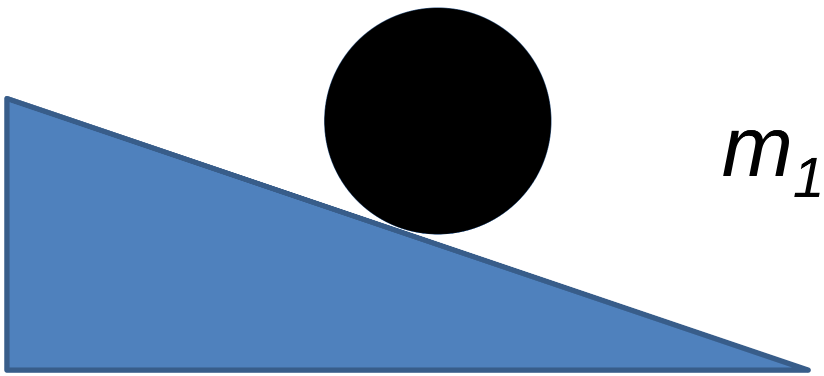
Динамика твердого тела

- Задача динамики абсолютно твердого тела
- Момент силы.
- Момент импульса материальной точки и системы материальных точек.
- Тензор инерции. Главные и центральные оси вращения. Осевые и центробежные моменты инерции.
- Уравнение моментов.
- Закон сохранения момента импульса для материальной точки и системы материальных точек.
- Силы, действующие на вращающееся тело.
- Свободные оси вращения.

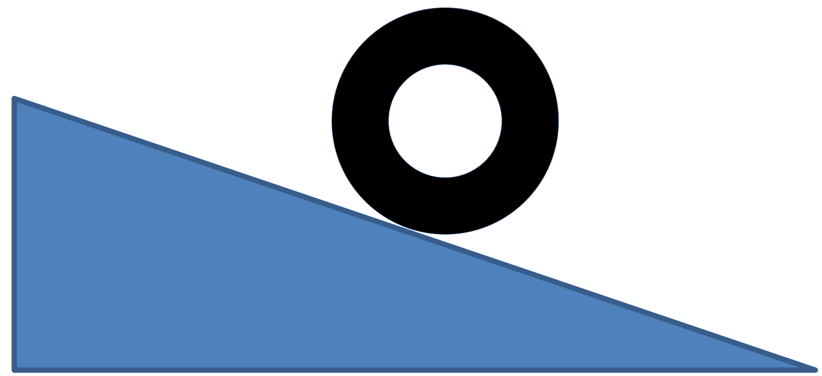
Динамика твердого тела

Задача динамики абсолютно твердого тела – установить взаимосвязь между движением тела и действующими на него силами.

- *Скатывание цилиндров с различным распределением массы с наклонной поверхности.*



$m_1 = m_2$

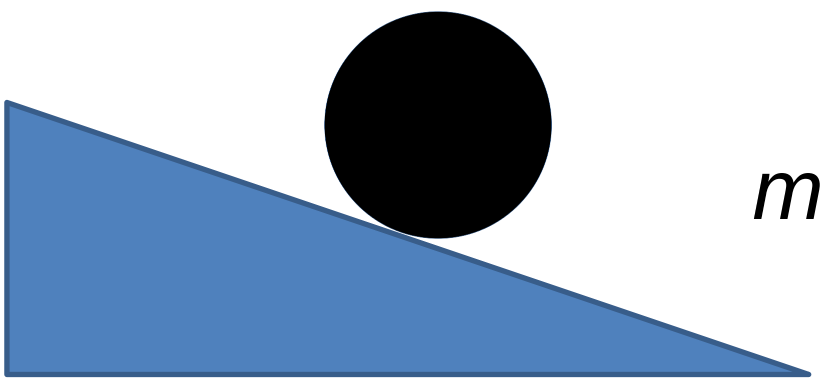


- *Маятник Обербека.*

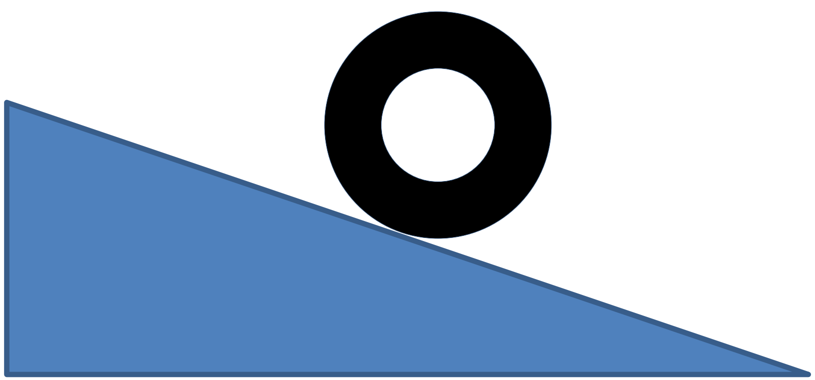
Динамика твердого тела

Выводы:

1. Существенно распределение массы относительно оси вращения.
2. При вращательном движении тела определяющую роль играет не сила, а момент силы.
3. Поэтому для описания вращательного движения тела необходимо ввести новые физические величины: момент инерции, момент импульса, момент силы.



$m_1=m_2$



Уравнение моментов

Рассмотрим твердое тело как систему жестко связанных между собой материальных точек. Уравнение движения для i-й материальной точки массы m_i имеет вид

$$m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} = \vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ji}$$

- Будем полагать, что силы взаимодействия являются центральными
- После векторного умножения уравнения движения на радиус-вектор и проведения простейших преобразований, получаем

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{V}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_i \sum_{i \neq j} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ji}$$

Уравнение моментов

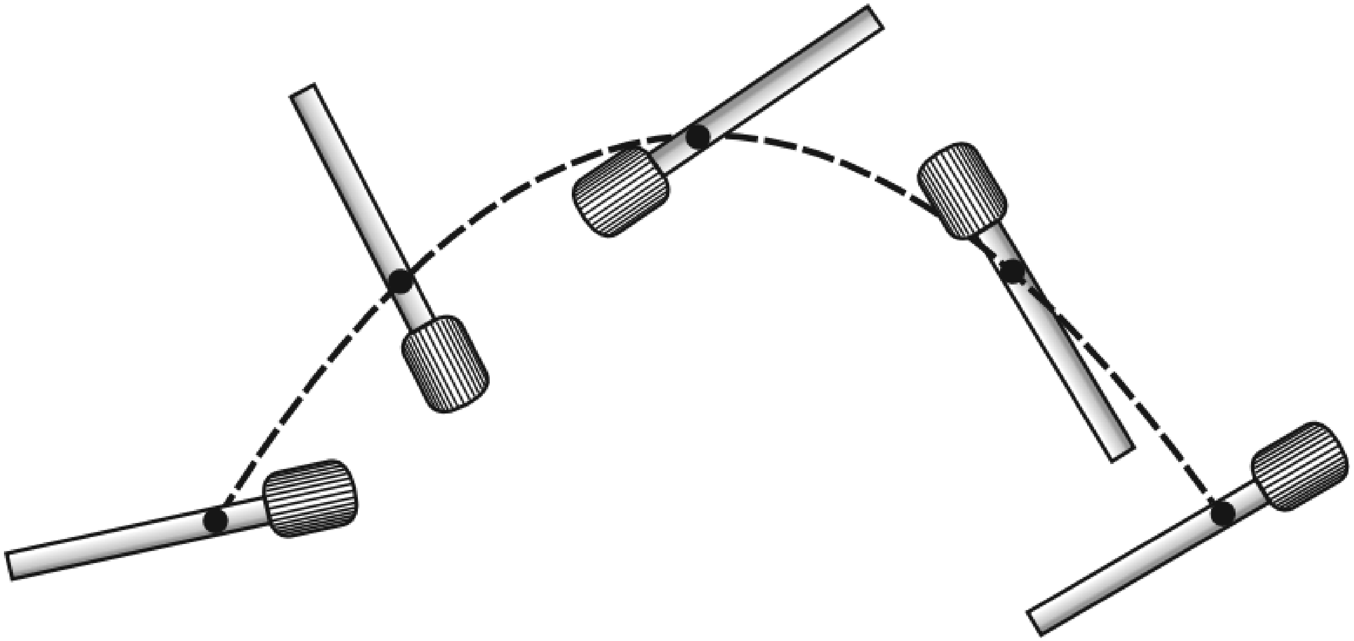
$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{r}_i\times\vec{V}_i=\sum_i\vec{r}_i\times\vec{F}_i+\sum_i\sum_{i\neq j}\vec{r}_i\times\vec{f}_{ji}$$

- Момент импульса $\vec{L}=\sum m_i\vec{r}_i\times\vec{V}_i=\sum_i\vec{r}_i\times\vec{p}_i$
- Момент внешних сил $\vec{M}=\sum_i\vec{r}_i\times\vec{F}_i$
- Момент внутренних сил $\sum_i\sum_j\vec{r}_i\times\vec{f}_{ji}$

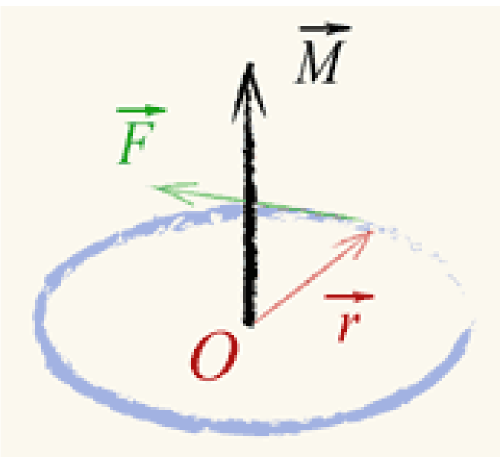
Момент внутренних сил равен нулю

Уравнения динамики твердого тела

- Уравнение движения центра масс $m\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \sum \mathbf{F}$
- Уравнение моментов $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{M}$



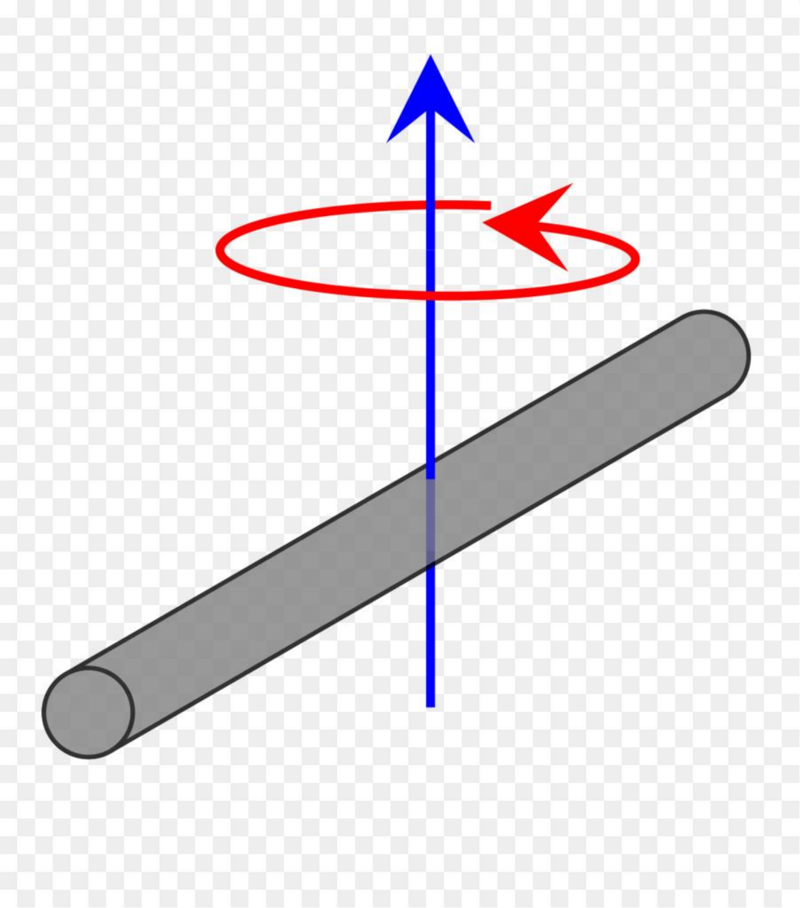
Момент силы



- **Точка приложения силы** – материальная точка, на которую действует сила.
- **Момент силы относительно точки** ***M*** – векторное произведение радиус-вектора ***r*** точки приложения силы на силу ***F*** :

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{r}\boldsymbol{F}]$$

Основное уравнение вращательного движения



Если твердое тело вращается вокруг закрепленной оси, то векторное уравнение моментов сводится к скалярному уравнению.

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z$$

$$J\frac{d\omega}{dt} = J\varepsilon = M_z$$

Момент инерции

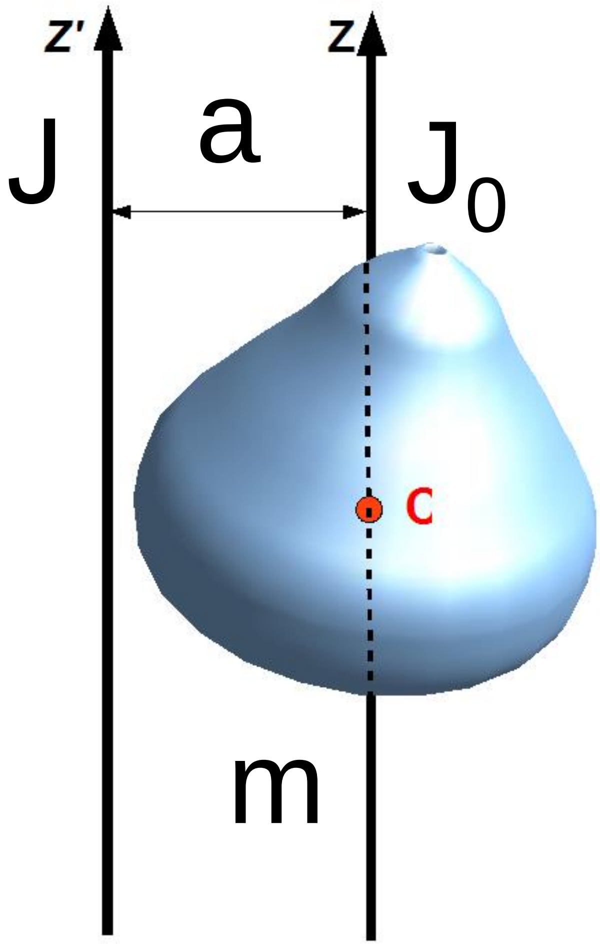
Момент инерции тела относительно оси – физическая величина, равная сумме произведений масс материальных точек, из которых состоит тело, на квадрат расстояния их до оси:

$$J = \sum_i m_i r_i^2$$

В случае непрерывного распределения в пространстве массы тела, расчет момента инерции тела сводится к вычислению интеграла:

$$J = \int r^2 \mathrm{d}m = \int_V r^2 \rho \mathrm{d}V$$

Момент инерции



Теорема Гюйгенса – Штейнера – момент инерции тела J относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела J_0 относительно оси, проходящей через центр масс тела и параллельной данной и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями:

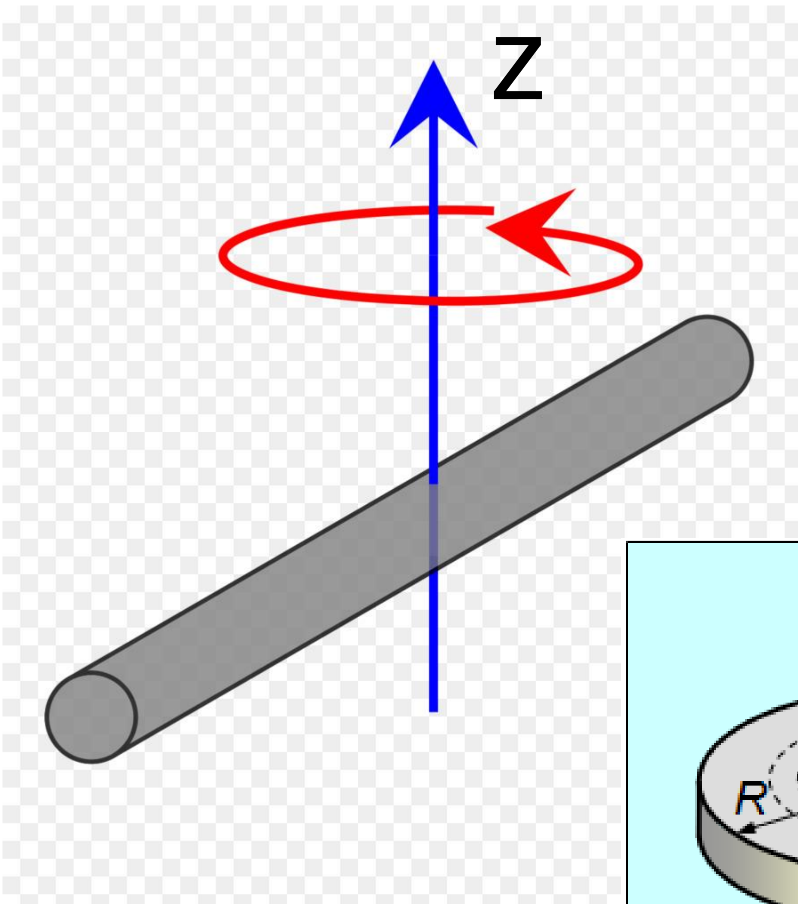
$$J = J_0 + ma^2$$

Основные определения и уравнения

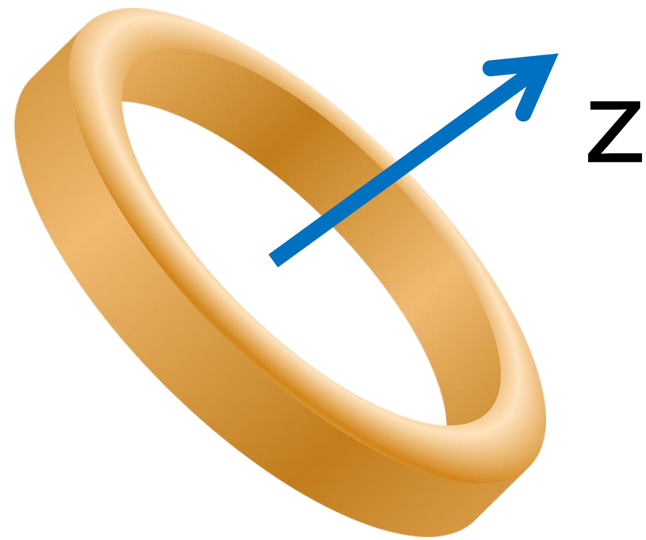
- **Уравнение движения центра масс** $m\dfrac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \sum \mathbf{F}$
- **Уравнение моментов** $\dfrac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{M}$
- **Момент импульса** $\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{rp}]$
- **Момент силы** $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{rF}]$
- **Момент инерции** $J = \sum_i m_i r_i^2$ $J = \int r^2 \mathrm{d}m = \int_V r^2 \rho \mathrm{d}V$
- **Теорема Гюйгенса – Штейнера** $J = J_0 + ma^2$

Момент инерции

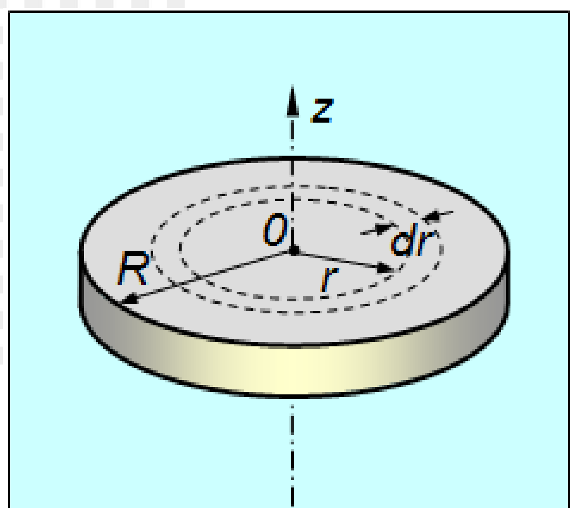
Стержень



Кольцо



Диск



Основное уравнение вращательного движения

Роль момента силы проявляется в опытах с «послушной» и «непослушной» катушками.

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$$

$$J\frac{d\omega}{dt} = J\varepsilon = M_z$$

Катушка

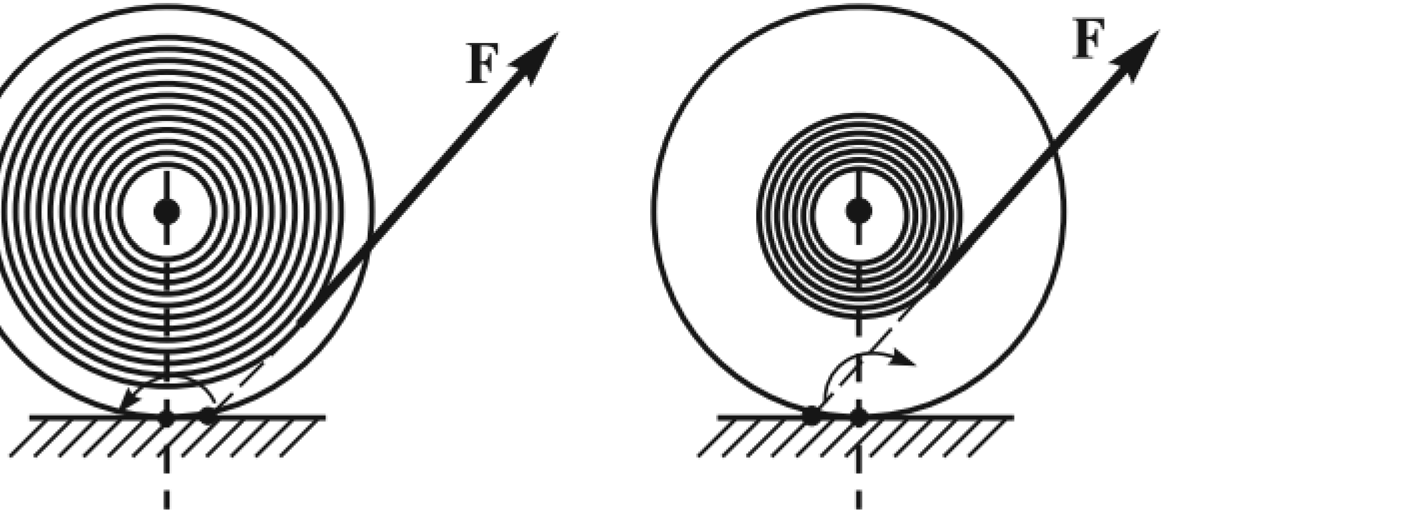
Катушка

Основное уравнение вращательного движения

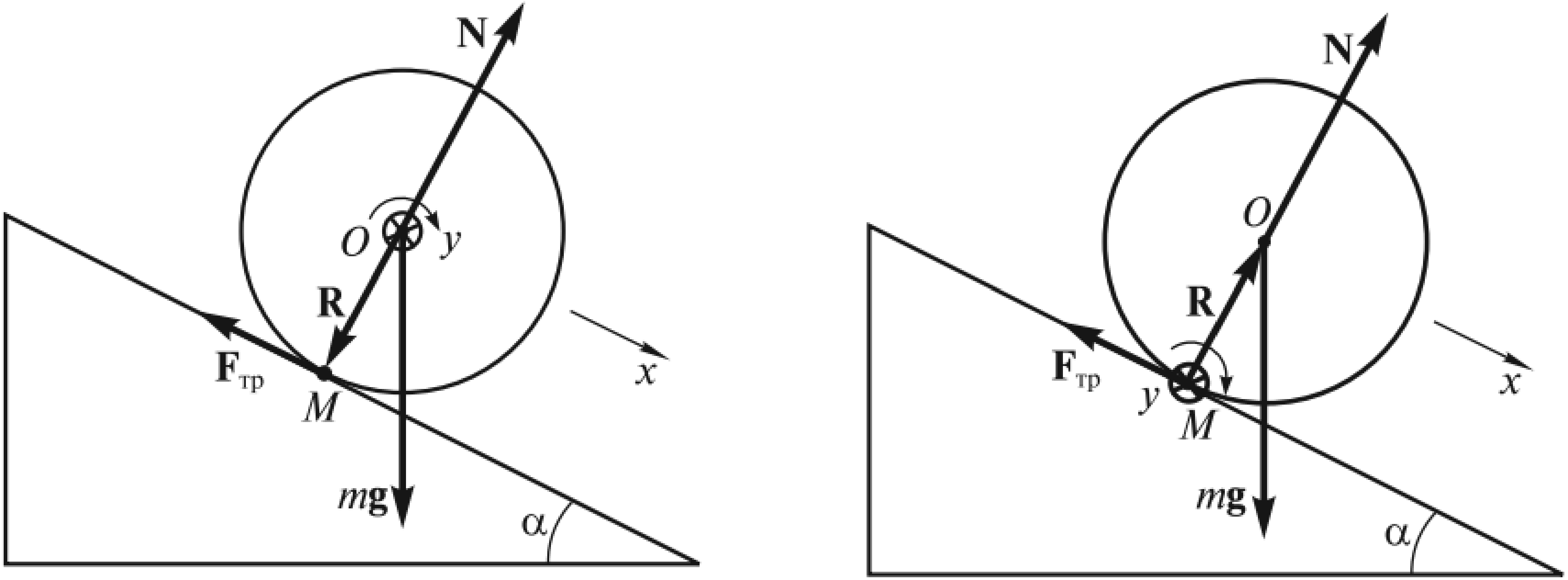
Роль момента силы проявляется в опытах с «непослушной» и «послушной» катушками.

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{rF}]$$

$$J\frac{d\omega}{dt} = J\varepsilon = M_z$$



Скатывание цилиндра с наклонной плоскости

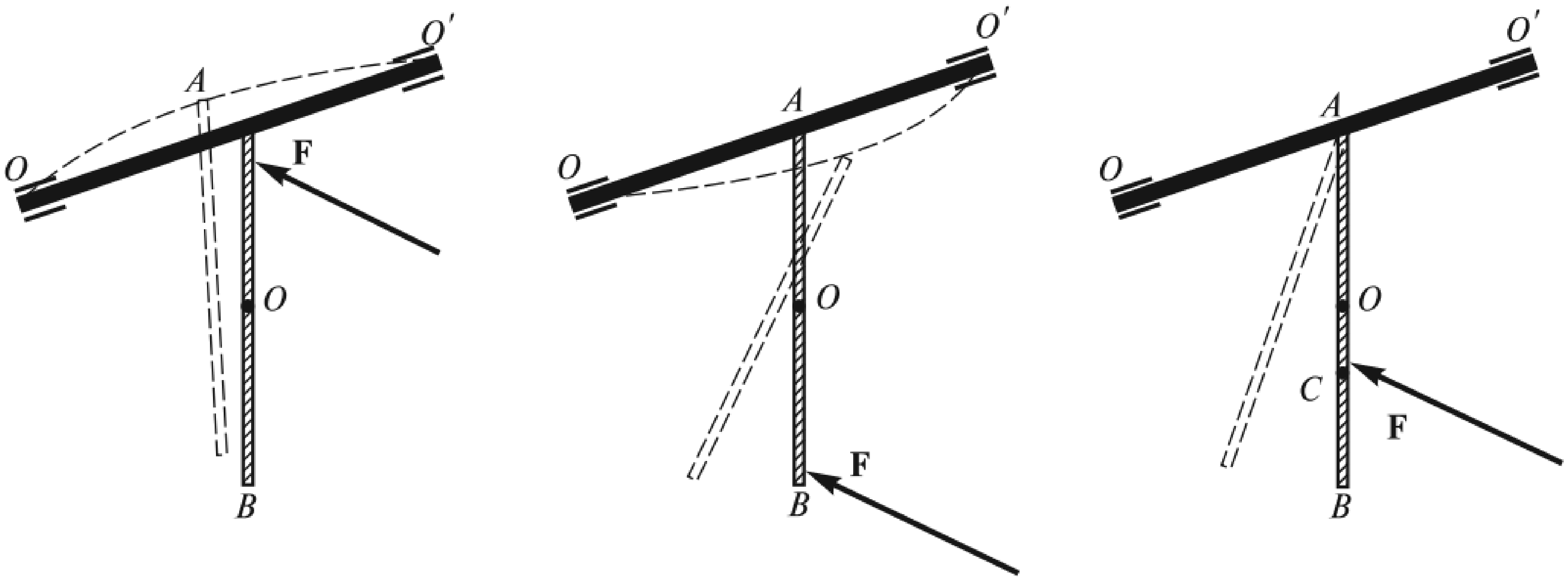


Приведем два способа решения этой задачи с использованием уравнений динамики твердого тела.

$$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + J_0 / mR^2}$$

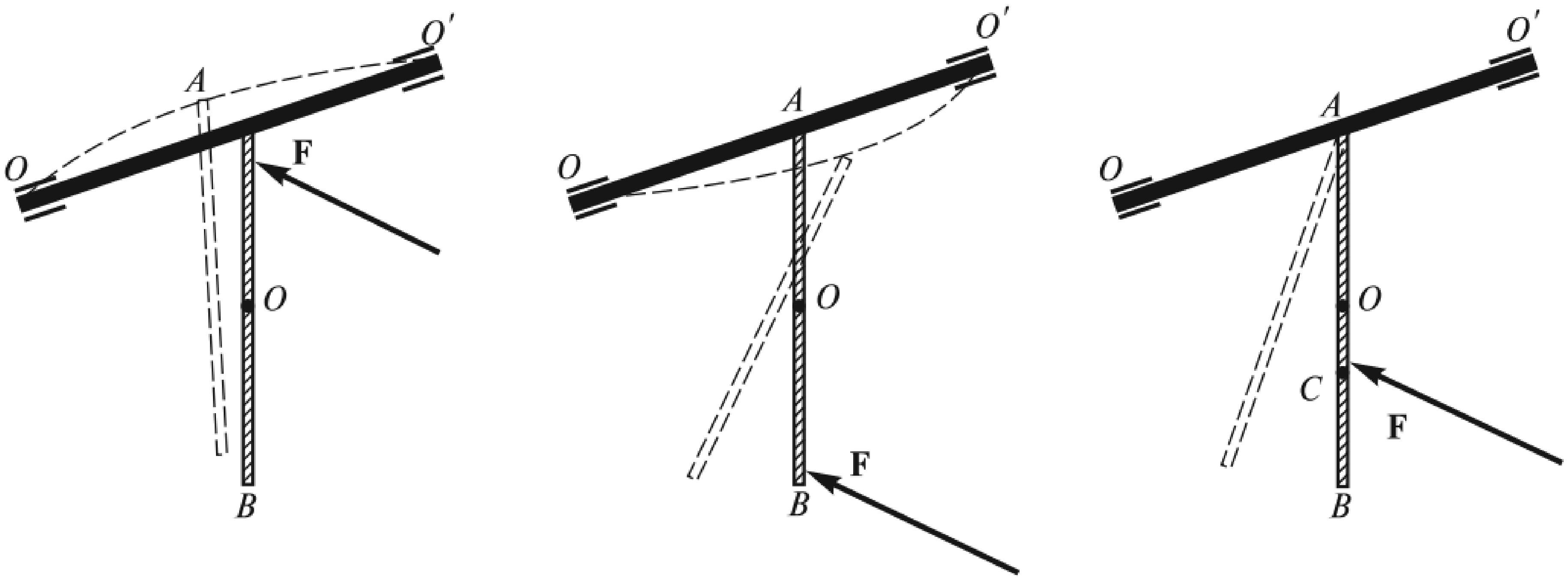
Центр удара

Опыт показывает, что если тело, закрепленное на оси вращения, испытывает удар, то действие удара в общем случае передается и на ось. Величина и направление силы, приложенной к оси, зависят от того, в какую точку тела нанесен удар.



Центр удара

Если удар нанесен в точку, называемую центром удара, то ось не испытывает никаких дополнительных нагрузок. (*l=2L/3*)



Центр удара

При ударах палкой или саблей длиной L по препятствию рука «не чувствует» удара если удар приходится в точку расположенную на расстоянии $L\text{-}l=L/3$

При горизонтальном ударе кием по бильярдному шару шар начинает качение без проскальзывания, если удар нанесен в точку на высоте h=7/5R

Механика твердого тела

- **Закон сохранения момента импульса**
- **Кинетическая энергия твердого тела**
- **Гироскоп**
- **Гироскопические силы**

Закон сохранения момента импульса

- **Уравнение моментов** $$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{M}$$

Закон сохранения момента импульса (количества движения) механической системы относительно точки точки – момент импульса механической системы ***L*** относительно инерциальной системы отсчета сохраняется, если сумма моментов внешних сил ***M*** относительно данной точки равна нулю.

Закон сохранения момента импульса (количества движения) механической системы относительно оси – момент импульса механической системы *L* относительно инерциальной системы отсчета сохраняется, если сумма моментов внешних сил *M* относительно данной оси равна нулю.

Кинетическая энергия твердого тела

Кинетическая энергия твердого тела представляет собой сумму кинетических энергий составляющих собой сумму кинетических энергий составляющих ее материальных точек.

$$T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_i\right)^2,$$

где $\mathbf{v}_0$ – скорость центра масс тела; $\mathbf{u}_i$ – скорость i-ой материальной точки относительно системы координат, связанной с центром масс и совершающей поступательное движение вместе с ним.

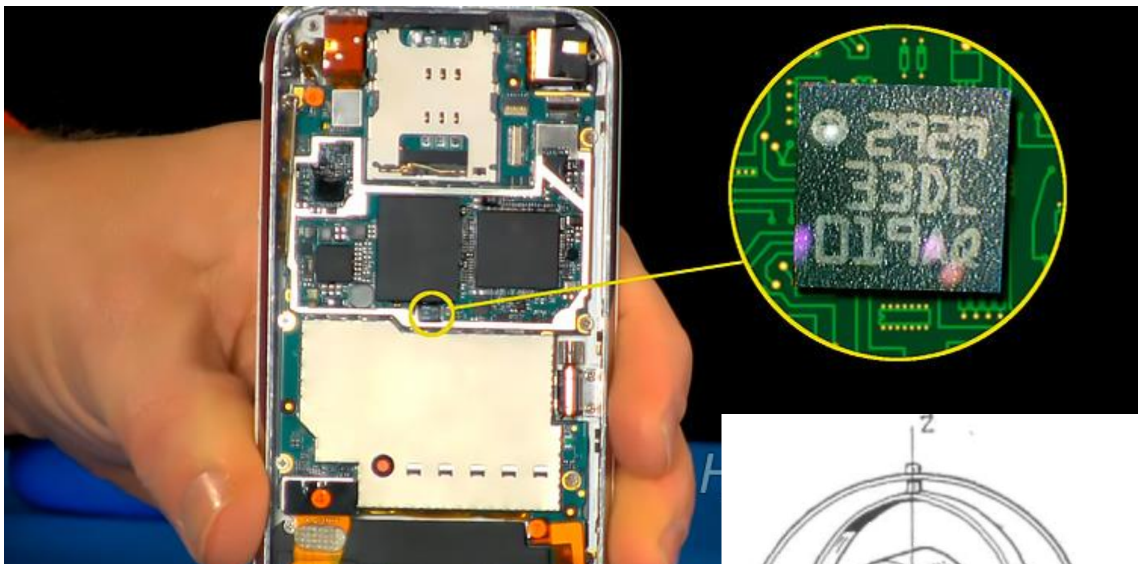
Кинетическая энергия твердого тела

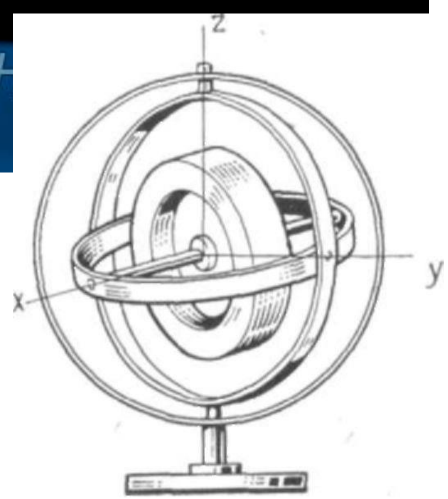
Теорема Кенига при плоском движении твердого тела кинетическая энергия равна сумме кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращательного движения.

- Работа внешней силы

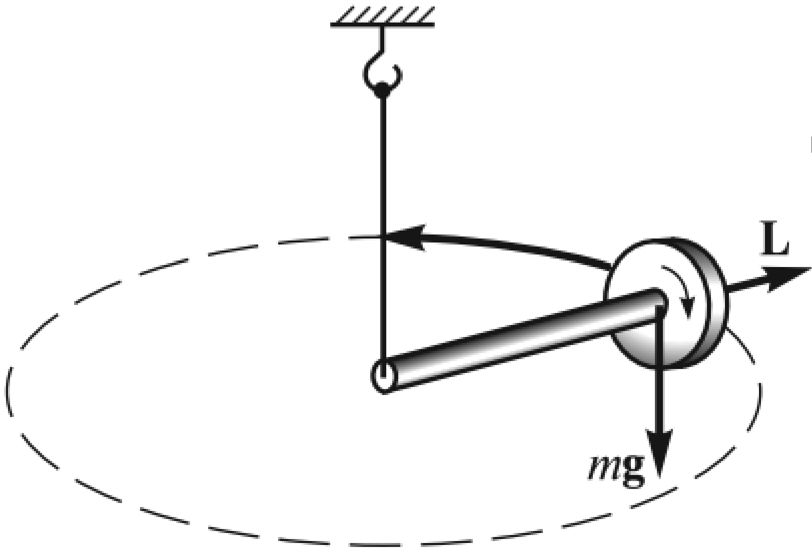
Гироскопы

Гироскоп – это аксиально-симметричное тело, вращающееся с большой угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг своей оси симметрии





Гироскопы

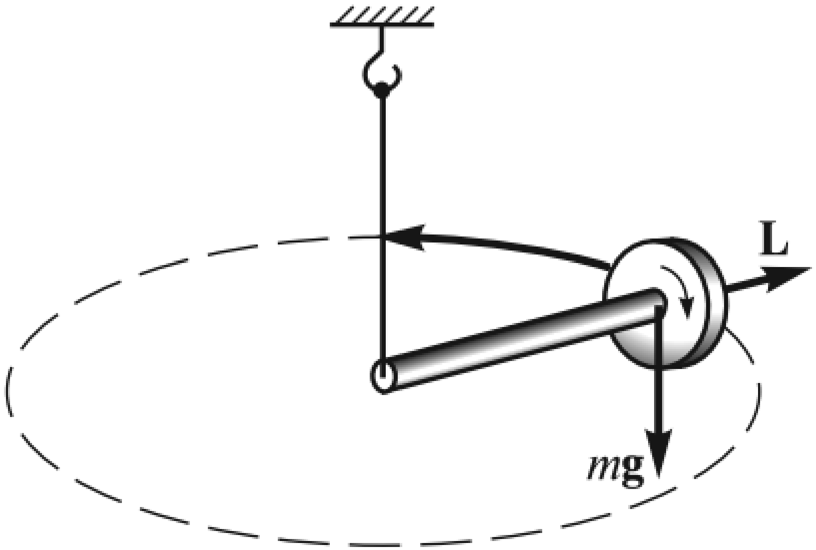


Точное решение задачи о движении гироскопа в поле внешних сил весьма сложно. Рассмотрим элементарную теорию гироскопа. В рамках это теории делается допущение: $\omega \gg \Omega$

Тогда момент импульса равен $\boldsymbol{L} = J_z \boldsymbol{\omega}$

Так как векторы $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{\omega}$ совпадают по направлению, то тело гироскопа будет совершать вращательное движение вокруг вертикальной оси. Говорят, что гироскоп совершает прецессию.

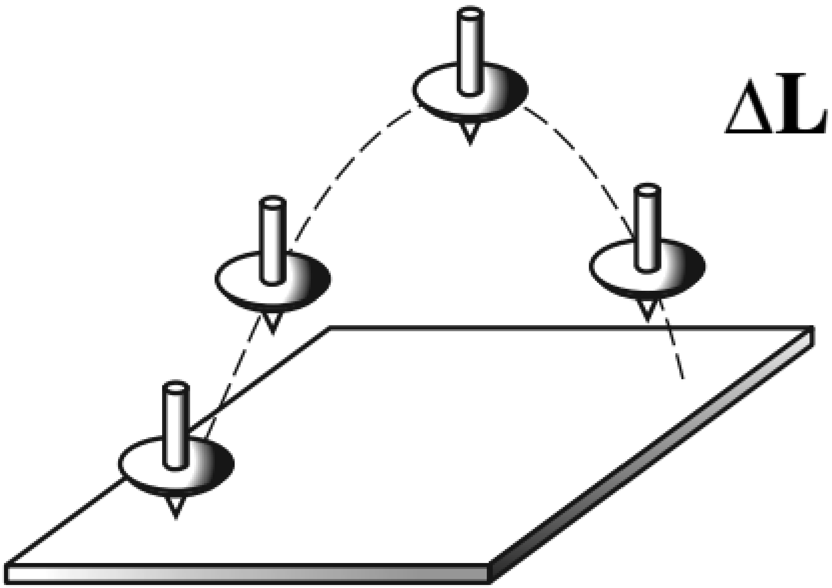
Гироскопы



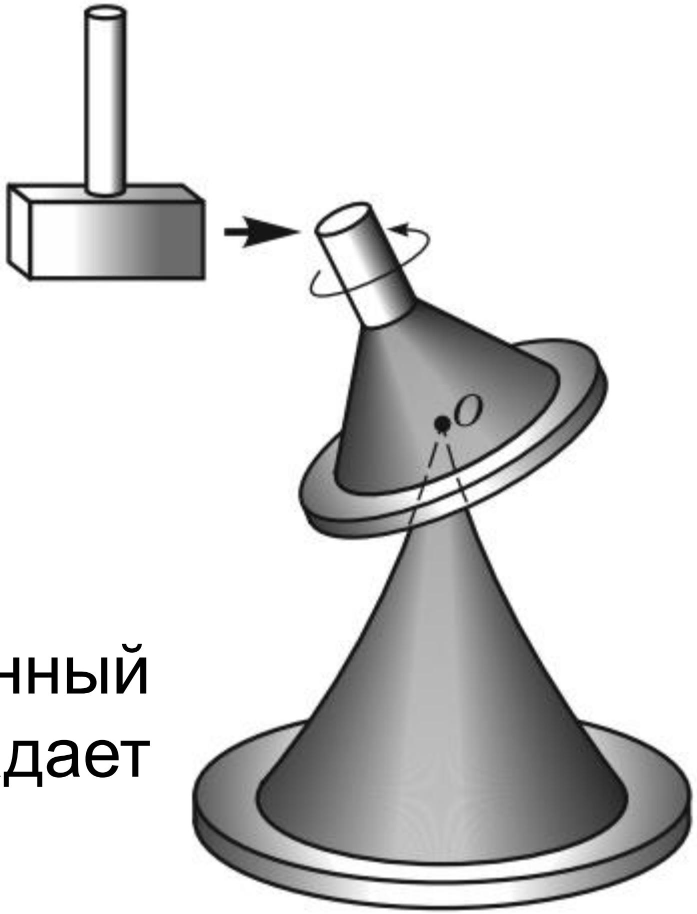
Прецессия гироскопа – вращение оси симметрии гироскопа с угловой скоростью Ω под действием момента внешних сил наряду с его собственным вращением вокруг оси симметрии.

- Прецессия гироскопа описывается уравнением: $\left[\vec{\Omega}\times\vec{L}\right]=\vec{M}$
- Если известен момент инерции гироскопа и его угловая скорость вращения, можно записать $\Omega=\dfrac{M}{L}=\dfrac{M}{J\omega}$

Устойчивость гироскопы



$$\Delta \mathbf{L} = \int_0^{\Delta t} \mathbf{M} dt.$$

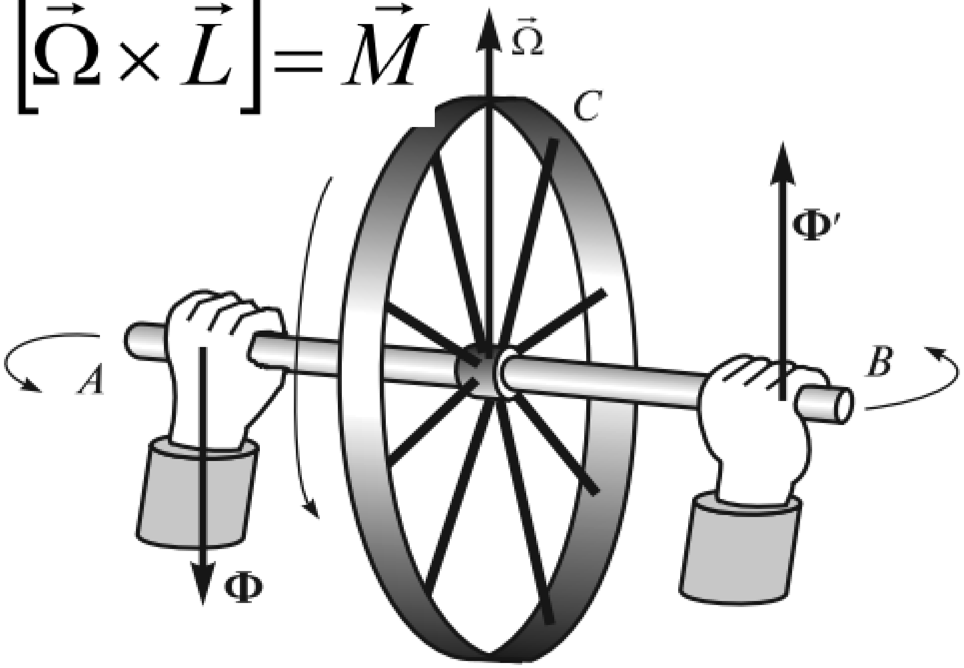


Свободный гироскоп, раскрученный вокруг оси симметрии, обладает большой устойчивостью.

Если свободный гироскоп, раскрученный так, что вектор угловой скорости и ось симметрии гироскопа не совпадают, то наблюдается движение, которое называется **нутацией**.

Гироскопические силы

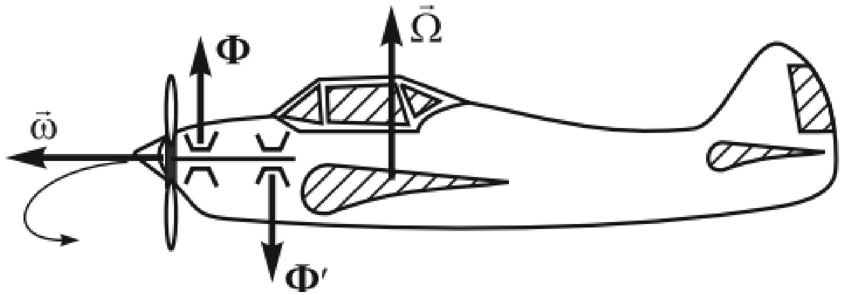
$$\left[\vec{\Omega} \times \vec{L}\right] = \vec{M}$$

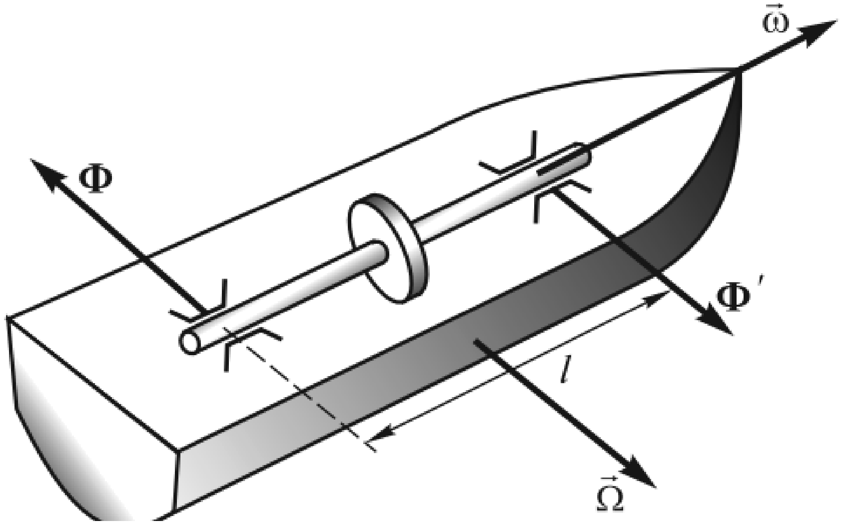


Гироскопические силы – силы, действующие на крепление (рамку, подшипник, руки экспериментатора и т.д.) несвободного гироскопа при вынужденном вращении оси (вынужденной прецессии) гироскопа.

Направление гироскопических сил легко найти с помощью правила. **Правило Н.Е. Жуковского –** гироскопические силы стремятся совместить момент импульса гироскопа с направлением угловой скорости вынужденного поворота.

Гироскопические силы





1. Легкий одномоторный самолет совершает левый вираж. Гироскопический момент передается через подшипники на корпус самолета и действует на него. Самолет начинает задирать нос к верху.
2. При килевой качке корабля ротор турбины участвует в двух движениях: вращается вокруг своей оси и поворачивается вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной валу турбины. Корабль будет, то поворачивать на право, то на лево.

Волчки

- Волчки отличаются от гироскопов тем, что в общем случае они не имеют ни одной неподвижной точки.
- Опыт показывает, что если волчок привести во вращение вокруг оси симметрии и установить на плоскость в вертикальном положении, то это вращение в зависимости от формы волчка и угловой скорости вращения будет либо устойчивым, либо неустойчивым.

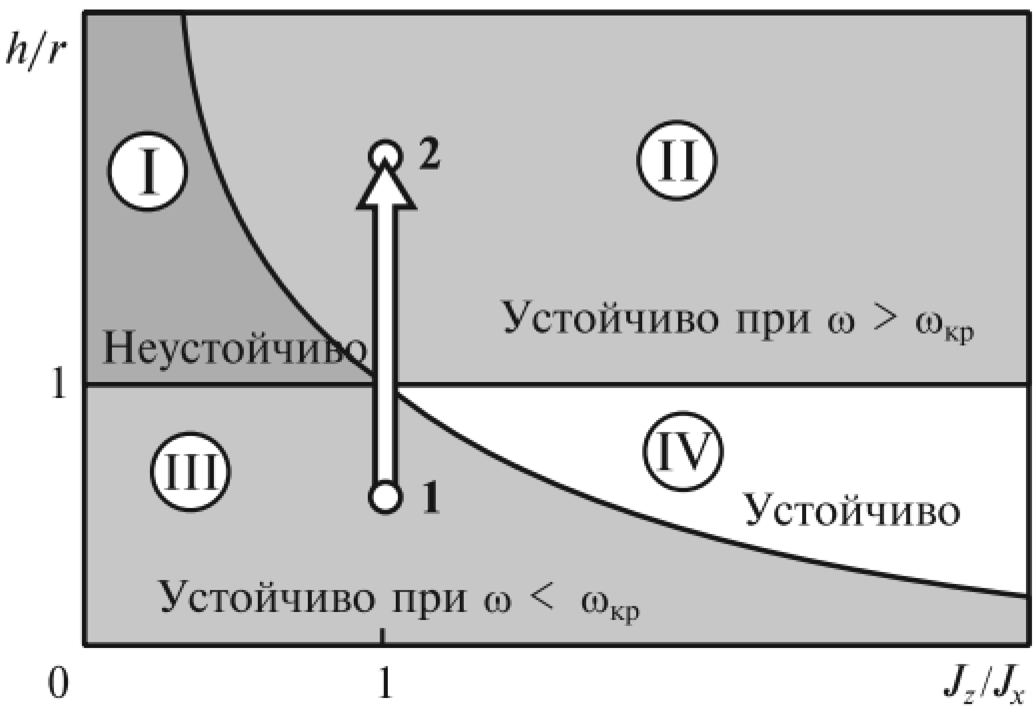
Устойчивость вращения симметричного волчка

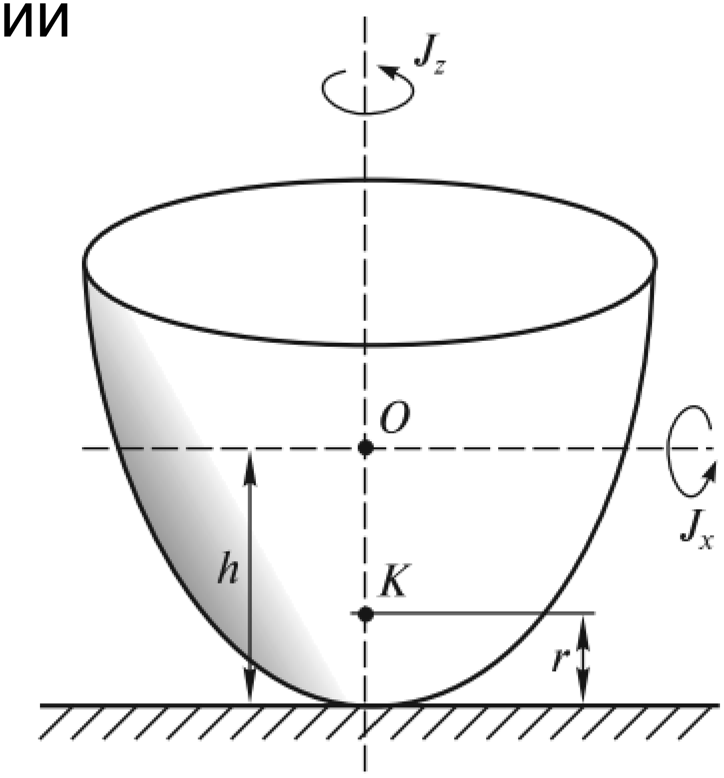
О – центр масс

К – центр кривизны волчка в точке опоры

J_z – момент инерции относительно оси симметрии

J_x – момент инерции относительно главной центральной оси, перпендикулярной оси симметрии

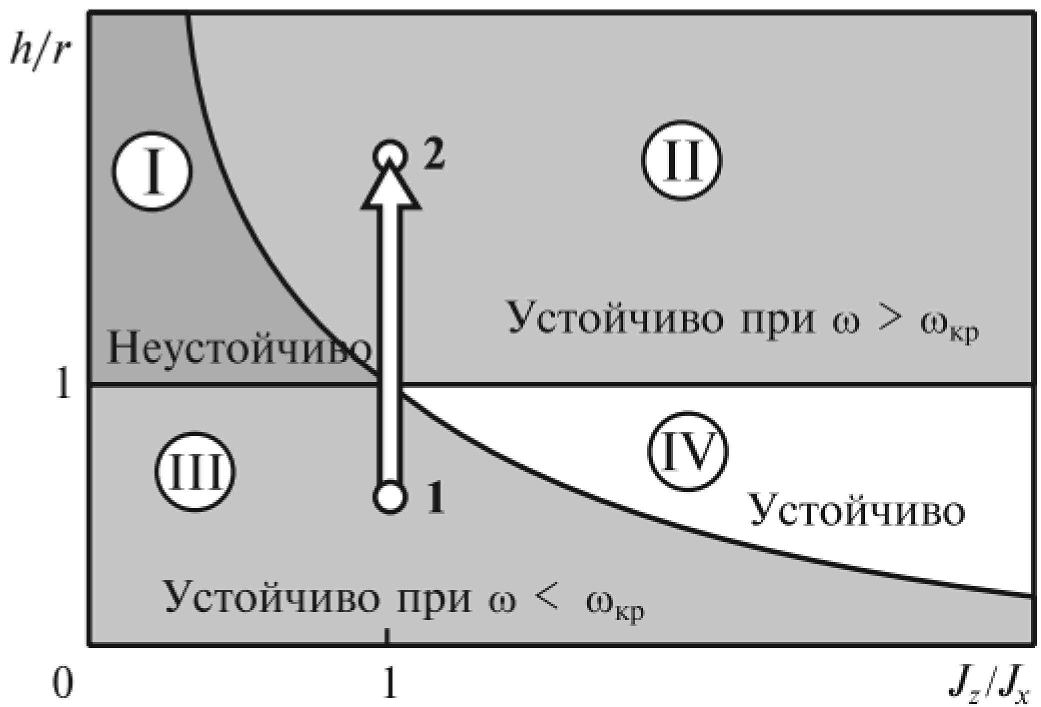


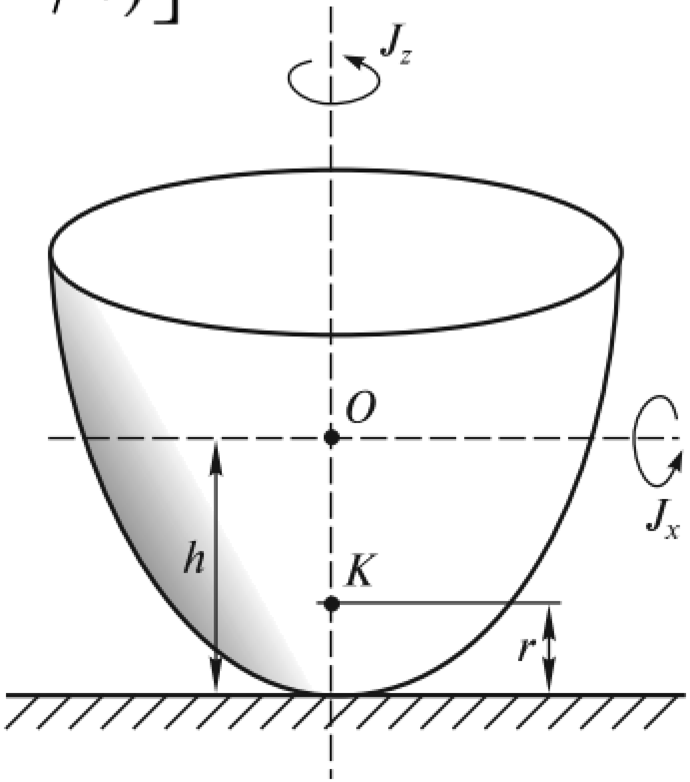


Устойчивость вращения симметричного волчка

Анализ устойчивости вращения волчка приводит к диаграмме, изображенной на рисунке.

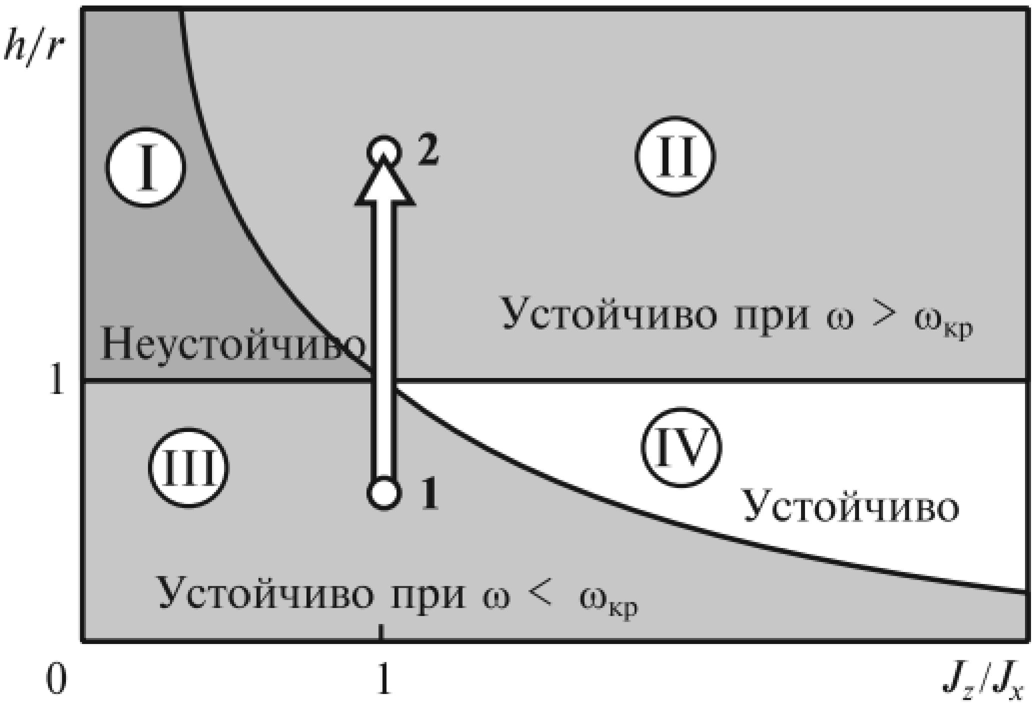
$$\omega_{\text{кр}} = \left[\frac{(h-r)mg}{J_x (r/h)(J_z/J_x - r/h)} \right]^{1/2}$$

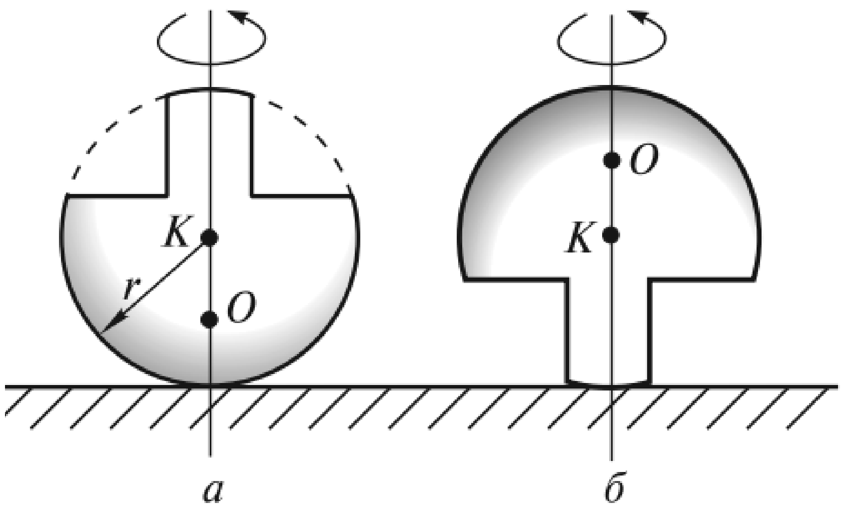




Устойчивость вращения симметричного волчка

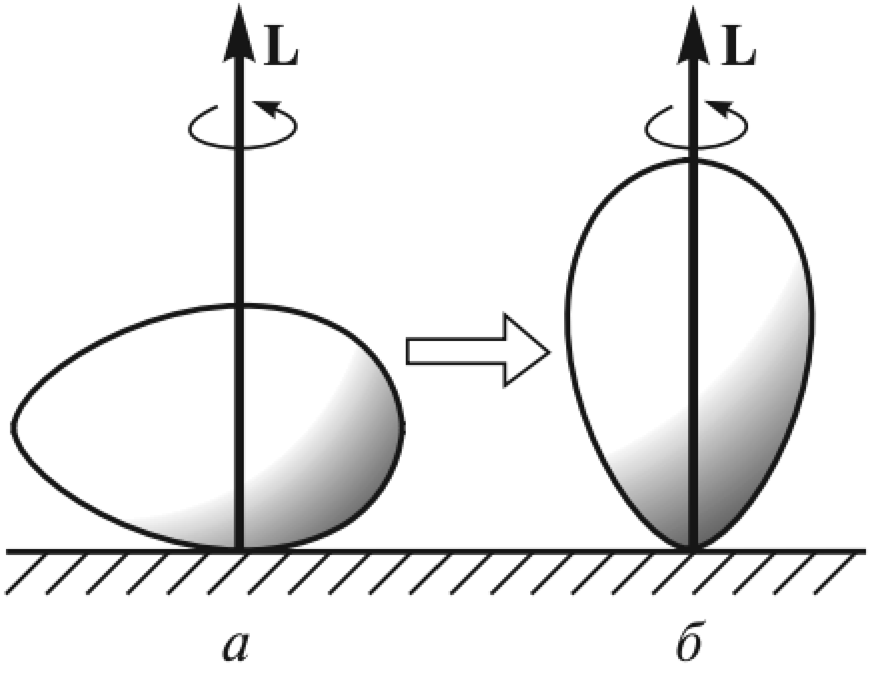
Рассмотрим китайский волчок $\omega > \omega_{кр}$ и поставлен на плоскость вертикально. Пусть $J_z = J_x$. Поскольку h<r, то этому соответствует точка 1 в области III, а это область устойчива только для $\omega < \omega_{кр}$. Вектор ***L*** всегда направлен вверх!!!





Устойчивость вращения симметричного волчка

Неустойчивое вращение Устойчивое вращение



Тензор инерции

Предположим, что твердое тело закреплено таким образом, что оно может вращаться вокруг некоторой неподвижной точки О. Введем в лабораторной системе отсчета декартову систему координат XYZ с началом в этой точке.

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$\vec{L}_i \equiv m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_i m_i \left(y_i^2 + z_i^2\right) & -\sum_i m_i (x_i y_i) & -\sum_i m_i (x_i z_i) \\ -\sum_i m_i (y_i x_i) & \sum_i m_i \left(x_i^2 + z_i^2\right) & -\sum_i m_i (y_i z_i) \\ -\sum_i m_i (z_i x_i) & -\sum_i m_i (z_i y_i) & \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Тензор инерции

Те́нзор — объект линейной алгебры, линейно преобразующий элементы одного линейного пространства в элементы другого.

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}$$

- Совокупность 9 величин *Jxx* , *Jxy* , *Jxz* , *Jyx* , *Jyy* , *Jyz* , *Jzx* , *Jzy* , *Jzz* определяет *тензор инерции*.
- Диагональные элементы тензора *Jxx* , *Jyy* , *Jzz* называются ***осевыми моментами инерции***.
- Недиагональные элементы *Jxy* , *Jyx* , *Jxz* , *Jzx*. *Jyz*, *Jzy* называются ***центробежными моментами инерции***.