

# Механика

---

## Лекция 12



# План лекции

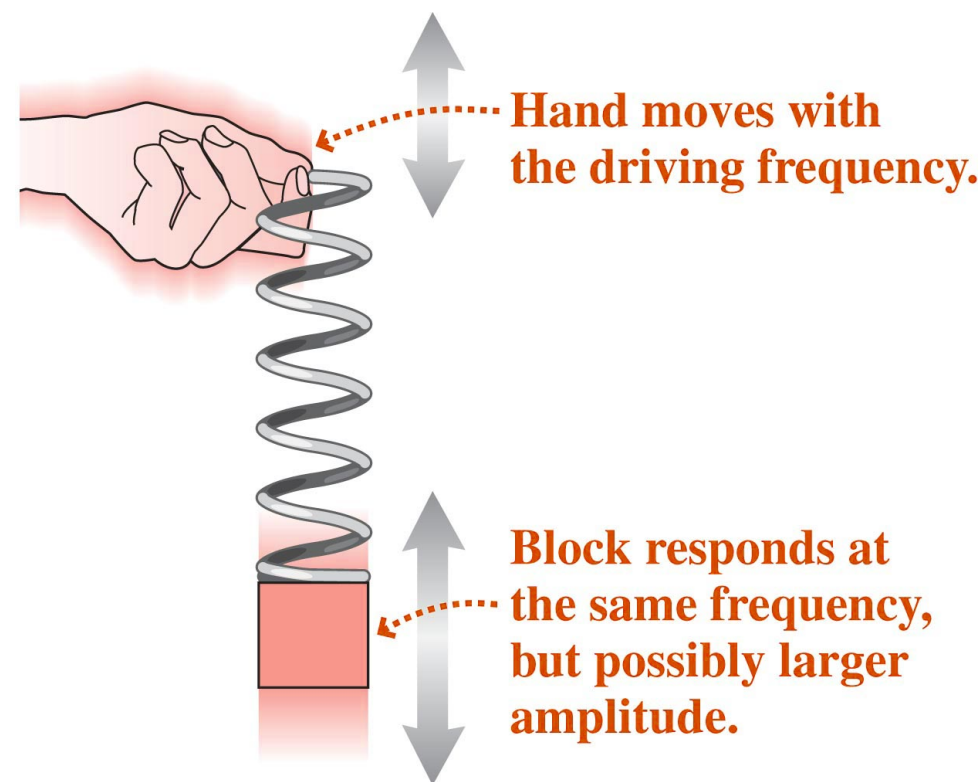
- Вынужденные колебания. Резонанс.
- Амплитудно-частотная резонансная характеристика.  
Фазово-частотная резонансная характеристика.
- Добротность.
- Процесс установления колебаний.
- Параметрические колебания. Глубина модуляции.
- Автоколебания

# Вынужденные колебания

Рассмотрим теперь колебания пружинного маятника в системе с одной степенью свободы, которые возникают под действием внешней гармонической силы. В нормированном виде уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

где  $f_0 = F_0/m$  – приведенная амплитуда силы,  
 $\omega$  – частота вынуждающей силы.



# Вынужденные колебания

Известно, что общее решение любого неоднородного дифференциального уравнения можно представить в виде суммы частного решения этого уравнения и общего решения однородного уравнения ( $f_0 = 0$ ), то есть решением уравнения вынужденных колебаний будет функция

$$x(t) = x_1(t) + D e^{-\delta t} \cos(\Omega t + \varphi_0)$$

Здесь  $x_1(t)$  соответствует вынужденным колебаниям (частное решение неоднородного уравнения), а второй член - затухающим собственным колебаниям (общее решение однородного уравнения).

# Вынужденные колебания

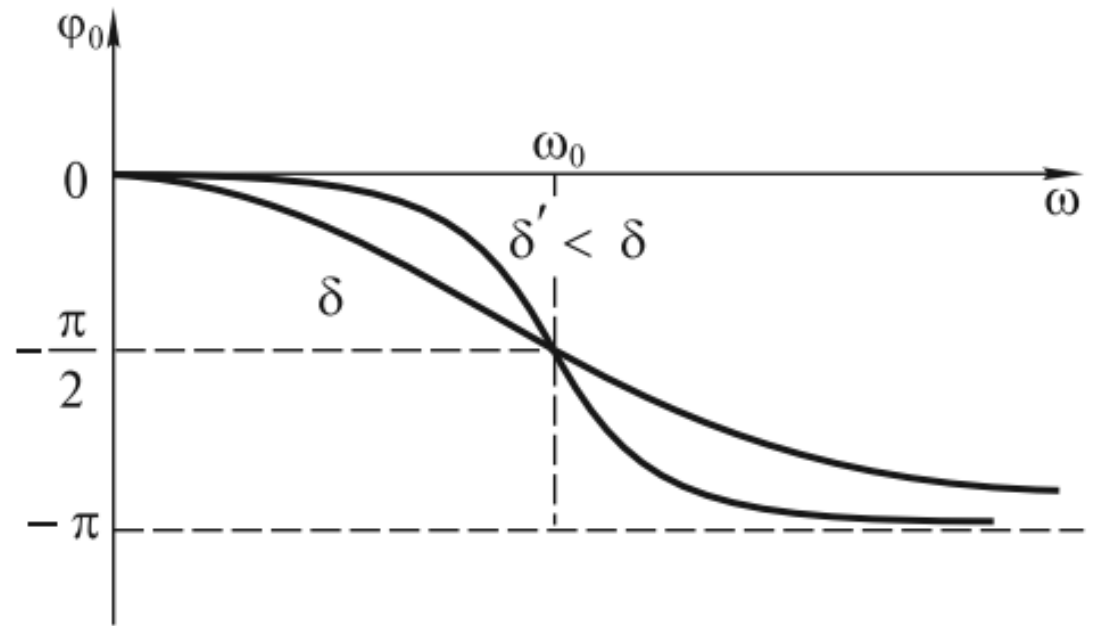
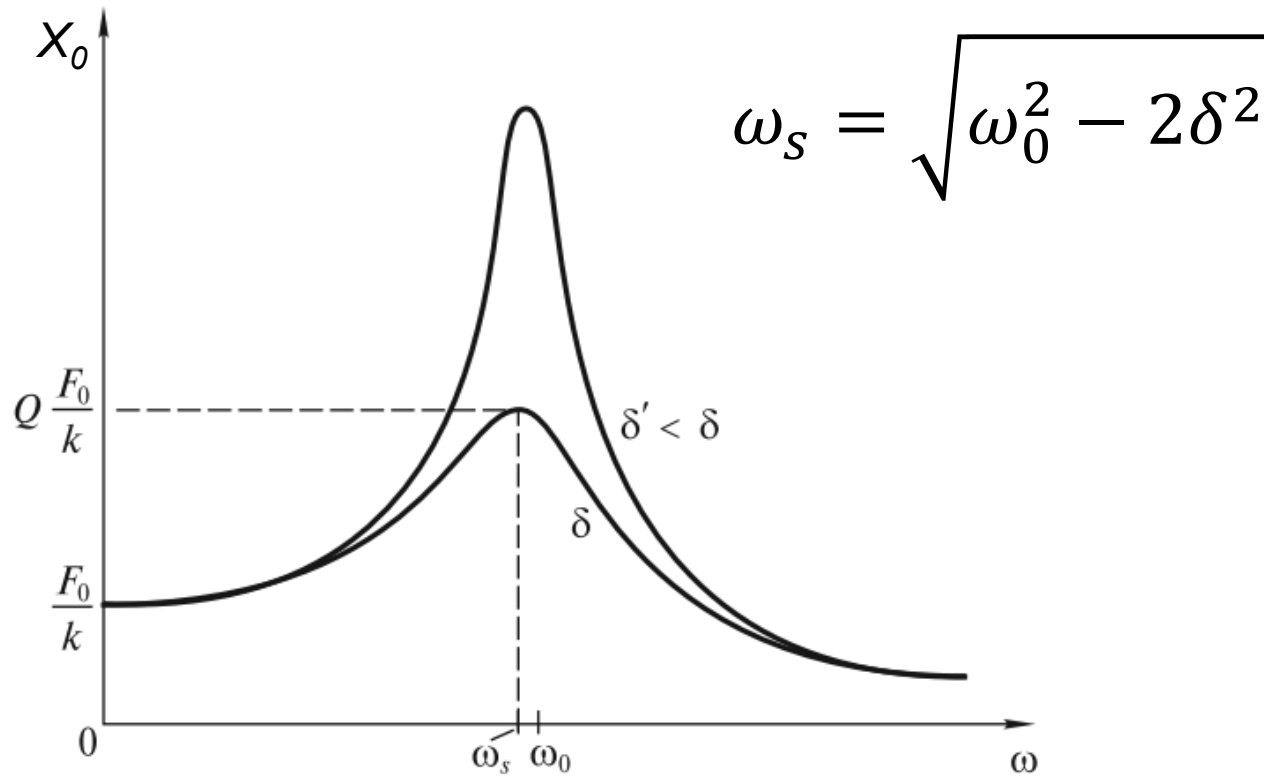
$$x(t) = x_1(t) + D e^{-\delta t} \cos(\Omega t + \varphi_0)$$

$$x_1(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$X_0 = f_0 \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}$$

$$\tan \varphi = -\frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

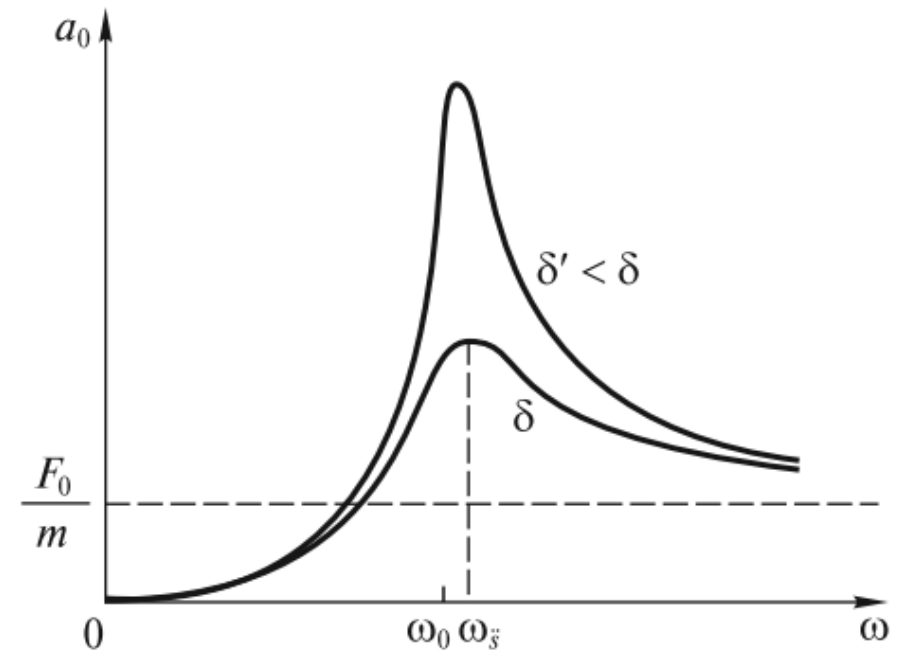
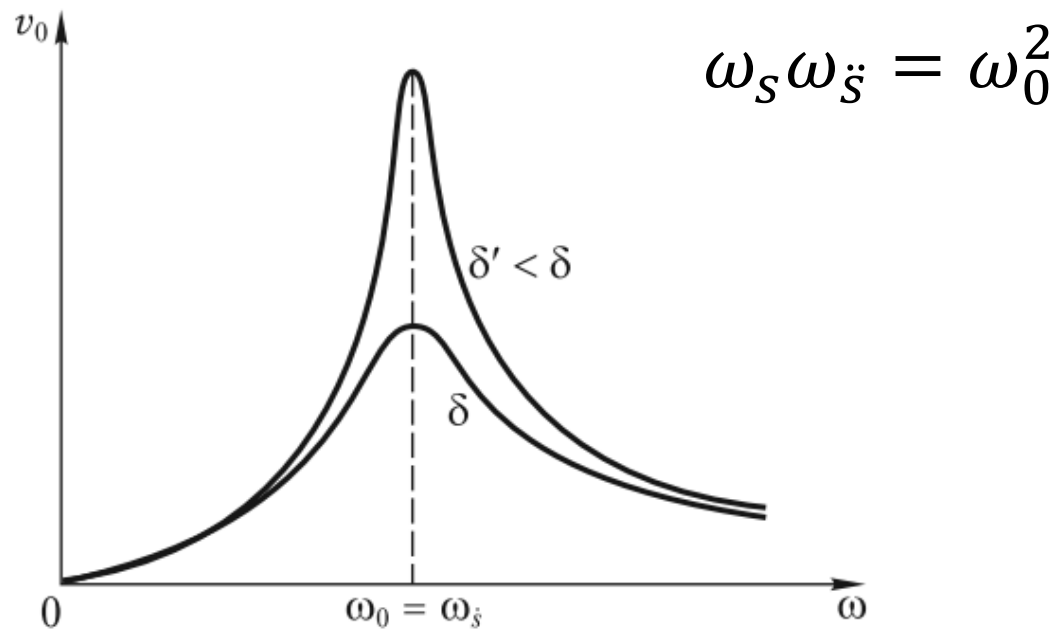
# Резонанс смещений



$$X_0 = f_0 \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}$$

$$\tan \varphi = -\frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

# Резонанс скоростей и ускорений



$$v_0 = \frac{F_0}{m \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega}\right)^2 + 4\delta^2}}$$

$$a_0 = \frac{F_0}{m \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)^2 + \frac{4\delta^2}{\omega^2}}}$$

# Добротность

При анализе резонансных свойств колебательных систем наряду с показателем  $\delta$  и логарифмическим декрементом затухания  $\theta$  широко пользуются величиной, которая называется добротностью системы  $Q$ .

Для механических систем она определяется как отношение амплитуды смещения при резонансе к амплитуде смещения, когда  $\omega = 0$ :

$$Q = \frac{X_{\text{рез}}}{X_{\text{ст}}} = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{2\pi}{2\delta T} = \frac{\pi}{\theta}$$

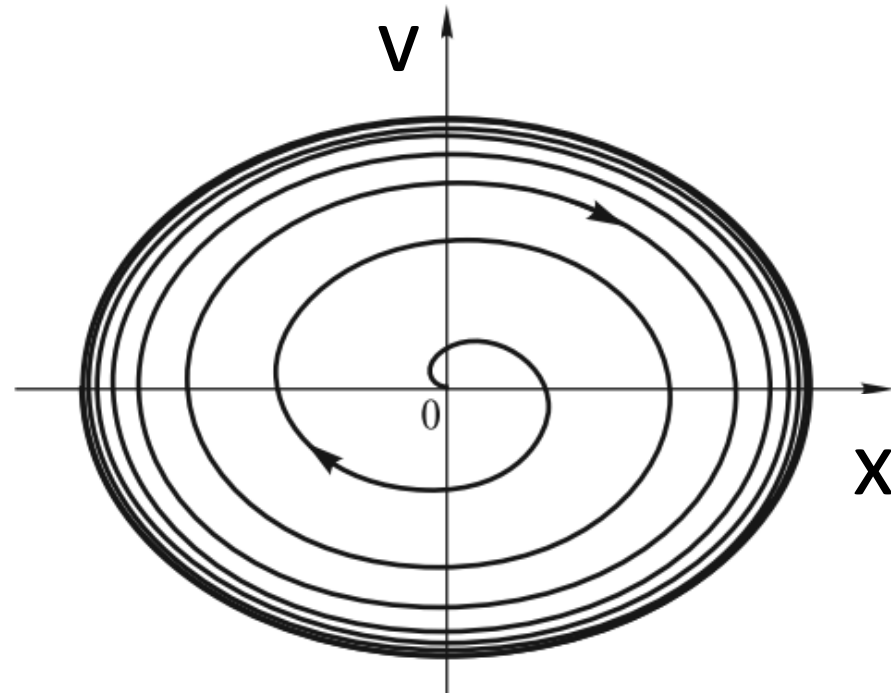
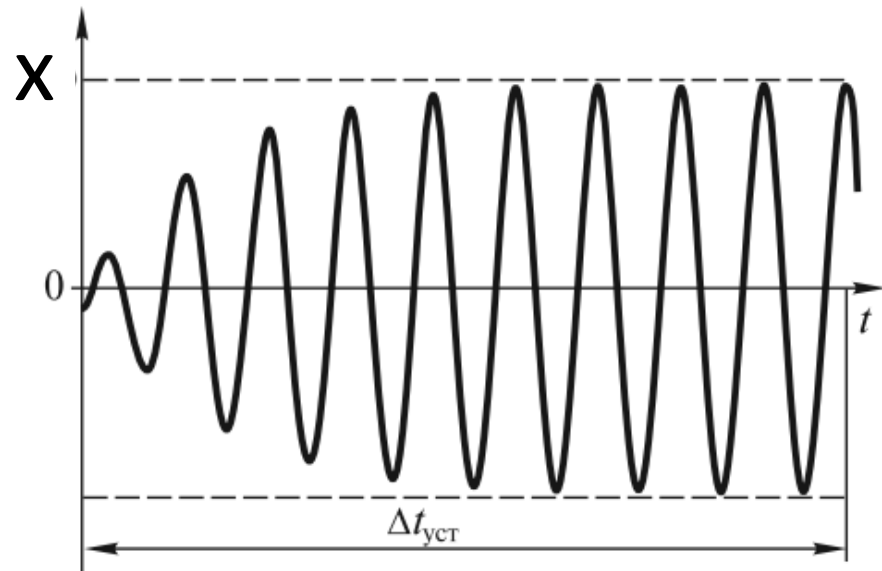


# Установление колебаний

Фазовая траектория будет постепенно «раскручиваться» из начала координат и стремиться к предельному циклу – эллипсу.

$$x(t) = x_1(t) + D e^{-\delta t} \cos(\Omega t + \varphi_0)$$

$$x_1(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$$



# Параметрические колебания

В повседневной жизни мы часто имеем дело с незатухающими колебаниями, для поддержания которых необходимо периодически изменять параметр колебательной системы. При этом этот параметр изменяется в такт собственным колебаниям.



# Математический маятник переменной длины

$$A_- \approx -mg \left( 1 - \frac{\alpha_0^2}{2} + \frac{\alpha_0^4}{24} \right) \Delta l$$

$$A_+ \approx mg \left( 1 + \alpha_0^2 - \frac{\alpha_0^4}{8} \right) \Delta l$$

$$A_{\text{тр}} \approx -\eta \alpha_0^2 gl \left( 1 - \frac{\alpha_0^2}{16} \right) \frac{T_0}{2}$$

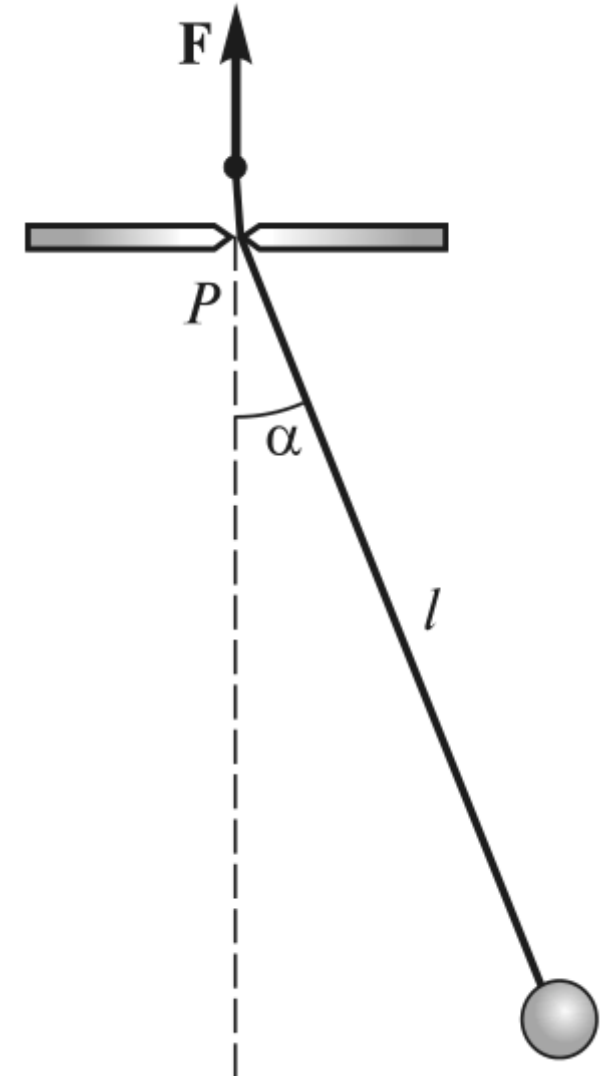
$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin \omega t$$

$$A = 2(A_- + A_+)$$

$$A + A_{\text{тр}} = 0$$

⇓

$$\alpha_0 \approx \frac{12}{\sqrt{7}} \sqrt{1 - \frac{\pi}{3Q} \frac{\Delta l}{l}}$$



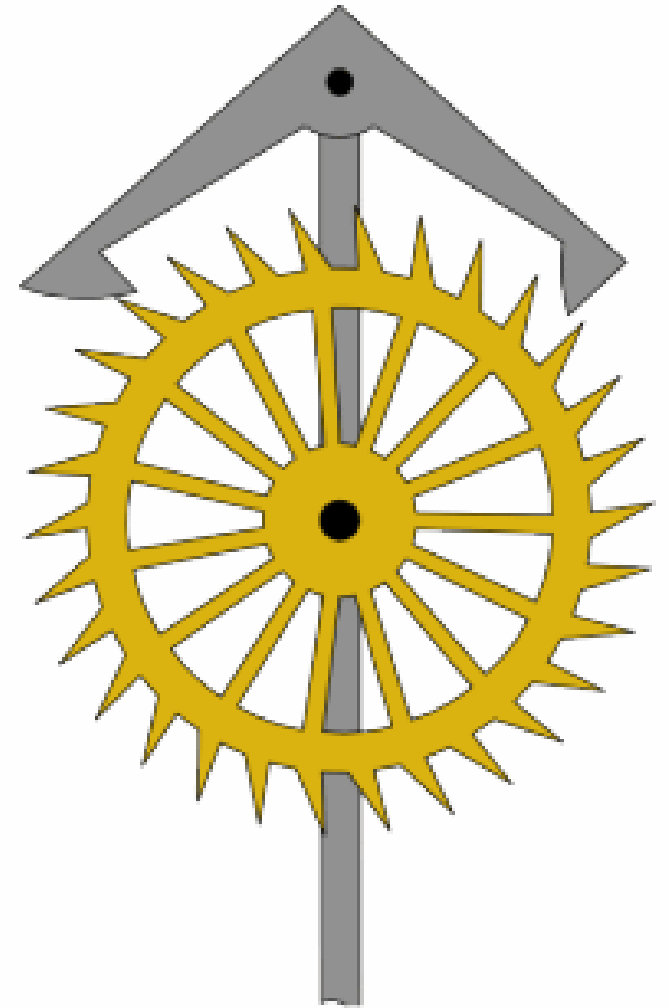
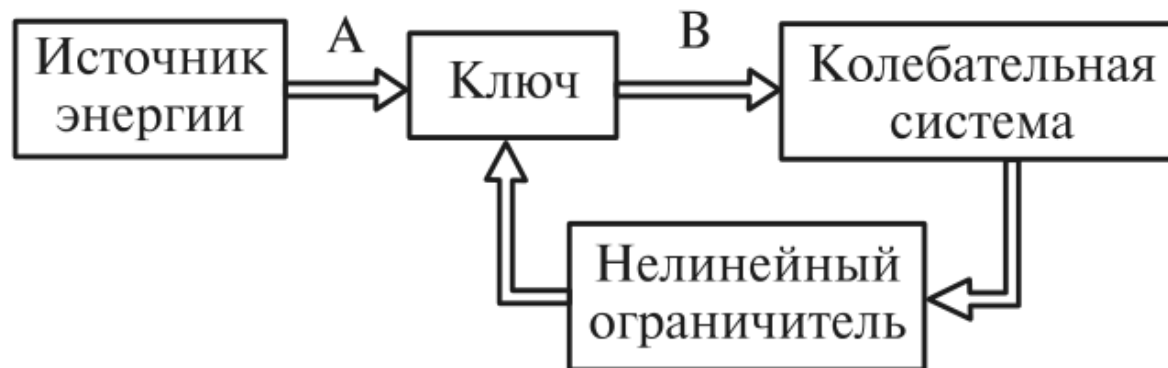
# Маятник переменной длины



# Автоколебания

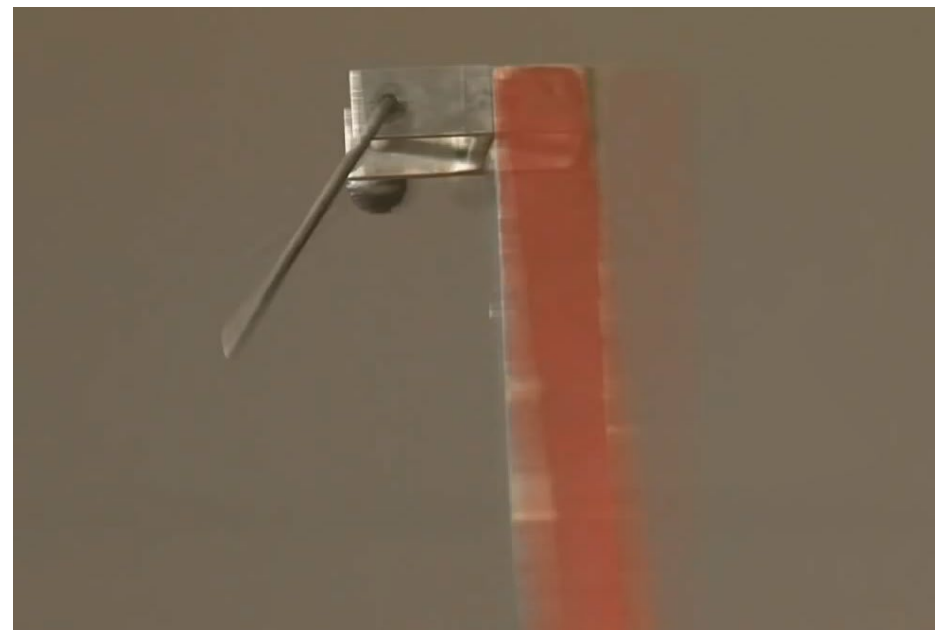
Колебания листьев деревьев, дорожных знаков над проезжей частью, полотнищ на ветру: незатухающие колебания происходят за счет энергии постоянно дующего ветра.

При этом сама колебательная система производит отбор энергии ветра в нужный момент времени и в количестве, требуемом для компенсации неизбежно присутствующих энергетических потерь.





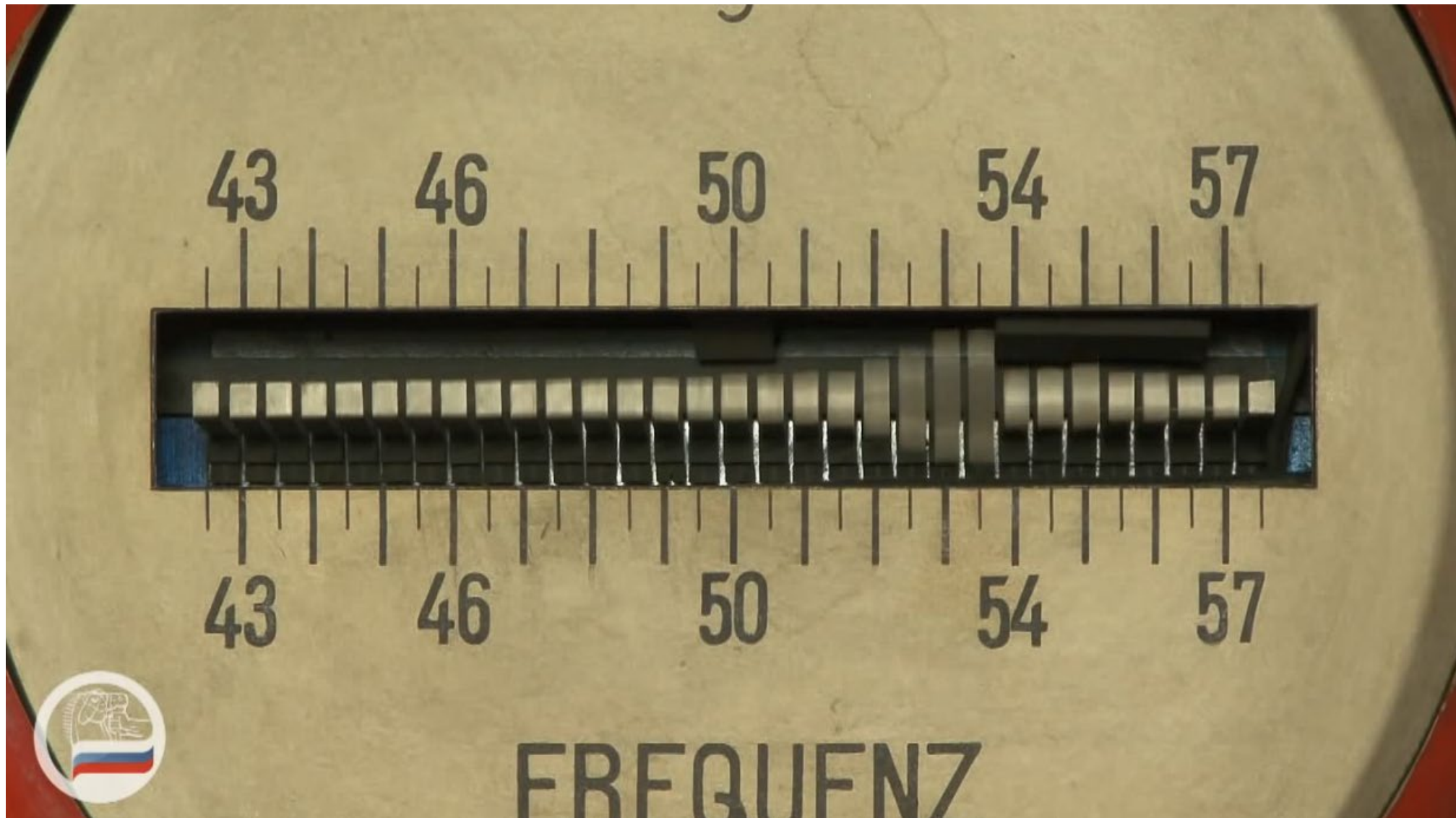
# Резонанс доски с мотором



# Резонанс камертонов

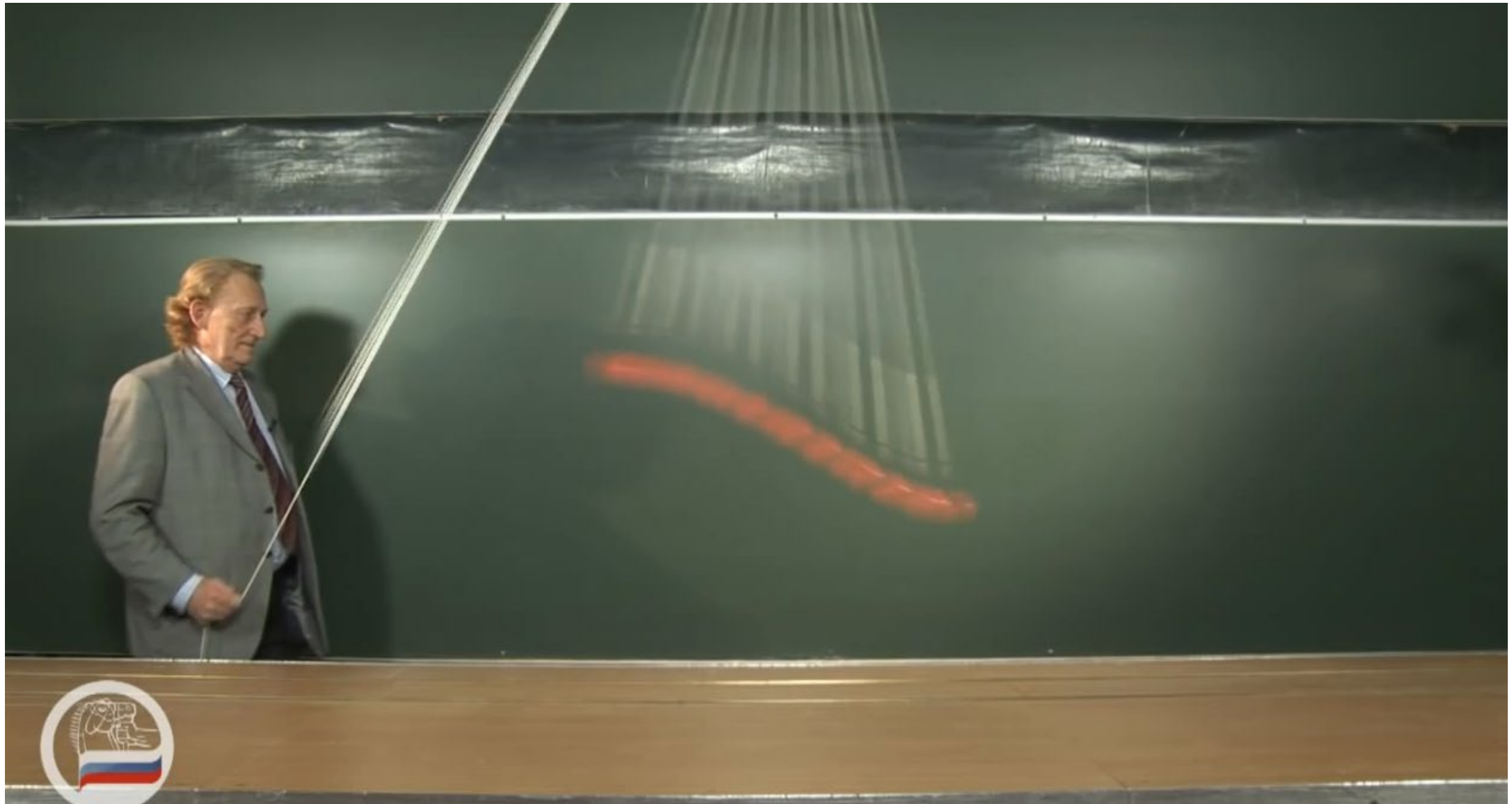


# Механический частотомер





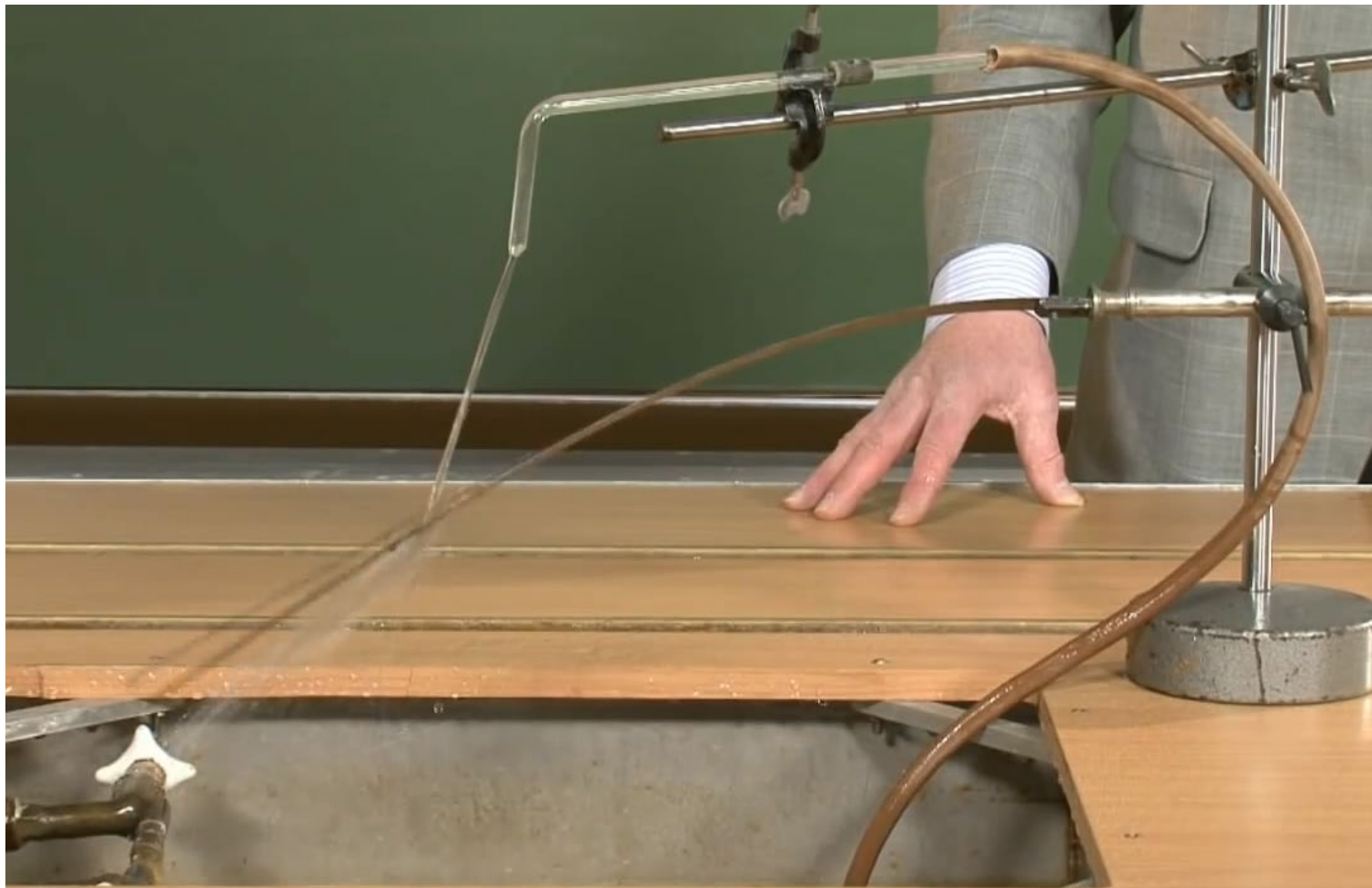
# Параметрический резонанс



# Автоколебания в часах



# Линейка и струя воды



# Спираль Роже

