Механика

Лекция 8

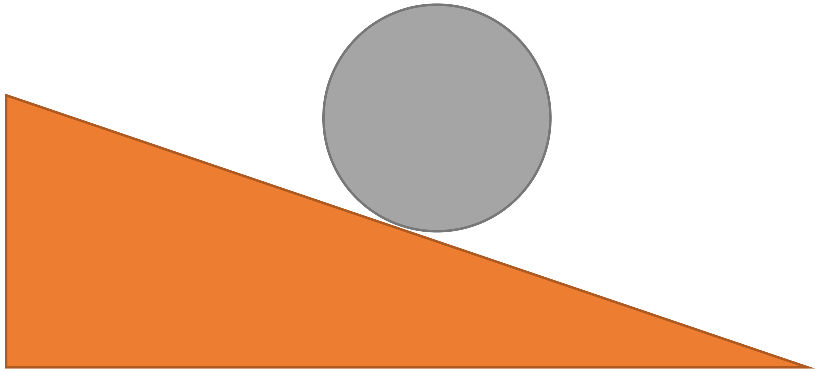
План лекции

- Задача динамики абсолютно твердого тела
- Момент силы. Момент импульса материальной точки и системы материальных точек.
- Уравнение моментов.
- Закон сохранения момента импульса для материальной точки и системы материальных точек.
- Силы, действующие на вращающееся тело.
- Свободные оси вращения.

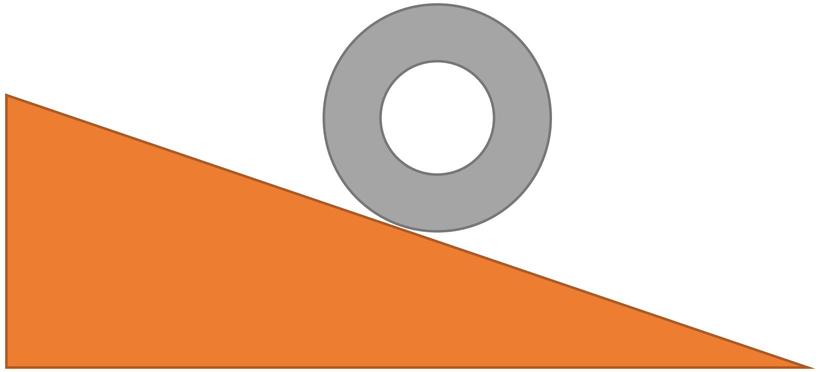
Динамика твердого тела

Задача динамики абсолютно твердого тела – установить взаимосвязь между движением тела и действующими на него силами.

Цилиндры с различным распределением массы скатываются с наклонной поверхности по-разному.



$$m_1 = m_2$$



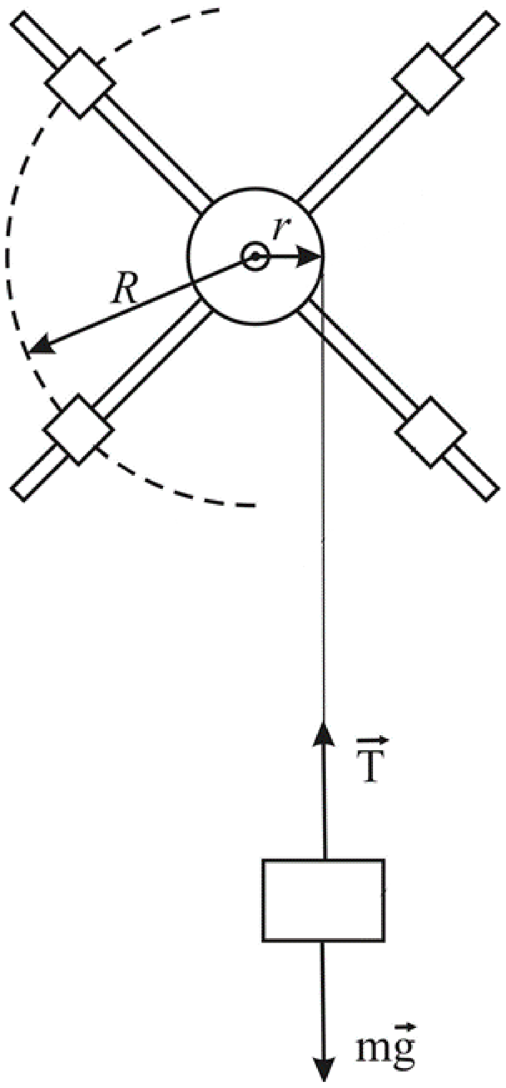
Скатывание цилиндров

Динамика твердого тела

Выводы:

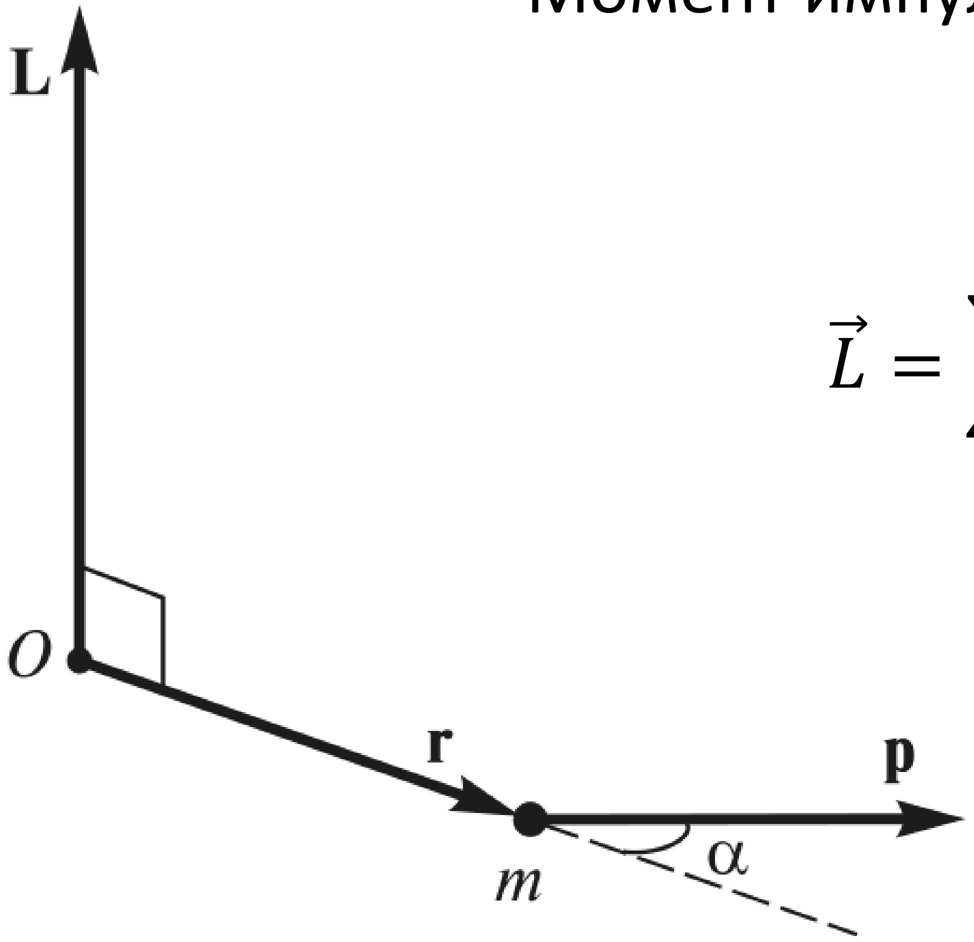
1. Существенно распределение массы относительно оси вращения.
2. При вращательном движении тела определяющую роль играет не сила, а момент силы.
3. Поэтому для описания вращательного движения тела необходимо ввести новые физические величины:

   момент инерции,
   момент импульса,
   момент силы.



Момент импульса системы МТ

Момент импульса = момент количества движения



$$\vec{L} = \sum_i [\vec{r}_i \times \vec{p}_i] = \sum_i m_i [\vec{r}_i \times \vec{v}_i]$$

Уравнение моментов

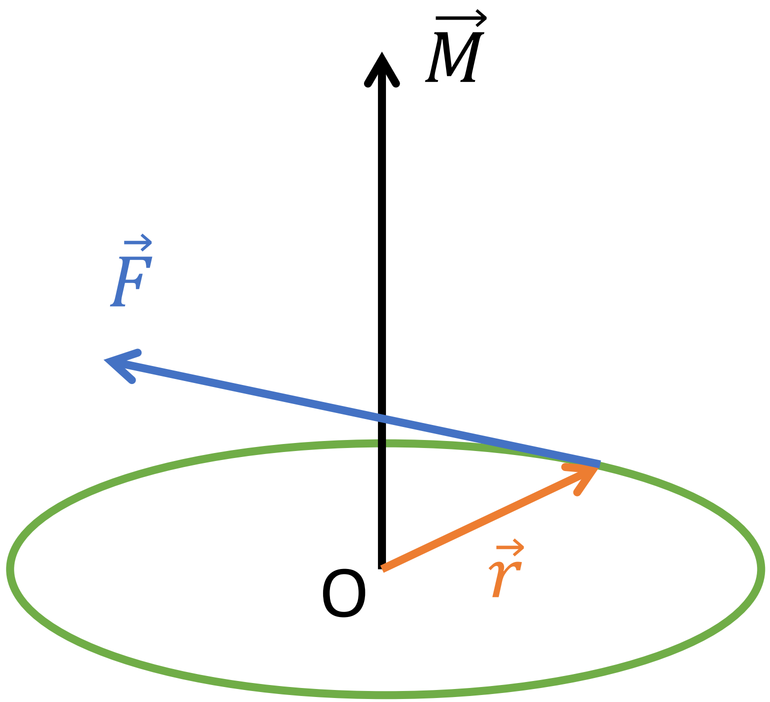
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right] = \vec{M}$$

Для материальной точки относительно оси

Рассматривая твердое тело как систему жестко связанных МТ:

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = \vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ji} \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_i m_i [\vec{r}_i \times \vec{v}_i]}_{\vec{L}} = \underbrace{\sum_i [\vec{r}_i \times \vec{F}_i]}_{\vec{M}} + \sum_i \sum_{j \neq \mathrm{i}} [\vec{r}_i \times \vec{f}_{ji}]$$

Момент силы



- **Точка приложения силы** – материальная точка, на которую действует сила.
- **Момент силы относительно точки $\overrightarrow{\boldsymbol{M}}$** – векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$ точки приложения силы на силу $\vec{F}$:

$$\overrightarrow{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$$

Уравнения динамики твердого тела

Уравнение движения центра масс

$$m\frac{d\vec{V}_0}{dt} = \sum \vec{F}$$

Уравнение моментов

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}$$

Закон сохранения момента импульса

Уравнение моментов $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}$

Закон сохранения момента импульса механической системы относительно точки – момент импульса механической системы $\vec{L}$ относительно инерциальной системы отсчета сохраняется, если сумма моментов внешних сил $\vec{M}$ относительно данной точки равна нулю.

Закон сохранения момента импульса механической системы относительно оси – момент импульса механической системы $\vec{L}$ относительно инерциальной системы отсчета сохраняется, если сумма моментов внешних сил $\vec{M}$ относительно данной оси равна нулю.

Тензор инерции

Пусть твердое тело закреплено таким образом, что оно может вращаться вокруг некоторой неподвижной точки О.

$$\vec{v}_i = [\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i]$$

$$\vec{L} = \sum_i m_i [\vec{r}_i \times \vec{v}_i]$$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i\left(y_i^2 + z_i^2\right) & -\sum_i m_i(x_i y_i) & -\sum_i m_i(x_i z_i) \\ -\sum_i m_i(y_i x_i) & \sum_i m_i\left(x_i^2 + z_i^2\right) & -\sum_i m_i(y_i z_i) \\ -\sum_i m_i(z_i x_i) & -\sum_i m_i(z_i y_i) & \sum_i m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}}_{\hat{J}} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Тензор инерции

Те́нзор — объект линейной алгебры, линейно преобразующий элементы одного линейного пространства в элементы другого.

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \qquad J_{ij} = J_{ji}$$

- Совокупность 9 величин J_{ij} определяет тензор инерции.
- Диагональные элементы тензора называются **осевыми моментами инерции**.
- Недиагональные элементы называются **центробежными моментами инерции**.

Главные оси инерции

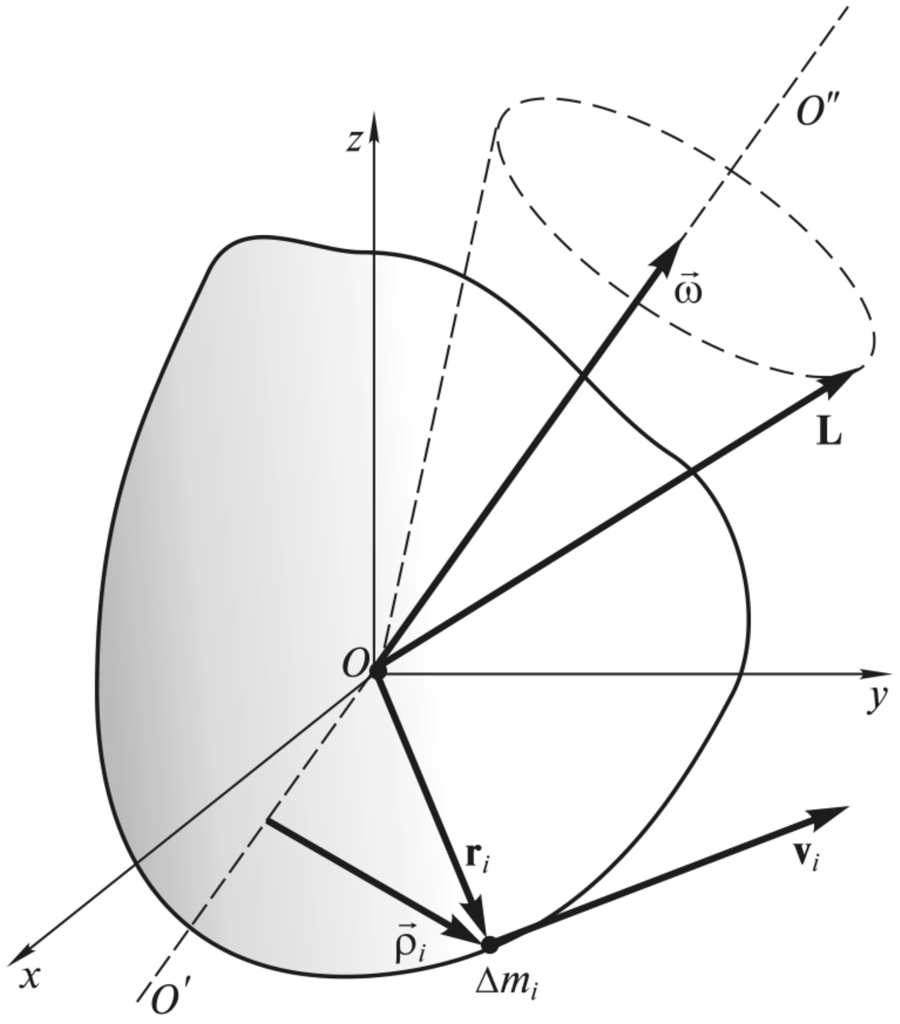
Если оси системы координат, жестко связанной с твердым телом, совместить с главными осями инерции, то тензор инерции диагонализируется:

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}$$

При этом

$$L_x = J_x \omega_x; \; L_y = J_y \omega_y; \; L_z = J_z \omega_z$$

Основное уравнение вращательного движения



Если твердое тело вращается вокруг закрепленной оси, то векторное уравнение моментов сводится к скалярному уравнению.

$$\vec{L} = \hat{J}\vec{\omega} \quad \rightarrow \quad L_{\parallel} = J\omega$$

$$\frac{dL_{O'O''}}{dt} = M_{O'O''}$$

$$J\frac{d\omega}{dt} = J\beta = M_{O'O''}$$

Вычисление моментов инерции

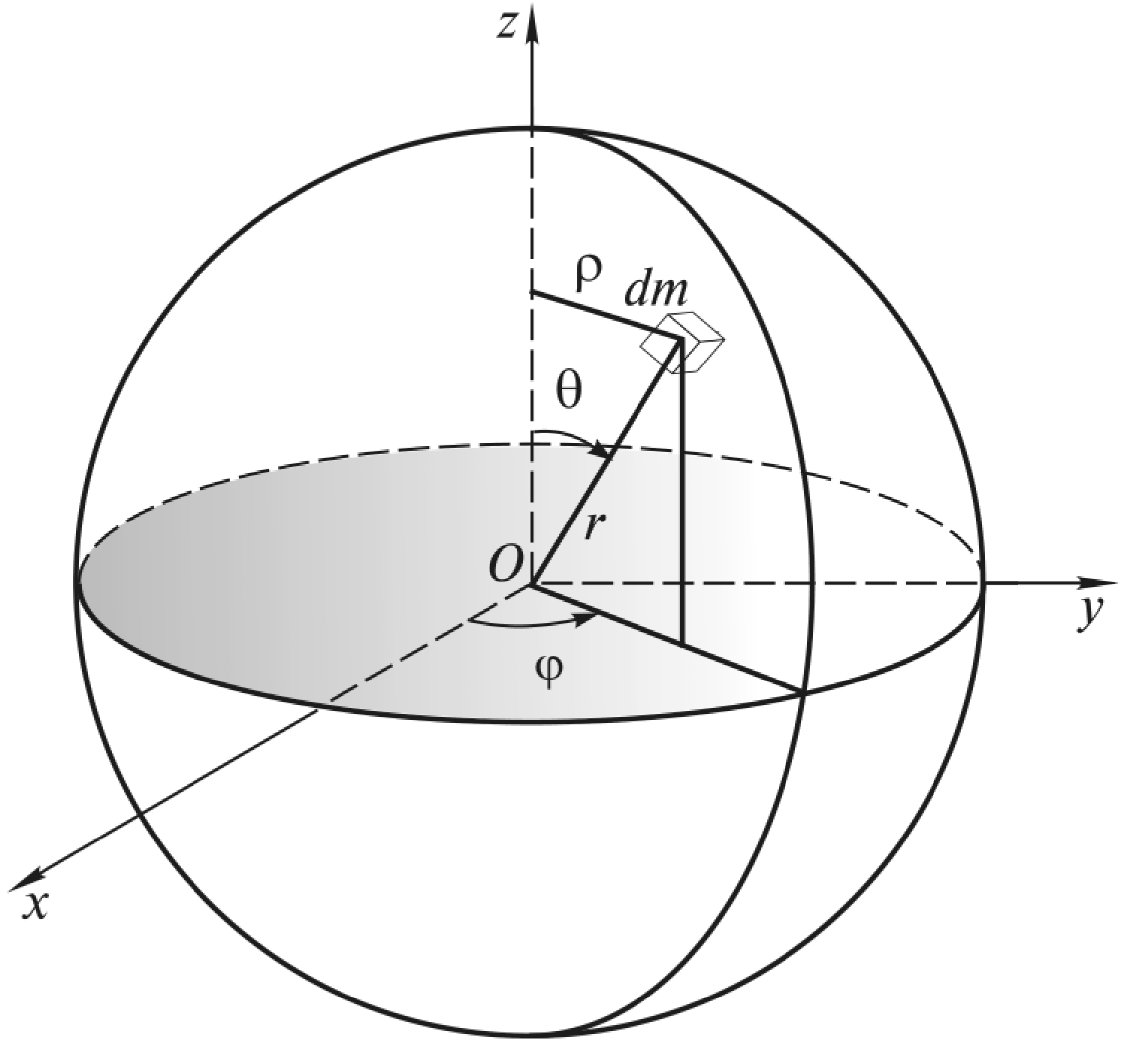
Момент инерции тела относительно оси – физическая величина, равная сумме произведений масс материальных точек, из которых состоит тело, на квадрат расстояния их до оси:

$$J = \sum_i m_i r_i^2$$

В случае непрерывного распределения в пространстве массы тела, расчет момента инерции тела сводится к вычислению интеграла:

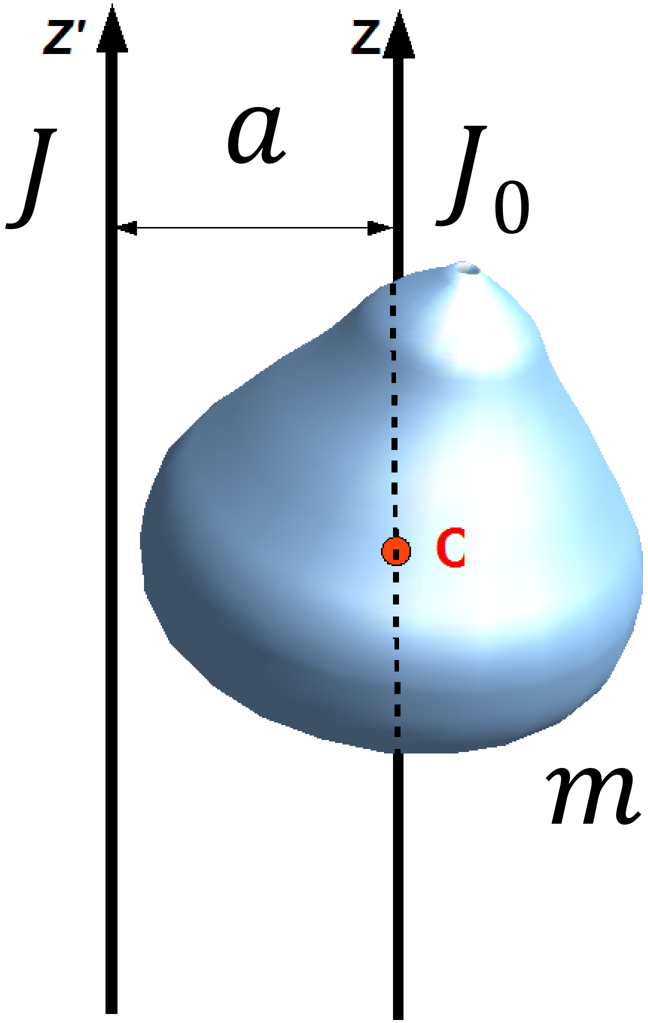
$$J = \int_V r^2\, dm = \int_V r^2 \rho\, dV$$

Момент инерции шара



$$J = \frac{2}{5} m R^2$$

Теорема Гюйгенса-Штейнера

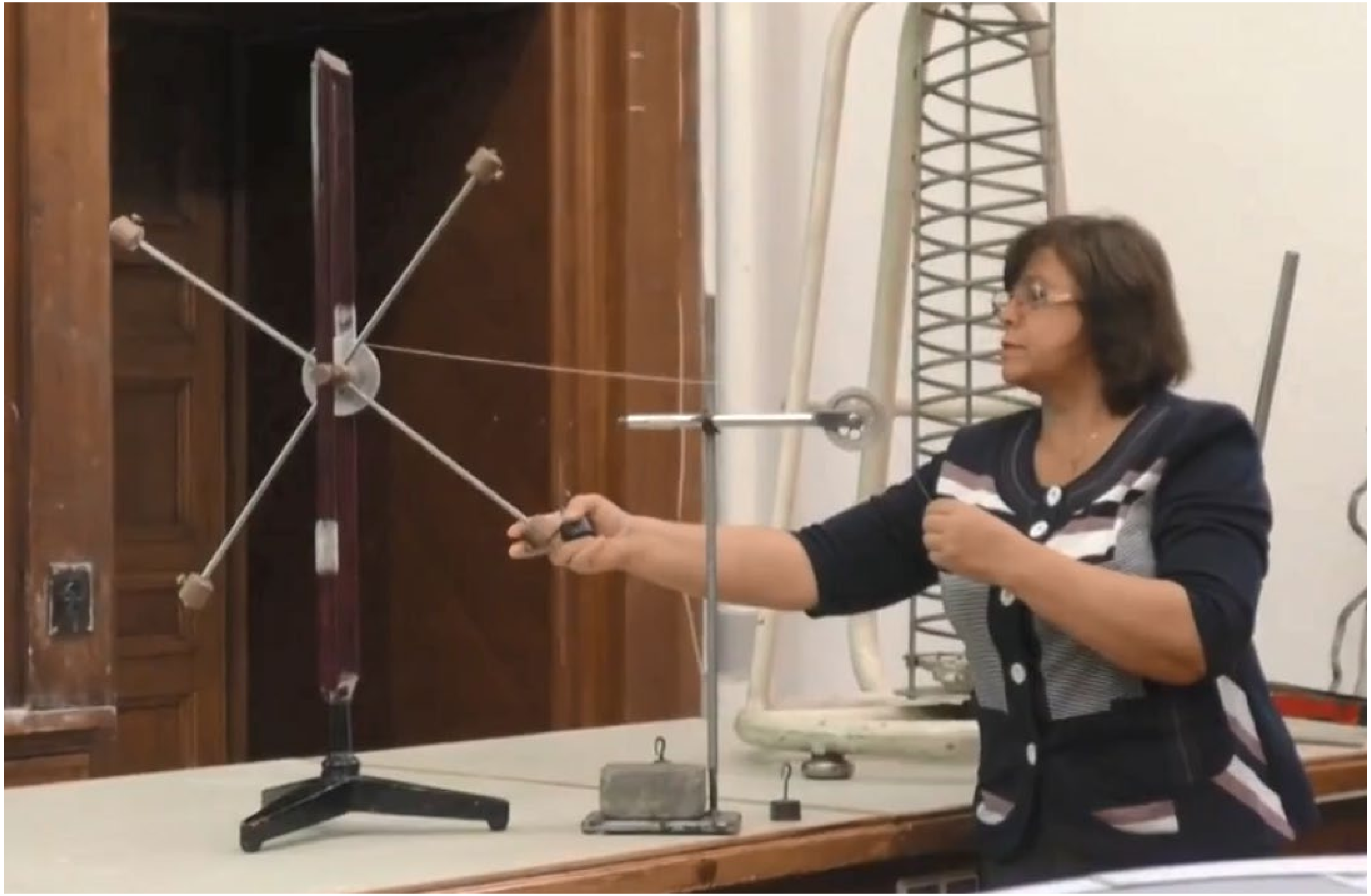


Момент инерции тела J относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела J_0 относительно оси, проходящей через центр масс тела и параллельной данной и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.

$$J = J_0 + ma^2$$

Вертикальная спираль – сохранение $\vec{L}$

Маятник Обербека



Маятник Пешехонова