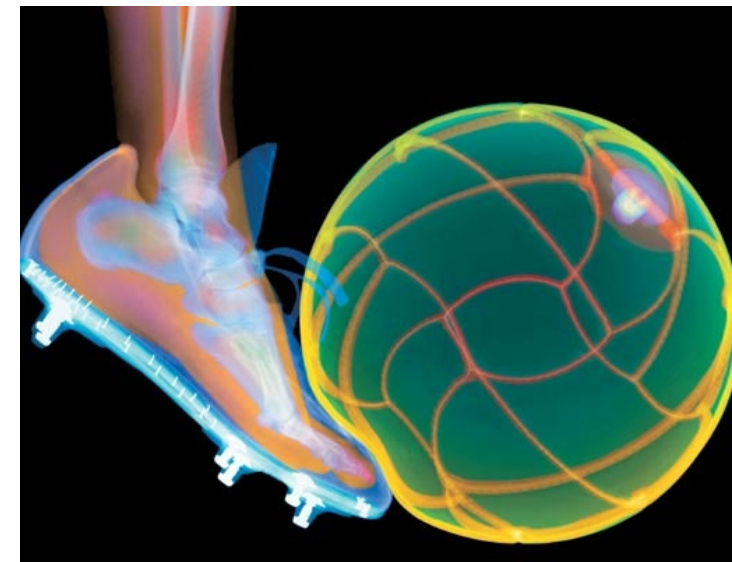
До этого мы предполагали, что под действием приложенных сил в теле возникают определенные деформации, однако они не принимались в расчет для описания движения этого тела как целого. Тело рассматривалось как абсолютно твердое.

**Деформация** – изменение взаимного расположения материальных точек тела, вызванное внешним воздействием, которое приводит к искажению формы и размера тела и вызывает изменение сил взаимодействия между материальными точками, т.е. появлений напряжений.

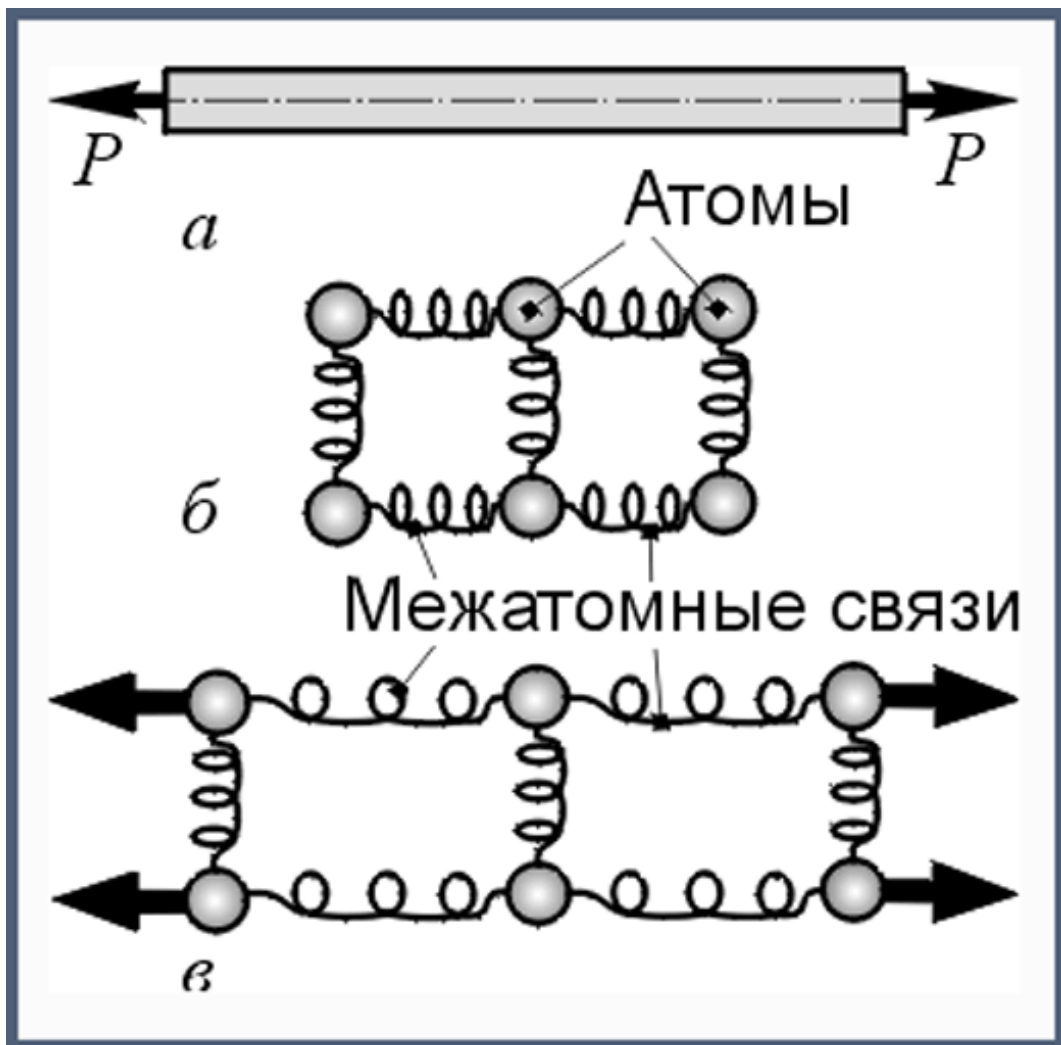
# Основы механики деформируемых тел

**Упругие деформации** – это деформации, которые полностью исчезают после прекращения действия внешних сил.

**Неупругие деформации** – не исчезают после прекращения действия внешних сил.



# Основы механики деформируемых тел



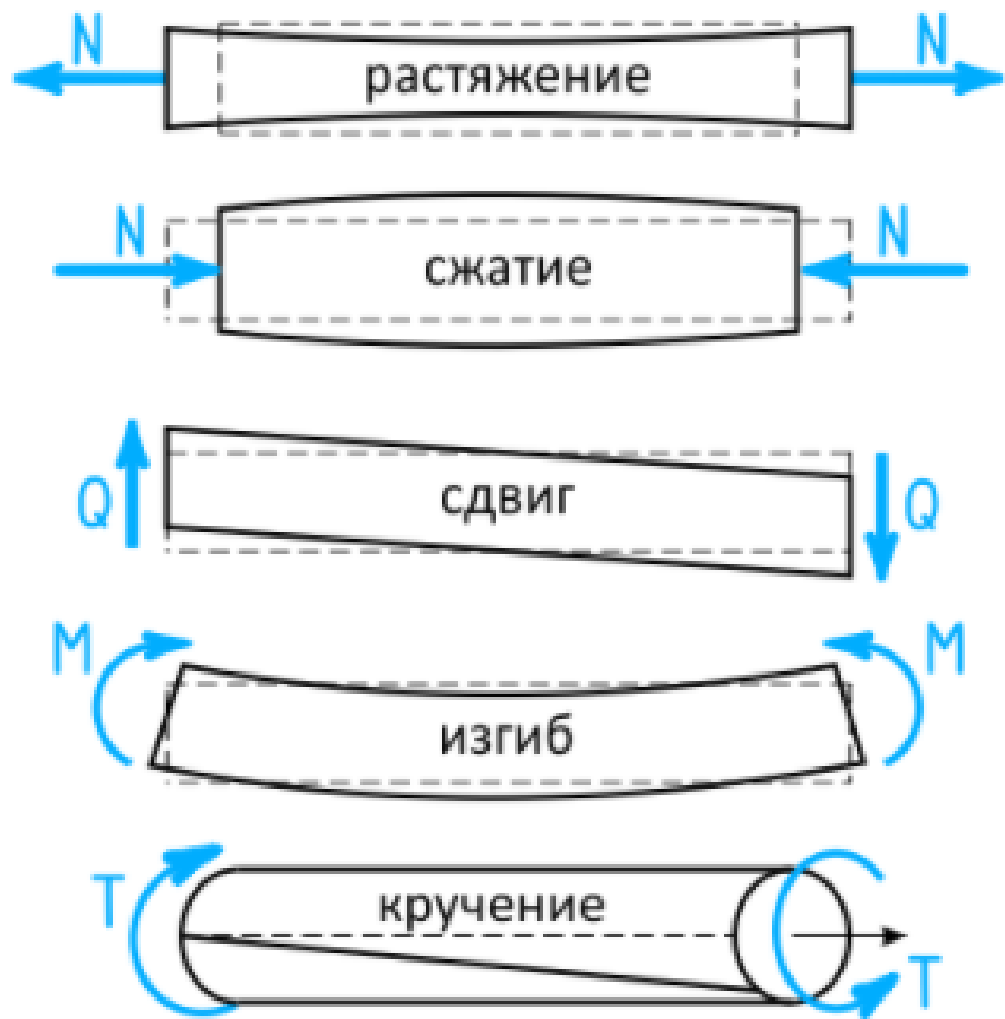
На микроскопическом уровне деформация связана с смещением атомов из которых это тело состоит. Изменение положения атомов при деформации приводят к тому, что в теле возникают внутренние силы или внутренние напряжения, стремящиеся вернуть его в состояние равновесия. Внутренние силы взаимодействия являются короткодействующими, поэтому действуют на малый объем и приложены к ограничивающей его поверхности.

# Типы деформаций

Среди многочисленного разнообразия возможных деформаций принято выделять однородное

- **растяжение (сжатие),**
- **сдвиг,**
- **кручение,**
- **изгиб.**

Эти деформации наиболее просто поддаются анализу. В общем случае произвольный малый объем тела подвергается либо растяжению (сжатию), либо сдвигу, либо одновременному растяжению (сжатию) и сдвигу. Поэтому деформации **растяжение (сжатие)** и **сдвиг** принято называть **элементарными**.



Начальный образец

Сжатие

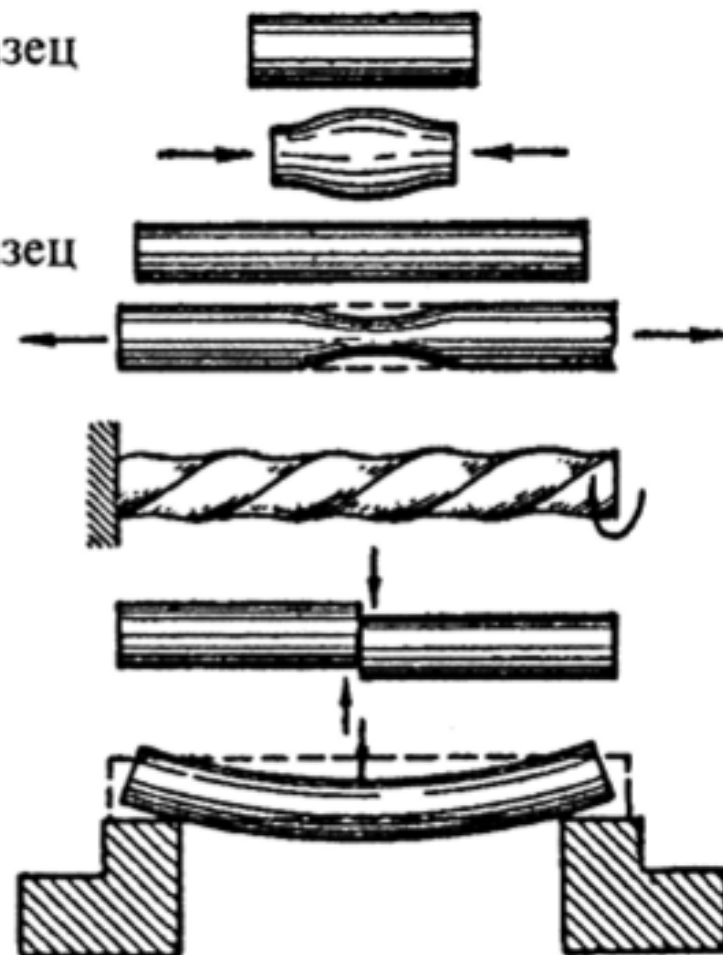
Начальный образец

Растяжение

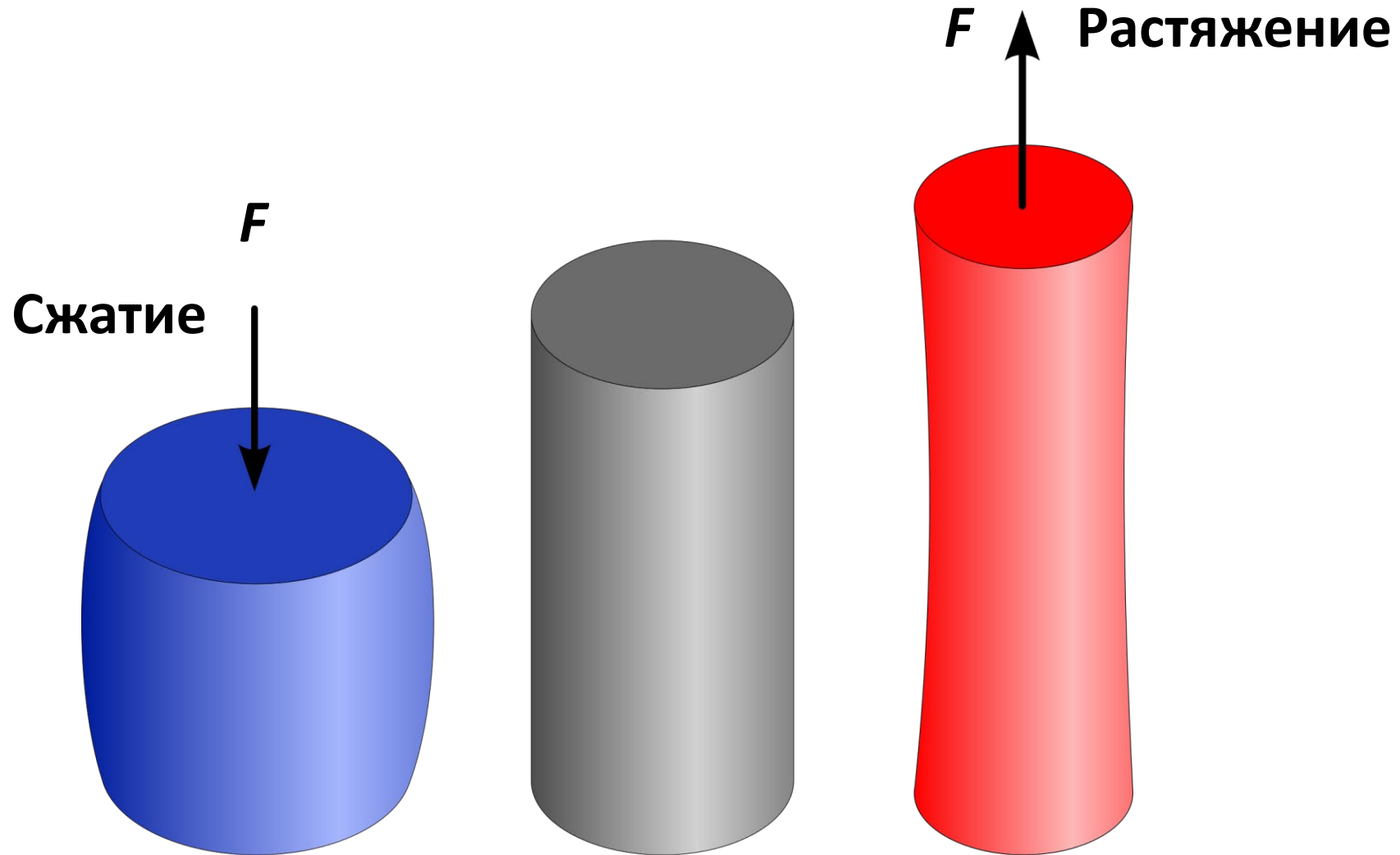
Кручение

Срез

Изгиб



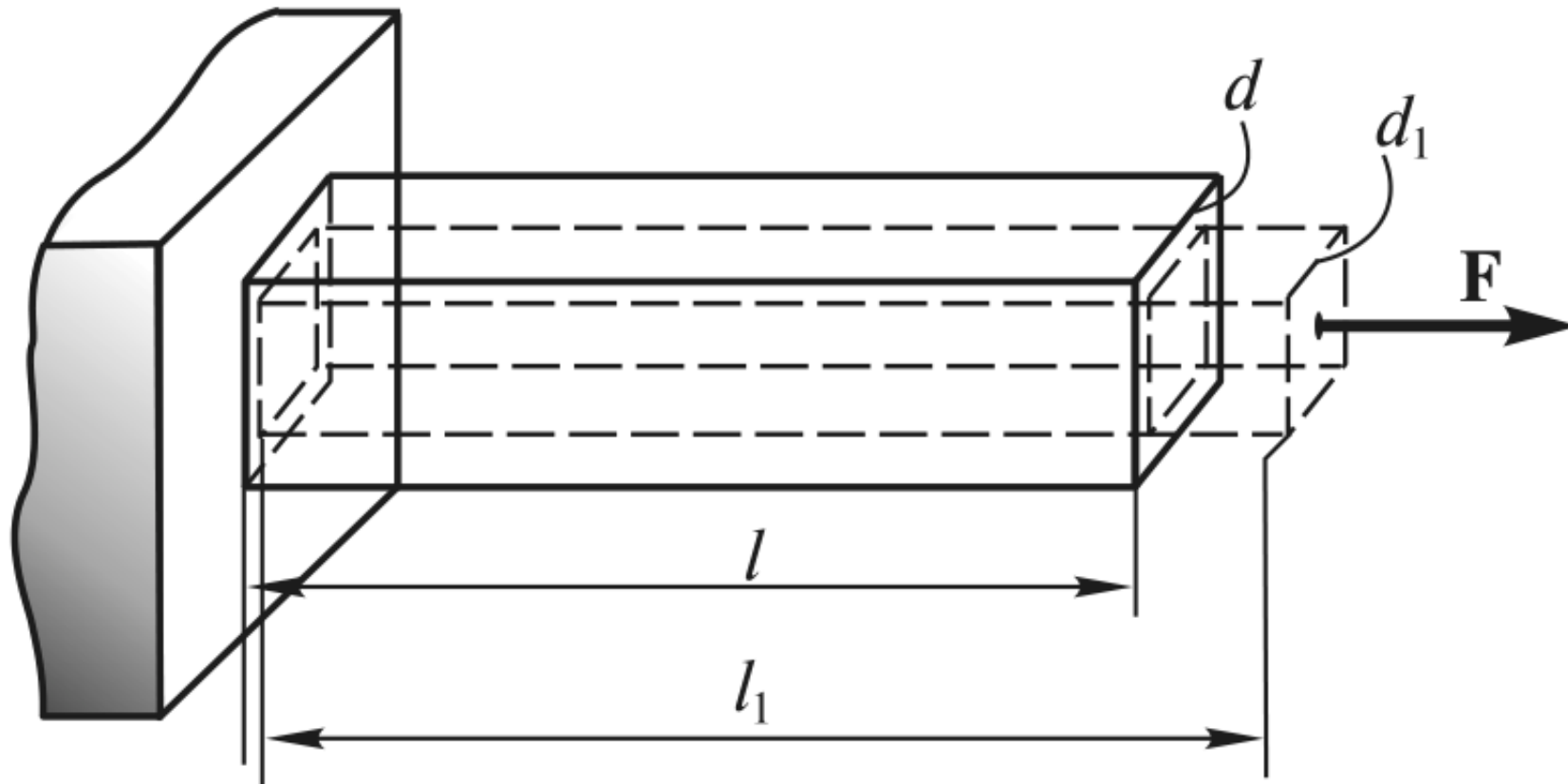
# Деформация растяжение (сжатия)





# Деформация растяжение (сжатия)

Закрепим один конец резинового бруска длиной  $l$ , имеющего квадратное сечение  $d \times d$ , и потянем за другой конец с постоянной силой  $\vec{F}$ .



# Деформация растяжение (сжатия)

$$\varepsilon = \frac{l_1 - l}{l} = \frac{\Delta l}{l}$$

Относительное  
удлинение

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{d_1 - d}{d} = \frac{\Delta d}{d}$$

Поперечное  
сжатие

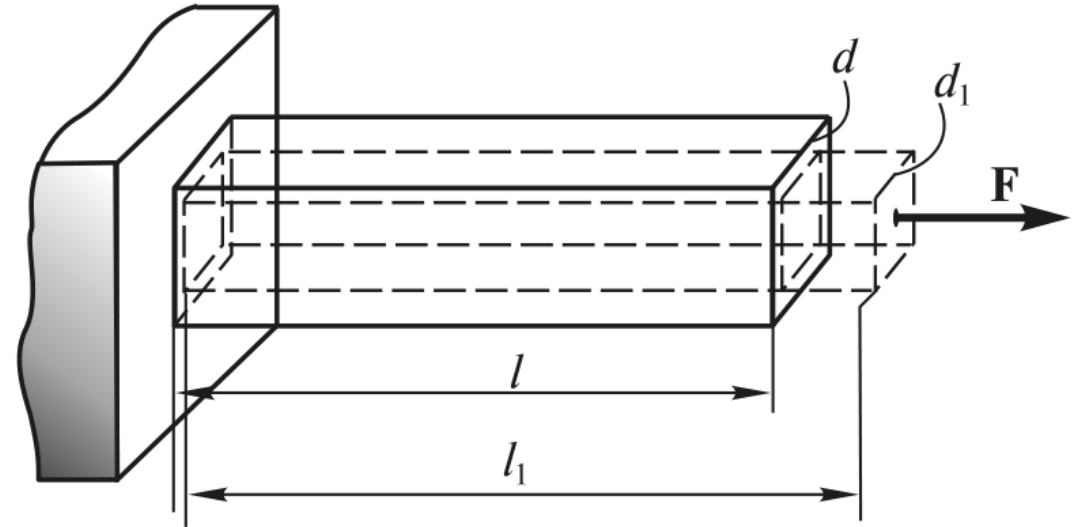
$$\sigma = \frac{F}{S}$$

Напряжение

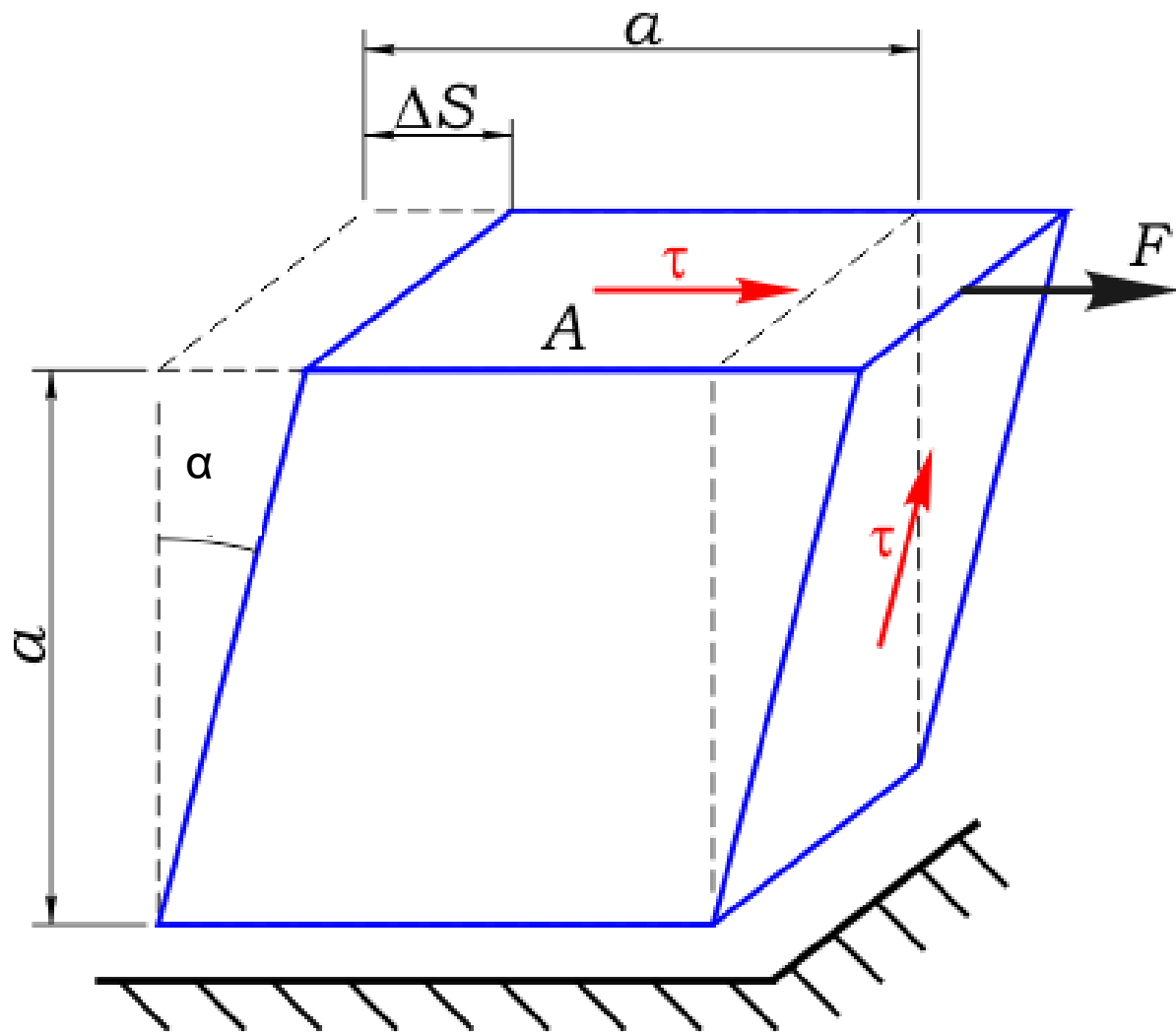
$$\mu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon} > 0$$

Коэффициент  
Пуассона

$$0 < \mu \leq 1/2$$



# Деформация сдвига

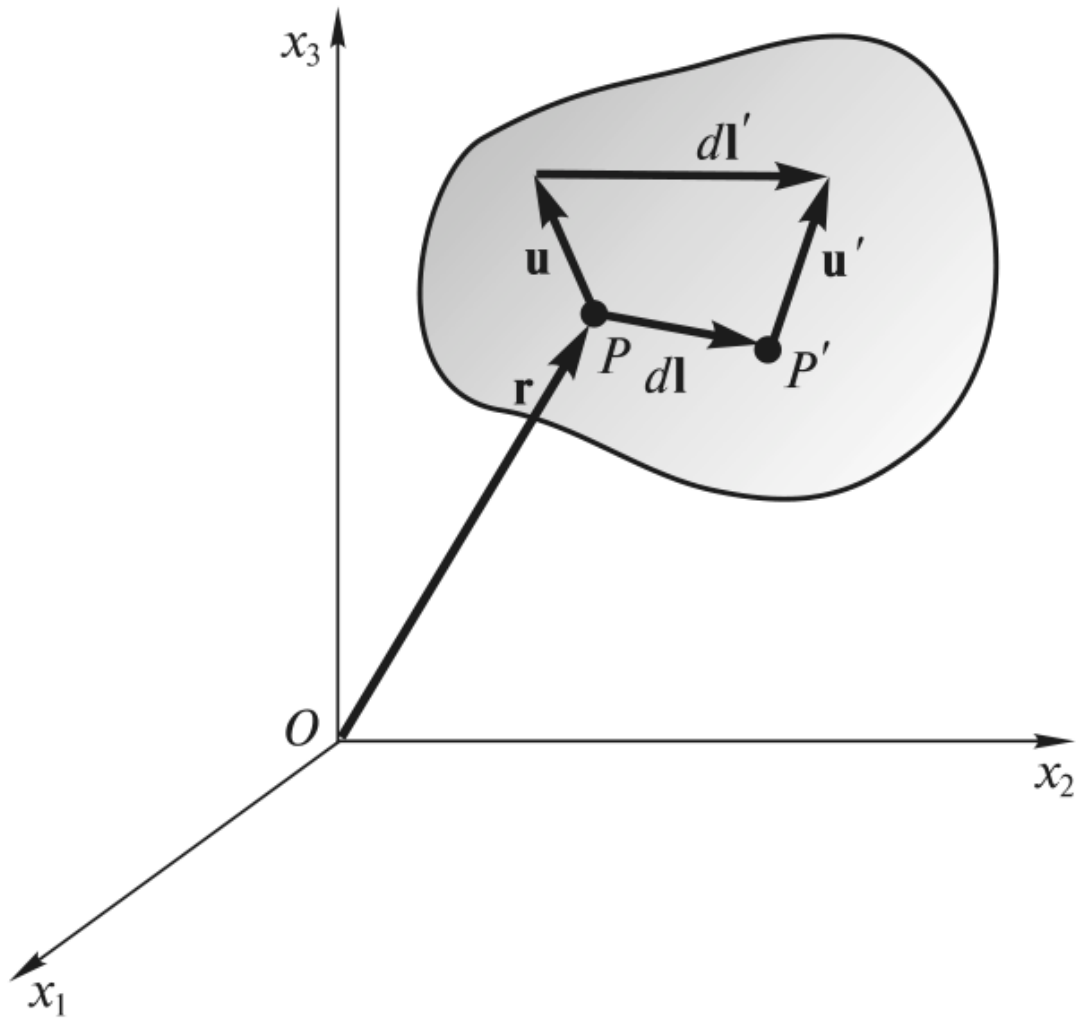


$$\gamma = \operatorname{tg} \alpha$$

Относительный сдвиг

Обычно угол  $\alpha$  мал,  
поэтому  $\gamma \approx \alpha$

# Тензор деформаций

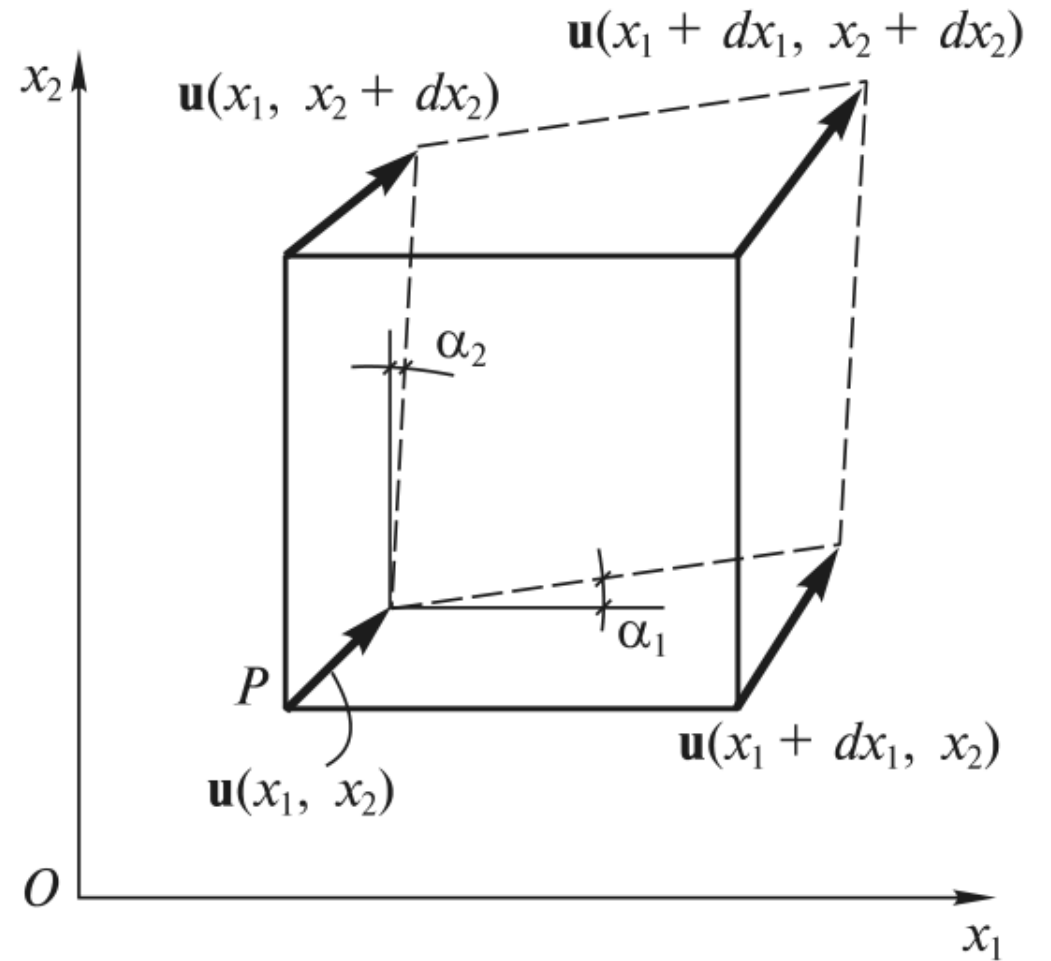
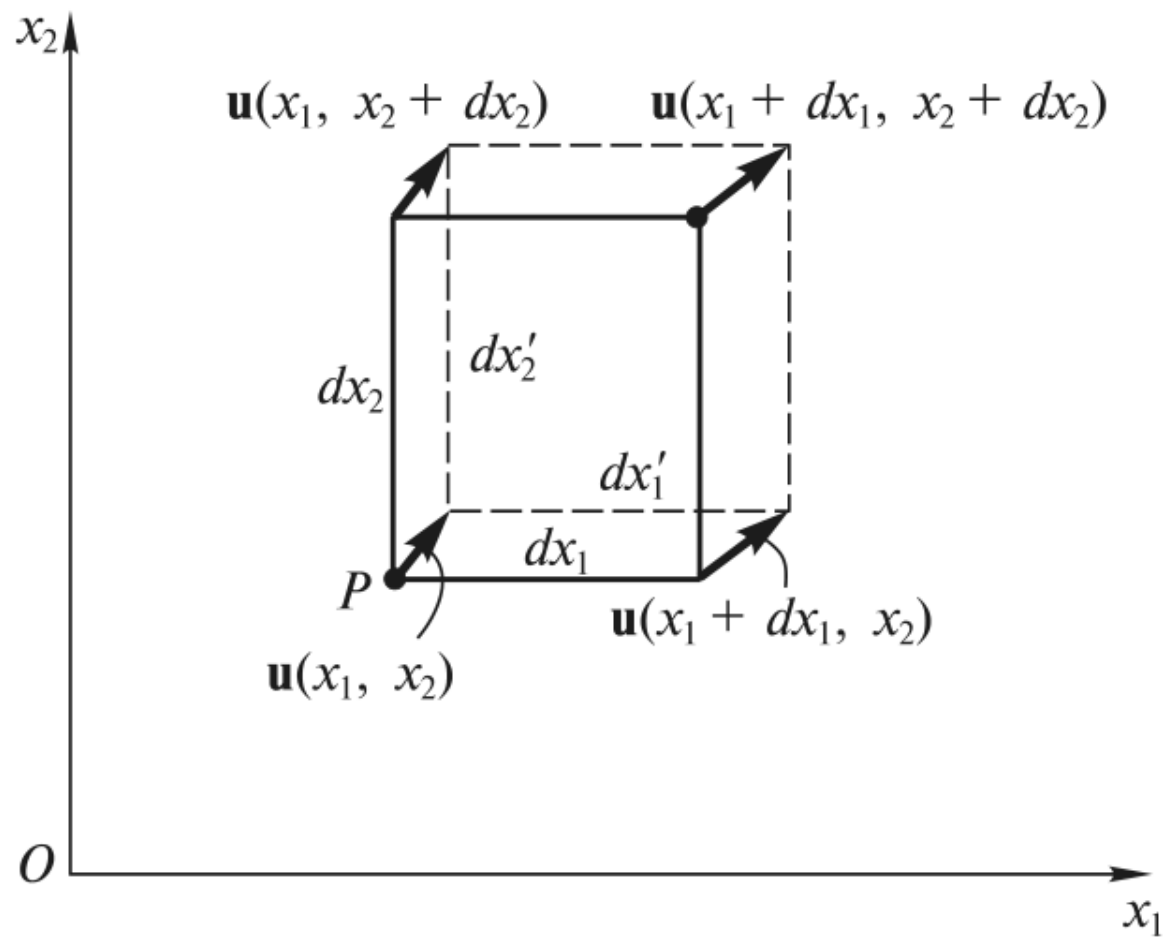


$$d\vec{l} = (dx_1, dx_2, dx_3)$$

$$d\vec{l}' = d\vec{l} + \vec{u}' - \vec{u} = d\vec{l} - d\vec{u}$$

$$U_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

# Тензор деформацій



# Тензор деформаций

Выводы:

$$\text{Tr}(\hat{U}) = 0$$

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2}(\gamma_{12} + \gamma_{21}) & \frac{1}{2}(\gamma_{13} + \gamma_{31}) \\ \frac{1}{2}(\gamma_{21} + \gamma_{12}) & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}(\gamma_{23} + \gamma_{32}) \\ \frac{1}{2}(\gamma_{31} + \gamma_{13}) & \frac{1}{2}(\gamma_{32} + \gamma_{23}) & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

# Упругие деформации

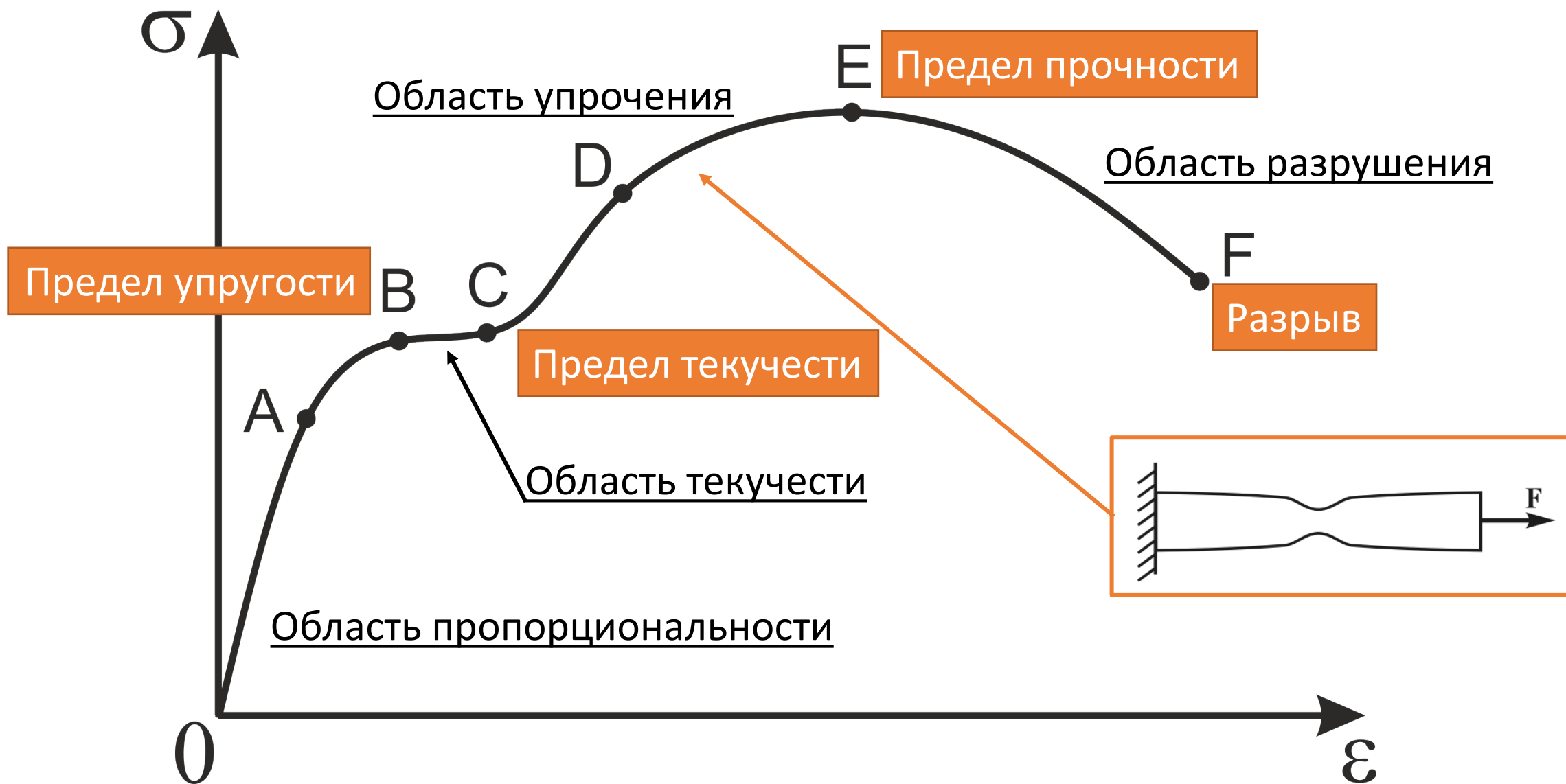
$$\varepsilon = \frac{l_1 - l}{l} = \chi \frac{F}{S} = \chi \sigma \quad \Rightarrow \quad \sigma = E \varepsilon$$

Закон Гука

$E$  – модуль Юнга [Па]

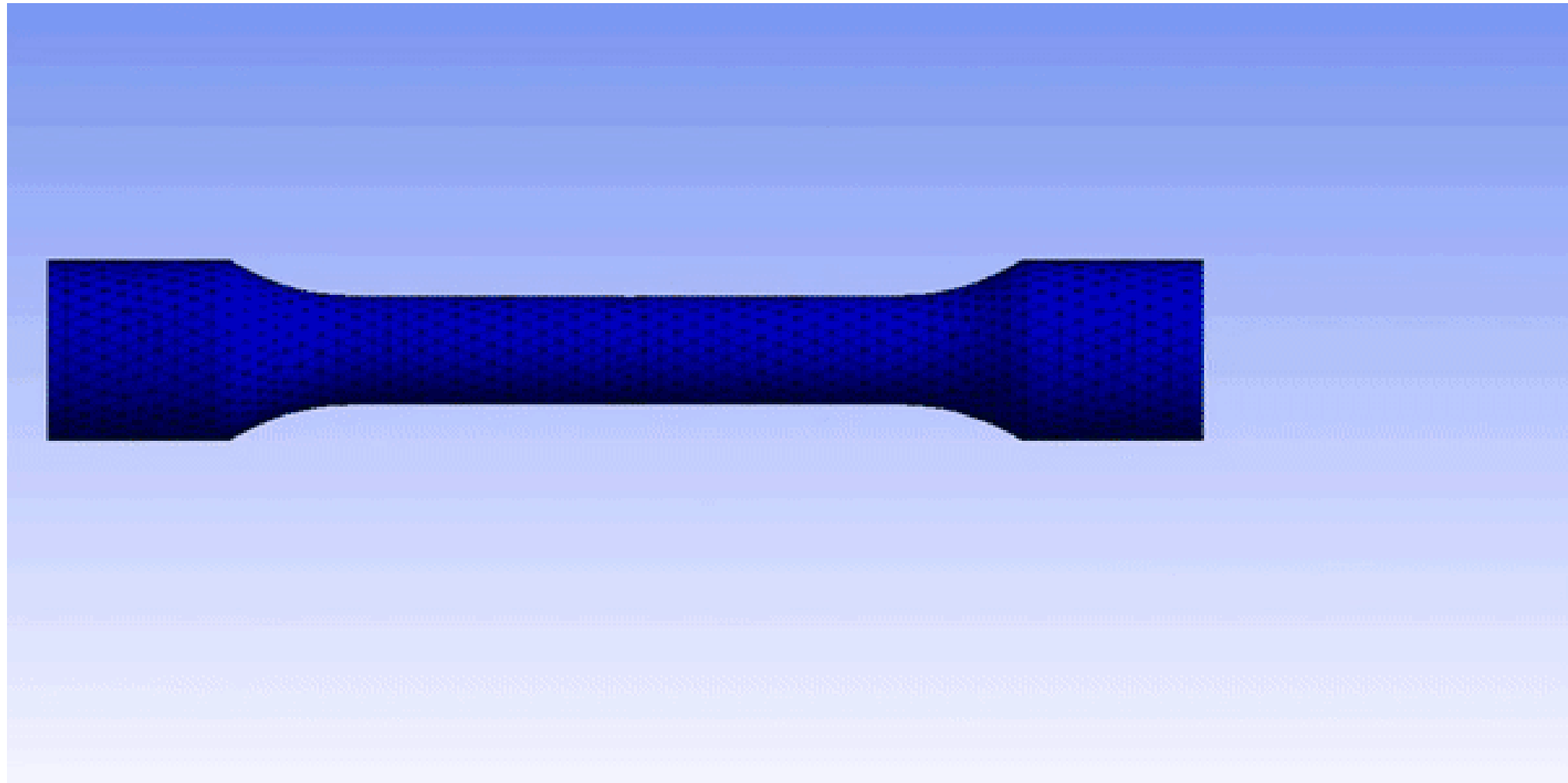
Материал	Модуль упругости $E$ , ГПа	Модуль сдвига $G$ , ГПа	Предел текучести $\sigma_T$ , ГПа	Предел прочности при растяжении $\sigma_M$ , ГПа
Сталь углеродистая обыкновенная	200 – 210	77 – 81	0,19 – 0,31	0,32 – 0,71
Сталь высокопрочная закаленная	200 – 210	77 – 81	1,2 – 1,95	1,5 – 2,0
Медь	110 – 130	41,5 – 44,0	0,07	0,22
Алюминий	69 – 72	25,0 – 26,5	0,022	0,05
Свинец	14 – 18	5,5 – 8,0	0,005	0,014 – 0,018

# Упругие деформации



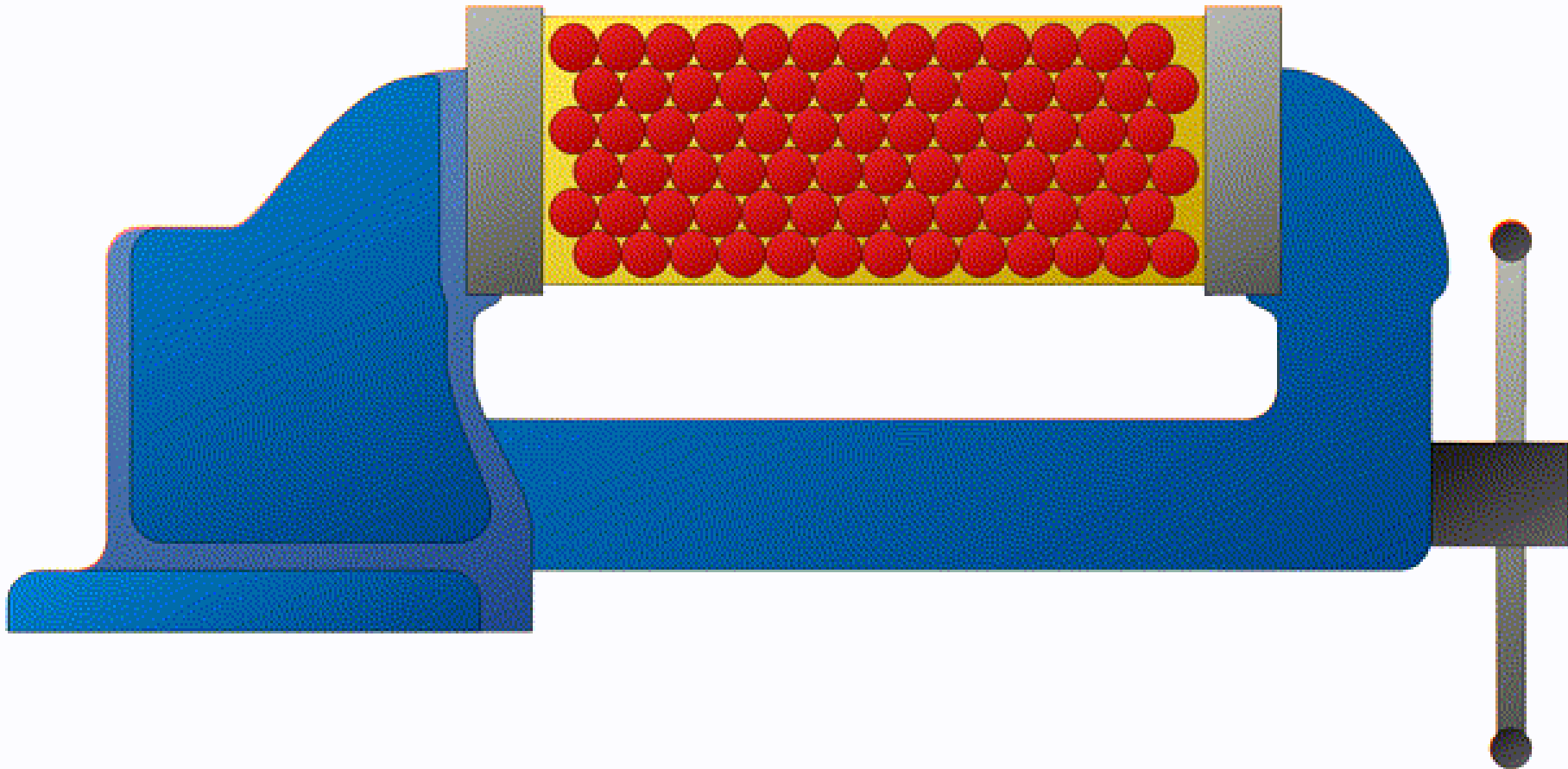


# Образование шейки и разрыв



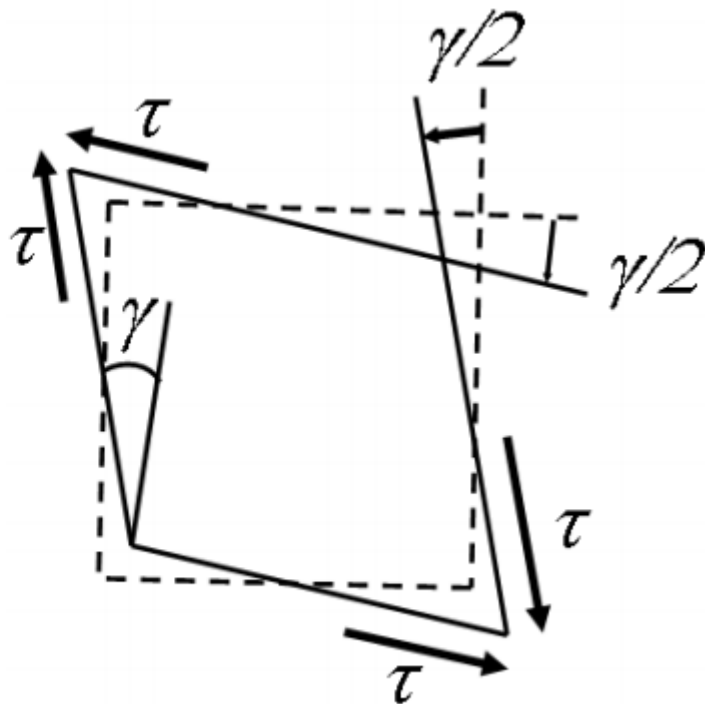
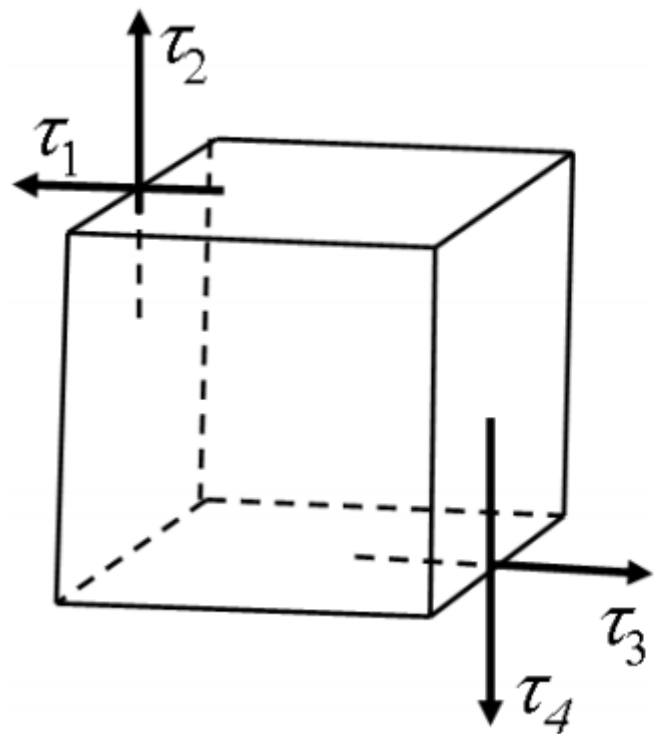
# Сжатие стержня на микроуровне

TEC-SCIENCE.COM



# Деформация сдвига

При изменении напряжений будут меняться только углы между гранями кубика. Объем при этом остается постоянным. Пусть под действием этих напряжений углы между соответствующими гранями изменятся на малый угол  $\gamma$ .



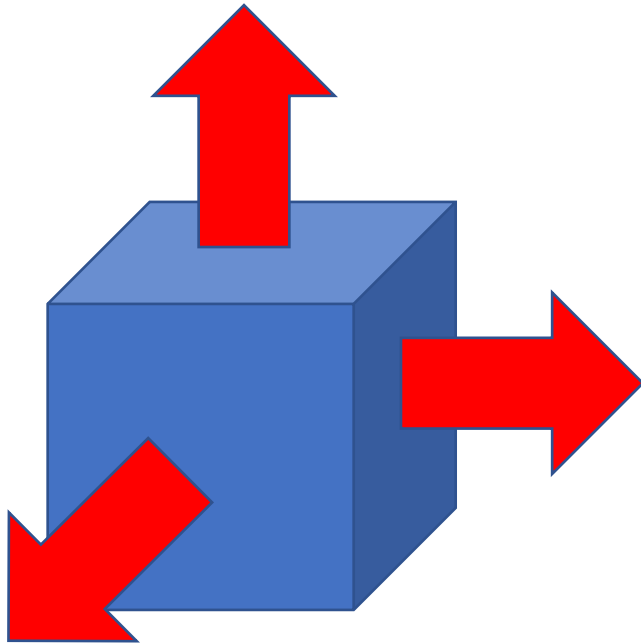
$$\tau = G\gamma$$

Закон Гука для сдвига

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

Модуль сдвига

# Всестороннее сжатие



Будем резиновый куб растягивать одновременно силами, приложенными к каждой из его граней.

При всестороннем сжатии, когда

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3(1 - 2\mu)}{E} \sigma = \frac{\sigma}{K}$$

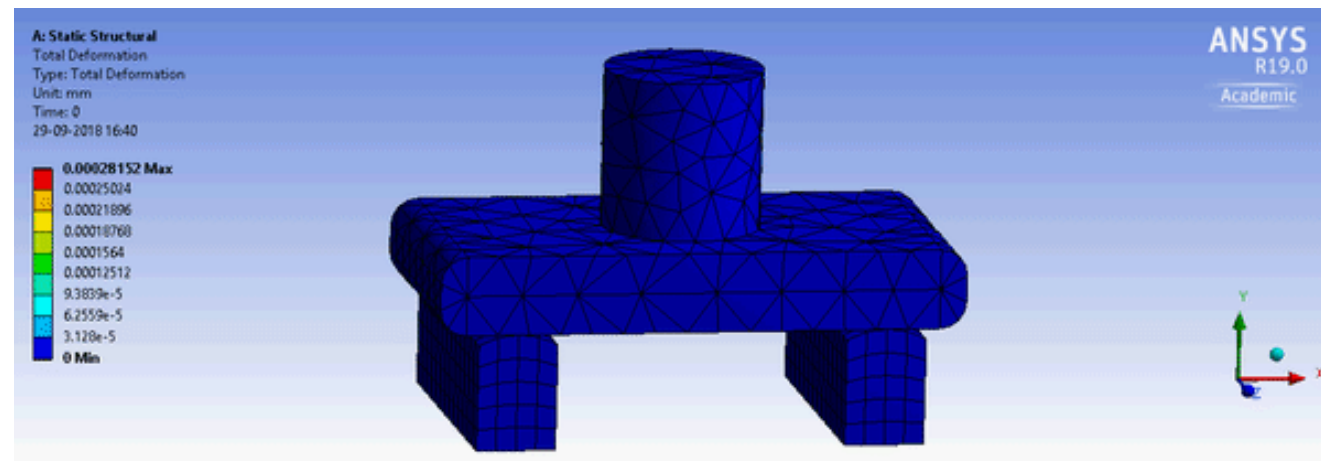
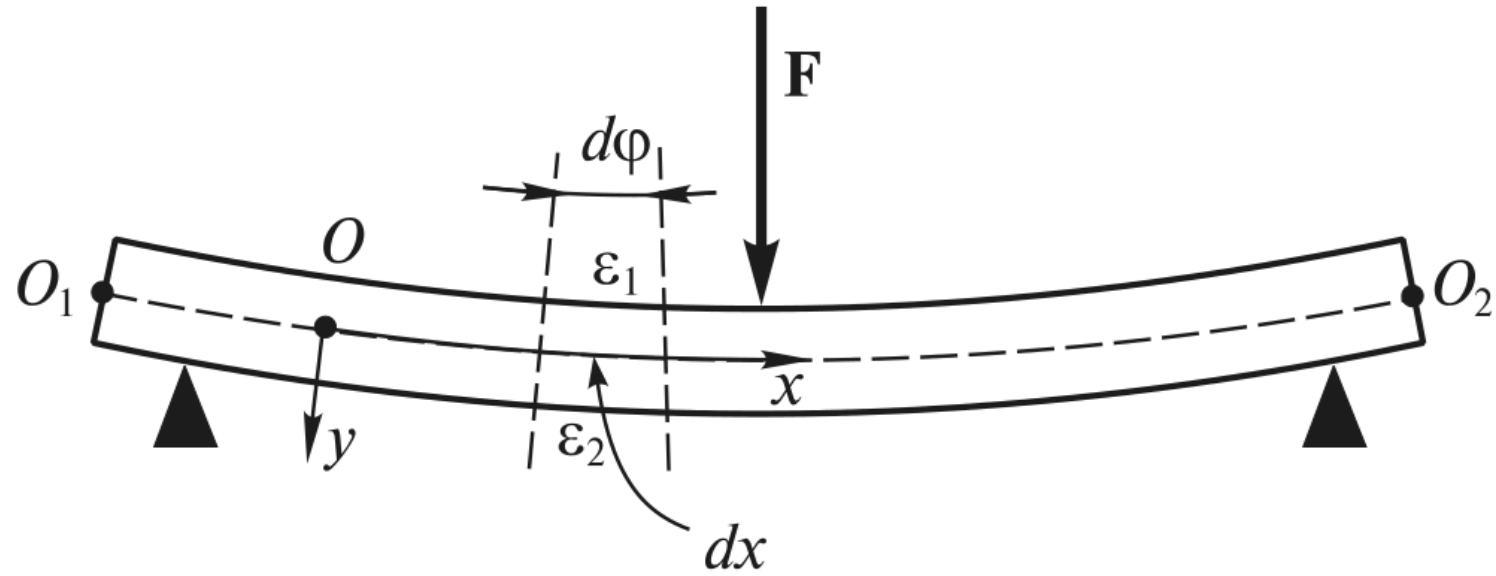
Модуль всестороннего сжатия

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$$

# Связь модулей упругости

	$(E, G)$	$(G, \mu)$	$(E, \mu)$
$E$	×	?	×
$G$	×	×	$\frac{E}{2(1 + \mu)}$
$\mu$	?	×	×
$K$	?	?	$\frac{E}{3(1 - 2\mu)}$

# Изгиб балок



46/136:DISP

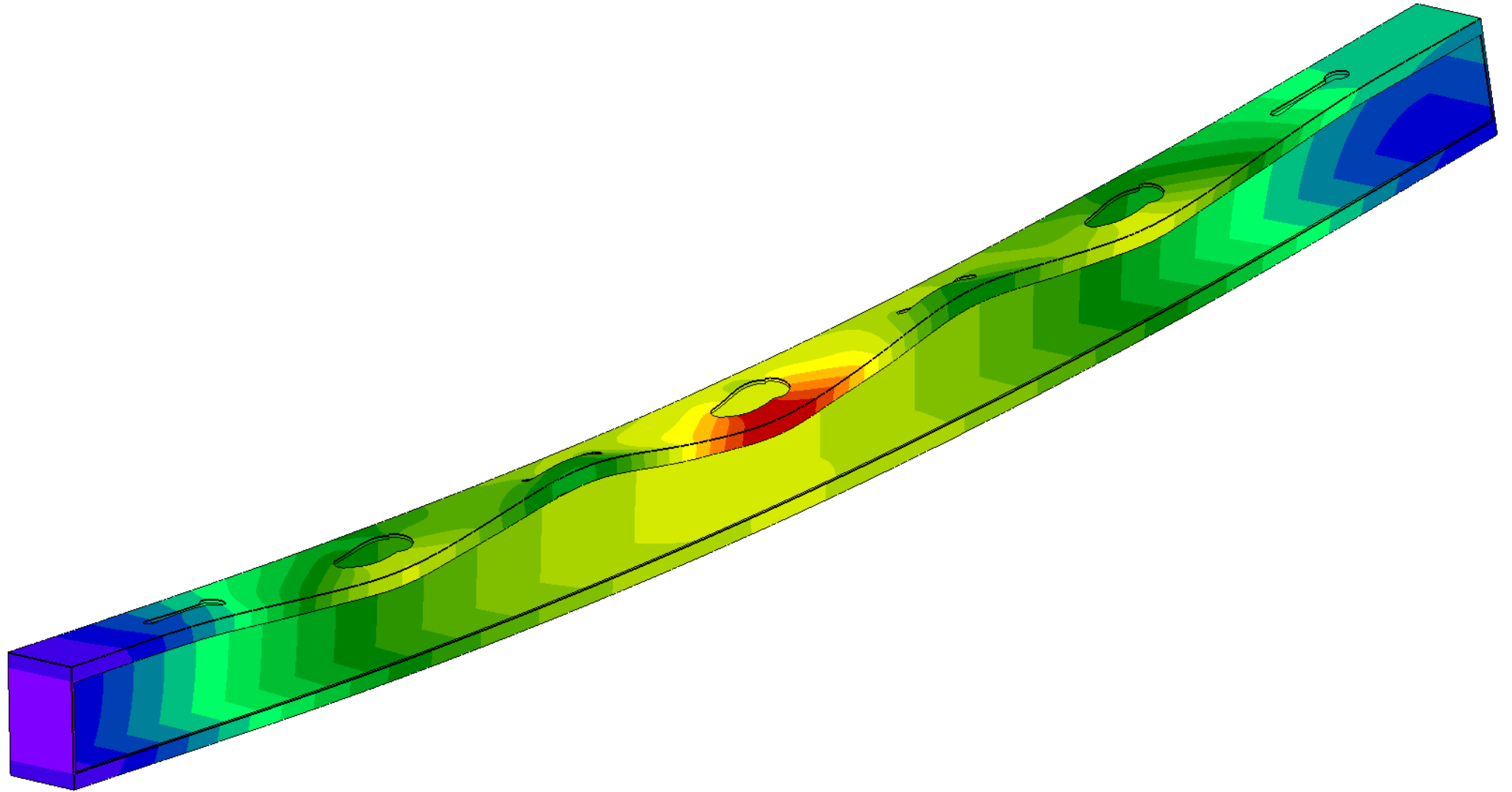
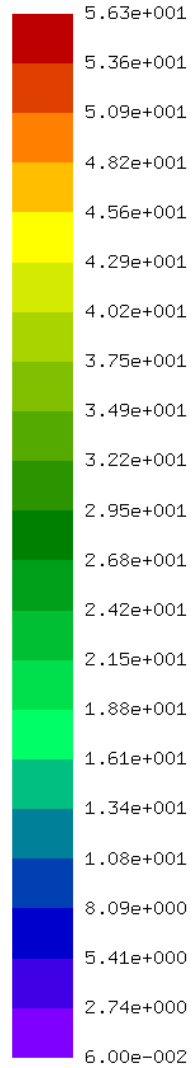
Time:0.994307

Entity:ALL

+DispF:1.000000

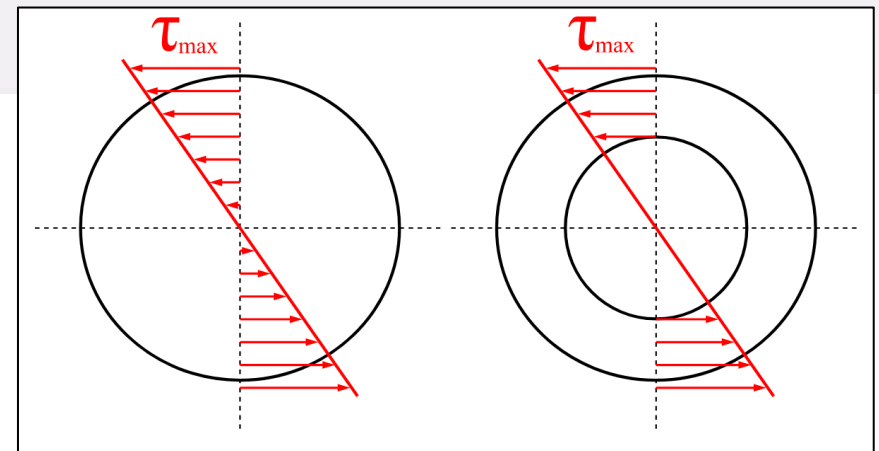
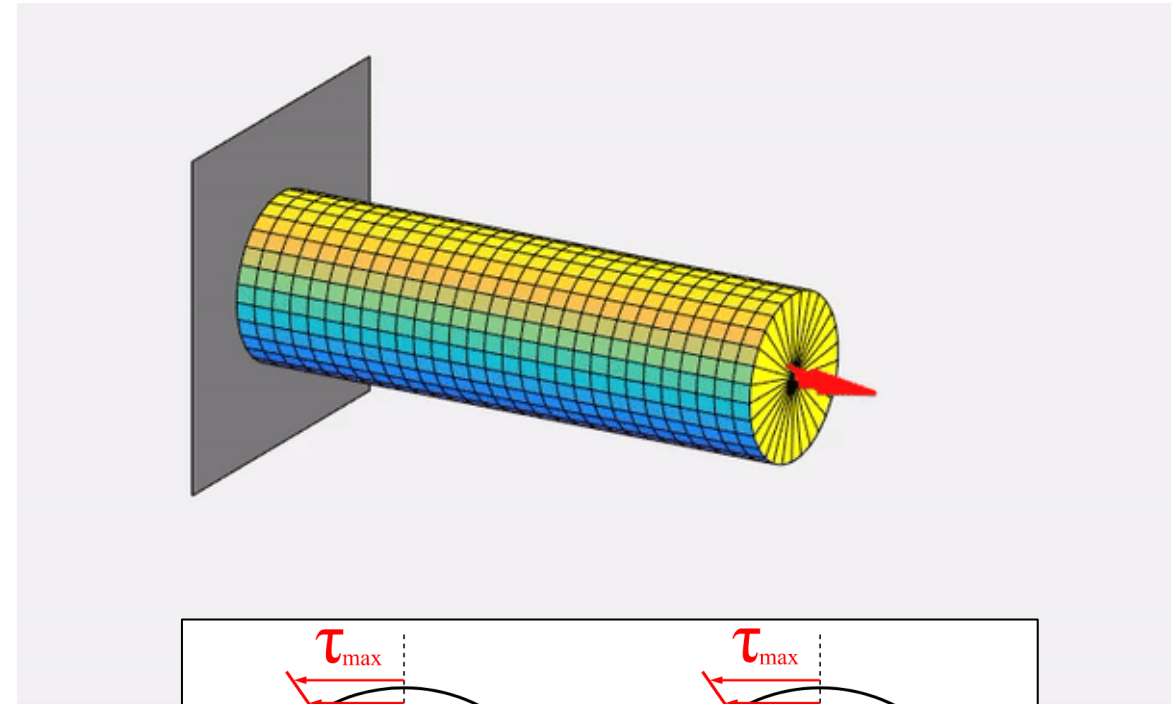
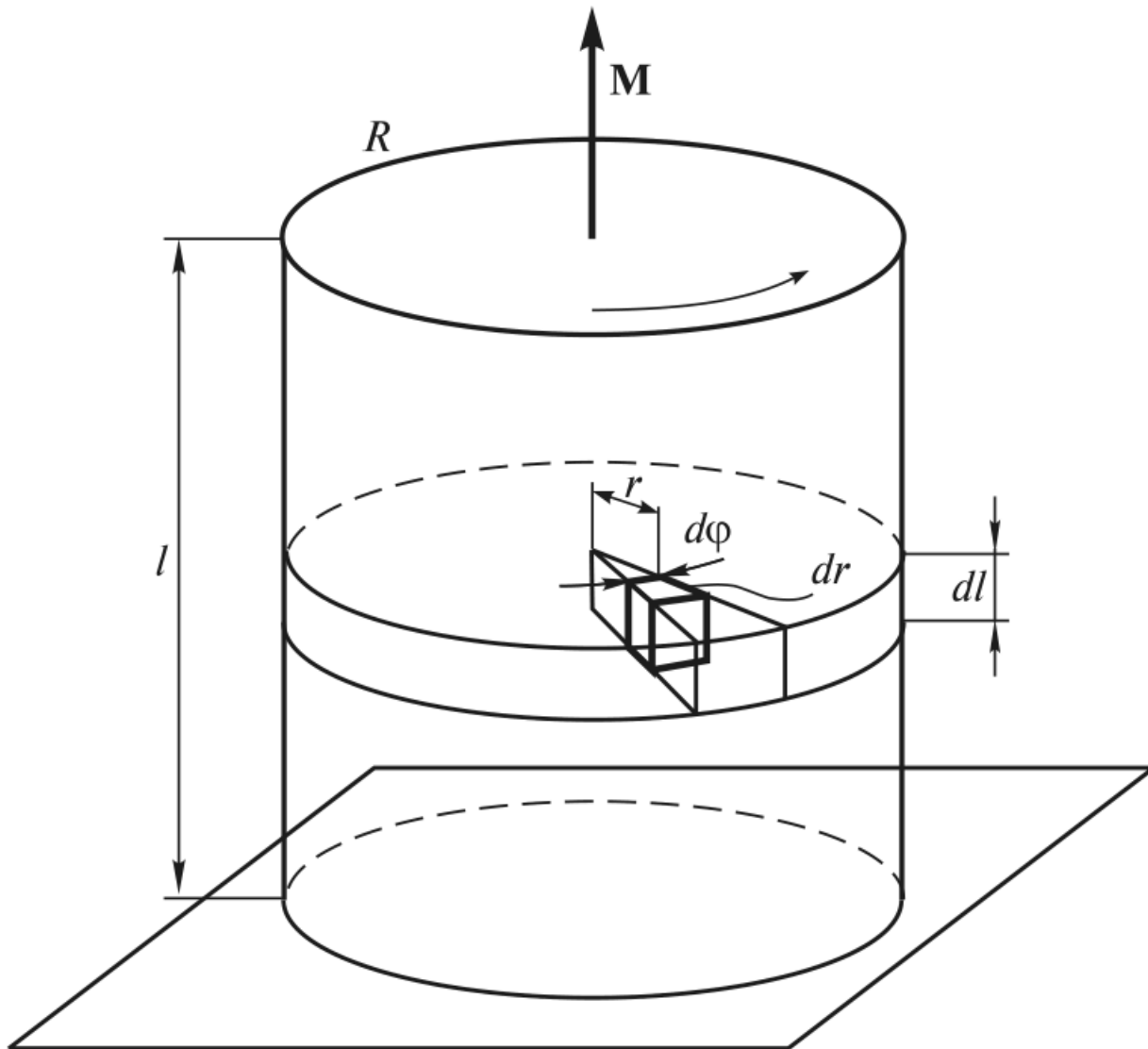
max: 5.63e+001

min: 6.00e-002



S

# Кручение валов

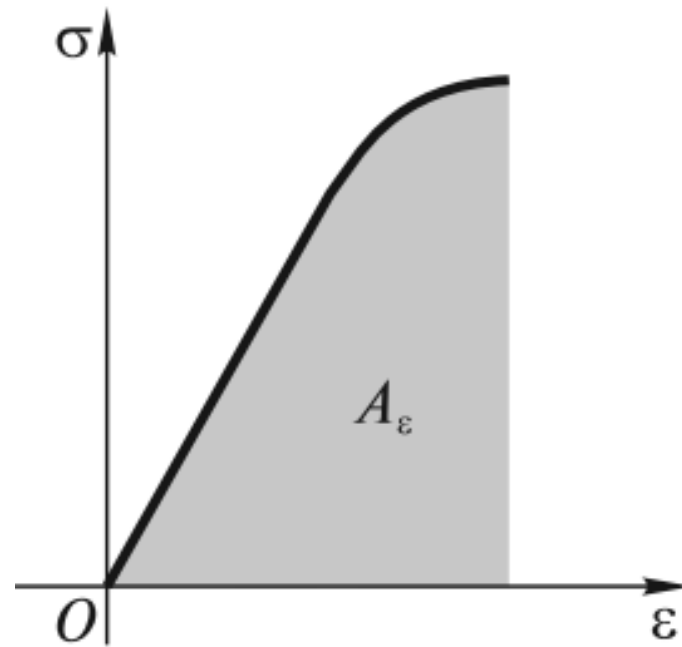
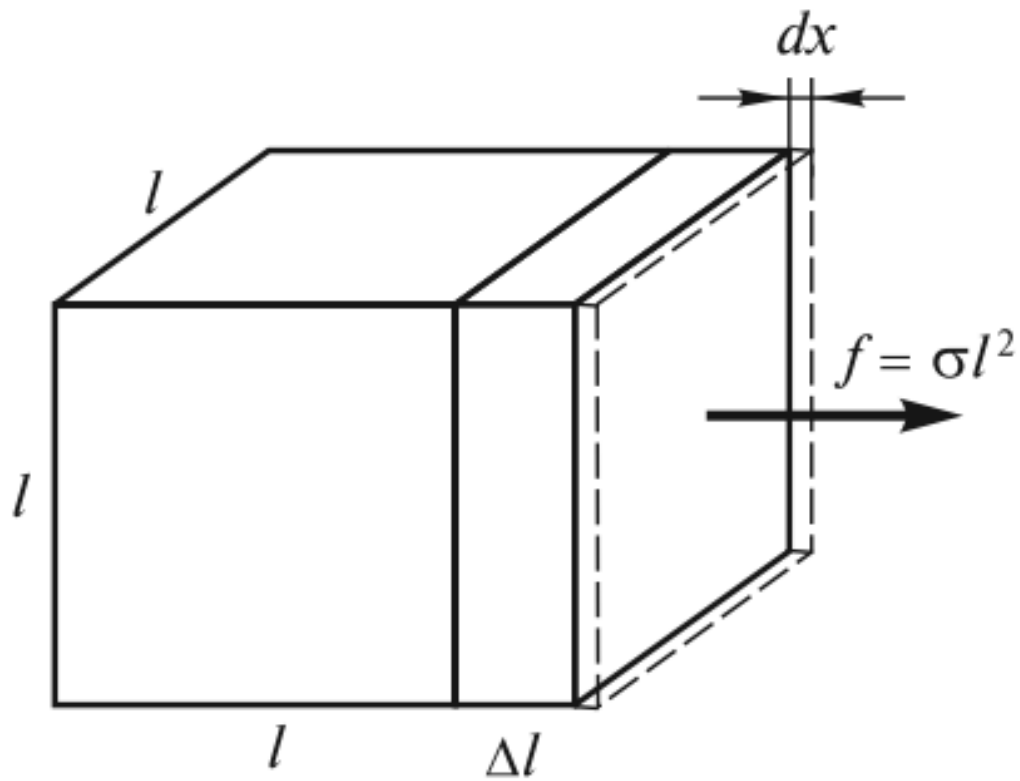


Распределение напряжений в круглом валу



# Энергия упругих деформаций

Будем резиновый куб растягивать одновременно силами, приложенными к каждой из его граней.



$$dA_\varepsilon = f dx = \sigma l^3 d\varepsilon$$

$$A_\varepsilon = l^3 \int_0^\varepsilon \sigma(\varepsilon) d\varepsilon$$

# Энергия упругих деформаций

Аналогично несложно показать, что результирующая работа при деформации сдвига кубика равна

$$A_{\tau} = l^3 \int_0^{\varepsilon} \tau(\gamma) d\gamma$$

На линейном участке  $\sigma(\varepsilon)$

$$A_{\varepsilon} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 l^3$$

$$w_{\varepsilon} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2$$

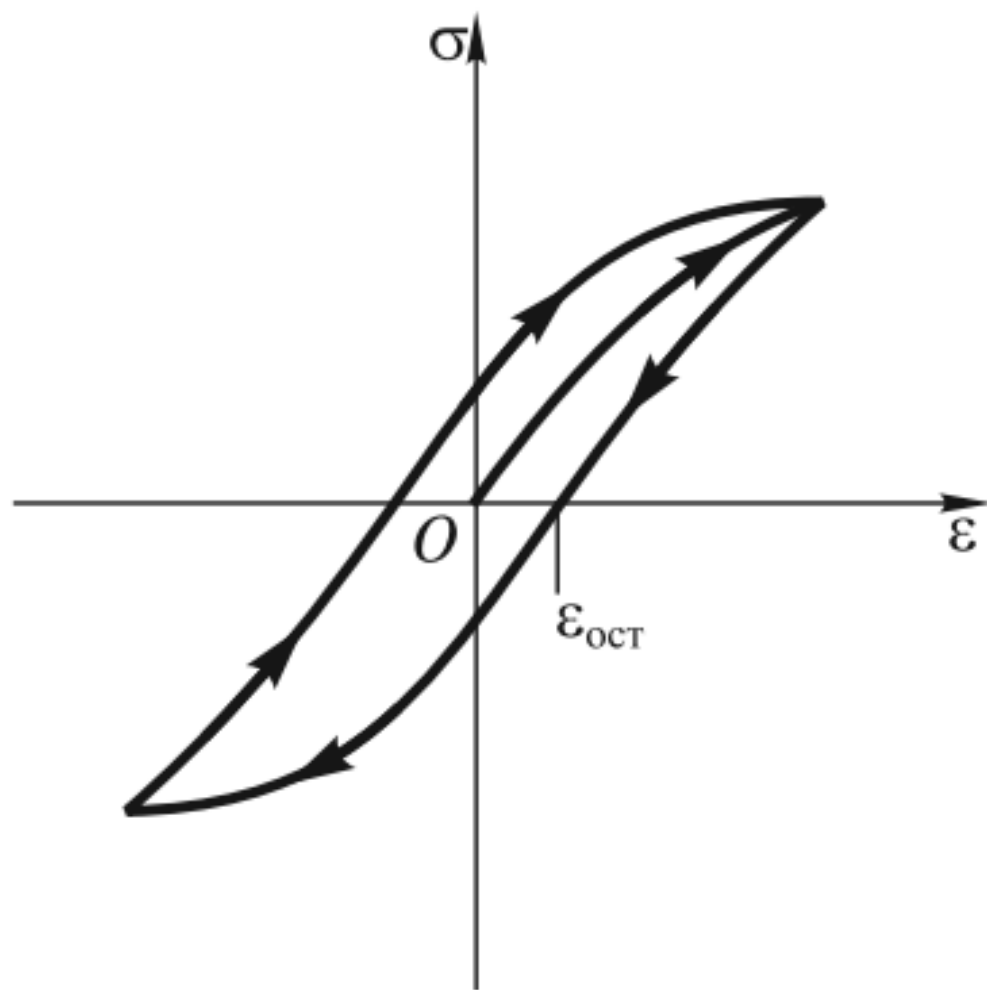
$$\sigma = E \varepsilon$$

$$A_{\tau} = \frac{1}{2} G \gamma^2 l^3$$

$$w_{\tau} = \frac{1}{2} G \gamma^2$$

$$\sigma = G \gamma$$

# Упругий гистерезис



Если деформации выйдут за область упругости, то при снятии внешних нагрузок в теле будут существовать остаточные деформации. Чтобы их устранить, надо приложить сжимающую силу. Такая зависимость от приложенных напряжений носит название **упругого гистерезиса**.

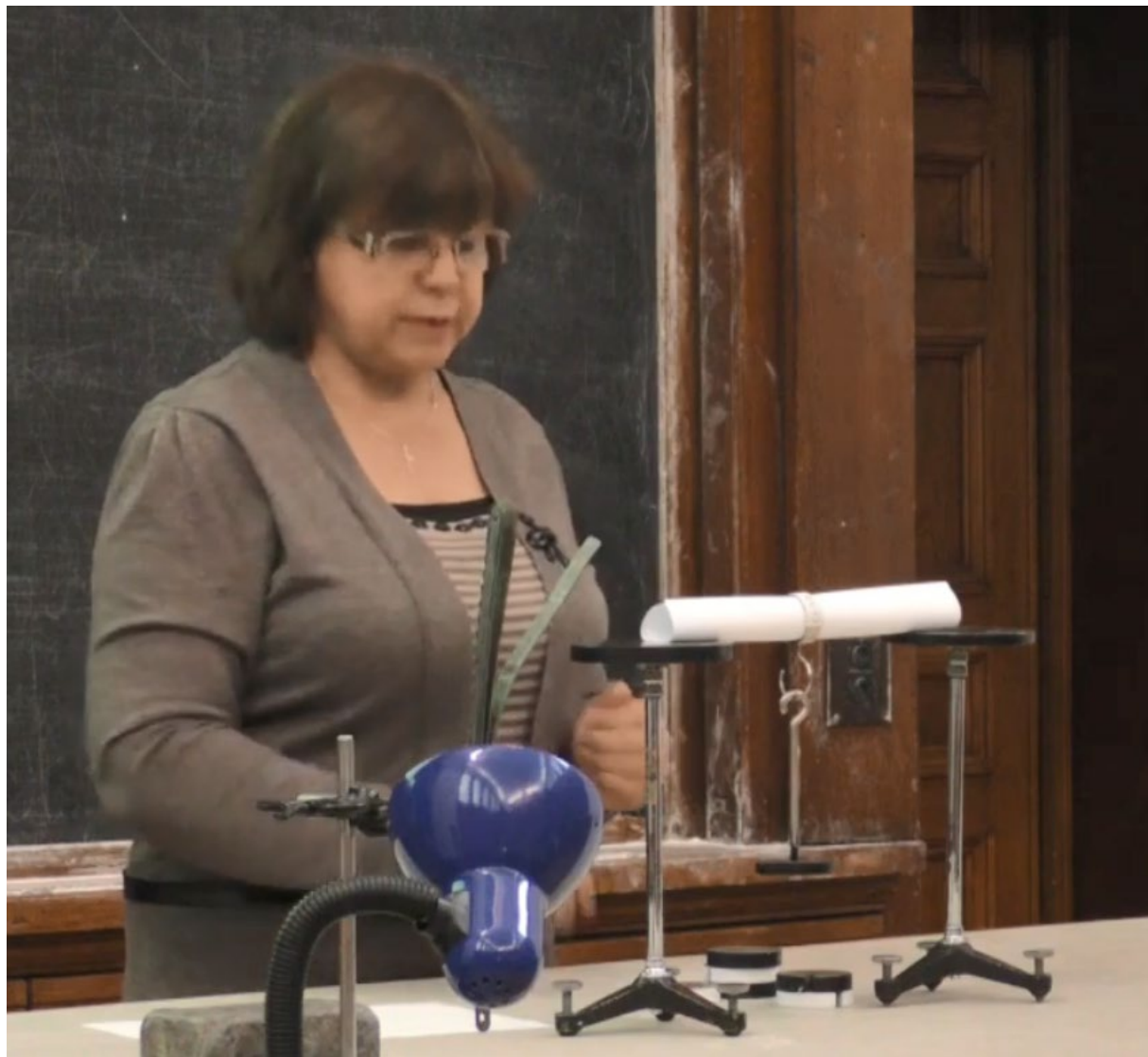
# Упругая и остаточная деформация



# Закон Гука



# Пустотелая трубка (опыт Умова)



# Коэффициент Пуассона

