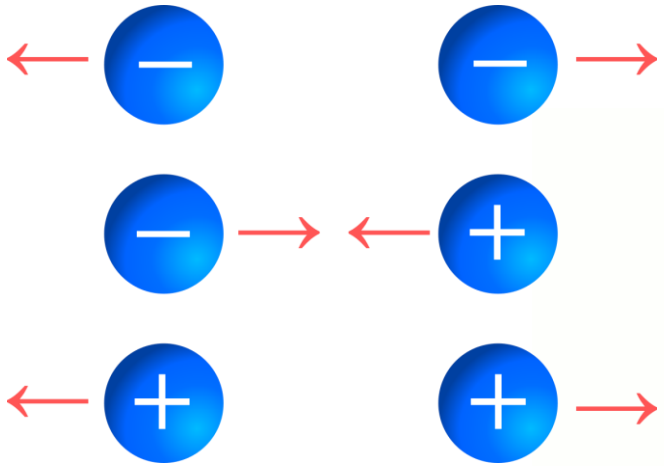
Механика

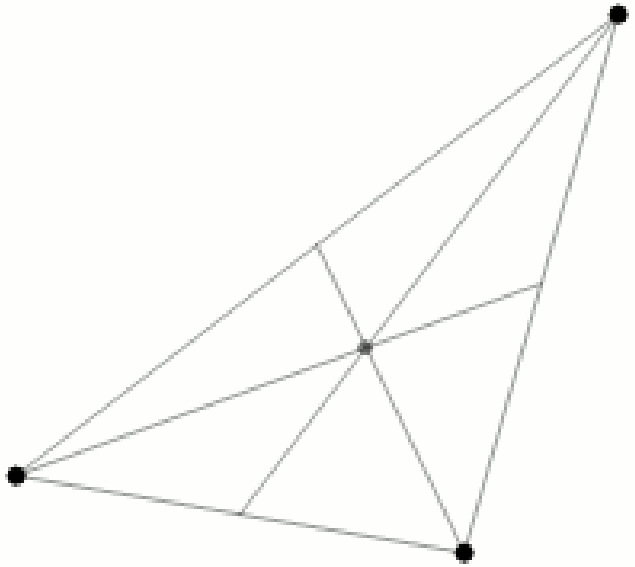
Лекция 3

План лекции

- Тело как система материальных точек.
- Число степеней свободы системы.
- Изолированная и замкнутая системы тел.
- Закон сохранения импульса.
- Центр масс. Теорема о движении центра масс.
- Движение тел с переменной массой.
  - Уравнение Мещерского.
  - Формула Циолковского.

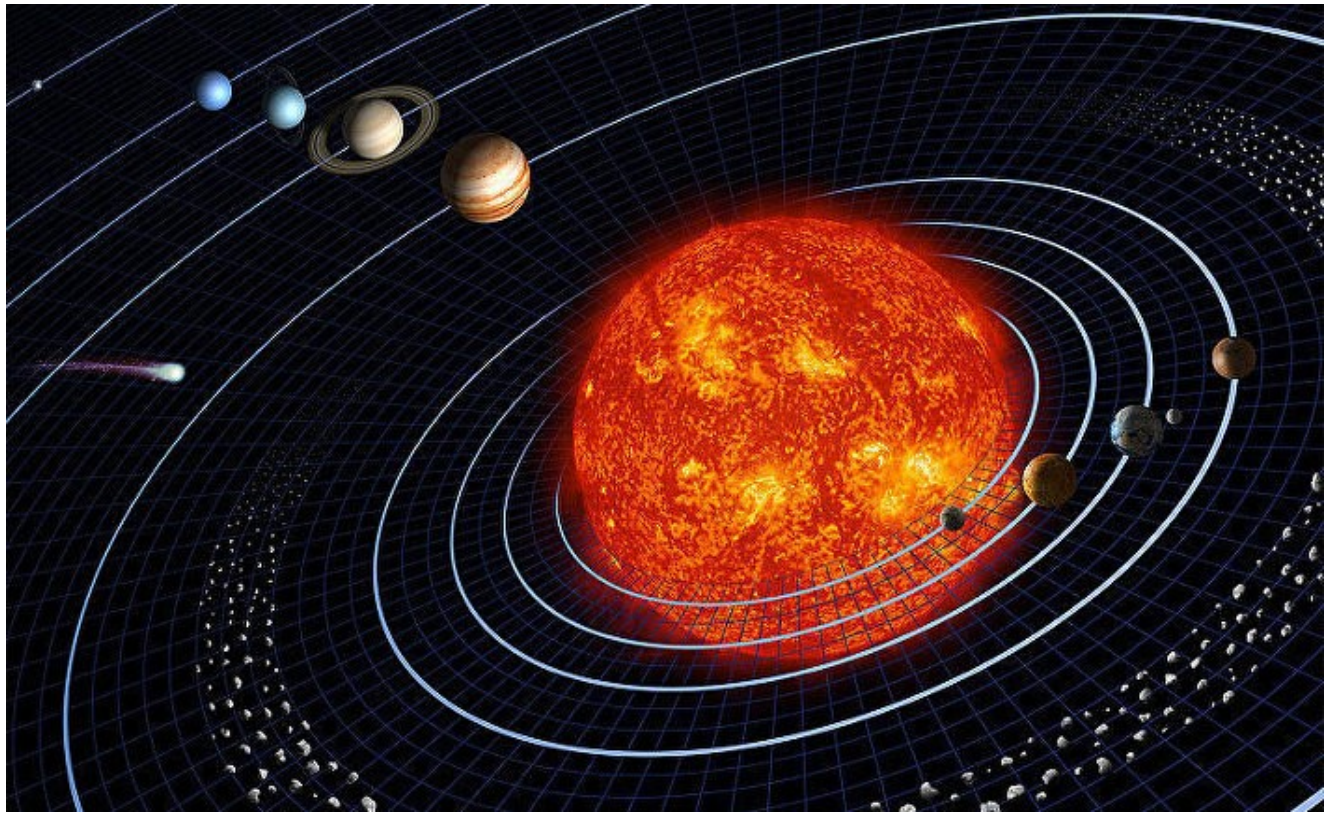
Описание системы материальных точек



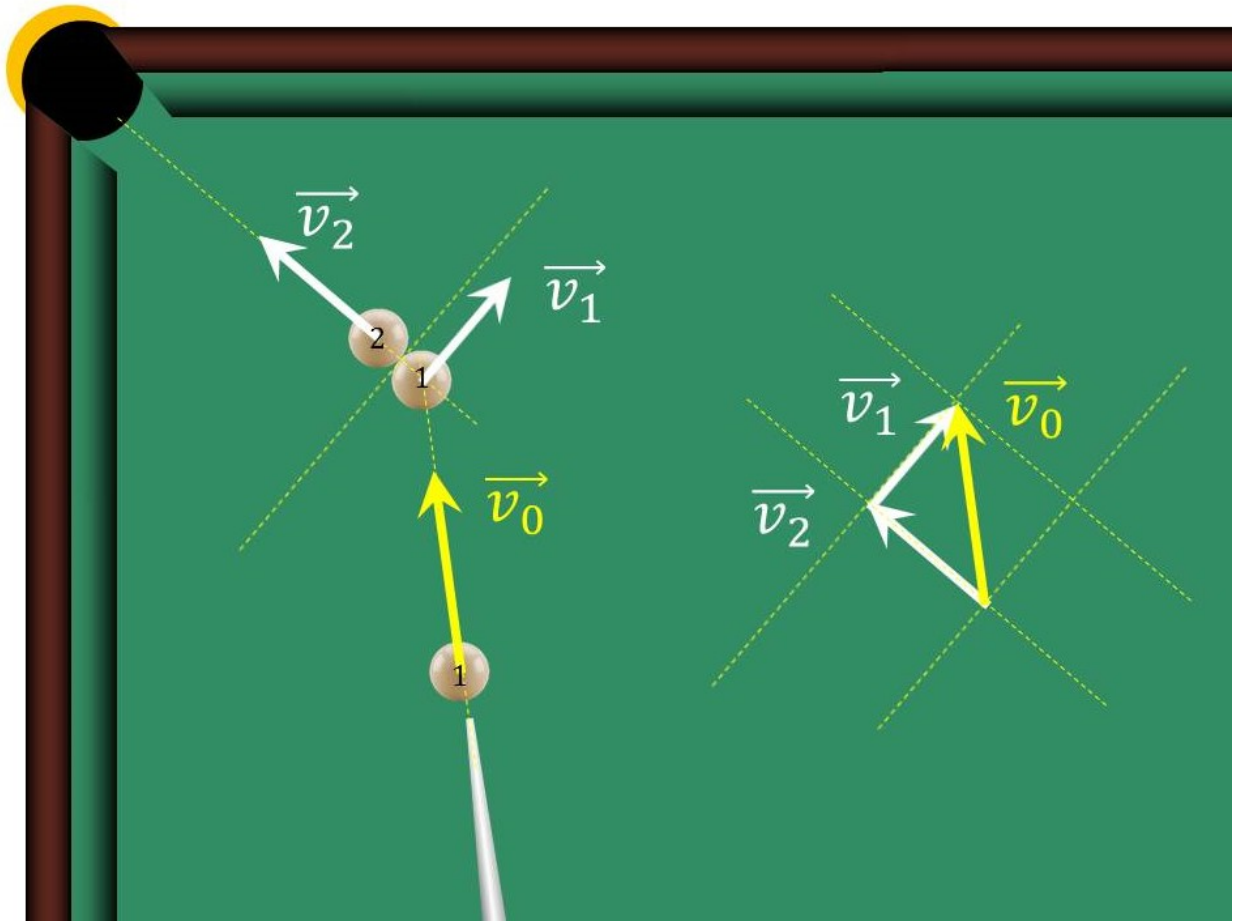


При решении многих задач механики приходится иметь дело не с одним телом, а с множеством тел.

В некоторых случая детальное рассмотрение поведения системы бывает либо затруднительно, либо не нужным с практической точки зрения. Существуют задачи, которые не требуют знания всех деталей движения – необходимо определить лишь конечное состояние системы после многочисленных взаимодействий составляющих ее частиц.



Законы сохранения

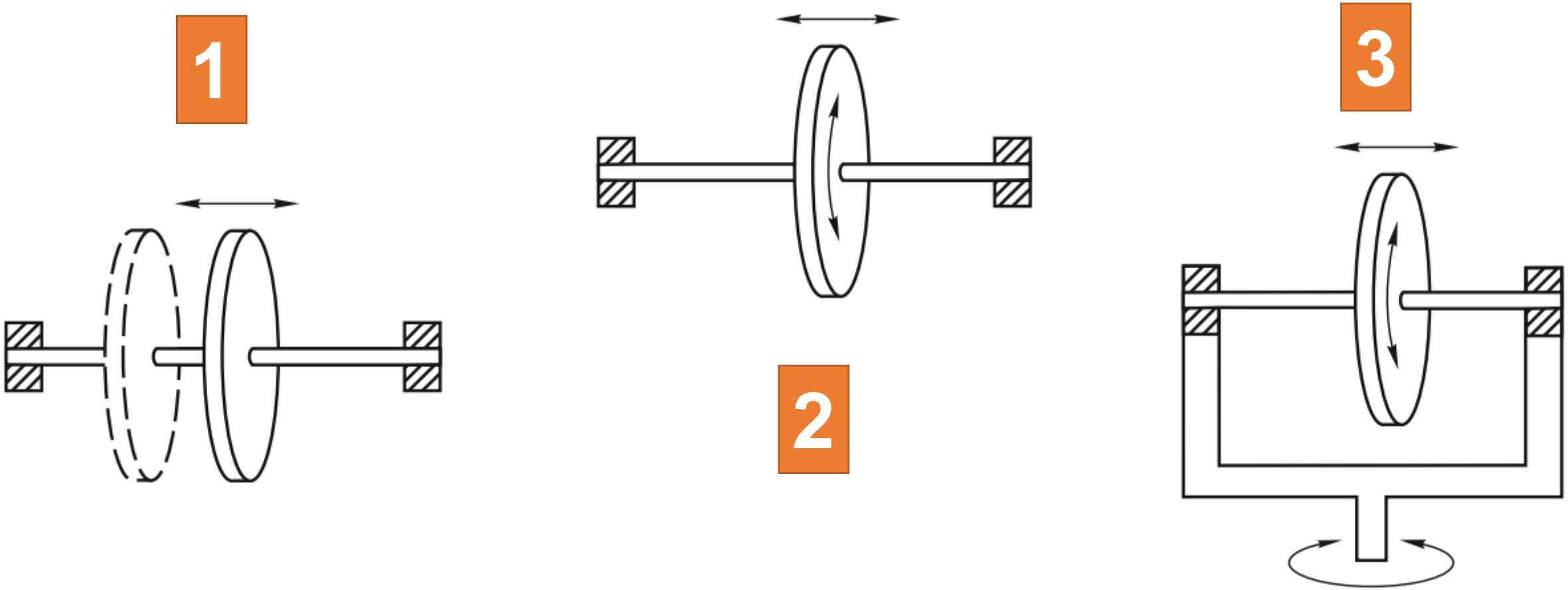


Возникает вопрос: существуют ли какие-нибудь общие принципы, которые позволили бы, не вдаваясь в детали поведения системы, связать ее начальное и конечное состояния?

Оказывается, что такие принципы есть – это **законы сохранения.**

Число степеней свободы

Число степеней свободы – число независимых величин, однозначно определяющих положение тела в пространстве.



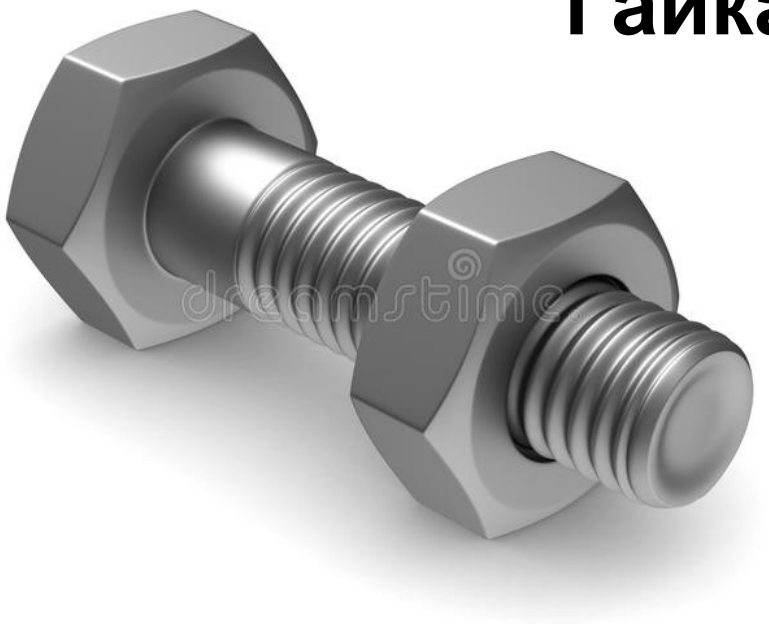
Число степеней свободы

Число степеней свободы – число <u>независимых</u> величин, однозначно определяющих положение тела в пространстве.

Болт

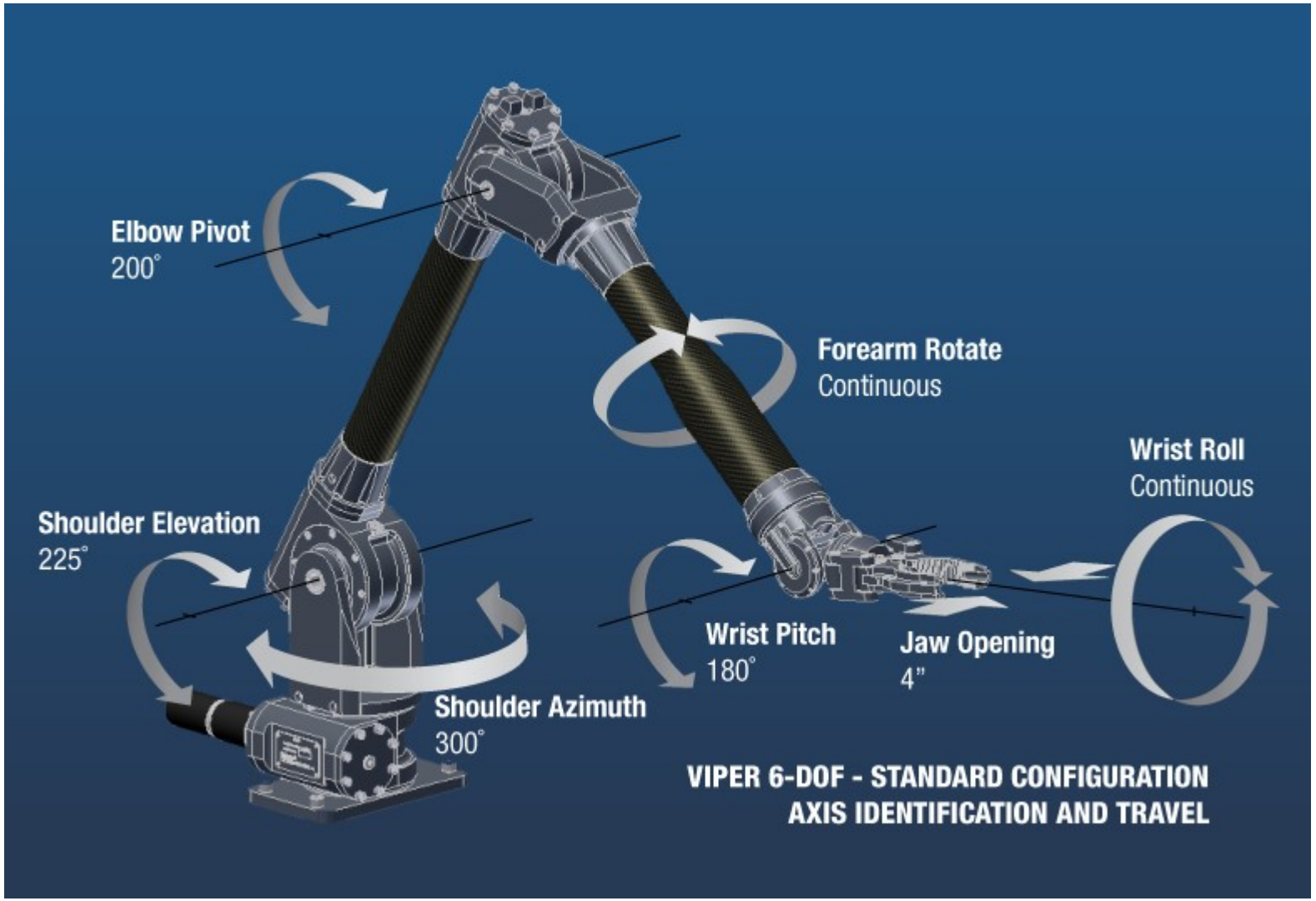
Гайка

1



Число степеней свободы

3 степени свободы – это не предел



Закон сохранения импульса

- **Импульс материальной точки** – векторная величина $\vec{p} = m\vec{v}$.
- **Импульс силы**

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \qquad \Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F}(\mathrm{t})\mathrm{d}t$$

- **Импульс системы материальных точек**

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$$

- **Закон изменения импульса механической системы**

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}$$

Закон сохранения импульса

- **Изолированная механическая система** – механическая система, на которую не действуют внешние силы.

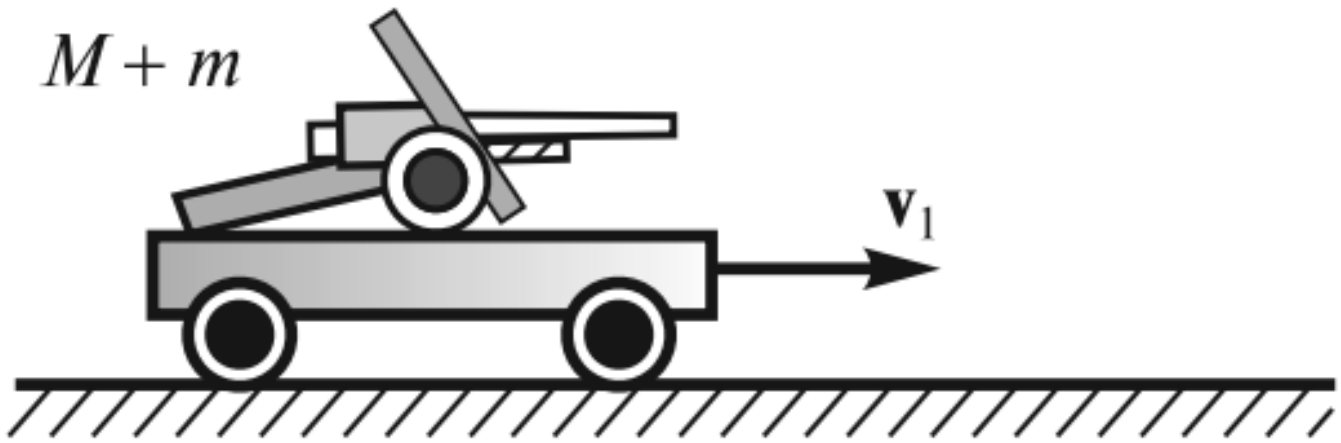
- **Замкнутая механическая система** – механическая система, для которой сумма всех внешних сил равна нулю.

- **Закон сохранения импульса механической системы** – если механическая система замкнута, то ее импульс относительно инерциальной системы отсчета сохраняется.

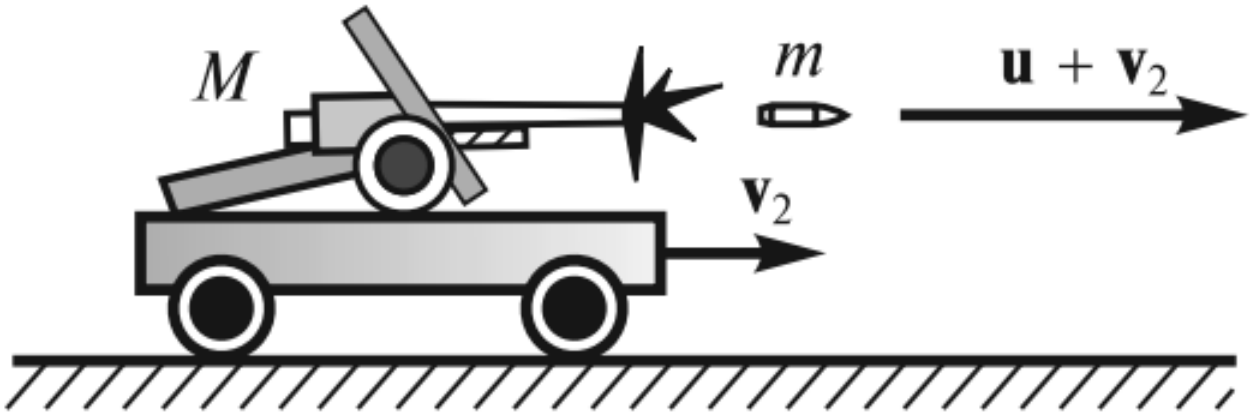
Закон сохранения импульса

- **Замкнутая в данном направлении механическая система** – механическая система, для которой проекция суммы всех внешних сил на неподвижное относительно инерциальной системы отсчета направление равна нулю.

- **Закон сохранения проекции импульса механической системы** – если система замкнута в данном направлении, то проекция ее импульса относительно инерциальной системы отсчета на это направление сохраняется.



$$(M+m)v_1 = Mv_2 + m(u+v_2)$$



Центр масс

- Центр масс механической системы

$$\vec{r}_{\text{цм}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

- Скорость центра масс

$$\vec{v}_{\text{цм}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$$

- Ускорение центра масс

$$\vec{a}_{\text{цм}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i$$

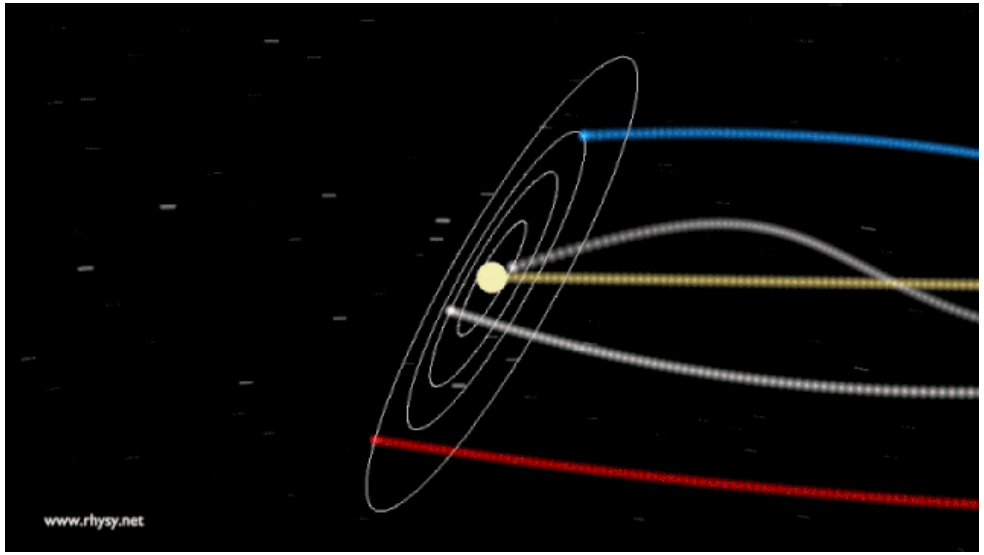
Теорема о движении центра масс

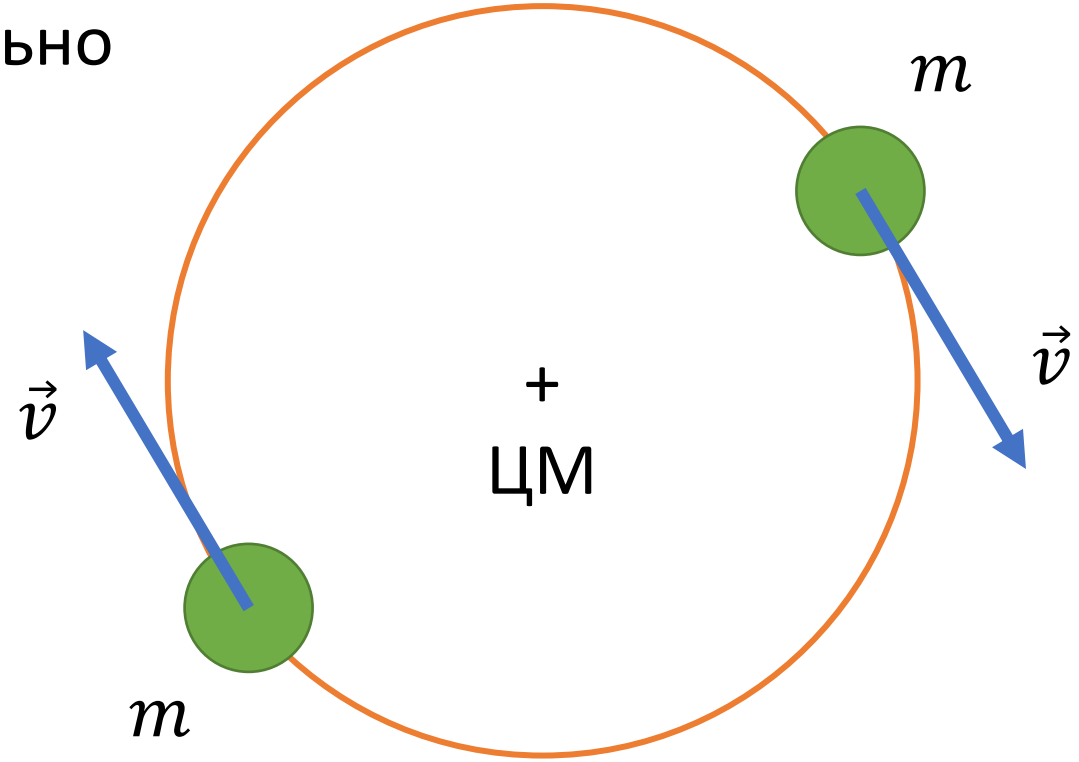
- **Теорема о движении центра масс механической системы (уравнение движения центра масс) –** произведение массы системы на ускорение ее центра масс относительно инерциальной системы отсчета равно сумме всех внешних сил, действующих на механическую систему со стороны тел, не входящих в систему.

- **Теорема о движении центра масс –** центр масс системы тел движется так, как двигалась бы материальная точка с массой равной суммарной массе всех тел системы под действием равнодействующей внешних сил, действующих на эту систему.

Система центра масс

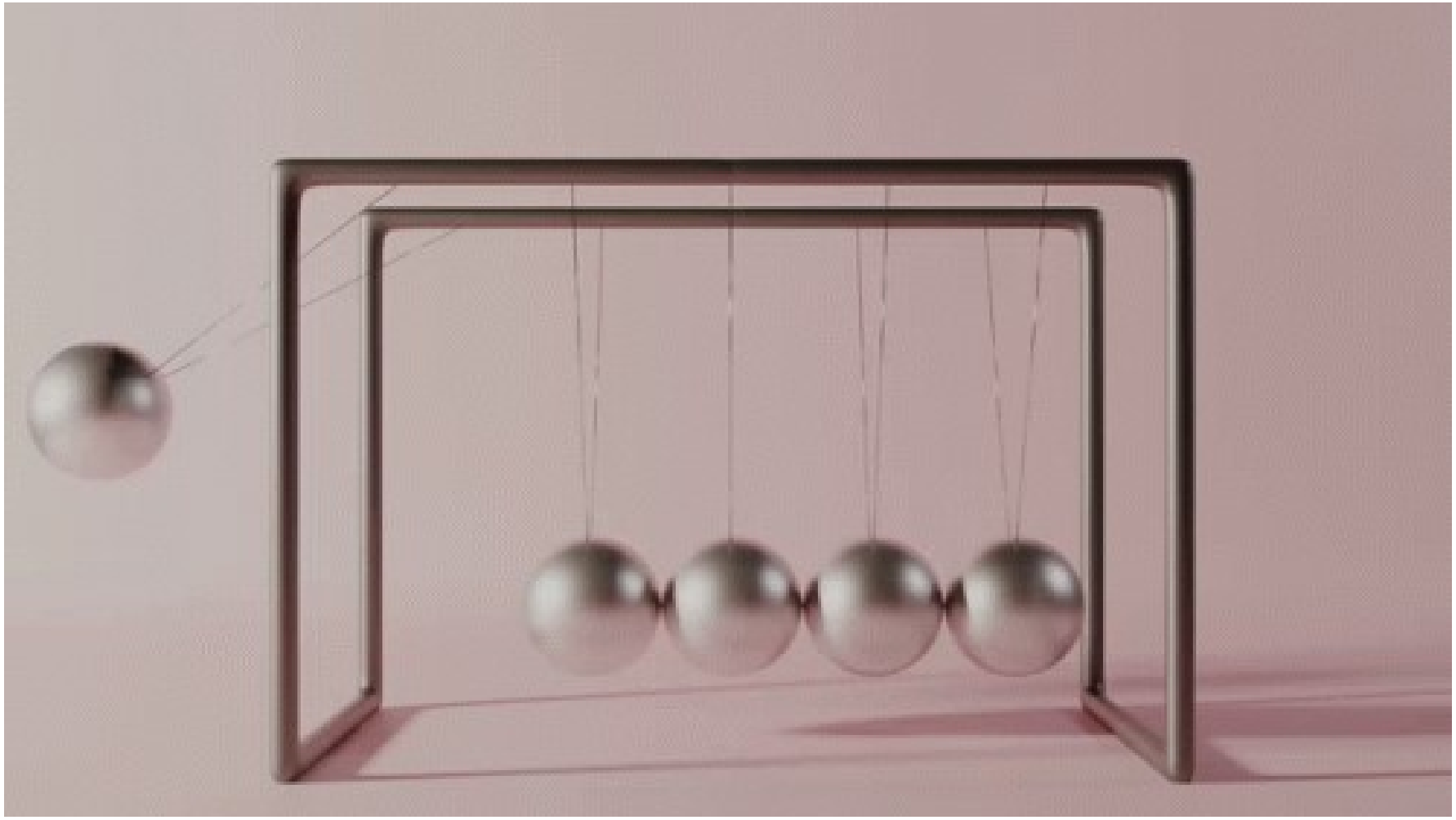
Система центра масс – система отсчета, жестко связанная с центром масс системы и движущаяся поступательно относительно других инерциальных систем отсчета.





Суммарный $\vec{P} = 0$

Маятник Ньютона



Движение центра масс (дощечка)

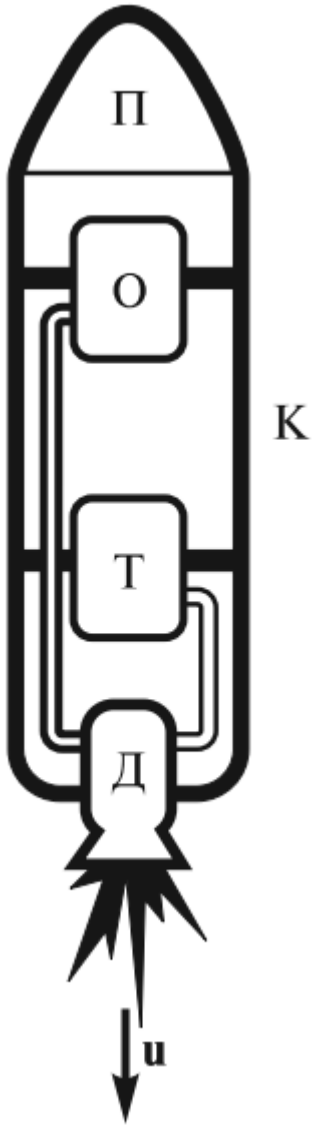
Движение центра масс (тележка)

Закон сохранения импульса на МКС

Движение тел с переменной массой

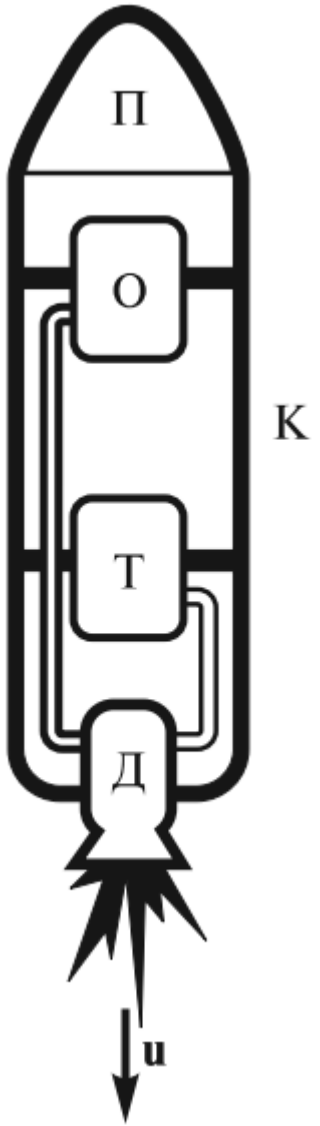
Масса тела при его движении может меняться. Примером такого тела является ракета.

Ракета состоит из:
П – полезной нагрузки;
О – баков с окислителем;
Т – баков с топливом;
Д – двигателя;
К – корпуса.



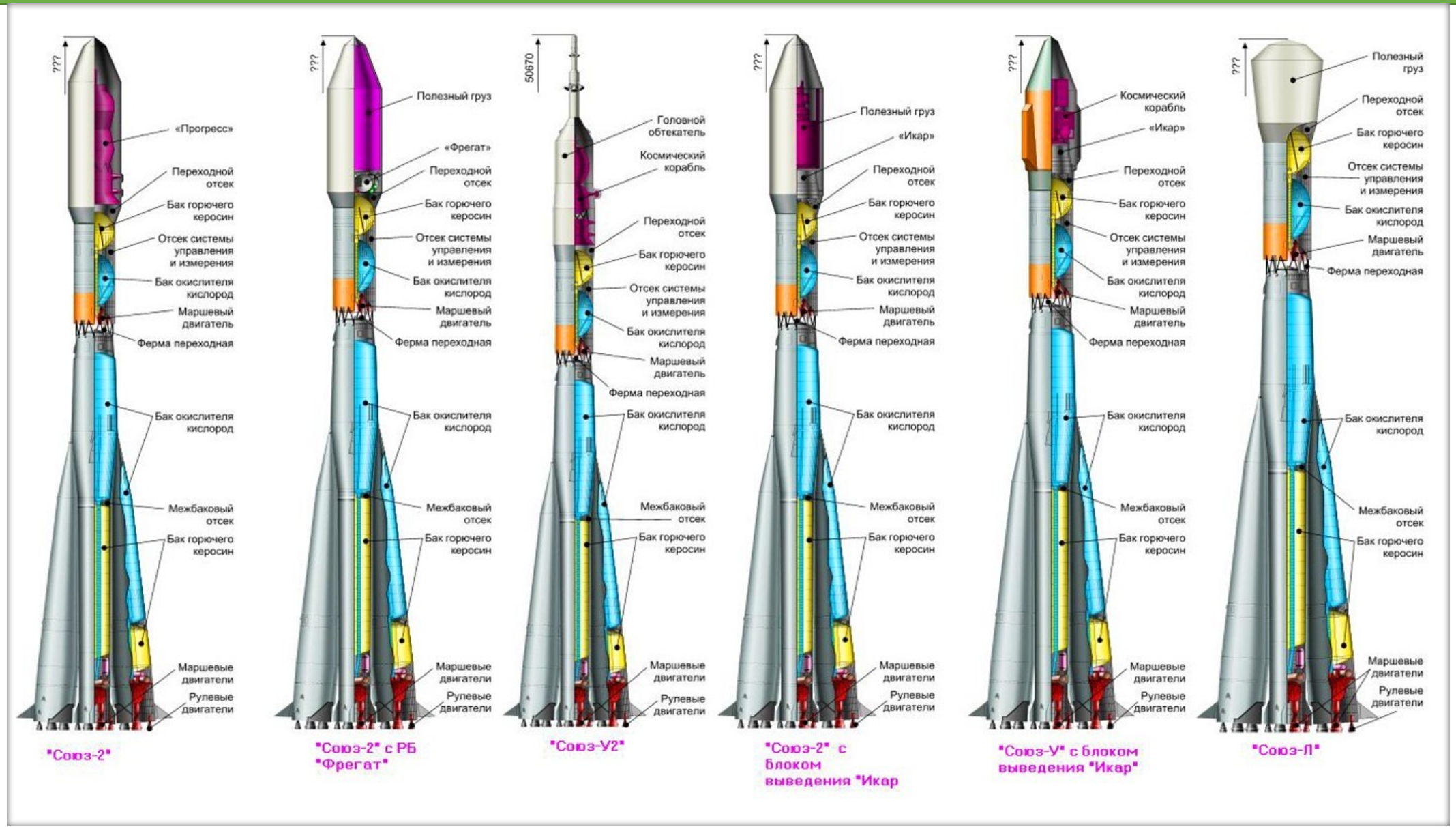
Топливо (Т):
керосин, этиловый спирт, жидкий водород, гидразин, гептил и др. вещества.

Окислитель (О):
жидкий кислород, азотная кислота, перекись водорода (гидроксид), жидкий фтор и его соединения и др.

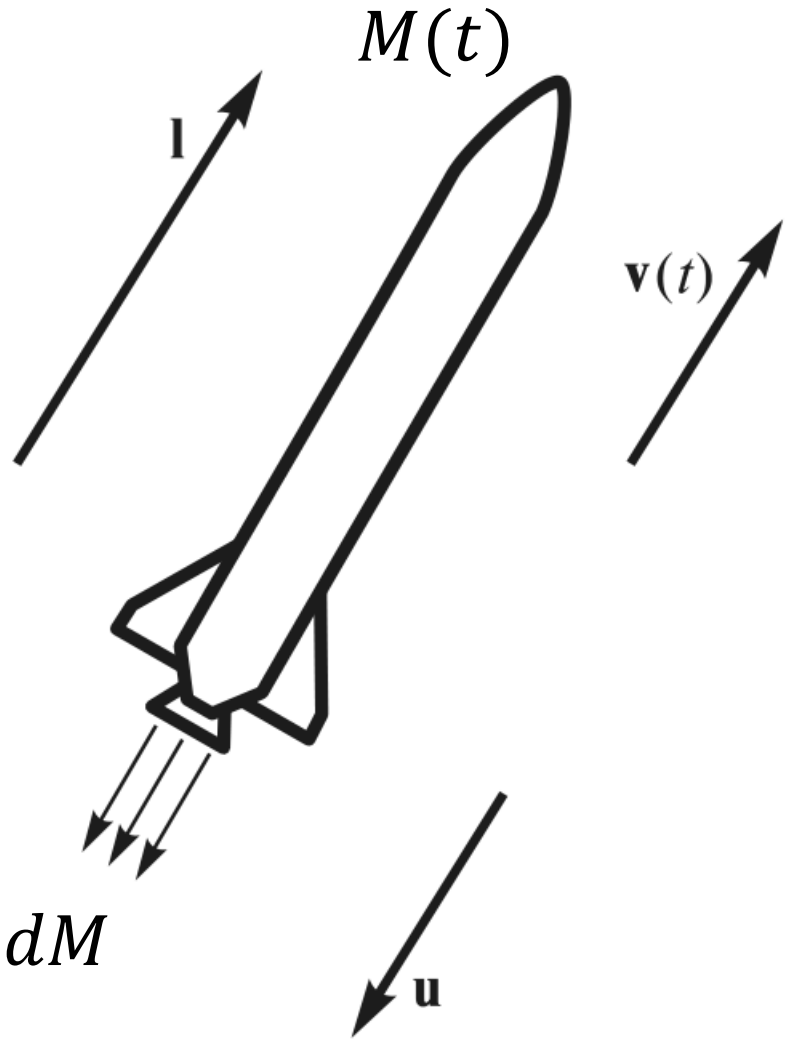


Керосин:
u ≈ 2.6 км/с
Сгорание водорода в кислороде:
u ≈ 4.2 км/с
Жидкий фтор в комбинации с водородом и литием:
u ≈ 5 км/с

Устройство ракеты



Уравнение Мещерского



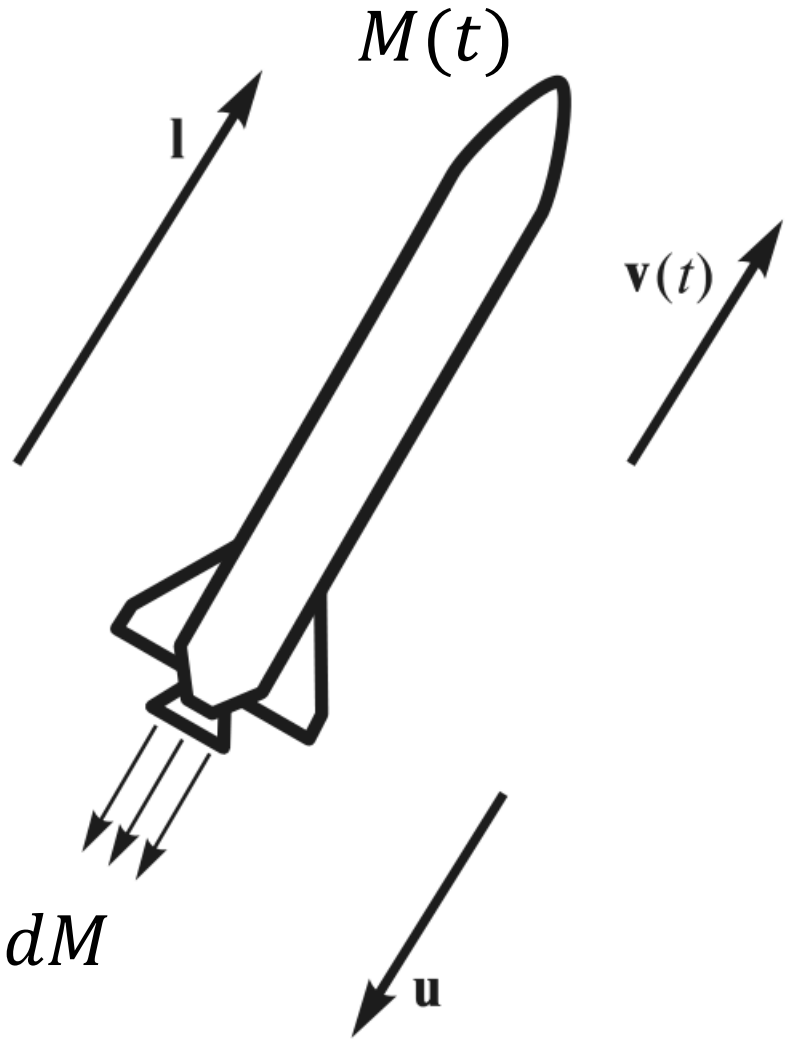
Рассмотрим движение ракеты в ИСО вдоль некоторого направления $\vec{l}$.
Пусть $u(t) = const$.

$$Mdv + dMu = 0 \Rightarrow M\frac{dv}{dt} = -u\frac{dM}{dt}$$

$$\mu = -\frac{dM}{dt} > 0$$ расход топлива

$$\vec{F}_{\text{т}} = -\mu\vec{u}$$ реактивная сила/сила тяги

Уравнение Мещерского



Пусть на ракету действуют внешние силы $\vec{F}$.
Пусть к телу прибавляется масса $dM_{\text{п}} > 0$ со скоростью $\vec{w}$.
При этом направление $\vec{u}$ может быть любым.

Уравнение Мещерского:

$$M(t)\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{т}} + \vec{w}\mu_{\text{п}} + \vec{F}$$

Формула Циолковского

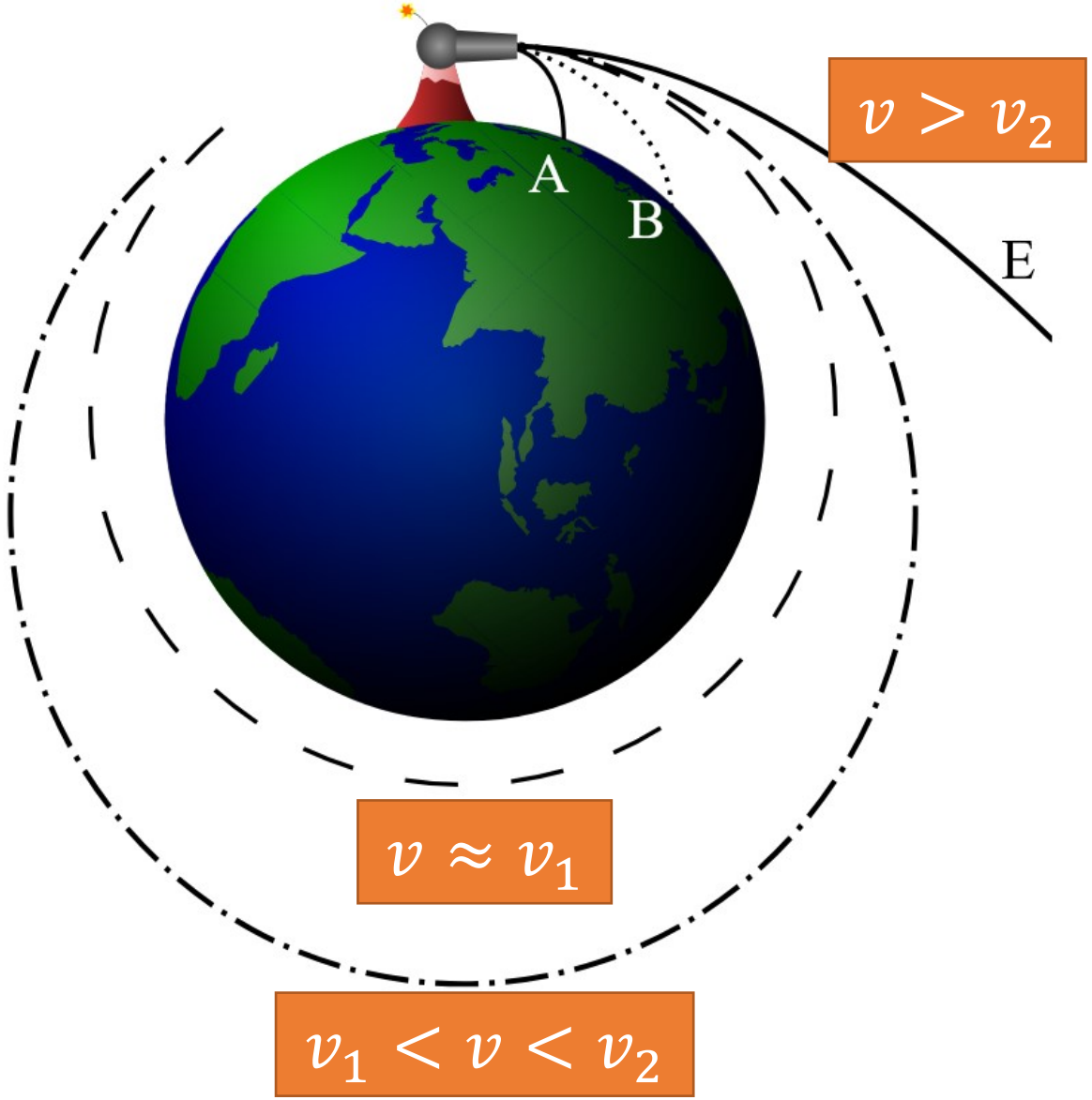
Рассмотрим частный случай прямолинейного движения ракеты, пренебрежем внешними силами: $\vec{F} = 0$

Получим конечную скорость ракеты:

$$\frac{dM}{M} = -\frac{dv}{u} \qquad \Rightarrow \qquad v_{\text{к}} = v_0 - u \ln \frac{M_{\text{к}}}{M_0}$$

$\frac{M_{\text{к}}}{M_0}$ обычно около 0,3

Космические скорости



Первая космическая скорость - минимальная скорость которую надо сообщить телу у поверхности Земли, чтобы тело могло двигаться вокруг Земли, по круговой орбите.

Вторая космическая скорость – минимальная скорость, которую надо сообщить телу у поверхности Земли для того, чтобы оно преодолело гравитационное притяжение Земли.

Третья космическая скорость - минимальная скорость, которую надо сообщить телу у поверхности Земли для того, чтобы оно преодолело гравитационное притяжение Солнца.

Сегнерово колесо