Алгоритмы решения задач по кинематике

Грачев Александр Васильевич

Доцент кафедры общей физики

Физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

Основы успеха

1. Понимание логической структуры раздела

(Откуда? Что? Почему?)

Помощь: логически-структурные таблицы в хороших УМК (с 7 по 11)

Примеры:

2. Корректные, понятные, удобные в применении определения физических величин и формулировки законов

При логически последовательном изложении материала вытекают сами собой.

Пример: любой закон сохранения – частный случай закона изменения, в котором сформулированы условия сохранения

Второй закон Ньютона

Решение задач

- Невозможно понять физику, не научившись решать задачи.
- Решение задач – следствие правильного понимания физических законов (**от теории к практике**).
- Опыт, накапливаемый при решении задач, позволяет более глубоко осознавать физические теории (**от практики к теории**).

Основа успеха

- Глубокое понимание сути физических явлений.
- Правильная, выверенная последовательность действий при решении задач (т.е. **наличие** четко спланированного руководства к действию – **алгоритма**).

Место алгоритмов в УМК

Алгоритмы решения задач приводятся:

- В учебнике, при рассмотрении примеров решения задач
- В рабочей тетради в виде шагов с названиями этапов (в начале изучения темы) или только номерами шагов (соответственно, в конце изучения темы)

Цели задания алгоритмов:

- Приучить учащихся к правильной последовательности действий при решении задач
- Помощь в самостоятельной работе учащихся

КИНЕМАТИКА

МЕХАНИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ — это изменение положения тела относительно других тел с течением времени

Для его описания необходима

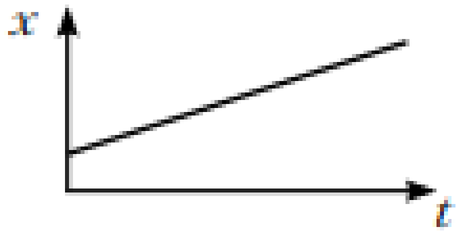
СИСТЕМА ОТСЧЁТА = **СИСТЕМА КООРДИНАТ** + **ТЕЛО ОТСЧЁТА** + **ЧАСЫ**

СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

ТАБЛИЧНЫЙ

t, с	0	1	2
x, м	5	15	25

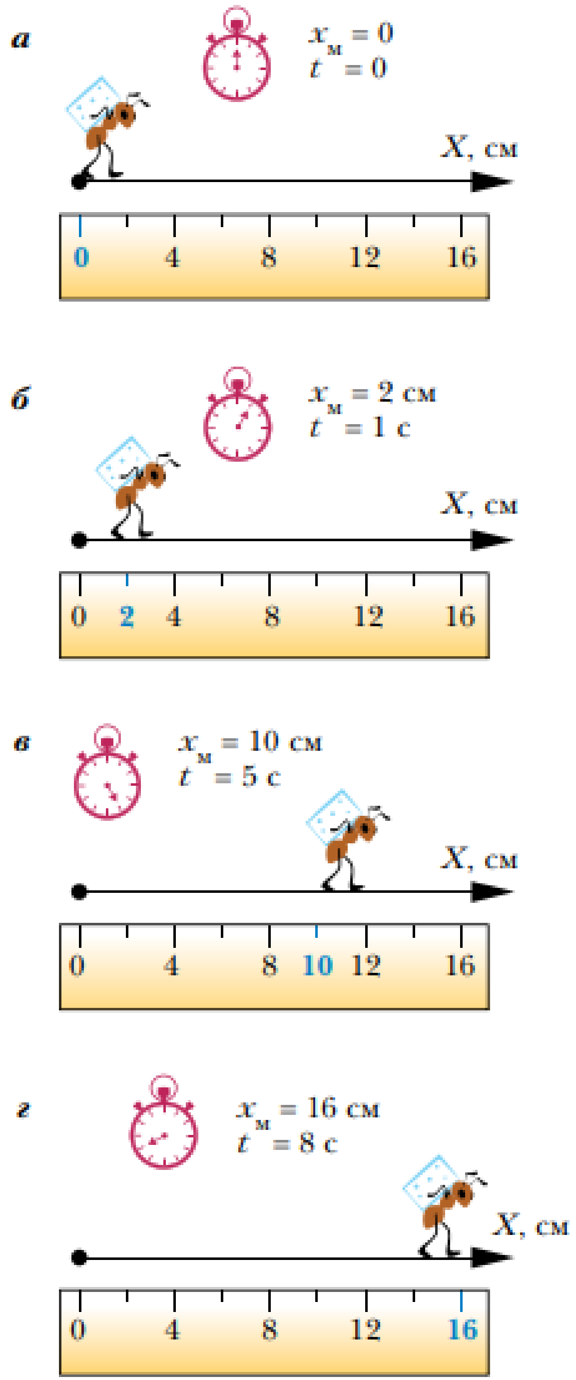
ГРАФИЧЕСКИЙ



АНАЛИТИЧЕСКИЙ

$$x = x_0 + v \cdot t$$

Описание движения визуально



Табличный способ

Момент времени t, с	0	1	5	8
Координата муравья $x_м$, см	0	2	10	16

Графический способ

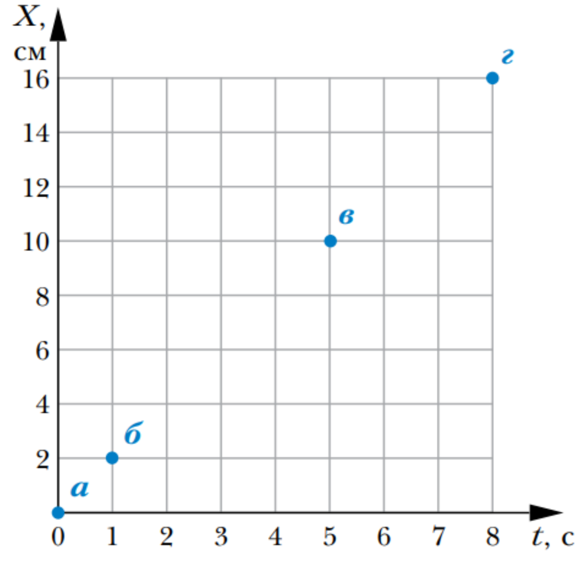


Рис. 8 График зависимости координаты муравья от времени состоит из четырёх точек

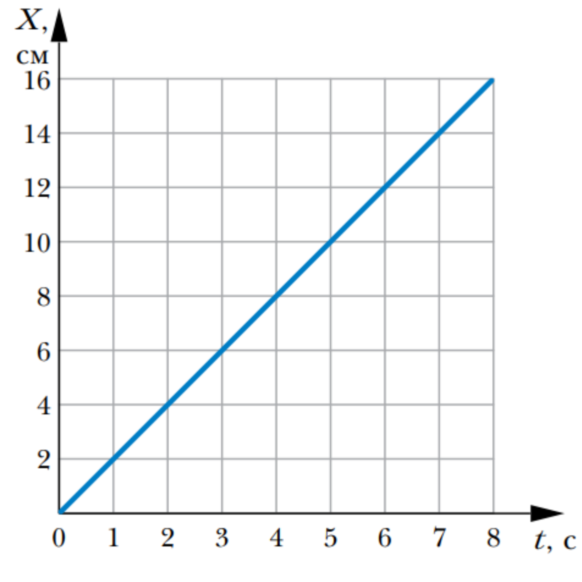


Рис. 9 Непрерывная линия графика описывает движение муравья в любой момент времени

Закон движения
Вопросы
Где? Когда?

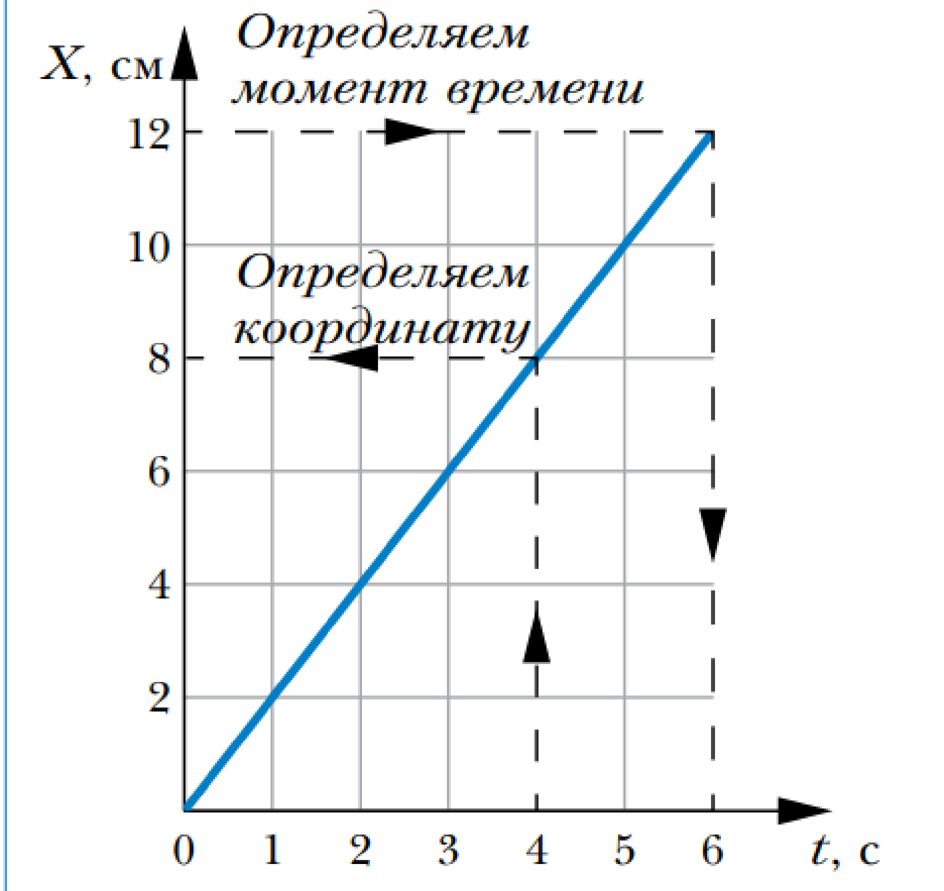


Рис. 10 Для любого момента времени можно определить координату тела. Наоборот, задавая координату, можно установить момент, когда тело имело эту координату

1 логический шаг

Аналитический способ

Определите показание секундомера в тот момент, когда координата фары велосипеда на рисунке 13 равна 60 м, при условии, что велосипедист всё время движется одинаковым образом.

Решение

Поскольку мы знаем начальную координату тела ($x_0 = 10$ м) и расстояние, которое проезжает велосипедист за единицу времени (5 метров за каждую секунду), то закон его движения имеет вид

$x = 10 + 5 \cdot t$, где t — искомое показание секундомера.

Подставив координату в интересующий нас момент времени $x = 60$ м в этот закон, получим уравнение:

$60 = 10 + 5 \cdot t$,

$60 - 10 = 5 \cdot t$,

$50 = 5 \cdot t$,

$t = 10$ с.

Ответ: секундомер будет показывать 10 с.

Графический способ
задача «встреча»

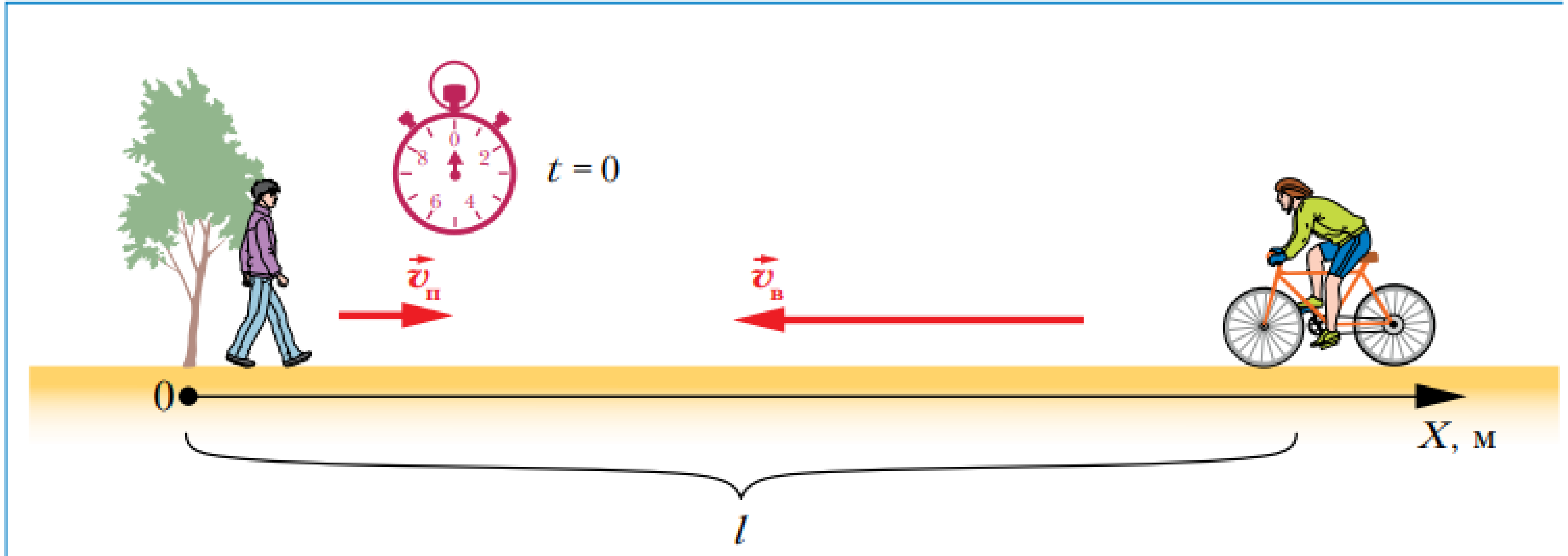


Рис. 20 В выбранной системе отсчёта координата пешехода в процессе движения увеличивается, а координата велосипедиста уменьшается

Шаг 4 (графический). Построим систему координат, состоящую из оси времени t и оси координаты X. Отметим начальные координаты пешехода и велосипедиста (рис. 21).

Шаг 5 (графический). Теперь от точки $x_{п0}$ проведём прямую линию, описывающую зависимость координаты пешехода от времени. Поскольку по условию задачи координата пешехода за каждую секунду увеличивается на 1 м, то это будет «поднимающаяся» прямая линия. Она будет проходить через точки с координатами (1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (5; 5) и т. д.

Рис. **21** Точка пересечения графиков движения пешехода и велосипедиста является точкой их встречи. Она произошла через 5 с после начала движения

График зависимости координаты велосипедиста от времени — это тоже прямая, но она исходит из точки $x_{в0}$ = 20 м, расположенной на оси координаты. Координата велосипедиста со временем уменьшается на 3 м за каждую секунду. Поэтому линия, описывающая зависимость этой координаты от времени, «опускается» за каждую секунду на 3 м. Эта линия проходит через точки с координатами (0; 20), (1; 17), (2; 14), (3; 11), (4; 8), (5; 5) и т. д.

Из рисунка 21 следует, что прямые, описывающие зависимости координат пешехода и велосипедиста от времени, пересекаются в точке ($t_{встр}$ = 5 с, $x_{встр}$ = 5 м). Это означает, что через 5 секунд после начала движения координаты пешехода и велосипедиста становятся равными: $x_п = x_в = x_{встр}$ = 5 м. Иначе говоря, в этот момент времени положения тел в пространстве совпадут и, таким образом, в момент $t_{встр}$ = 5 с в точке с координатой $x_{встр}$ = 5 м произойдёт *встреча* пешехода и велосипедиста.

Шаг 1. Мы ввели систему отсчёта: 1) выбрали в качестве начала отсчёта дерево, от которого начинал своё движение пешеход; 2) направили координатную ось вдоль дороги в направлении движения пешехода; 3) включили часы (секундомер) в момент начала движения тел.

Шаг 2. Были определены начальные координаты пешехода ($x_{п0} = 0$) и велосипедиста ($x_{в0} = 20$ м).

Шаг 3. Используя введённую систему отсчёта, мы определили значения скоростей равномерного прямолинейного движения пешехода ($v_п = 1$ м/с) и велосипедиста ($v_в = -3$ м/с).

Таким образом, первые три шага решения задачи не зависят от того, каким способом (графическим или аналитическим) мы собираемся её решать. Но уже следующий шаг будет отличаться от того, что мы делали в § 10.

Шаг 4 (аналитический). Запишем в аналитическом виде законы движения тел, учитывая известные данные. Поскольку в задаче движутся два тела (пешеход и велосипедист), то мы получаем два закона движения:

$$x_п = 0 + 1 \cdot t,$$

$$x_в = 20 - 3 \cdot t.$$

Шаг 5 (аналитический). Представим в виде уравнения условие задачи – *встречу* велосипедиста и пешехода. Встреча двух тел означает, что *положения тел в пространстве совпадут* в некоторый момент времени $t = t_{встр}$, т. е. в этот момент времени *совпадут их координаты*. Поэтому условие встречи будет иметь вид

$$x_п = x_в.$$

Шаг 6 (аналитический). Запишем вместе полученные в шагах 4 и 5 выражения, присвоив каждому из них свои номер и название.

$x_п = 0 + 1 \cdot t,$ (1) (*закон движения пешехода*)

$x_в = 20 - 3 \cdot t,$ (2) (*закон движения велосипедиста*)

$x_п = x_в.$ (3) (*условие встречи пешехода и велосипедиста*)

Шаг 7 (аналитический). Решение уравнений.

Для того чтобы найти значение времени t в интересующий нас момент встречи, воспользуемся условием встречи пешехода и велосипедиста — уравнением (3). Оно предполагает равенство координат двух тел. Подставим в него выражения для $x_п$ и $x_в$ из уравнений (1) и (2):

$$0 + 1 \cdot t = 20 - 3 \cdot t.$$

Приведём подобные слагаемые и решим уравнение:

$$(1 + 3) \cdot t = 20, \quad t = 20/4 = 5 \text{ (с)}.$$

Таким образом, мы установили, что встреча пешехода и велосипедиста состоится через 5 с после начала движения.

Теперь определим координату точки, в которой состоится встреча. Для этого подставим полученное значение момента встречи $t_{встр} = 5$ с в закон движения пешехода — уравнение (1):

$$x_п = 0 + 1 \cdot t_{встр} = 0 + 1 \cdot 5 = 5 \text{ (м)}.$$

Это означает, что в момент встречи координата пешехода будет равна $x_п = 5$ м. Следовательно, встреча произойдёт в 5 м от начала отсчёта — дерева, от которого начал движение пешеход.

Ясно, что координату места встречи можно было определить, подставив время $t_{встр} = 5$ с и в закон движения велосипедиста — уравнение (2):

$$x_в = 20 - 3 \cdot t_{встр} = 20 - 3 \cdot 5 = 5 \text{ (м)}.$$

Естественно, мы получили то же самое значение $x_{встр}$, так как координаты пешехода и велосипедиста в момент встречи совпадают.

Задача «погоня»

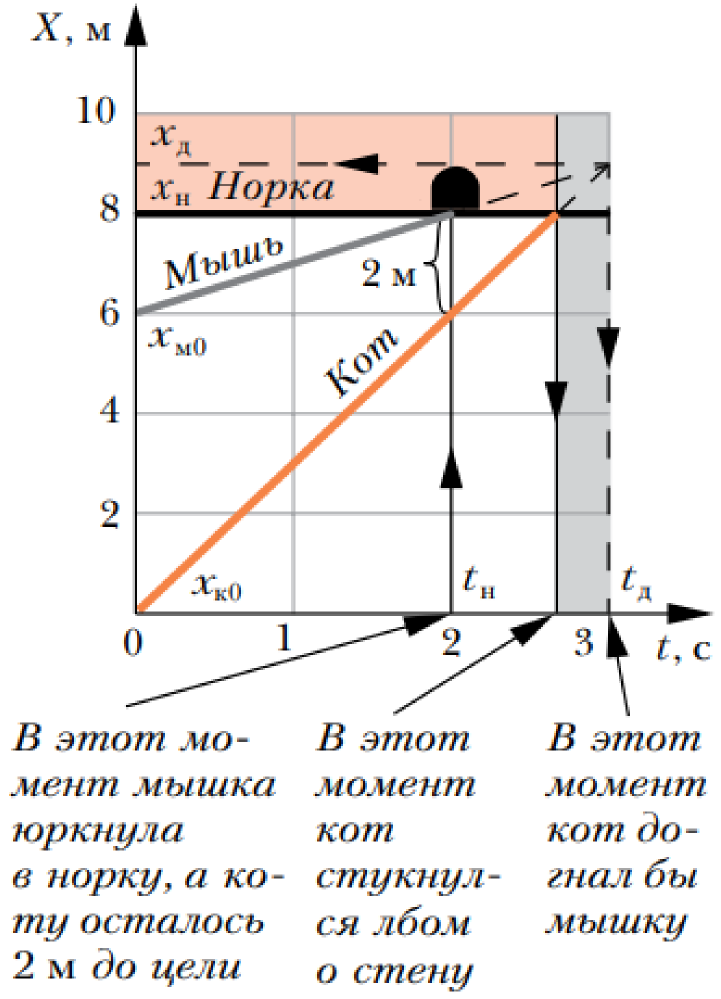


Рис. 29

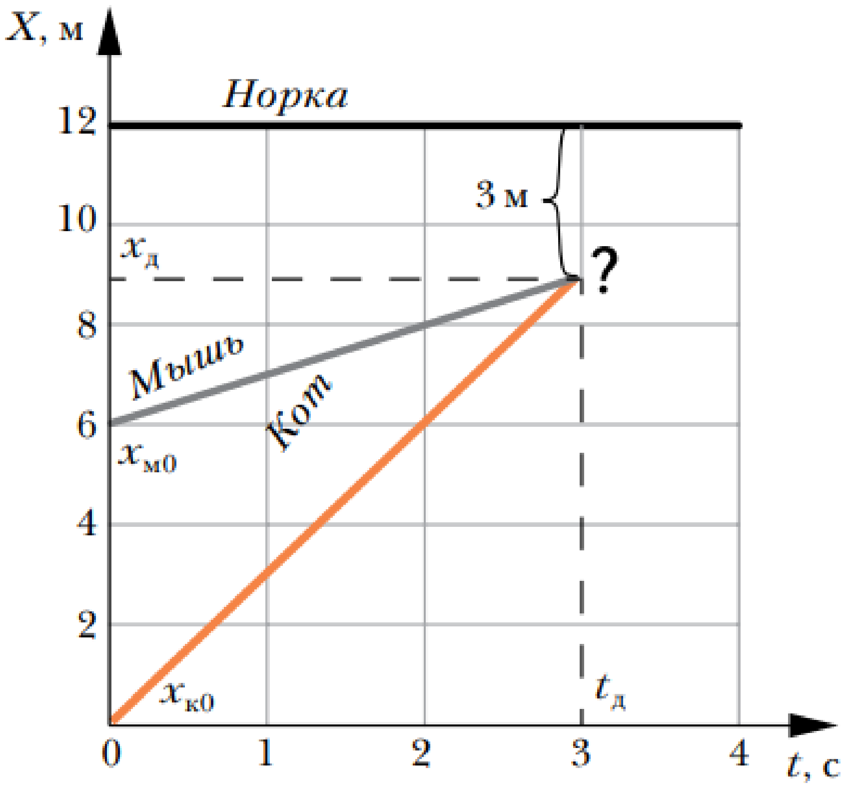


Рис. 30

Норка находится
на расстоянии 12 м
от начала отсчёта

Равноускоренное движение
закон движения
закон изменения скорости

+ 2 логических шага

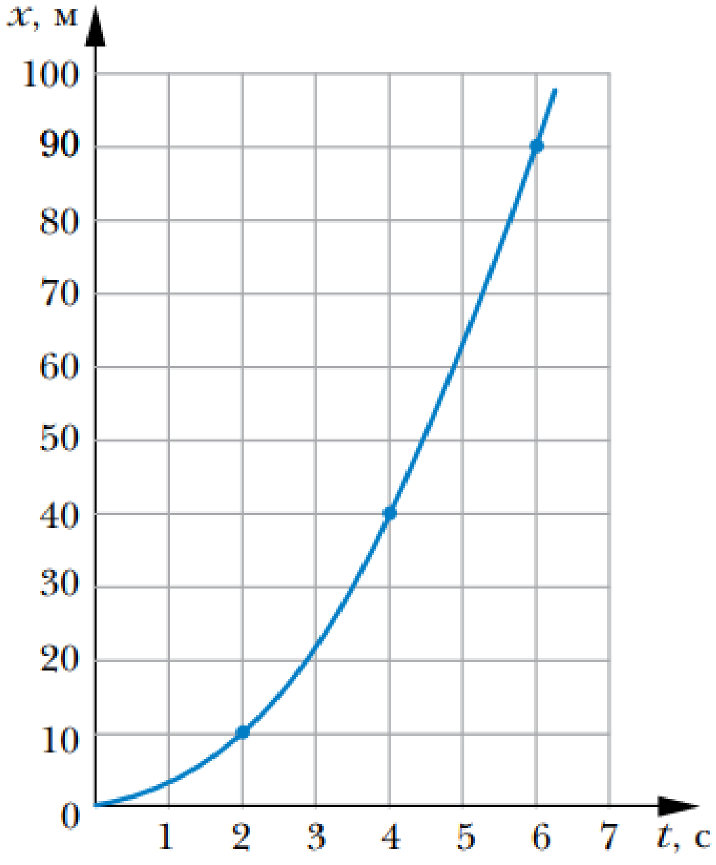


Рис. **65**

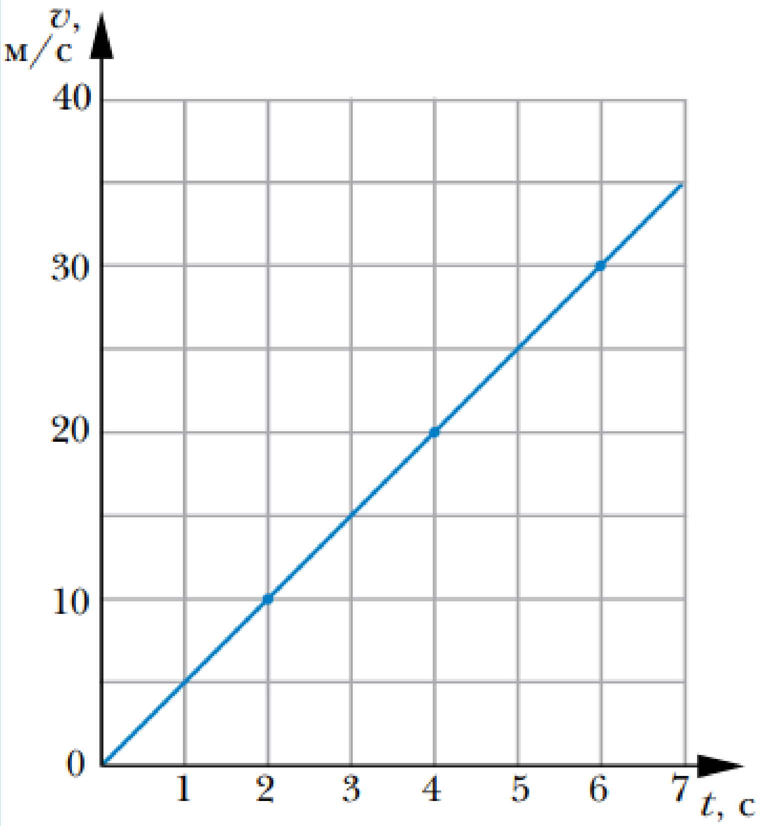


Рис. **66**

1 Определите, используя рисунки 65 и 66, путь, пройденный автомобилем от начала движения до момента времени, когда модуль его скорости стал равен: а) 20 м/с; б) 30 м/с.

2 Определите, используя рисунки 65 и 66, значения скорости автомобиля в моменты времени, когда пройденный им путь от начала движения будет равен: а) 10 м; б) 40 м; в) 90 м.

Задача «разгон»

Гоночный автомобиль трогается с места, набирая скорость $v_к = 30$ м/с (108 км/ч) за время $t = 6$ с. Определите пройденный автомобилем за это время путь s, считая движение автомобиля равноускоренным.

Решение.

Используем известную нам схему решения задач по кинематике.

Шаг 1. Свяжем координатную ось X с дорогой, по которой разгоняется автомобиль. Начало отсчёта поместим в то место, откуда автомобиль начинает разгон. Ось X направим по ходу движения автомобиля, как показано на рисунке 59. В качестве единицы длины выберем 1 м. Включим часы (секундомер) в момент начала разгона.

Шаг 2. Определим в выбранной нами системе отсчёта начальную координату автомобиля: $x_0 = 0$.

Шаг 3. По условию начальная скорость автомобиля $v_0 = 0$. Так как направление ускорения совпадает с положительным направлением оси X, то значение ускорения a будет положительным.

Шаг 4. Запишем зависимость координаты от времени при прямолинейном равноускоренном движении автомобиля с учётом данных задачи:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} = 0 + 0 + \frac{a \cdot t^2}{2} = \frac{a \cdot t^2}{2}.$$

Шаг 4* (новый). Запишем зависимость значения скорости автомобиля от времени:

$$v = v_0 + a \cdot t = 0 + a \cdot t = a \cdot t.$$

Шаг 6. Объединим составленные уравнения, присвоив каждому номер и название:

$$x = \frac{a \cdot t^2}{2}, \qquad (1)\ (\textit{закон движения автомобиля})$$

$$v = a \cdot t, \qquad (2)\ (\textit{зависимость значения скорости от времени})$$

$$v = v_к. \qquad (3)\ (\textit{условие окончания разгона})$$

Шаг 7. Решение уравнений. Чтобы ответить на вопрос задачи, необходимо решить уравнение (1), подставив в него время разгона 6 с и значение ускорения a. Однако значение ускорения нам пока не известно. Зато нам известны значения начальной и конечной скоростей автомобиля. Следовательно, мы можем найти значение ускорения. Для этого в условие окончания разгона (3) подставим из уравнения (2) значение скорости $a \cdot t$ в момент $t = 6$ с:

$$v_к = a \cdot t,$$

$$a = \frac{v_к}{t};\ a = \frac{30}{6} = 5\ (м/с^2).$$

Подставив полученное значение ускорения a в уравнение (1), находим

$$x = \frac{a \cdot t^2}{2} = \frac{5 \cdot 6^2}{2} = 90\ (м).$$

Ясно, что $s = x - x_0 = 90 - 0 = 90$ (м).

Как вы заметили, в отличие от задач о равномерном движении, в шаге 4 появилось дополнение. Оно связано с тем, что *скорость равноускоренно движущегося тела изменяется со временем*. В результате появилось новое уравнение — зависимость значения скорости от времени.

Полезно сопоставить

таблица

график

аналитические зависимости

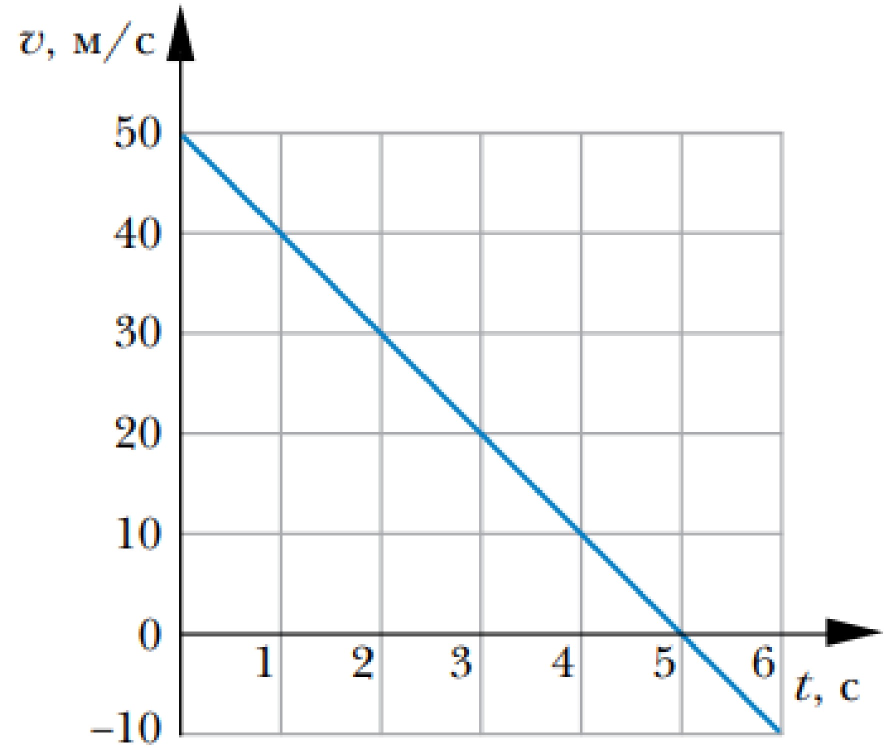


Рис. **64**

t, с	0	1	2	3	4	5	6
v, м/с	50						
x, м	0						

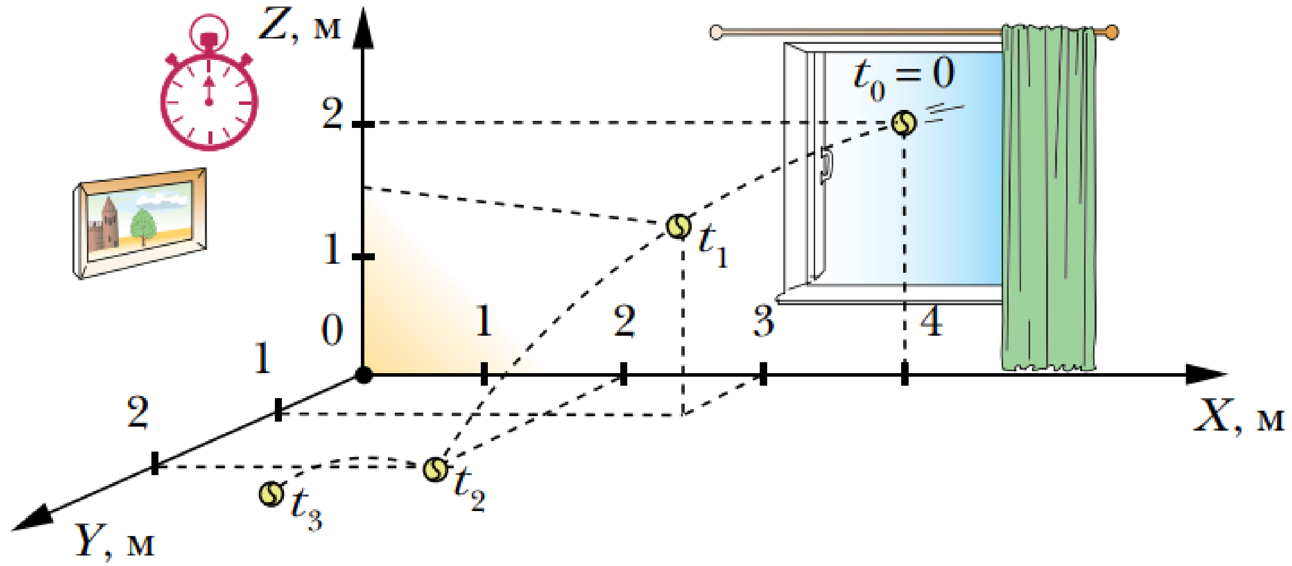


Рис. **5** Система отсчёта для описания движения теннисного мяча

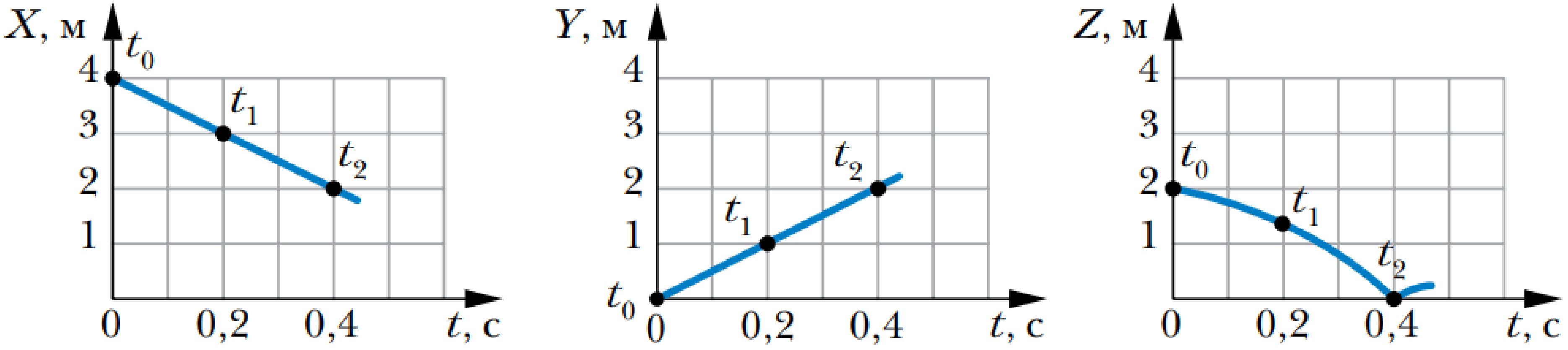


Рис. **6** Изменения координат x, y, z теннисного мяча с течением времени в системе отсчёта, связанной с комнатой

Таблица 1

Момент времени t, с	0	1	2	3	4
Координата x, см	4	8	12	16	20
Координата y, см	3	6	9	12	15

Задачи с переплыванием рек

Решение.

Шаг 1. Система отсчёта задана в условии задачи. В качестве тела отсчёта выбран берег (*см.* рис. 21). За начало отсчёта принята точка O – место старта. Часы включают в момент старта.

Шаг 2. Начальные координаты лодки: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Шаг 3. Определим проекции скорости движения лодки v_x и v_y в выбранной системе отсчёта.

Отметим, что лодка движется со скоростью $\vec{v}'$ относительно воды. Вода, в свою очередь, движется со скоростью $\vec{u}$ относительно берега (т. е. относительно системы отсчёта XY). Такое движение лодки подобно рассмотренному в § 6 движению зайца (задача 2). Поэтому, как и в случае с зайцем, скорость $\vec{v}$ лодки относительно берега равна сумме скоростей лодки относительно воды $\vec{v}'$ и воды относительно берега $\vec{u}$. Таким образом, в выбранной системе отсчёта XY в любой момент времени выполняется соотношение:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}.$$

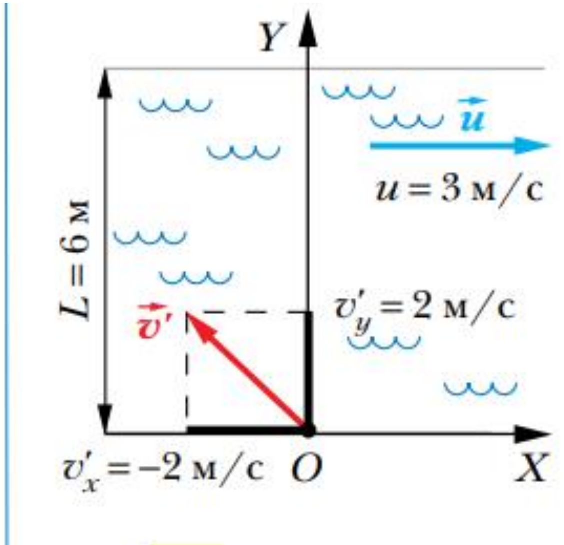


Рис. 21

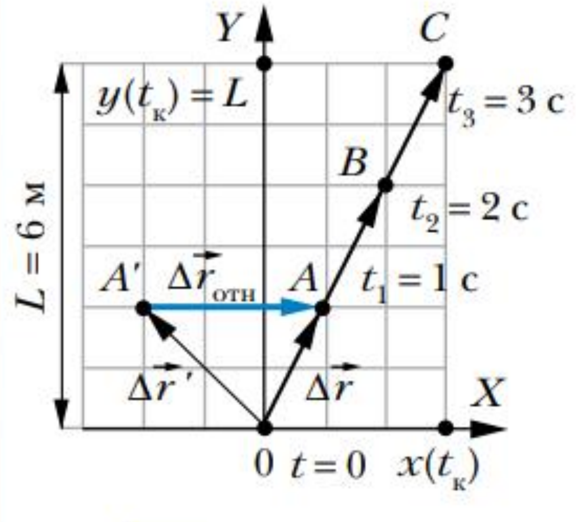


Рис. 22

$$v_x = v'_x + u_x,\ v_y = v'_y + u_y.$$

Из рисунка 21 видно, что проекция скорости $\vec{v}'$ на ось X отрицательна и равна $v'_x = -2$ м/с. Проекция $\vec{v}'$ на ось Y положительна и равна $v'_y = 2$ м/с. Так как $\vec{u}$ направлена в положительном направлении оси X, то её проекция на эту ось положительна и равна её модулю: $u_x = 3$ м/с. Проекция $\vec{u}$ на ось Y равна нулю: $u_y = 0$, так как скорость перпендикулярна оси Y.

Подставляя значения проекций, получаем:

$$v_x = -2 + 3 = 1\ (\text{м/с}),\ v_y = 2 + 0 = 2\ (\text{м/с}).$$

Шаг 4. Запишем законы движения проекций лодки на координатные оси с учётом результатов, полученных в шагах 2 и 3:

$$x(t) = x_0 + v_x t = 0 + 1t,$$
$$y(t) = y_0 + v_y t = 0 + 2t.$$

Шаг 5. Представим в виде уравнения условие задачи. В конечный момент времени $t_к$ координата $y(t_к)$ лодки по оси Y станет равна координате L противоположного берега: $y(t_к) = L$. Обозначим координату окончания переправы на оси X как $x(t_к)$. Тогда пройденный лодкой путь:

$$s = \sqrt{x^2(t_к) + L^2}.$$

Шаг 6. Сведём полученные уравнения в систему, присвоив каждому из них название и номер:

$x(t) = 1t,$	(1) (*закон движения по оси X*)
$y(t) = 2t,$	(2) (*закон движения по оси Y*)
$y(t_к) = L,$	(3) (*условия окончания переправы*)
$s = \sqrt{x^2(t_к) + L^2}.$	(4) (*выражение для пути*)

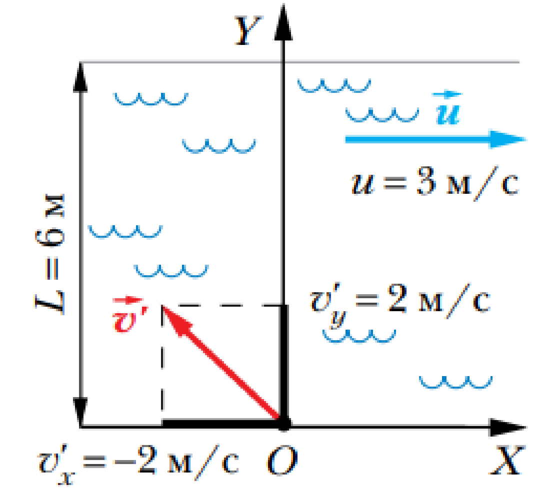


Рис. 21

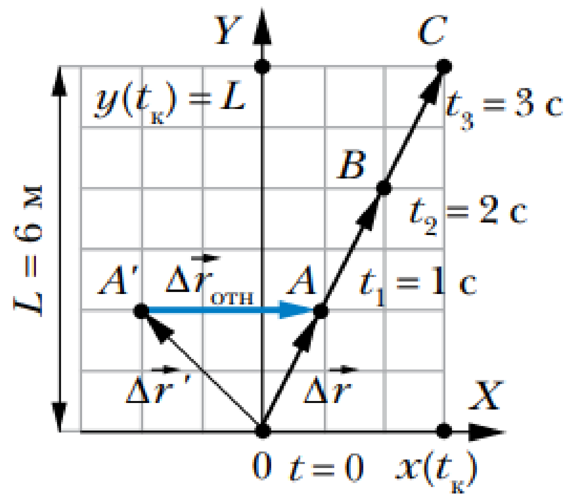


Рис. 22

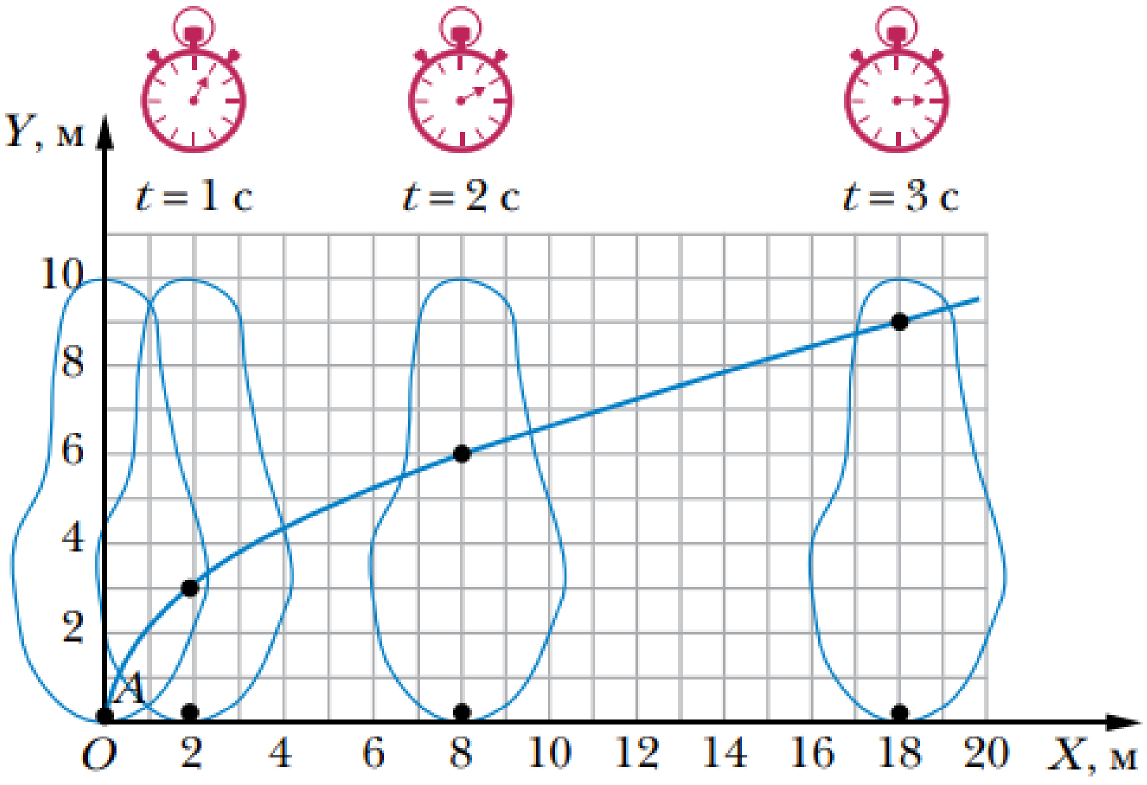


Рис. 25 Результат сложения двух прямолинейных движений, одно из которых равномерное, а другое равноускоренное

Момент времени t, с	0	1	2	3
Координата x, см	0	2	8	18
Координата y, см	0	3	6	9

Момент времени t, с	0	1	2	3
Проекция вектора скорости на ось X: $v_x = 4t$, м/с	0	4	8	12
Проекция вектора скорости на ось Y: $v_y = 3$, м/с	3	3	3	3
Модуль вектора скорости $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, м/с	3	$\sqrt{4^2 + 3^2}$	$\sqrt{8^2 + 3^2}$	$\sqrt{12^2 + 3^2}$

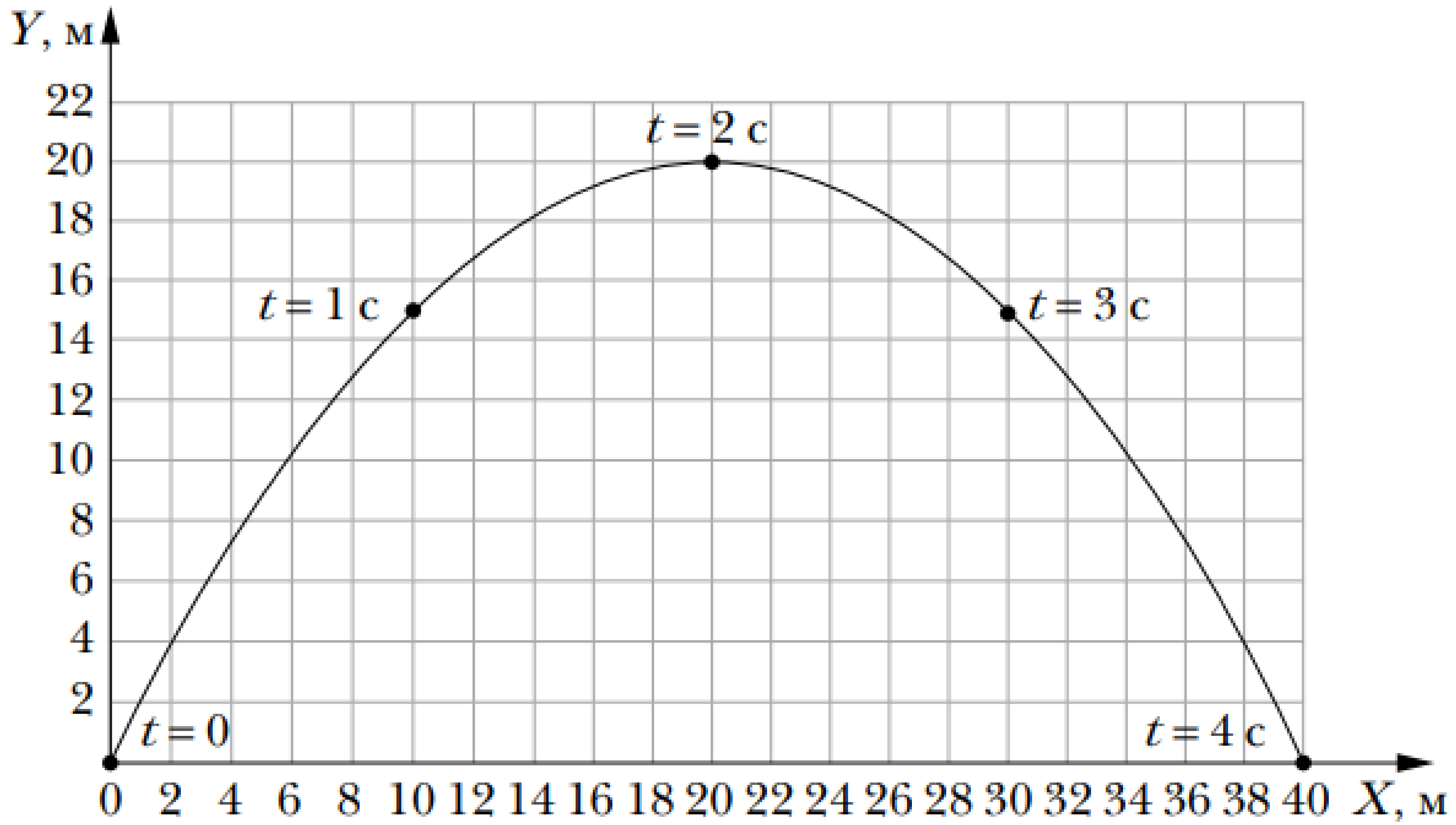
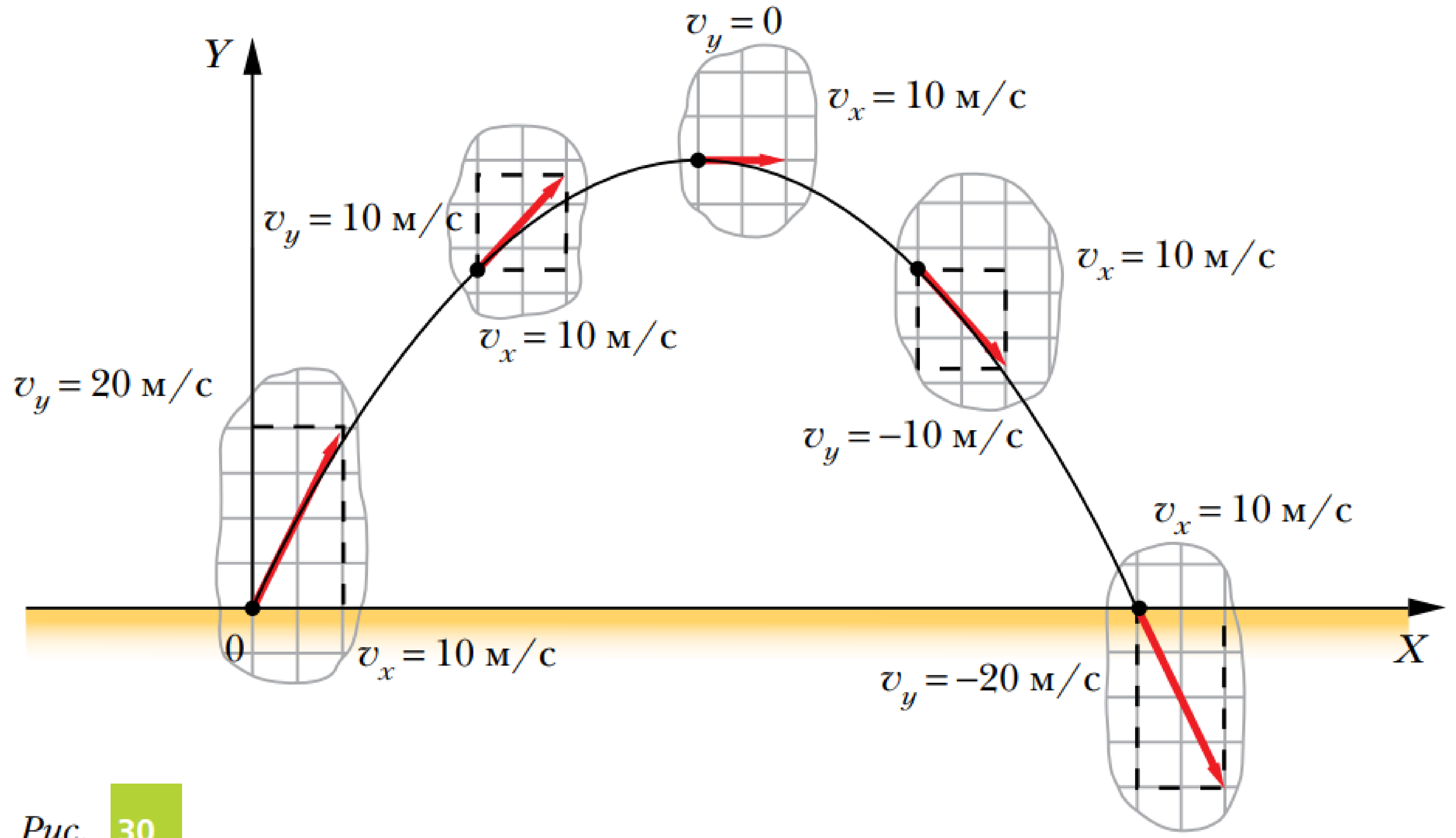


Рис. **29** Траектория, построенная с использованием законов движения $x(t)$ и $y(t)$, представляет собой параболу



Y
$v_y = 0$
$v_x = 10$ м/с
$v_y = 10$ м/с
$v_x = 10$ м/с
$v_x = 10$ м/с
$v_y = 20$ м/с
$v_y = -10$ м/с
$v_x = 10$ м/с
0
$v_x = 10$ м/с
X
$v_y = -20$ м/с

Рис. 30

Момент времени t, с	0	1	2	3	4
Координата x, м	0	10	20	30	40
Координата y, м	0	15	20	15	0
Проекция скорости v_x, м/с	10	10	10	10	10
Проекция скорости v_y, м/с	20	10	0	–10	–20

Рассмотрим свободное падение камня, который бросили с горизонтальной площадки с известной начальной скоростью $\vec{v}_0$ под углом α к горизонту (рис. 28). Определим расстояние L по горизонтали от точки бросания камня до места его падения.

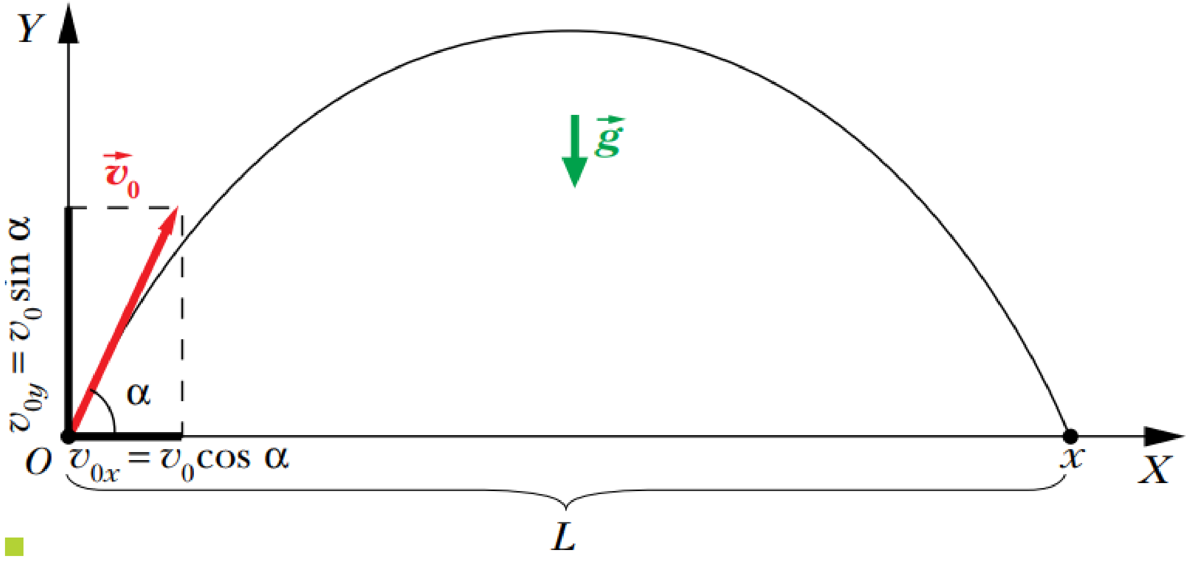
Будем считать, что во время полёта на камень действует только сила тяжести. Поэтому в любой момент времени его ускорение направлено вертикально вниз и по модулю равно g ($g = 10$ м/с^2).

Рассмотрим движение камня, решая задачу по известной вам схеме.

Шаг 1. Систему отсчёта свяжем с Землёй. Начало отсчёта поместим в точку бросания камня. Ось X направим горизонтально в направлении точки падения. Ось Y направим вертикально вверх. Часы включим в момент бросания камня.

Шаг 2. Начальные координаты камня известны: $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$.

Шаг 3. Пусть проекции $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ и $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$ известной нам начальной скорости $\vec{v}_0$ камня равны соответственно $v_{0x} = 10$ м/с и $v_{0y} = 20$ м/с.



Шаг 4. Ускорение $\vec{a}$ камня в любой момент времени равно $\vec{g}$ и направлено вертикально вниз, т. е. в отрицательном направлении оси Y. Следовательно, проекция a_y ускорения камня на ось Y равна модулю ускорения свободного падения, взятому со знаком «минус»: $a_y = -g$. Поэтому камень вдоль оси Y движется равноускоренно с отрицательным значением ускорения. Следовательно, модуль скорости v_y будет уменьшаться с течением времени, пока не станет равным нулю. Другими словами, камень будет подниматься всё медленнее, пока не достигнет верхней точки. После этого координата y камня начнёт уменьшаться. Проекция его скорости на ось Y станет отрицательной, а её модуль будет непрерывно увеличиваться вплоть до момента падения камня на площадку.

Таким образом, движение камня вдоль оси Y является *равноускоренным с отрицательным значением ускорения*. Поэтому координата y камня изменяется по закону равноускоренного прямолинейного движения:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = 0 + 20t - \frac{10t^2}{2} = 20t - 5t^2.$$

Проекция a_x ускорения камня на ось X равна нулю, так как ускорение свободного падения перпендикулярно этой оси. Поэтому движение камня вдоль оси X является *равномерным*, а координата x камня изменяется по закону равномерного прямолинейного движения:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t = 0 + 10t = 10t.$$

Напомним, что в приведённых выражениях координаты x и y измеряются в метрах, а время t — в секундах.

Шаг 4* (новый). При определении расстояния L этот шаг решения не используется. Однако мы определим зависимости от времени проекций скорости камня на координатные оси, так как они потребуются нам в дальнейшем для анализа движения камня.

Проекция скорости $\vec{v}$ камня на ось X не изменяется с течением времени:

$$v_x(t) = v_{0x} = 10 \text{ м/с}.$$

Проекция скорости $\vec{v}$ камня на ось Y изменяется со временем, уменьшаясь с каждой секундой:

$$v_y(t) = v_{0y} - gt = 20 - 10t.$$

Шаг 5. В момент $t_{п}$ падения камня на Землю его координата по оси Y станет равной нулю. Поэтому *условие падения* имеет вид:

$$y(t_{п}) = 0.$$

Шаг 6. Объединим полученные уравнения в систему, присвоив каждому номер и название:

$x(t) = 10t,$ (1) (*закон движения по оси X*)

$y(t) = 20t - 5t^2,$ (2) (*закон движения по оси Y*)

$y(t_{п}) = 0.$ (3) (*условие падения*)

Шаг 7. Для решения системы подставим уравнение (2) в (3), получим уравнение, из которого можно определить время полёта камня:

$$20t_{п} - 5t_{п}^2 = 0,$$

или $5(4t_{п} - t_{п}^2) = 0,$

откуда $(4 - t_{п})t_{п} = 0.$

Уравнение имеет два решения. Первое решение $t_{п} = 0$ соответствует начальному моменту времени, когда камень начинал свой полёт с поверхности площадки и его координата по оси Y равнялась нулю. Нас же интересует второе решение: $t_{п} = 4$ с. В этот момент времени координата камня по оси Y снова стала равной нулю. Это означает, что камень упал на площадку.

Таким образом, время полёта камня $t_{п} = 4$ с.

Определим искомое расстояние L. Для этого подставим время падения $t_{п}$ в закон движения (1):

$$L = x(t_{п}) = 10t_{п} = 10 \cdot 4 = 40 \text{ (м)}.$$

Теперь определим время $t_{в}$, в течение которого камень поднимался до верхней точки траектории. В этой точке проекция скорости камня на ось Y становится равной нулю. Поэтому для определения $t_{в}$ решим уравнение:

$$v_y(t_{в}) = v_{0y} - gt_{в} = 0.$$

Следовательно,

$$t_2 = \frac{v_{0y}}{g} = 2 \text{ (с)}.$$

Отметим, что это время в 2 раза меньше времени полёта камня.

Время подъёма камня с поверхности Земли до максимальной высоты равно времени его падения из верхней точки до поверхности Земли.

Определив значение $t_{в}$, можно найти максимальную высоту подъёма камня во время полёта. Подставив значение $t_{в}$ в уравнение (2), получим:

$$H = y(t_{в}) = 20 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 20 \text{ (м)}.$$

Если бы мы решали задачу в общем виде, то для времени $t_{п}$ полёта камня и искомого расстояния L мы получили бы выражения:

$$t_{п} = 2\frac{v_{0y}}{g} = 2\frac{v_0}{g}\sin\alpha,$$

$$L = v_{0x}t_{п} = 2\frac{v_{0x}v_{0y}}{g} = 2\frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha.$$

Анализ этих выражений позволяет сделать следующие выводы.

1. Чем больше проекция v_{0y} начальной скорости на ось Y, тем больше время $t_{п}$ полёта камня.

2. Чем больше произведение проекций v_{0x} и v_{0y} начальной скорости $\vec{v}_0$ на координатные оси X и Y, тем больше расстояние L между точками бросания и падения камня. Максимальным это расстояние будет при $\alpha = 45°$.

3. Время подъёма камня до максимальной высоты равно половине времени его полёта. Это время и высота подъёма камня будут максимальны, если камень брошен вертикально вверх, т. е. при $\alpha = 90°$.

В заключение, используя законы движения (1) и (2), а также зависимости проекций скорости $\vec{v}$ камня от времени, определим координаты x и y камня и проекции v_x и v_y его скорости в различные моменты движения. Занесём полученные данные в таблицу 4.

Алгоритмы решения задач

Правильная, выверенная, осознанная последовательность действий при решении задач (т.е. **наличие** четко спланированного руководства к действиям – **алгоритма**).

Не только в физике, но и во всех сферах интеллектуальной деятельности алгоритмы решения задач имеют приблизительно одну и ту же структуру.

Выбор модели – понимание ситуации – выход на известные законы (корректировка выбранной модели) – использование конкретных условий в рассматриваемой ситуации – анализ полученного результата.