

Университетский курс  
общей физики

---

В.А.Алешкевич, Л.Г.Деденко, В.А.Карavaев

# МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

ЛЕКЦИИ

МОСКВА  
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ  
1997

**УДК 530.1**

Механика твердого тела. Лекции.  
(Университетский курс общей физики)  
Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А.,  
изд-во Физического факультета МГУ  
(НЭВЦ ФИПТ), 1997 г., 72 стр., илл.

Пособие содержит лекции по механике твердого тела, которые являются составной частью раздела «Механика» курса общей физики.

Для студентов физических специальностей университетов и высших учебных заведений.

*Виктор Александрович Алешкевич*

*Леонид Григорьевич Деденко*

*Владимир Александрович Караваев*

Механика твердого тела. Лекции.  
(Университетский курс общей физики)

Оригинал-макет подготовлен Издательской группой физического факультета МГУ (тел. 939-5494). Подписано в печать 06.10.1997. Сдано в набор 08.10.1997. Формат В5, гарнитура Times, печать ризо, Объем 4,5 печ.л., тираж 200 экз, заказ №348.

Издательство НЭВЦ ФИПТ Физического факультета МГУ. Лицензия ЛР-040131 от 05.02.97. Москва, 119899, Воробьевы горы, МГУ им. М.В.Ломоносова, физический факультет.

© Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А., 1997  
© Физический факультет МГУ, 1997

## Предисловие

*На кафедре общей физики ведется работа по подготовке и изданию оригинального курса «Общая физика», предназначенного для студентов физических специальностей вузов.*

*Курс будет охватывать четыре раздела: «Механика», «Молекулярная физика», «Электромагнетизм» и «Оптика», соответствовать новым учебным программам, разработанным на физическом факультете МГУ, и отражать современные тенденции и технологии физического образования.*

*Отличительной особенностью данного курса является то, что в нем наиболее последовательно в методическом отношении проводится точка зрения о существенном единстве основных форм обучения физике: лекций, лабораторных экспериментов и семинарских упражнений. Лекции по каждой теме начинаются с демонстрации основных экспериментальных фактов, которые затем анализируются и обобщаются в виде физических законов и соотношений. Такой «экспериментальный» подход к изложению материала закрепляется при выполнении лабораторных экспериментов, цель которых - научить студентов навыкам самостоятельной постановки и решения физических проблем, проведению экспериментальных исследований, включая компьютерное моделирование, а также методам интерпретации и анализа экспериментальных данных. Более глубокое понимание основных физических явлений и закономерностей достигается на семинарских занятиях.*

*В соответствии с поставленными задачами каждый раздел курса будет состоять из четырех пособий: «Лекции», «Лекционный эксперимент», «Лабораторный эксперимент», «Семинарские занятия». Пособия, написанные в едином методическом ключе, будут комплектоваться видеозаписями лекционных демонстраций и дискетами с описанием модельных экспериментов.*

*Лекции по кинематике и динамике твердого тела являются частью готовящегося к изданию курса «Механика» и могут рассматриваться как самостоятельное учебное пособие по данной теме. Лекции написаны на основе курсов, читаемых авторами на физическом факультете МГУ.*

*Авторы выражают глубокую благодарность М.В.Семенову за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания, а также К.Б.Бегун, М.П.Виноградову и А.А.Якуте за подготовку рукописи к изданию.*



## ЛЕКЦИЯ №1

*Кинематика абсолютно твердого тела. Степени свободы. Углы Эйлера. Поступательное движение. Вращение вокруг неподвижной оси. Плоское движение. Движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. Движение свободного твердого тела.*

Механика твердого тела – один из наиболее трудных разделов курса. Как и механика материальной точки, он состоит из двух основных частей: кинематики и динамики.

Задача кинематики – дать способы описания движения твердого тела и, исходя из закона его движения, определить положение, скорость и ускорение любой точки тела в любой момент времени. В общем случае это довольно сложная задача – в этом можно убедиться, покрутив в руках, например, книгу или ручку. Конечно, всякое тело можно представить как систему материальных точек и попробовать применить к нему приемы, известные из кинематики точки. На первый взгляд, это не упрощает ситуацию – не выписывать же законы движения для всех физически малых частей, на которые можно разбить тело, пусть даже их будет и конечное число!

Облегчающее обстоятельство кроется в самих словах “твердое тело”. Твердое – значит практически недеформируемое. Опыт показывает, что если на какой-либо достаточно твердый предмет подействовать силой и заставить его двигаться, то расстояния между любыми его точками останутся неизменными. Хотя, конечно, под действием приложенных сил в теле возникнут внутренние напряжения, причина которых – деформации отдельных его частей. Но если мы говорим о **твердом** теле, то эти деформации оказываются настолько малыми, что незаметны для глаза, и от них можно отвлечься. В итоге мы приходим к идеализированной модели **абсолютно твердого тела** (в дальнейшем – просто твердого тела), которое совершенно не способно деформироваться, хотя под действием внешних сил в нем могут возникать определенные внутренние усилия.

Таким образом, твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек, относительные положения которых остаются неизменными. Другими словами, все макроскопические элементы такого тела неподвижны в системе координат, жестко связанной с телом. Именно это обстоятельство позволяет значительно упростить решение кинематических задач и конкретизировать многие общие понятия (импульс, момент импульса, энергия), введенные ранее при рассмотрении системы материальных точек.

**Степени свободы. Углы Эйлера.** Двигаясь в пространстве, твердое тело обладает определенными степенями свободы.

Число степеней свободы – это число независимых величин, которые необходимо задать для того, чтобы однозначно определить положение тела в пространстве. В разных ситуациях число степеней свободы твердого тела может быть различным. Если диск, не вращаясь, может скользить вдоль неподвижной в данной системе отсчета оси (рис. 1.1а), то в данной системе отсчета он, очевидно, обладает только одной степенью свободы – положение диска однозначно определяется, скажем, координатой  $x$  его центра, отсчитываемой вдоль оси. Но если диск, кроме того, может еще и вращаться (рис. 1.1б),

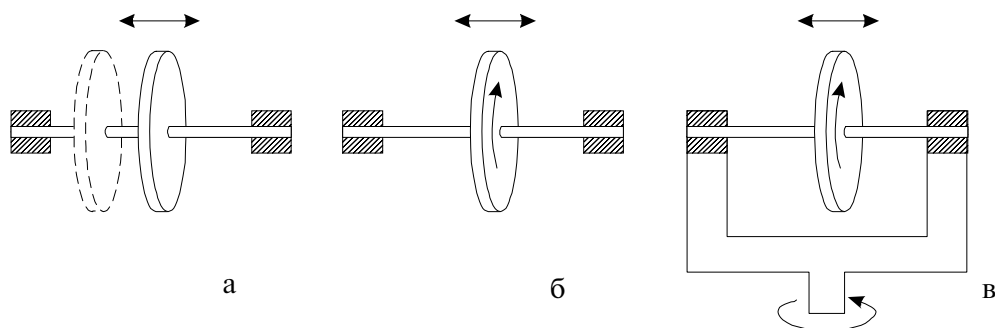


Рис. 1.1

то он приобретает еще одну степень свободы — к координате  $x$  добавляется угол  $\varphi$  поворота диска вокруг оси. Если ось с диском зажата в рамке, которая может поворачиваться вокруг вертикальной оси (рис. 1.1в), то число степеней свободы становится равным трем — к  $x$  и  $\varphi$  добавляется угол  $\theta$  поворота рамки.

Коробка, которая может перемещаться по поверхности стола (рис. 1.2), также обладает тремя степенями свободы — для однозначного определения ее положения можно задать, например, координаты  $x$ ,  $y$  ее центра и угол  $\varphi$  между одним из ребер коробки и краем стола.

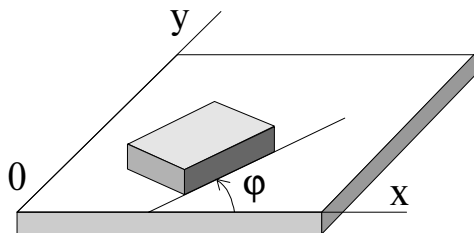


Рис. 1.2

Каково же число степеней свободы твердого тела в самом общем случае?

Для того, чтобы однозначно задать положение твердого тела в пространстве, надо зафиксировать три его точки, не лежащие на одной прямой. Одна материальная точка имеет три степени свободы (три декартовы координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ). Две материальные точки, жестко связанные между собой,

имеют  $3+3-1=5$  степеней свободы. В этом случае координаты точек  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  и  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $z_2$  не являются независимыми величинами, так как имеется уравнение связи

$$\ell^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \quad (1.1)$$

где  $\ell$  — расстояние между точками.

Таким образом, в общем случае для твердого тела получаем  $3+3+3-3=6$  степеней свободы. При этом имеются три уравнения связи, выражающие постоянство расстояний между каждой парой точек.

Шесть параметров, соответствующих шести степеням свободы твердого тела, можно задавать по-разному. В дальнейшем мы будем пользоваться тремя различными декартовыми системами координат:

1. Лабораторная система XYZ.
2. Система  $x_0y_0z_0$ , начало которой связано с некоторой точкой O твердого тела, а оси остаются параллельными осям лабораторной системы XYZ,

то есть система  $x_0y_0z_0$  движется вместе с точкой  $O$  твердого тела относительно системы  $XYZ$  поступательно.

3. Система  $xuz$ , начало которой находится в той же точке  $O$ , что и начало системы  $x_0y_0z_0$ , а оси жестко связаны с твердым телом.

Тогда шести степеням свободы тела будут соответствовать, во-первых, три координаты точки  $O$  (в лабораторной системе  $XYZ$ ), а во-вторых, — три угла  $\varphi, \psi, \theta$ , однозначно определяющие положение системы  $xuz$  относительно  $x_0y_0z_0$ . Эти углы называются углами Эйлера. Их смысл ясен из рис. 1.3, где  $OA$  — линия пересечения плоскостей  $Ox_0y_0$  и  $Oxu$ , при этом нижнее основание твердого тела (прямоугольного параллелепипеда) лежит в плоскости  $Oxu$ . Обычно их называют так:  $\varphi$  — угол собственного вращения (с изменением этого угла связан поворот твердого тела вокруг оси  $z$ ),  $\psi$  — угол прецессии (поворот вокруг  $z_0$  с сохранением угла  $\theta$  между осями  $z_0$  и  $z$ ),  $\theta$  — угол нутации (отклонение тела от оси  $z_0$ ).

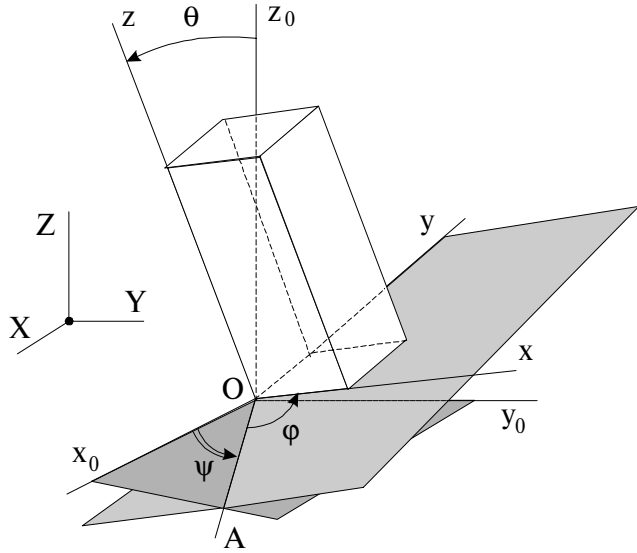


Рис. 1.3

Примеры с диском на оси и коробкой (рис. 1.1, 1.2) показывают, что сложное движение того или иного тела может быть представлено как суперпозиция достаточно простых движений: поступательного перемещения и поворота (вращения) вокруг оси. В дальнейшем, следуя принципу “от простого к сложному”, мы рассмотрим 5 типов движения твердого тела, исчерпывающих все встречающиеся на практике случаи:

- поступательное движение;
- вращение вокруг неподвижной оси;
- плоское, или плоско-параллельное движение;
- движение твердого тела с одной неподвижной точкой (такое движение иногда называют сферическим);
- движение свободного, то есть незакрепленного твердого тела.

**Поступательное движение** — это такое движение, при котором любой выделенный в теле отрезок остается параллельным самому себе.

Классическим примером на эту тему является движение кабинок колеса обозрения (рис. 1.4). Этот пример наглядно показывает, что поступательное движение — совсем не обязательно прямолинейное. Очевидно, что число степеней свободы тела в этом случае равно трем, так как достаточно описать движение какой-нибудь одной точки тела (например, точки  $A$  на рис. 1.5). Траектории всех остальных точек (например, точки  $B$  на рис. 1.5) могут быть получены путем “параллельного” переноса.

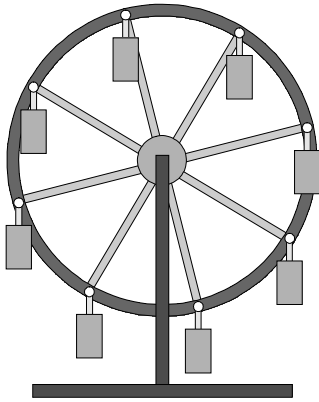


Рис. 1.4

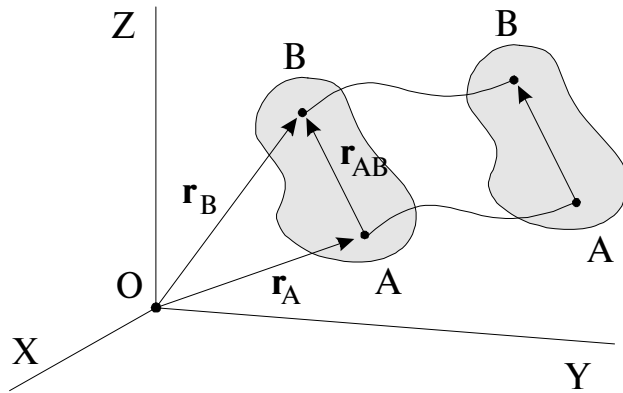


Рис. 1.5

Допустим, закон движения точки A задан в виде

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_A(t). \quad (1.2)$$

Тогда закон движения точки B будет иметь вид

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{AB}, \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{r}_{AB}$  – вектор, проведенный от точки A к точке B.

Скорость точки A

$$\mathbf{v}_A = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt}, \quad (1.4)$$

скорость точки B

$$\mathbf{v}_B = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \mathbf{v}_A, \quad (1.5)$$

так как  $\mathbf{r}_{AB}$  – вектор, постоянный по величине (абсолютно твердое тело) и направлению (поступательное движение).

Ускорения точек A и B также равны между собой:

$$\mathbf{a}_A = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_B}{dt} = \mathbf{a}_B. \quad (1.6)$$

Таким образом, кинематика поступательного движения твердого тела в принципе ничем не отличается от кинематики материальной точки.

**Вращение вокруг неподвижной оси.** Если при движении твердого тела какие-либо две его точки все время остаются неподвижными, то через эти точки можно провести прямую, являющуюся неподвижной осью вращения. С таким движением мы сталкиваемся ежедневно, открывая и закрывая дверь в комнату. Очевидно, что в этом случае тело обладает лишь одной степенью свободы, связанной с углом его поворота вокруг оси. При этом все точки тела движутся по окружностям, лежащим в плоскостях, которые перпендикулярны оси вращения; центры окружностей лежат на этой оси.

Существенно, что линейные скорости точек, находящихся на разном расстоянии от оси вращения, разные. В этом можно убедиться, касаясь стальной проволокой вращающегося диска точила (рис. 1.6): чем дальше от оси, тем длиннее снопок искр – тем больше скорость соответствующей точки диска.



При этом также видно, что искры летят по касательной к окружности, описываемой данной точкой диска.

Ясно, что угловое перемещение всех точек твердого тела за одно и то же время будет одинаковым. Это обстоятельство позволяет ввести общую кинематическую характеристику — угловую скорость

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}, \quad (1.7)$$

где  $\Delta\varphi$  — угол поворота тела за время  $\Delta t$ .

Можно ввести вектор элементарного углового перемещения  $\Delta\varphi$ , направленный вдоль оси вращения в соответствии с правилом правого буравчика: если рукоятку буравчика поворачивать в направлении вращения тела, то поступательное перемещение буравчика даст направление  $\Delta\varphi$ . Устремляя интервал времени  $\Delta t$ , за которое произошло угловое перемещение  $\Delta\varphi$ , к нулю, мы получим вектор угловой скорости

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad (1.8)$$

который определяет, во-первых, модуль угловой скорости тела, во-вторых, — ориентацию оси вращения в пространстве, и в-третьих, — направление вращения тела. Следует подчеркнуть, что  $\omega$  — вектор скользящий в том смысле, что его начало можно совместить с любой точкой, принадлежащей оси вращения.

Например, для Земли, вращающейся вокруг своей оси с запада на восток, вектор  $\omega$  имеет направление от южного полюса к северному. Величина угловой скорости

$$\omega_{\text{Земли}} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600 \text{ с}} \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}.$$

Для сравнения: угловая скорость орбитального движения Земли составляет

$$\omega_{\text{орб}} \approx \frac{\omega_{\text{Земли}}}{365} \approx 2,0 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}.$$

Заметим, что период орбитального движения не кратен продолжительности суток, что создает известные трудности в построении календаря (необходимо вводить високосные годы и проч.).

Зная  $\omega$ , легко определить линейную скорость любой точки твердого тела. Введем радиус-вектор  $\mathbf{r}_A$  некоторой точки  $A$  твердого тела, поместив его начало в точку  $O$  на оси вращения (рис. 1.7). Вектор  $\mathbf{p}$  проведен в точку  $A$  от оси вращения, то есть перпендикулярно оси.

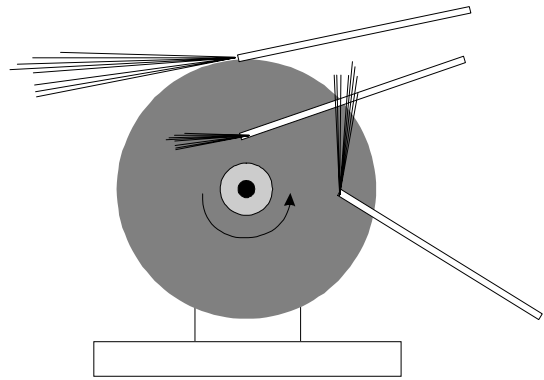


Рис. 1.6

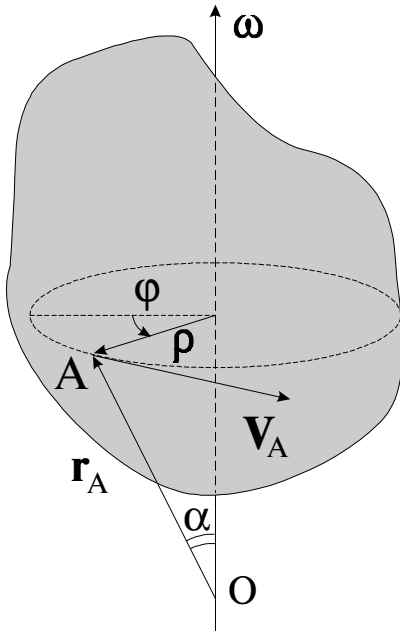


Рис. 1.7

Вектор скорости  $\mathbf{v}_A$  можно связать с векторами  $\mathbf{r}_A$  и  $\boldsymbol{\omega}$ :

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A \quad (1.9)$$

(формула Эйлера). При этом величина скорости

$$v_A = \omega r_A \cdot \sin \alpha = \omega \rho. \quad (1.10)$$

Ясно, что точку  $O$  на оси вращения можно выбрать произвольно — значение  $\rho = r_A \sin \alpha$  будет одним и тем же.

Ускорение точки  $A$

$$\mathbf{a}_A = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A. \quad (1.11)$$

Здесь  $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$  — угловое ускорение тела. Это аксиальный вектор, направленный в ту же сторону, что и  $\boldsymbol{\omega}$ , если вращение ускоряется, и противоположно  $\boldsymbol{\omega}$ , если вращение замедляется.

Таким образом, ускорение  $\mathbf{a}_A$  является суммой двух величин:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n, \quad (1.12)$$

(рис. 1.8), причем все три вектора  $\mathbf{a}_A$ ,  $\mathbf{a}_\tau$  и  $\mathbf{a}_n$  лежат в плоскости, перпендикулярной оси вращения.

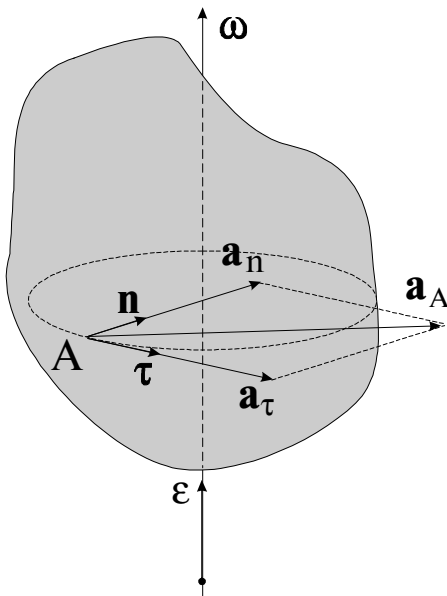


Рис. 1.8

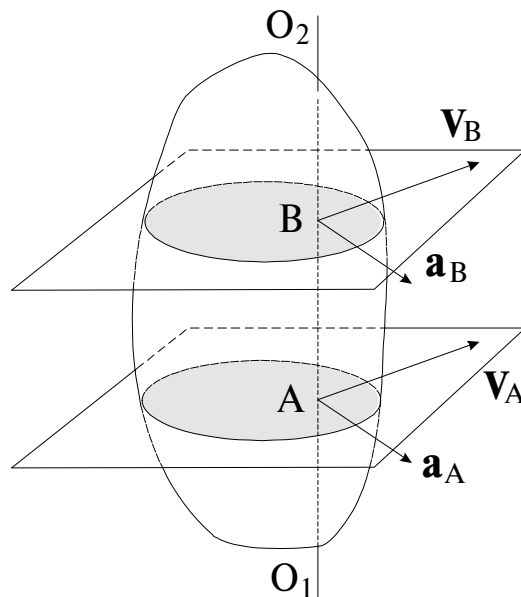


Рис. 1.9

$$\mathbf{a}_\tau = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_A = \varepsilon \boldsymbol{\tau} \quad (1.13)$$

— это тангенциальное ускорение ( $\boldsymbol{\tau}$  — единичный вектор в направлении  $\mathbf{v}_A$ ).

$$\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A) = \omega^2 \rho \mathbf{n} \quad (1.14)$$

— это центростремительное ускорение ( $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении к оси вращения). Эти составляющие полного ускорения хорошо известны из кинематики вращательного движения материальной точки.

**Плоское движение** — это такое движение твердого тела, при котором траектории всех его точек лежат в неподвижных параллельных плоскостях. Если в теле провести некоторую прямую  $O_1O_2$ , перпендикулярную этим плоскостям (рис. 1.9), то все точки этой прямой будут двигаться по одинаковым траекториям с одинаковыми скоростями и ускорениями; сама прямая будет, естественно, сохранять свою ориентацию в пространстве. Таким образом, при плоском, или, как его иногда называют, плоско-параллельном движении твердого тела достаточно рассмотреть движение одного из сечений тела.

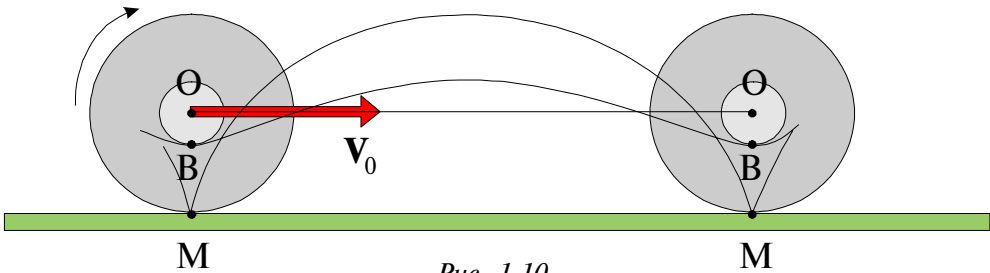


Рис. 1.10

Обратимся к классическому простому примеру плоского движения — качению цилиндра по плоскости без проскальзывания. Рассматривая одно из сечений цилиндра плоскостью, перпендикулярной его оси, мы приходим к известной задаче о катящемся колесе (рис. 1.10). Центр колеса движется прямолинейно, траектории других точек представляют собой кривые, называемые циклоидами.

При отсутствии проскальзывания мгновенная скорость самой нижней точки колеса (точки  $M$ ) равна нулю. Это позволяет рассматривать качение колеса как суперпозицию двух движений: поступательного со скоростью

оси  $v_0$  и вращательного с угловой скоростью  $\omega = \frac{v_0}{R}$ , где  $R$  — радиус колеса.

Ясно, что в этом случае  $v_M = v_0 - \omega R = 0$ .

Попробуем обобщить этот прием на произвольное плоское движение.

Выделим отрезок  $AB$  в рассматриваемом сечении твердого тела (рис. 1.11). Перевод сечения из положения 1 в положение 2 можно рассматривать как суперпозицию двух движений: поступательного из 1 в  $1'$  и вращательного из  $1'$  в 2 вокруг точки  $A'$ , называемой обычно полюсом (рис. 1.11а). Существенно, что в качестве полюса можно выбрать любую точку, принадлежащую сечению или даже лежащую в плоскости сечения вне его. На рис. 1.11б, к примеру, в качестве полюса выбрана точка  $B$ . Обратите внимание: длина пути

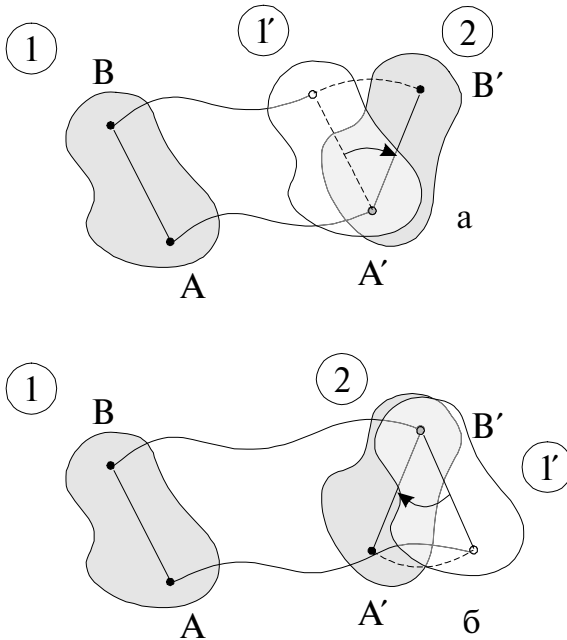


Рис. 1.11

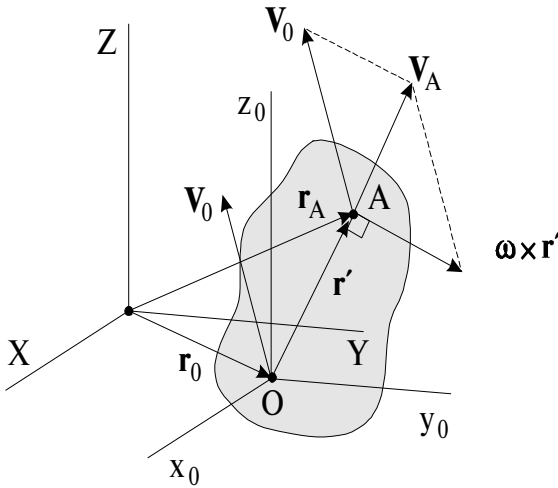


Рис. 1.12

но в некоторую точку  $O$  тела (полюс), а сама система  $x_0y_0z_0$  движется относительно  $XYZ$  поступательно, причем так, что оси  $Oy_0$  и  $Oz_0$  остаются в плоскости рисунка. Рассматриваемая точка  $A$  тела также движется в плоскости рисунка (плоское движение!).

Радиус-вектор точки  $A$

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' . \tag{1.15}$$

Скорость точки  $A$

$$\mathbf{v}_A = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' . \tag{1.16}$$

при поступательном перемещении изменилась (в данном случае увеличилась), но угол поворота остался прежним!

Приближая конечное положение тела к начальному (сокращая рассматриваемый промежуток времени), приходим к выводу: плоское движение твердого тела в любой момент времени можно представить как суперпозицию поступательного движения со скоростью некоторой точки, выбранной в качестве полюса, и вращения вокруг оси, проходящей через полюс. В реальной ситуации оба эти движения, естественно, происходят одновременно. Существенно, что разложение на поступательное и вращательное движения оказывается неоднозначным, причем в зависимости от выбора полюса скорость поступательного движения будет изменяться, а угловая скорость вращения останется неизменной.

В соответствии со сказанным скорость любой точки  $A$  тела (рис. 1.12) геометрически складывается из скорости какой-либо другой точки  $O$ , принятой за полюс, и скорости вращательного движения вокруг этого полюса. Напомним, что система координат  $XYZ$  на рис. 1.12 – неподвижная (лабораторная); начало системы  $x_0y_0z_0$  помещено

Из (1.16) можно сделать вывод, что в любой момент времени должна существовать такая точка  $M$ , скорость которой в лабораторной системе  $XYZ$  равна нулю - для этой точки

$$\mathbf{v}_0 = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (1.17)$$

(рис. 1.13). Заметим, что эта точка не обязательно должна принадлежать телу, то есть может находиться и вне его. Таким образом, плоское движение твердого тела в данный момент времени можно представить как чистое вращение вокруг оси, проходящей через эту точку  $M$  - такая ось называется обычно мгновенной осью вращения. В частности, для колеса, катящегося по плоскости без проскальзывания (рис. 1.10), мгновенная ось вращения проходит через точку  $M$  соприкосновения колеса с плоскостью.

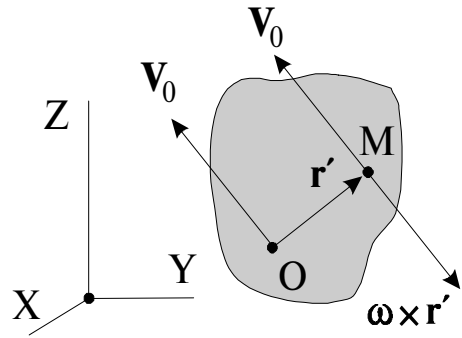


Рис. 1.13

Существенно, что в разные моменты времени мгновенная ось вращения проходит через разные точки твердого тела и через разные точки лабораторной системы  $XYZ$ , сохраняя, конечно, свою ориентацию в пространстве.

Для того, чтобы определить положение мгновенной оси вращения, необходимо знать скорости каких-либо двух точек твердого тела. Так, на рис. 1.14 показано положение мгновенной оси вращения (точка  $M$ ) для цилиндра,

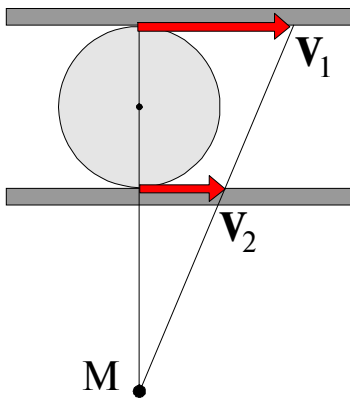


Рис. 1.14

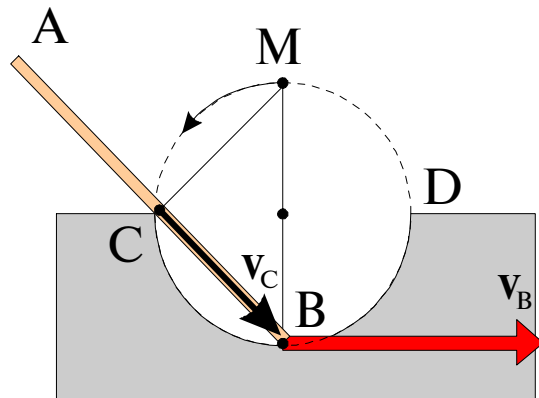


Рис. 1.15

зажатого между двумя параллельными рейками, которые движутся в одну и ту же сторону с разными скоростями  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$ .

В ситуации, изображенной на рис. 1.15, стержень  $AB$  опирается на точку  $C$  и движется в плоскости чертежа так, что его конец  $B$  все время находится на полуокружности  $CBD$ . При этом мгновенная ось вращения стержня (точка  $M$ ) находится на верхней полуокружности  $CMD$  и при движении точки  $B$  вправо перемещается по дуге этой полуокружности влево.

В случае, показанном на рис. 1.16, стержень, опирающийся одним из своих концов на гладкую горизонтальную плоскость, начинает падать из вертикального положения. При этом центр масс стержня опускается, оставаясь

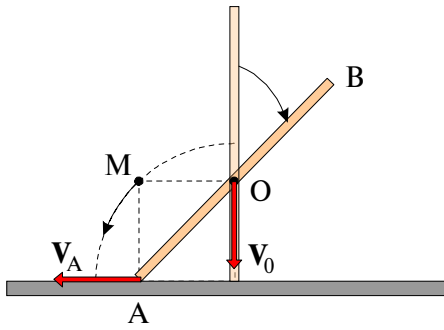


Рис. 1.16

на одной и той же вертикали. Мгновенная ось вращения (точка  $M$ ) перемещается по дуге окружности радиуса  $\frac{\ell}{2}$  ( $\ell$  — длина стержня).

Зная угловую скорость  $\omega$  и положение мгновенной оси вращения, можно легко определить скорость любой точки тела при его плоском движении. Так, в случае колеса, катящегося по

плоскости со скоростью  $v_0$  без проскальзывания (рис. 1.17), скорость точки  $B$

$$v_B = \omega \cdot MB = \frac{v_0}{R} \cdot MB; \quad (1.18)$$

вектор  $\mathbf{v}_B$  перпендикулярен отрезку  $MB$ , соединяющему точку  $B$  с точкой  $M$ , через которую проходит мгновенная ось вращения. Естественно,  $\mathbf{v}_B$  можно представить и как геометрическую сумму двух скоростей:  $\mathbf{v}_0$  — скорости по-

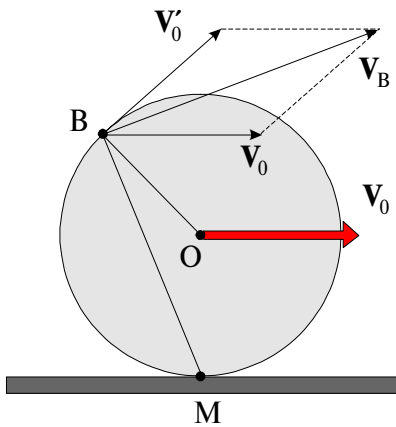


Рис. 1.17

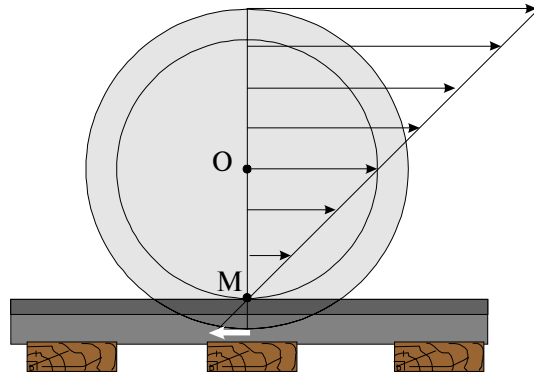


Рис. 1.18

ступательного движения оси колеса и  $\mathbf{v}'_0$  — скорости вращательного движения вокруг этой оси, причем  $|\mathbf{v}_0| = |\mathbf{v}'_0|$  (рис. 1.17).

Рис. 1.18 иллюстрирует распределение скоростей на вертикальном диаметре колеса железнодорожного вагона. Мгновенная ось вращения проходит через точку  $M$  соприкосновения колеса с рельсом. Хорошо видно, что линейная скорость точки на краю реборды направлена в сторону, противоположную движению вагона.

Определим теперь ускорения точек тела при плоском движении. Дифференцируя выражение (1.16) по времени, получим для ускорения точки  $A$

$$\mathbf{a}_A = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r}' + \omega \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n. \quad (1.19)$$

Это ускорение складывается из трех частей (рис. 1.19): ускорения  $\mathbf{a}_0$  точки  $O$ , принятой за полюс, тангенциального ускорения

$$\mathbf{a}_\tau = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' \quad (1.20)$$

и нормального ускорения

$$\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}') - \mathbf{r}'(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) = -\omega^2 \mathbf{r}' \quad (1.21)$$

(скалярное произведение  $(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}')$  равно нулю, так как  $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}'$ ).

Таким образом, ускорение любой точки  $A$  тела при плоском движении равно геометрической сумме ускорения точки, принятой за полюс, и ускорения точки  $A$  за счет ее вращения вокруг этого полюса. Отсюда, в частности, следует, что ускорение любой точки колеса, катящегося по плоскости без проскальзывания с постоянной скоростью  $v_0$ , направлено к центру

колеса и равно  $\frac{v_0^2}{r}$ , где

$r$  — расстояние рассматриваемой точки до центра колеса. В этом примере в качестве полюса удобно выбрать центр колеса  $O$ , тогда  $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_\tau = 0$ , и оста-

ется только  $\mathbf{a}_n = \frac{v_0^2}{r}$ .

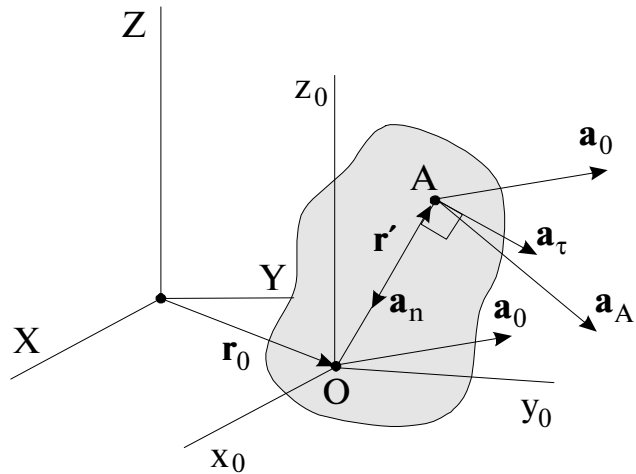


Рис. 1.19

**Замечание.** По аналогии с мгновенной осью вращения можно ввести мгновенную ось, ускорения всех точек которой в данный момент времени равны нулю. При этом следует иметь в виду, что эта ось, вообще говоря, не совпадает с мгновенной осью вращения. Так, в примере с колесом, катящимся по плоскости с постоянной скоростью, она проходит через центр колеса.

**Движение твердого тела с одной неподвижной точкой.** Примеры таких тел показаны на рис. 1.20: волчок с шарнирно закрепленным острием (а), конус, катающийся по плоскости без проскальзывания (б). В этом случае тело имеет три степени свободы — начала систем  $XYZ$  и  $x_0y_0z_0$ , введенных в начале лекции, можно совместить с точкой закрепления, а для описания движения тела использовать три угла Эйлера:

$$\varphi = \varphi(t); \quad \psi = \psi(t); \quad \theta = \theta(t). \quad (1.22)$$

Для твердого тела с одной неподвижной точкой справедлива теорема Эйлера: твердое тело, закрепленное в одной точке, может быть переведено

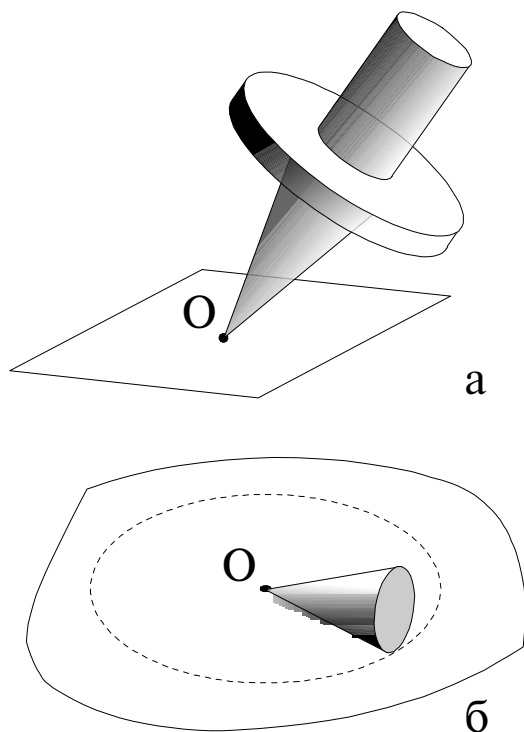


Рис. 1.20

метрическое место положений мгновенной оси вращения относительно подвижной системы  $xyz$ , жестко связанной с твердым телом, — это тоже коническая поверхность — подвижный аксоид. Например, в случае конуса  $AO_1$ , катящегося по поверхности другого конуса  $AO_2$  без проскальзывания (рис.

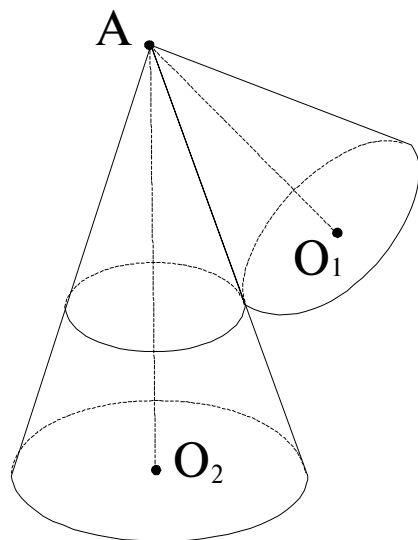


Рис. 1.21

из одного положения в любое другое одним поворотом на некоторый угол вокруг неподвижной оси, проходящей через точку закрепления. Доказательство этой теоремы можно найти в учебниках. Для нас важно следствие из этой теоремы: движение закрепленного в точке твердого тела в каждый момент времени можно рассматривать как вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через точку закрепления. Естественно, что положение этой оси как в пространстве, так и относительно самого тела с течением времени в общем случае меняется.

Геометрическое место положений мгновенной оси вращения относительно неподвижной системы  $XYZ$  (или  $x_0y_0z_0$ ) — это сложная коническая поверхность с вершиной в точке закрепления. В теоретической механике ее называют неподвижным аксоидом. Гео-

метрическое место положений мгновенной оси вращения относительно подвижной системы  $xyz$ , жестко связанной с твердым телом, — это тоже коническая поверхность — подвижный аксоид. Например, в случае конуса  $AO_1$ , катящегося по поверхности другого конуса  $AO_2$  без проскальзывания (рис. 1.21; точка  $A$  подвижного конуса шарнирно закреплена) неподвижный аксоид совпадает с поверхностью неподвижного конуса  $AO_2$ , а подвижный аксоид — с поверхностью подвижного конуса  $AO_1$ .

Скорость произвольной точки твердого тела можно рассчитать как линейную скорость вращательного движения вокруг мгновенной оси:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (1.23)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки относительно начала системы  $XYZ$  (или  $x_0y_0z_0$ ), совмещенного с точкой закрепления. Следует только иметь в виду, что, в отличие от вращения вокруг неподвижной оси, “плечо” вектора  $\mathbf{v}$  (расстояние рассматриваемой точки до мгновенной оси вращения) является функцией времени.



Ускорение произвольной точки твердого тела

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (1.24)$$

состоит из двух частей: ускорения, связанного с неравномерностью вращения (изменением  $\boldsymbol{\omega}$  по величине и направлению)

$$\mathbf{a}_{\text{вр}} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}, \quad (1.25)$$

и центростремительного (нормального) ускорения

$$\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\omega^2 \boldsymbol{\rho}, \quad (1.26)$$

где  $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(t)$  – радиус-вектор, проведенный от мгновенной оси вращения в рассматриваемую точку. Здесь следует помнить, что угловое ускорение  $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$  связано с изменением угловой скорости не только по величине, но и по направлению, так что  $\mathbf{a}_{\text{вр}}$  и  $\mathbf{a}_n$  не перпендикулярны друг другу.

Проекции вектора мгновенной угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  на оси системы хуз, жестко связанной с твердым телом, можно выразить через углы Эйлера

$\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\theta$  (см. рис. 1.3) и их производные по времени  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$ . Действительно, вектор  $\boldsymbol{\omega}$  можно представить в виде суммы трех составляющих:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_z + \dot{\psi} \mathbf{e}_{z_0} + \dot{\theta} \mathbf{e}_{OA}. \quad (1.27)$$

Здесь  $\mathbf{e}_z$  и  $\mathbf{e}_{z_0}$  – единичные векторы вдоль осей Oz и Oz<sub>0</sub> соответственно,  $\mathbf{e}_{OA}$  – единичный вектор вдоль линии узлов OA (на рис. 1.3 эти орты не показаны). Определим проекции векторов  $\dot{\varphi} \mathbf{e}_z$ ,  $\dot{\psi} \mathbf{e}_{z_0}$ ,  $\dot{\theta} \mathbf{e}_{OA}$ , входящих в (1.27), на оси системы хуз (см. рис. 1.3):

$$(\dot{\varphi} \mathbf{e}_z)_x = 0; \quad (\dot{\varphi} \mathbf{e}_z)_y = 0; \quad (\dot{\varphi} \mathbf{e}_z)_z = \dot{\varphi}; \quad (1.28)$$

$$(\dot{\psi} \mathbf{e}_{z_0})_x = \dot{\psi} \sin \theta \cdot \sin \varphi; \quad (\dot{\psi} \mathbf{e}_{z_0})_y = \dot{\psi} \sin \theta \cdot \cos \varphi; \quad (\dot{\psi} \mathbf{e}_{z_0})_z = \dot{\psi} \cos \theta; \quad (1.29)$$

$$(\dot{\theta} \mathbf{e}_{OA})_x = \dot{\theta} \cos \varphi; \quad (\dot{\theta} \mathbf{e}_{OA})_y = -\dot{\theta} \sin \varphi; \quad (\dot{\theta} \mathbf{e}_{OA})_z = 0. \quad (1.30)$$

Из (1.27 - 1.30) получим:

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi; \quad (1.31)$$

$$\omega_y = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi; \quad (1.32)$$

$$\omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta. \quad (1.33)$$

Уравнения (1.31-1.33) называются кинематическими уравнениями Эйлера. Они, в частности, позволяют определить величину и направление вектора мгновенной угловой скорости  $\omega$ , если закон движения тела задан в виде (1.22).

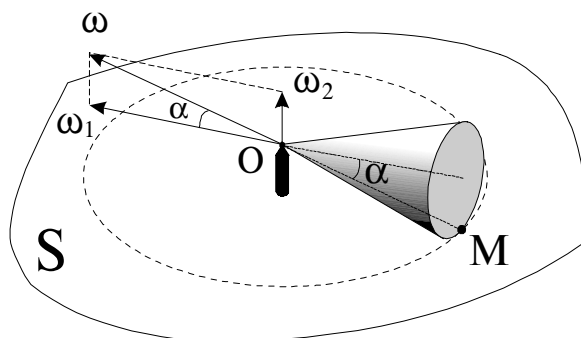


Рис. 1.22

В ряде случаев вращение тела с закрепленной точкой вокруг мгновенной оси удобно представить как суперпозицию двух вращений вокруг пересекающихся осей. В случае, изображенном на рис. 1.22, вершина конуса шарнирно закреплена в точке O; ось конуса горизонтальна, а основание конуса катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости S. Вектор угловой скорости  $\omega$

направлен вдоль мгновенной оси вращения OM (скорость точек O и M равна нулю); при движении конуса мгновенная ось вращения изменяет свое положение, описывая некоторую коническую поверхность с вершиной в точке O. Абсолютное вращение конуса с угловой скоростью  $\omega$  можно представить в виде суммы

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \quad (1.34)$$

где  $\omega_1$  — угловая скорость относительного вращения конуса вокруг собственной оси симметрии,  $\omega_2$  — угловая скорость переносного вращения самой оси конуса вокруг вертикали. Если задана  $\omega_2$ , то

$$\omega_1 = \omega_2 \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \omega_1 \frac{h}{R}; \quad \omega = \frac{\omega_2}{\sin \alpha} = \omega_2 \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{R},$$

где  $\alpha$  — угол полураствора конуса, R — радиус основания конуса, h — его высота.

**Замечание.** Движение тела, представляющее собой одновременное вращение вокруг нескольких осей с угловыми скоростями  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ , может быть сведено к вращению вокруг одной оси с угловой скоростью

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \dots \quad (1.35)$$

только в том случае, когда все оси вращения пересекаются в одной точке.

**Движение свободного твердого тела.** Свободное твердое тело может совершать любые перемещения относительно лабораторной системы XYZ. В этом, самом общем случае, оно имеет 6 степеней свободы.

Опираясь на теорему Эйлера (см. выше), движение свободного твердого тела можно представить в виде суперпозиции поступательного движения, при котором все точки движутся, как произвольно выбранный полюс (начало системы  $x_0 y_0 z_0$ ), и вращательного движения вокруг мгновенной оси, проходящей через этот полюс. Этому рассмотрению соответствуют 6 независимых координат: 3 декартовы координаты X, Y, Z точки, принятой за полюс, и 3 угла Эйлера  $\varphi, \psi, \theta$  (см. рис. 1.3).

Положение произвольной точки A тела в лабораторной системе XYZ определяется радиус-вектором  $\mathbf{r}_A$ :

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_O + \mathbf{r}'_A, \quad (1.36)$$

где  $\mathbf{r}_O$  — радиус-вектор точки  $O$ , принятой за полюс,  $\mathbf{r}'_A$  — радиус-вектор точки  $A$  относительно полюса.

Скорость точки  $A$

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_A, \quad (1.37)$$

где  $\mathbf{v}_O$  — скорость полюса, а  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_A$  — линейная скорость вращательного движения вокруг оси, проходящей через полюс.

Ускорение точки  $A$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}'_A + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'_A}{dt}. \quad (1.38)$$

Здесь  $\mathbf{a}_O$  — ускорение полюса,  $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}'_A$  — ускорение, обусловленное изменением вектора мгновенной угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  по величине и направлению,  $\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'_A}{dt}$  — центростремительное ускорение (см. формулу (1.26)).

**Замечание 1.** Принимая за полюс различные точки свободного твердого тела (или даже точки вне его), можно получить бесчисленное множество разложений его движения на поступательное и вращательное. При этом, как и в случае плоского движения, кинематические характеристики переносного поступательного движения  $\mathbf{v}_O$ ,  $\mathbf{a}_O$  будут зависеть от выбора полюса. Кинематические же характеристики относительного вращательного движения  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$  от выбора полюса не зависят.

**Замечание 2.** Произвольное (неплоское) движение твердого тела невозможно свести к чистому вращению вокруг мгновенной оси. Однако, можно показать, что в этом случае существует мгновенная ось так называемого винтового перемещения твердого тела. Произвольное движение твердого тела в любой момент времени можно представить в виде суперпозиции вращательного движения вокруг некоторой оси и поступательного перемещения вдоль этой же самой оси. Естественно, в общем случае с течением времени положение мгновенной оси винтового перемещения в пространстве и относительно тела изменяется.



## ЛЕКЦИЯ №2

*Динамика абсолютно твердого тела. Момент импульса. Тензор инерции. Момент импульса тела относительно оси. Эллипсоид инерции. Вычисление моментов инерции относительно оси. Теорема Гюйгенса-Штейнера. Момент импульса относительно движущегося центра масс.*

Задача динамики абсолютно твердого тела — изучить движение тела в зависимости от действующих на него сил. Как следует из предыдущего рассмотрения, произвольное движение твердого тела можно свести к поступательному и вращательному. При поступательном движении траектории всех точек тела одинаковы, и для описания этого движения используются такие понятия, как масса, импульс, сила. При изучении вращательного движения тела этих понятий оказывается недостаточно.

Рассмотрим два цилиндра одинаковой массы и одинаковых размеров, причем один цилиндр, изготовленный из более легкого материала, пусть будет сплошным, а другой, изготовленный из более тяжелого материала, — полым. Опыт показывает, что при соскальзывании с достаточно гладкой наклонной плоскости цилиндры не вращаются и ведут себя совершенно одинаково (рис. 2.1а); в частности, они одновременно достигают основания этой наклонной плоскости. Иное дело, если плоскость шероховатая, и цилиндры скатываются, вращаясь вокруг своей оси (рис. 2.1б), — в этом случае быстрее скатывается сплошной цилиндр. Таким образом, при вращательном движении существенно распределение массы относительно оси вращения.

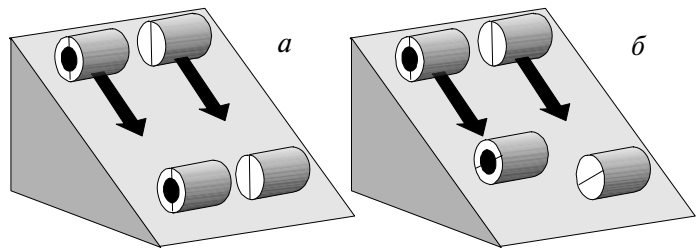


Рис. 2.1

Об этом же свидетельствуют и другие опыты: чем дальше от оси вращения сосредоточена масса тела, тем труднее его раскрутить при воздействии постоянной силой, имеющей одно и то же плечо (рис. 2.2 а,б). Для раскручивания стержней с грузами до угловой скорости  $\omega_0$  в случае рис. 2.2б требуется большее время, чем в случае рис. 2.2а. В этих же опытах можно показать, что при вращательном движении тела существенную роль играет не сама сила, а ее момент: если перебросить нить на шкив большего радиуса, то раскрутить эти тела бу-

требуется большее время, чем в случае рис. 2.2а. В этих же опытах можно показать, что при вращательном движении тела существенную роль играет не сама сила, а ее момент: если перебросить нить на шкив большего радиуса, то раскрутить эти тела бу-

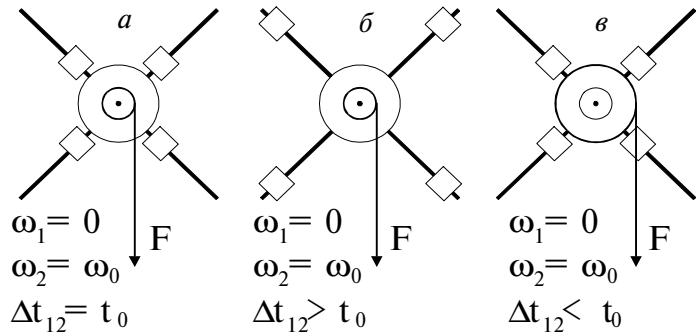


Рис. 2.2

дет легче (рис. 2.2в). Таким образом, для описания вращательного движения тела необходимо ввести новые понятия: момент инерции, момент импульса, момент силы.

**Момент импульса. Тензор инерции.** Момент импульса тела относительно неподвижной точки — важнейшее понятие в динамике вращательного движения твердого тела. Он определяется так же, как и для системы материальных точек:

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \Delta \mathbf{p}_i = \sum_i \Delta m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i. \quad (2.1)$$

Здесь  $\Delta \mathbf{p}_i = \Delta m_i \mathbf{v}_i$  — импульс элементарной массы  $\Delta m_i$  в лабораторной системе  $XYZ$ , а  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор массы  $\Delta m_i$  с началом в той неподвижной точке, относительно которой вычисляется момент импульса тела.

С учетом постоянства расстояний между точками абсолютно твердого тела вектор момента импульса  $\mathbf{L}$  удается связать с вектором угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$ .

Рассмотрим, к примеру, две одинаковые точечные массы  $m$ , укрепленные на концах невесомого стержня  $AB$  (рис. 2.3). Стержень с массами вращается с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$  вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стержня и перпендикулярной ему. В этом случае

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1 + m\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2 = 2m\mathbf{r}^2 \boldsymbol{\omega}. \quad (2.2)$$

Здесь учтено, что  $r_1 = r_2 = r$ , а  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\omega} \mathbf{r}$ .

Существенно, что в этом примере вектор  $\mathbf{L}$  направлен так же, как и  $\boldsymbol{\omega}$ . К сожалению, так бывает не всегда. В этом можно убедиться на примере, показанном на рис. 2.4. Здесь невесомый стержень  $AB$  с двумя массами  $m$  на концах жестко закреплен на вертикальной оси (в точке  $O$ ) под некоторым углом  $\alpha$  к ней и лежит в плоскости  $Oyz$ . При вращении стержня вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$  вектор  $\mathbf{L}$ , определенный по (2.1), будет находиться в плоскости  $Oyz$  и составит угол

$\frac{\pi}{2} - \alpha$  с осью  $z$ . Система  $xyz$ , введенная в начале лекции 1, жестко связана со стержнем и поворачивается вместе с ним. При этом вектор  $\mathbf{L}$  остается в плоскости  $Oyz$ , а в лабораторной системе движется по конической поверхности с углом полураствора  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ .

Получим выражение для  $\mathbf{L}$  в случае твердого тела произвольной формы, закрепленного в некоторой точке  $O$ .

Пусть  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор элементарной массы  $\Delta m_i$  твердого тела, а  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость. Тогда

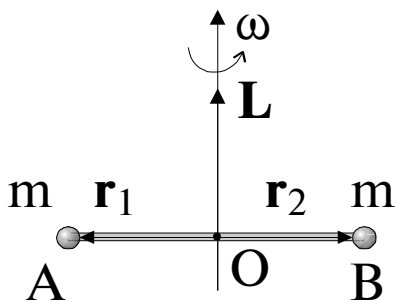


Рис. 2.3

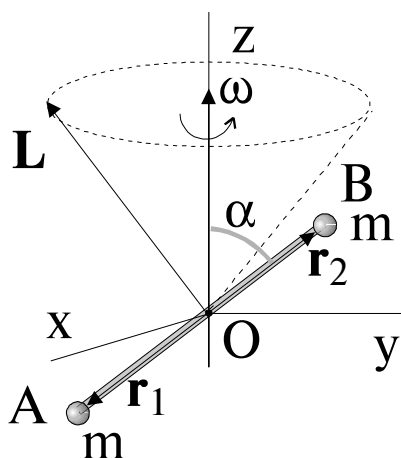


Рис. 2.4

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \sum_i \Delta m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i \Delta m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \\
&= \sum_i \Delta m_i \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_i \mathbf{r}_i) \\ b \ a \ c \end{matrix} - \begin{matrix} \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i \boldsymbol{\omega}) \\ c \ a \ b \end{matrix} \right\} = \sum_i \Delta m_i \{ \boldsymbol{\omega} r_i^2 - \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i \boldsymbol{\omega}) \}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Векторы  $\mathbf{r}_i$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{L}$  можно проектировать как на оси лабораторной системы XYZ, так и на оси системы хуz, жестко связанной с твердым телом (поскольку точка O неподвижна, начала обеих систем можно совместить). Преимущество системы хуz заключается в том, что в ней проекции  $\mathbf{r}_i$  являются постоянными величинами (в системе XYZ они зависят от времени), и выражения для компонент  $\mathbf{L}$  оказываются проще.

Итак, в системе хуz

$$\mathbf{r}_i = \{x_i, y_i, z_i\}, \quad \boldsymbol{\omega} = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}. \tag{2.4}$$

Тогда, продолжая (2.3), можно записать:

$$\mathbf{L} = \sum_i \Delta m_i \{ \boldsymbol{\omega} r_i^2 - \mathbf{r}_i(x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \}. \tag{2.5}$$

Выражения для проекций момента импульса на оси системы хуz запишем в следующем виде:

$$L_x = \sum_i \Delta m_i (r_i^2 - x_i^2) \omega_x + \sum_i (-\Delta m_i x_i y_i) \omega_y + \sum_i (-\Delta m_i x_i z_i) \omega_z; \tag{2.6}$$

$$L_y = \sum_i (-\Delta m_i y_i x_i) \omega_x + \sum_i \Delta m_i (r_i^2 - y_i^2) \omega_y + \sum_i (-\Delta m_i y_i z_i) \omega_z; \tag{2.7}$$

$$L_z = \sum_i (-\Delta m_i z_i x_i) \omega_x + \sum_i (-\Delta m_i z_i y_i) \omega_y + \sum_i \Delta m_i (r_i^2 - z_i^2) \omega_z, \tag{2.8}$$

или

$$L_x = J_{xx} \omega_x + J_{xy} \omega_y + J_{xz} \omega_z \tag{2.9}$$

$$L_y = J_{yx} \omega_x + J_{yy} \omega_y + J_{yz} \omega_z; \tag{2.10}$$

$$L_z = J_{zx} \omega_x + J_{zy} \omega_y + J_{zz} \omega_z, \tag{2.11}$$

где  $J_{k\ell}$  – 9 компонент так называемого тензора инерции  $\hat{\mathbf{J}}$  твердого тела относительно точки O:

$$\hat{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Диагональные элементы тензора  $J_{xx}$ ,  $J_{yy}$ ,  $J_{zz}$  называются осевыми моментами инерции, недиагональные элементы  $J_{xy}$ ,  $J_{yx}$ ,  $J_{xz}$ ,  $J_{zx}$ ,  $J_{yz}$ ,  $J_{zy}$  назы-

ваются центробежными моментами инерции. Обратим внимание, что  $J_{xy} = J_{yx}$ ,  $J_{xz} = J_{zx}$ ,  $J_{yz} = J_{zy}$ . Такой тензор называют симметричным.

Если координатам  $x$ ,  $y$  и  $z$  присвоить номера 1, 2 и 3 соответственно, то (2.9-2.11) можно представить в виде

$$L_k = \sum_{\ell=1}^3 J_{k\ell} \omega_{\ell}; \quad k, \ell = 1, 2, 3. \quad (2.13)$$

В символическом виде можно записать так:

$$\mathbf{L} = \hat{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega}. \quad (2.14)$$

Самое главное, что стоит за приведенными выше формулами, заключается в следующем. Девять величин  $J_{k\ell}$  (из них шесть независимых) определяют однозначную связь между  $\mathbf{L}$  и  $\boldsymbol{\omega}$ , причем оказывается, что  $\mathbf{L}$ , вообще говоря, не совпадает по направлению с  $\boldsymbol{\omega}$  (рис. 2.5).

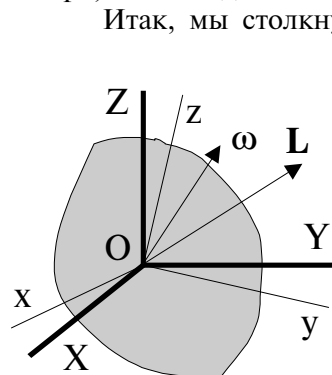


Рис. 2.5

Итак, мы столкнулись с новым типом величин, имеющим важное значение в физике — тензором. Если для задания скалярной величины необходимо одно число (значение скалярной величины), векторной — три числа (три проекции вектора на оси декартовой системы координат), то для задания тензора необходимы в общем случае 9 чисел. На языке математики тензор — это многокомпонентная величина, характеризующаяся определенным поведением при преобразованиях системы координат (в данном случае компоненты тензора инерции преобразуются как произведения соответствующих координат).

Необходимость введения тензорных величин связана с различного рода анизотропией свойств физических макроскопических объектов. Тензор связывает две векторные величины, которые пропорциональны друг другу по модулю, но в силу анизотропии свойств объекта не совпадают друг с другом по направлению. В случае  $\mathbf{L}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  решающую роль играет “анизотропия” формы тела (отсутствие определенной симметрии относительно осей  $xyz$ ). В других случаях это может быть анизотропия, например, электрических или магнитных свойств вещества. Так, векторы поляризации вещества  $\mathbf{P}$  и напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  связаны тензором поляризуемости  $\hat{\alpha}$ :  $\mathbf{P} = \epsilon_0 \hat{\alpha} \mathbf{E}$  ( $\epsilon_0$  — электрическая постоянная). Это означает, что в силу анизотропии электрических свойств вещество поляризуется “не по полю”, то есть “не по полю” смещаются положительные и отрицательные заряды в молекулах вещества. Примерами других, в общем случае тензорных величин являются диэлектрическая проницаемость и магнитная проницаемость вещества. Важную роль в механике играют тензоры деформаций и напряжений. С этими и другими тензорными величинами вы познакомитесь при изучении соответствующих разделов курса общей физики.

**Замечание.** Если  $\mathbf{r}_i$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{L}$  в выражении (2.3) проектировать на оси лабораторной системы  $XYZ$ , то компоненты тензора  $J_{k\ell}$  оказались бы зави-



сящими от времени. Такой подход в принципе возможен; он, в частности, используется в Берклеевском курсе физики [7].

**Главные оси инерции.** Возникает вопрос: возможен ли для произвольного твердого тела случай, когда векторы  $\mathbf{L}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  совпадают? Оказывается, что для всякого тела и любой точки  $O$  имеются по крайней мере три взаимно перпендикулярных направления  $\boldsymbol{\omega}$  (или, другими словами, три взаимно перпендикулярных оси вращения), для которых направления  $\mathbf{L}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  совпадают. Такие оси называются главными осями инерции тела.

Если оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  совместить с главными осями инерции тела, то матрица  $J_{k\ell}$  будет иметь диагональный вид:

$$\hat{J}_0 = \begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Величины  $J_{xx} \equiv J_x$ ,  $J_{yy} \equiv J_y$ ,  $J_{zz} \equiv J_z$  в этом случае называются главными моментами инерции тела. При этом

$$L_x = J_x \omega_x; \quad L_y = J_y \omega_y; \quad L_z = J_z \omega_z, \quad (2.16)$$

то есть, действительно, если вектор  $\boldsymbol{\omega}$  направлен вдоль одной из главных осей инерции тела, то вектор  $\mathbf{L}$  будет направлен точно так же (рис. 2.6).

Расположение главных осей инерции в теле и значения соответствующих главных моментов инерции зависят от выбора точки  $O$ . Если  $O$  совпадает с центром масс, то главные оси называются **главными центральными осями** тела. Если главные оси инерции тела известны, то значения главных моментов инерции вычисляются из геометрии масс. Например:

$$J_x = \sum_i \Delta m_i (r_i^2 - x_i^2) = \sum_i \Delta m_i (y_i^2 + z_i^2) = \sum_i \Delta m_i \rho_i^2. \quad (2.17)$$

Здесь  $\rho_i$  – расстояние элементарной массы  $\Delta m_i$  от главной оси  $Ox$ .

Как же определить главные оси инерции для выбранной точки  $O$  твердого тела? Если оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  проведены в теле произвольно, то в общем случае они не совпадают с главными осями инерции. Такого совпадения можно добиться путем некоторого поворота исходной системы координат относительно твердого тела. В новых координатах матрица

$J_{k\ell}$  становится диагональной.

Во многих случаях главные оси инерции удается легко определить из соображений симметрии. На рис. 2.7-2.10 изображены главные оси инерции для различных точек тел, обладающих определенной симметрией: цилиндра (рис. 2.7), прямоугольного параллелепипеда (рис. 2.8), куба (рис. 2.9) и шара (рис. 2.10). Легко сообразить, что во всех этих

случаях  $J_{xy} = J_{xz} = J_{yx} = J_{yz} = J_{zx} = J_{zy} = 0$ . Например, в случае прямоугольного параллелепи-

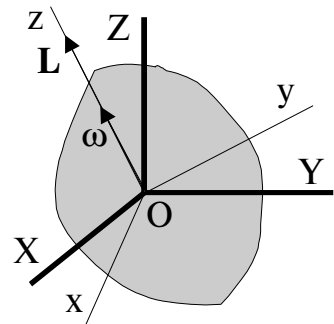


Рис. 2.6

педа (рис. 2.8)  $J_{xy} = -\sum_i \Delta m_i x_i y_i = 0$ , так как для всякой массы  $\Delta m_i$  с данными значениями  $x_i, y_i, z_i$  найдется симметрично расположенная масса  $\Delta m'_i$  с теми же значениями  $x_i$  и  $z_i$ , но с противоположным значением  $y_i$ .

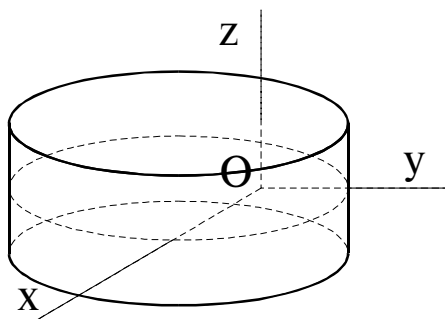


Рис. 2.7

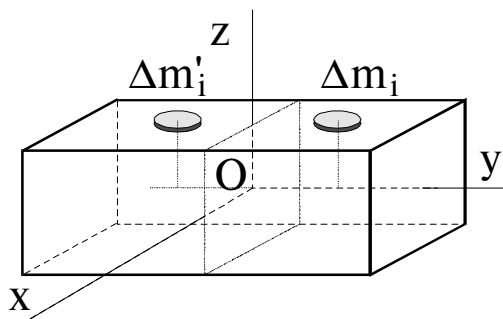


Рис. 2.8

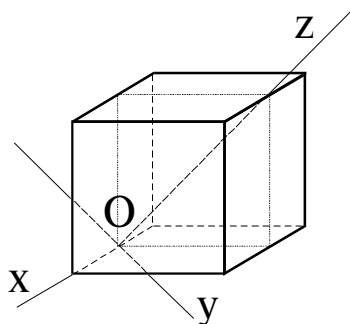


Рис. 2.9

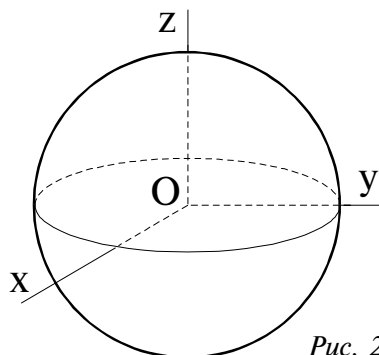


Рис. 2.10

В заключение этого раздела рассмотрим пример нахождения главных осей инерции для плоской прямоугольной пластинки со сторонами  $a$  и  $b$ , масса которой  $m$  (рис. 2.11).

Ясно, что одна из главных осей инерции для точки  $O$  (ось  $Oz$ ) перпендикулярна плоскости пластинки; на рис. 2.11 она не показана. Оси  $Ox$  и  $Oy$ , направленные вдоль сторон пластинки, не являются главными. Действительно, в этом случае

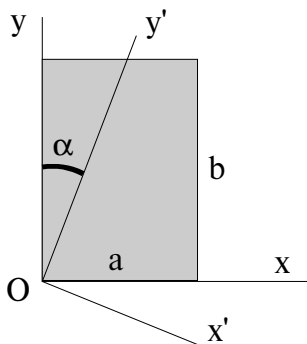


Рис. 2.11

$$J_{xx} = \int y^2 dm = \frac{m}{ab} \int_0^a dx \int_0^b y^2 dy = m \frac{b^2}{3}; \quad (2.18)$$

$$J_{yy} = \int x^2 dm = \frac{m}{ab} \int_0^b dy \int_0^a x^2 dx = m \frac{a^2}{3}; \quad (2.19)$$

$$J_{xy} = -\int xy dm = -\frac{m}{ab} \int_0^a x dx \int_0^b y dy = -m \frac{ab}{4} < 0. \quad (2.20)$$

Допустим, что оси  $Ox'$  и  $Oy'$ , повернутые на угол  $\alpha$  относительно осей  $Ox$  и  $Oy$  – главные оси инерции для точки  $O$ . Соответствующее преобразование координат имеет вид:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha; \\ y = -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases} \quad (2.21)$$

$$(2.22)$$

Тогда будем иметь

$$J_{xx} = \int y^2 dm = \int (-x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)^2 dm = J_{y'} \sin^2 \alpha + J_{x'} \cos^2 \alpha. \quad (2.23)$$

Здесь учтено, что для главных осей  $Ox'$  и  $Oy'$   $\int x'y' dm = 0$ .

Аналогично

$$J_{yy} = \int x^2 dm = \int (x' \cos \alpha + y' \sin \alpha)^2 dm = J_{y'} \cos^2 \alpha + J_{x'} \sin^2 \alpha. \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} J_{xy} &= -\int xy dm = -\int (x' \cos \alpha + y' \sin \alpha)(-x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) dm = \\ &= -\frac{1}{2} \sin 2\alpha (J_{x'} - J_{y'}). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Подставляя в (2.23 - 2.25) значения  $J_{xx}$ ,  $J_{yy}$ , и  $J_{xy}$  из (2.18 - 2.20), получим систему трех уравнений для нахождения  $J_{x'}$ ,  $J_{y'}$  и  $\alpha$ :

$$\begin{cases} J_{y'} \sin^2 \alpha + J_{x'} \cos^2 \alpha = m \frac{b^2}{3}; \\ J_{y'} \cos^2 \alpha + J_{x'} \sin^2 \alpha = m \frac{a^2}{3}; \\ (J_{x'} - J_{y'}) \sin 2\alpha = m \frac{ab}{2}. \end{cases} \quad (2.26)$$

$$(2.27)$$

$$(2.28)$$

Из этой системы, в частности, легко получить, что

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{3}{2} \cdot \frac{ab}{b^2 - a^2}. \quad (2.29)$$

Для сравнения: если  $\alpha_0$  – угол между осью  $Oy$  и диагональю прямоугольной пластинки, то

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2ab}{b^2 - a^2}, \quad (2.30)$$

то есть  $\alpha < \alpha_0$ . Это означает, что главная ось инерции  $Oy'$  не проходит через центр пластинки. И только в случае квадрата, когда  $a = b$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , главная ось инерции  $Oy'$  будет направлена по диагонали квадрата. Этот пример наглядно показывает, что если главные оси инерции – нецентральные, то ни одна из них в принципе может и не проходить через центр масс тела.

**Момент импульса твердого тела относительно оси. Момент инерции относительно оси.** В тех случаях, когда твердое тело вращается вокруг неподвижной оси, обычно оперируют с понятиями момента импульса и момента инер-

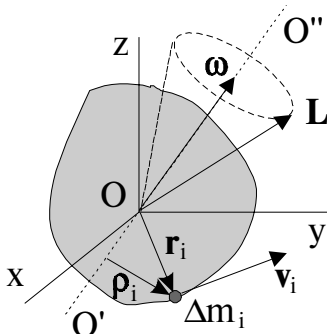


Рис. 2.12

ции **относительно оси**. Момент импульса  $L_{\parallel}$  относительно оси – это проекция на данную ось момента импульса  $\mathbf{L}$ , определенного относительно некоторой точки  $O$ , принадлежащей оси, причем, как оказывается, выбор точки  $O$  на оси значения не имеет.

Действительно, при вычислении  $L_{\parallel}$  существенно лишь плечо импульса  $\Delta \mathbf{p}_i = \Delta m_i \mathbf{v}_i$  относительно оси вращения  $O'O''$  (рис. 2.12), то есть кратчайшее расстояние  $\rho_i$  массы  $\Delta m_i$  до оси:

$$(L_i)_{\parallel} = \Delta m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i)_{\parallel} = \Delta m_i \rho_i v_i = (\Delta m_i \rho_i^2) \omega. \quad (2.31)$$

Здесь учтено, что скорость массы  $\Delta m_i$  при вращательном движении  $\mathbf{v}_i = \omega \rho_i$ ;  $\mathbf{v}_i \perp \rho_i$ .

Рассмотрим эту ситуацию более подробно. Пусть оси  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  на рис. 2.12 – главные оси инерции для точки  $O$ ,  $O'O''$  – неподвижная в лабораторной системе ось вращения, жестко связанная с телом. Вектор угловой скорости  $\omega$ , направленный вдоль  $O'O''$ , можно разложить по осям системы координат  $xyz$ :

$$\omega = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\} = \{\omega \cos \alpha, \omega \cos \beta, \omega \cos \gamma\}, \quad (2.32)$$

где  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  – направляющие косинусы оси  $O'O''$ . Вектор  $\mathbf{L}$  не совпадает с  $\omega$  и при вращении тела описывает коническую поверхность, симметричную относительно  $O'O''$ . Вектор  $\mathbf{L}$  также можно разложить по осям системы  $xyz$ :  $\mathbf{L} = \{L_x, L_y, L_z\}$ , причем

$$L_x = J_x \omega_x; \quad L_y = J_y \omega_y; \quad L_z = J_z \omega_z, \quad (2.33)$$

где  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$  – главные моменты инерции.

Проекция вектора  $\mathbf{L}$  на ось вращения, или, что то же самое, момент импульса относительно оси

$$\begin{aligned} L_{\parallel} &= \frac{\mathbf{L}\boldsymbol{\omega}}{\omega} = \frac{L_x\omega_x + L_y\omega_y + L_z\omega_z}{\omega} = \frac{J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2}{\omega^2} \cdot \omega = \\ &= (J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma)\omega = J\omega, \end{aligned} \quad (2.34)$$

где

$$J = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma \quad (2.35)$$

— момент инерции относительно оси.

Последняя формула позволяет рассчитать момент инерции твердого тела относительно произвольной оси в том случае, если известны главные моменты инерции  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$  и ориентация оси вращения относительно главных осей инерции (углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ). Во многих случаях такое вычисление оказывается значительно проще, чем прямой расчет по формуле

$$J = \sum_i \Delta m_i \rho_i^2 \quad (2.36)$$

(см. (2.31)).

Отметим, что, в соответствии с данным выше определением,  $L_{\parallel}$  — величина скалярная (проекция вектора  $\mathbf{L}$  на ось вращения). Вместе с тем можно говорить и о векторе  $\mathbf{L}_{\parallel}$ , рассматривая его как составляющую вектора  $\mathbf{L}$  вдоль оси:

$$\mathbf{L}_{\parallel} = \sum_i \rho_i \times \Delta \mathbf{p}_i \quad (2.37)$$

(вектор  $\rho_i$  изображен на рис. 2.12,  $\Delta \mathbf{p}_i = \Delta m_i \mathbf{v}_i$ ). В рекомендуемых учебных пособиях можно встретить обе трактовки понятия момента импульса относительно оси.

**Эллипсоид инерции.** Формула (2.35) для момента инерции относительно оси допускает наглядную геометрическую интерпретацию.

Представим, что через точку  $O$  начала координат системы  $xyz$  мы проводим прямые во всевозможных направлениях и на них откладываем отрезки длиной  $R = \frac{k}{\sqrt{J}}$  (рис. 2.13), где  $k$  есть постоянная величина, имеющая

размерность  $\text{кг}^{1/2} \cdot \text{м}^2$ . Геометрическим местом концов этих отрезков будет некоторая поверхность. Получим уравнение этой поверхности.

Пусть оси  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  на рис. 2.13 — главные оси инерции. Проекции вектора  $\mathbf{R}$  на оси координат составляют

$$R_x \equiv x = R \cos \alpha = \frac{k}{\sqrt{J}} \cos \alpha, \quad (2.38)$$

$$R_y \equiv y = R \cos \beta = \frac{k}{\sqrt{J}} \cos \beta, \quad (2.39)$$

$$R_z \equiv z = R \cos \gamma = \frac{k}{\sqrt{J}} \cos \gamma, \quad (2.40)$$

откуда

$$\cos \alpha = \frac{x\sqrt{J}}{k}; \quad \cos \beta = \frac{y\sqrt{J}}{k}; \quad \cos \gamma = \frac{z\sqrt{J}}{k}. \quad (2.41)$$

Подставляя (2.41) в (2.35), получим

$$J = J_x \frac{x^2 J}{k^2} + J_y \frac{y^2 J}{k^2} + J_z \frac{z^2 J}{k^2}, \quad (2.42)$$

или

$$J_x \cdot x^2 + J_y \cdot y^2 + J_z \cdot z^2 = k^2. \quad (2.43)$$

Это, как известно, уравнение эллипсоида, который в данном случае называют эллипсоидом инерции.

Центр эллипсоида инерции, как видно из его уравнения, находится в начале координат системы  $xyz$  (точке  $O$ ). Постоянная  $k$  может быть выбрана произвольно и определяет масштаб построения; изменяя  $k$ , мы будем получать подобные эллипсоиды. Главные оси эллипсоида инерции являются главными осями инерции тела для точки  $O$ .

Эллипсоид инерции жестко связан с телом, а его положение относительно тела зависит от выбора точки  $O$ . Эллипсоид инерции, построенный для центра масс тела, называется центральным. Если известно положение эллипсоида инерции, известно и положение всего тела в данный момент

времени. Рассматривая вращательное движение твердого тела, в ряде случаев можно абстрагироваться от его формы и иметь дело с эллипсоидом инерции. Для куба и шара, например, центральные эллипсоиды инерции вырождаются в сферу, поэтому эти тела с точки зрения многих задач механики оказываются эквивалентными.

Для примера рассмотрим сплошной однородный куб с ребром  $a$  и массой  $m$ . Эллипсоид инерции для центра одной из граней куба (точка  $O$ ) показан на рис. 2.14. Полуоси  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  лежат на главных осях инерции для точки  $O$ , причем  $OA = OB$  лежат в плоскости боковой грани, а  $OC \approx 1,6 OA$  — перпендикулярна этой боковой грани. Для сравнения: эллипсоид инерции для центра куба вырождается в сферу с радиусом, равным  $OC$ .

Понятие эллипсоида инерции позволяет с помощью достаточно простого графического построения уста-

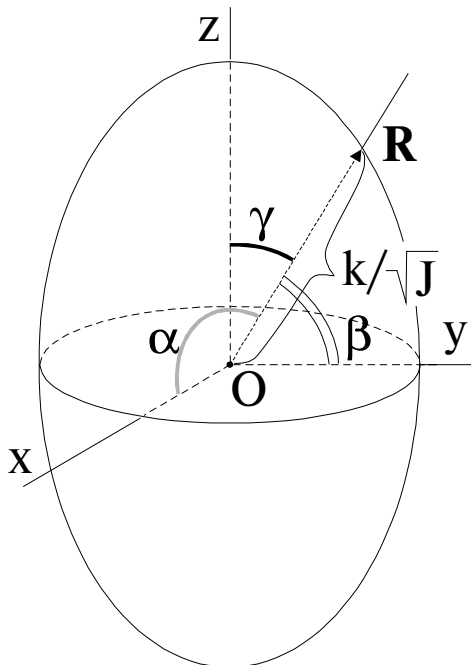


Рис. 2.13

новить связь между угловой скоростью  $\omega$  и моментом импульса  $\mathbf{L}$  относительно точки  $O$ , принадлежащей оси вращения. Речь идет о так называемом построении Пуансо, которое мы приводим без доказательства: необходимо построить эллипсоид инерции с центром в точке  $O$  и в точке его пересечения с осью вращения (вектором угловой скорости  $\omega$ ) провести плоскость, касательную к эллипсоиду. Перпендикуляр, опущенный из центра эллипсоида инерции на касательную плоскость, и даст направление вектора момента импульса  $\mathbf{L}$ . Пример подобного построения представлен на рис. 2.14.

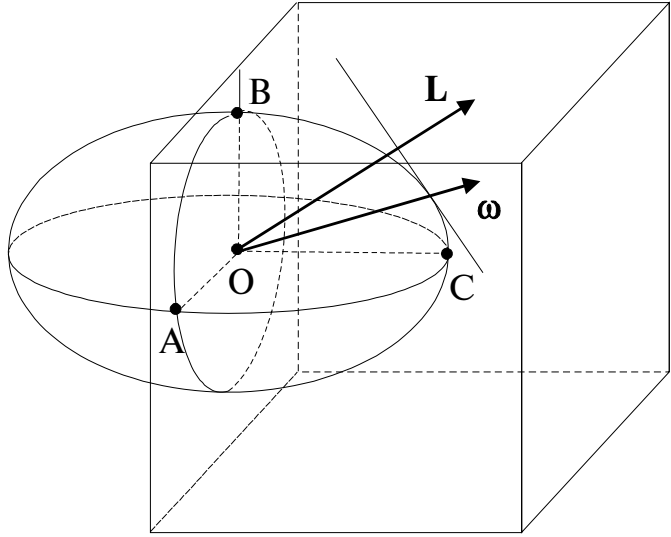


Рис. 2.14

**Вычисление моментов инерции относительно оси.** Прямой расчет момента инерции тела относительно оси сводится к вычислению интеграла

$$J = \int \rho^2 \cdot dm, \quad (2.44)$$

где  $\rho$  – расстояние элементарной массы  $dm$  до оси вращения. При этом, естественно, необходимо учитывать симметрию системы.

Вычислим, к примеру, момент инерции шара (в сферических координатах  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ , рис. 2.15) относительно произвольной оси, проходящей через его центр (в данном случае относительно оси  $Oz$ ):

$$dm = \frac{m}{V} \cdot dV = \frac{m}{V} r^2 \sin \theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi; \quad (2.45)$$

$m$  – масса шара,  $V$  – его объем.

$$\rho = r \sin \theta, \quad (2.46)$$

поэтому

$$dJ = \rho^2 \cdot dm = \frac{m}{V} r^4 \sin^3 \theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi; \quad (2.47)$$

$$J = \frac{m}{V} \int_0^R r^4 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta \cdot d\theta = \frac{m}{V} \cdot \frac{R^5}{5} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{5} mR^2. \quad (2.48)$$

Если считать, что наша Земля – шар с постоянной плотностью массы, то момент инерции Земли относительно центральной оси будет равен

$$J_{\text{Земли}} = 0,4 M_3 R_3^2 = 0,4 \cdot 6,0 \cdot 10^{24} \text{ кг} \cdot (6,4 \cdot 10^6 \text{ м})^2 \approx 10^{38} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

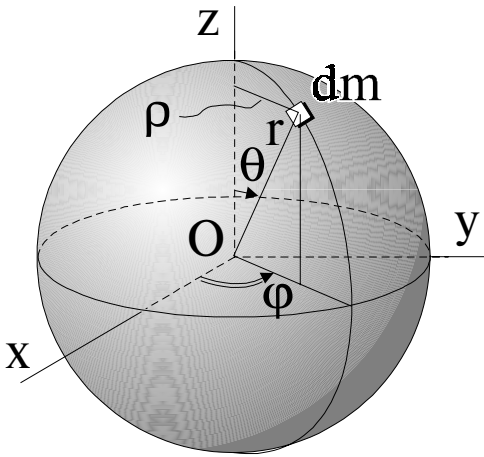


Рис. 2.15

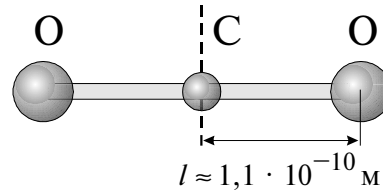


Рис. 2.16

Для сравнения рассчитаем момент инерции молекулы  $\text{CO}_2$  относительно оси, проходящей через атом углерода перпендикулярно линии, вдоль которой расположены все три атома (рис. 2.16).

Основная масса атомов сосредоточена в их ядрах; размеры ядер ( $\sim 10^{-14}$  м) значительно меньше межядерного расстояния ( $\sim 10^{-10}$  м), поэтому атомы кислорода можно считать материальными точками, а моментом инерции атома углерода можно пренебречь.

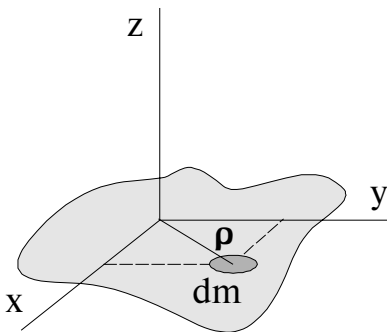


Рис. 2.17

При этих условиях  $J_{\text{CO}_2} = 2 \frac{\mu_{\text{O}_2}}{2N_A} \cdot \ell^2$ , где

$\mu_{\text{O}_2}$  – молярная масса кислорода,  $N_A$  – число Авогадро,  $\ell$  – межядерное расстояние (см. рис. 2.16). Подставляя числовые значения

этих величин, получим

$$J_{\text{CO}_2} = 2 \frac{16 \cdot 10^{-3} \text{ кг}}{6 \cdot 10^{23}} \cdot (1,1 \cdot 10^{-10} \text{ м})^2 \approx 10^{-45} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Для плоской фигуры моменты инерции относительно трех взаимно перпендикулярных осей, две из которых лежат в плоскости фигуры, оказываются связанными между собой простым соотношением. Из рис. 2.17 следует, что

$$dJ_z = \rho^2 \cdot dm = (x^2 + y^2) dm = dJ_y + dJ_x, \quad (2.49)$$

откуда

$$J_z = J_x + J_y. \quad (2.50)$$



Это соотношение позволяет, например, легко вычислить момент инерции тонкого диска массы  $m$  и радиуса  $R$  относительно оси, проходящей через центр диска и лежащей в его плоскости (лю-

бая такая ось будет главной):  $J = \frac{mR^2}{4}$ , по-

скольку момент инерции диска относительно главной центральной оси, перпендику-

лярной плоскости диска,  $J_0 = \frac{mR^2}{2}$ , а

$$J_0 = 2J.$$

**Теорема Гюйгенса-Штейнера.** Эта теорема связывает моменты инерции относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс тела.

Ось 1 на рис. 2.18 проходит через центр масс  $O$ , ось 2 параллельна ей; расстояние между осями равно  $a$ . Векторы  $\mathbf{R}_i$  и  $\boldsymbol{\rho}_i$  перпендикулярны осям 1 и 2. Они проведены от осей в ту точку, где расположена масса  $\Delta m_i$ .

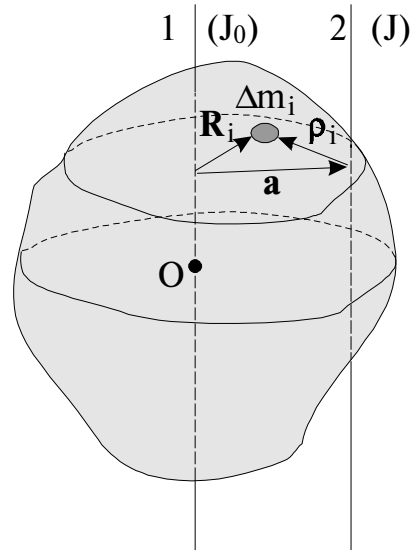


Рис. 2.18

Момент инерции тела относительно оси 2

$$J = \sum_i \Delta m_i \rho_i^2 = \sum_i \Delta m_i (\mathbf{R}_i - \mathbf{a})^2 = \sum_i \Delta m_i R_i^2 + \sum_i \Delta m_i a^2 - 2\mathbf{a} \sum_i \Delta m_i \mathbf{R}_i. \quad (2.51)$$

Последняя сумма равна нулю, поскольку ось 1 проходит через центр масс, и

$$J = J_0 + ma^2. \quad (2.52)$$

Если, например, ось — касательная к поверхности шара, то можно, не проводя громоздких вычислений, записать:

$$J = J_0 + mR^2 = \frac{2}{5} mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5} mR^2. \quad (2.53)$$

**Момент импульса тела относительно движущегося центра масс.** До сих пор, рассматривая момент импульса твердого тела, мы определяли его относительно некоторой неподвижной в лабораторной системе XYZ точки (например, точки закрепления тела). Во многих задачах динамики это оказывается неудобно. Например, решая задачу о диске, скатывающемся с наклонной плоскости, логично рассматривать момент импульса диска относительно его центра масс, а не относительно точки, принадлежащей наклонной плоскости.

Рассмотрим, как будут связаны моменты импульса тела, определенные относительно некоторой неподвижной точки  $O'$  и относительно центра масс тела  $O$ , движущегося произвольным образом (рис. 2.19).

Пусть  $\mathbf{r}'_i$  и  $\mathbf{r}_i$  — радиусы-векторы элементарной массы  $\Delta m_i$  тела относительно точек  $O'$  и  $O$ ,  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор, проведенный из  $O'$  в  $O$ .

Эти векторы связаны между собой очевидным соотношением

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}_i. \quad (2.54)$$

Момент импульса тела относительно точки  $O'$  (см. формулу (2.1))

$$\mathbf{L}_{O'} = \sum_i \mathbf{r}'_i \times \Delta m_i \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} = \sum_i \left[ (\mathbf{R} + \mathbf{r}_i) \times \Delta m_i \left( \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) \right]. \quad (2.55)$$

Воспользуемся очевидными равенствами

$$\sum_i \Delta m_i = M \quad (2.56)$$

( $M$  – масса всего тела);

$$\sum_i \Delta m_i \mathbf{r}_i = 0 \quad (2.57)$$

$$\text{и} \quad \sum_i \Delta m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = 0, \quad (2.58)$$

поскольку точка  $O$  совпадает с центром масс тела. С учетом (2.56 - 2.58) из (2.55) получим

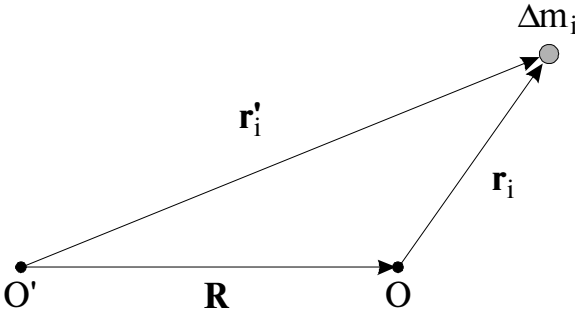


Рис. 2.19

$$\mathbf{L}_{O'} = \mathbf{R} \times M \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \sum_i \mathbf{r}_i \times \Delta m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{R} \times \mathbf{p} + \sum_i \mathbf{r}_i \times \Delta m_i \mathbf{v}_i, \quad (2.59)$$

где  $\mathbf{p} = M \frac{d\mathbf{R}}{dt}$  – полный импульс тела в лабораторной системе  $XYZ$ ,  $\mathbf{v}_i$  – скорость  $i$ -ой массы относительно центра масс.

Если момент импульса тела относительно его центра масс (относительный момент импульса) определить как

$$\mathbf{L}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \times \Delta m_i \mathbf{v}_i, \quad (2.60)$$

то из (2.59) следует искомое соотношение

$$\mathbf{L}_{O'} = \mathbf{L}_O + \mathbf{R} \times \mathbf{p}. \quad (2.61)$$

Еще раз подчеркнем, что при определении момента импульса тела относительно его центра масс (величина  $\mathbf{L}_O$ ) следует брать относительные скорости всех точек тела, то есть скорости точек тела относительно центра масс, считая его как бы неподвижным.

**Замечание.** Соотношение (2.61) позволяет также связать моменты импульса относительно двух параллельных осей, одна из которых неподвижна, а другая проходит через центр масс движущегося тела.

Обратимся к примерам.

1. Момент импульса цилиндра, скатывающегося без проскальзывания с наклонной плоскости, относительно его оси равен  $J_0 \omega$  ( $J_0$  – момент инерции цилиндра относительно его оси,  $\omega$  – мгновенная угловая скорость вращения цилиндра). Момент импульса того же цилиндра относительно мгновенной оси вращения, проходящей через точку касания цилиндра и плоскости, будет равен

$J_0\omega + Rmv_0 = J_0\omega + Rm(\omega R) = (J_0 + mR^2)\omega = J\omega$ , где  $J$  – момент инерции цилиндра относительно мгновенной оси вращения,  $R$  – радиус цилиндра.

2. Если шару массы  $m$  сообщить скорость  $v_0$ , обеспечивающую движение по круговой орбите вокруг гравитационного силового центра  $O'$ , то он будет двигаться поступательно ( $L_{O'} = 0$ ), а его момент импульса относительно  $O'$   $L_{O'} = mv_0R$  (рис. 2.20а). Если при этом шар будет вращаться вокруг собственной оси с угловой скоростью  $\omega$ , как показано на рис. 2.20б, то постоянный относительно точки  $O'$  момент импульса шара будет равен  $L_{O'} = L_O + mv_0R = J_0\omega + mv_0R$ .

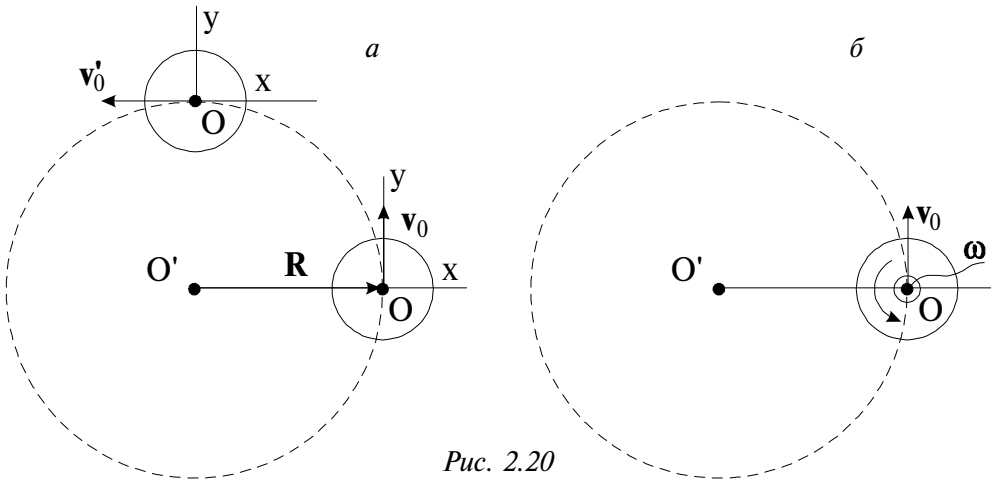


Рис. 2.20

Расчеты показывают, что момент импульса планет Солнечной системы относительно собственного центра масс значительно меньше их орбитального момента импульса. Орбиты всех планет лежат приблизительно в одной плоскости, так что их орбитальные моменты импульса складываются арифметически. Интересно, что все девять планет движутся вокруг Солнца в одном и том же направлении, так что суммарный момент импульса Солнечной системы отличен от нуля.



## ЛЕКЦИЯ №3

*Динамика абсолютно твердого тела. Уравнение поступательного движения и уравнение моментов. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Центр удара. Динамика плоского движения твердого тела. Движение аксиально симметричного твердого тела, закрепленного в центре масс. Уравнения Эйлера.*

**Уравнения динамики твердого тела. Общий случай.** В общем случае абсолютно твердое тело имеет 6 степеней свободы, и для описания его движения необходимы 6 независимых скалярных уравнений или 2 независимых векторных уравнения.

Вспомним, что твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек, и, следовательно, к нему применимы те уравнения динамики, которые справедливы для системы точек в целом.

Обратимся к опытам.

Возьмем резиновую палку, утяжеленную на одном из концов и имеющую лампочку точно в центре масс (рис. 3.1). Зажжем лампочку и бросим палку из одного конца аудитории в другой, сообщив ей произвольное вращение – траекторией лампочки будет при этом парабола – кривая, по которой полетело бы небольшое тело, брошенное под углом к горизонту.

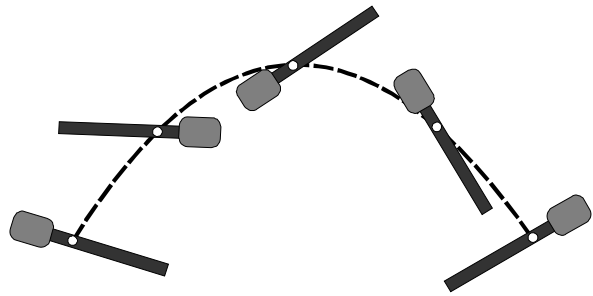


Рис. 3.1

Стержень, опирающийся одним из концов на гладкую горизонтальную плоскость (рис. 1.16), падает таким образом, что его центр масс остается на одной и той же вертикали – нет сил, которые сдвинули бы центр масс стержня в горизонтальном направлении.

Опыт, который был представлен на рис. 2.2а,в, свидетельствует о том, что для изменения момента импульса тела существенна не просто сила, а ее момент относительно оси вращения.

Тело, подвешенное в точке, не совпадающей с его центром масс (физический маятник), начинает колебаться (рис. 3.2а) – есть момент силы тяжести относительно точки подвеса, возвращающий отклоненный маятник в положение равновесия. Но тот же маятник, подвешенный в центре масс, находится в положении безразличного равновесия (рис. 3.2б).

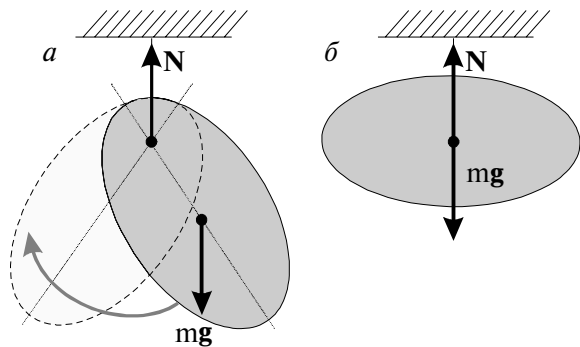


Рис. 3.2

Роль момента силы наглядно проявляется в опытах с “послушной” и “непослушной” катушками (рис. 3.3). Плоское движение этих катушек можно представить как чистое вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через точку соприкосновения катушки с плоскостью. В зависимости от направления

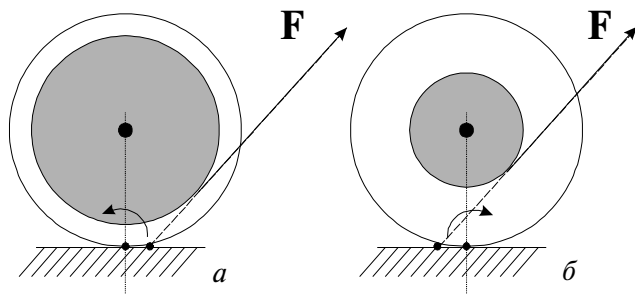


Рис. 3.3

момента силы  $F$  относительно мгновенной оси катушка либо откатывается (рис. 3.3а), либо накатывается на нитку (рис. 3.3б). Держа нить достаточно близко к горизонтальной плоскости, можно принудить к послушанию самую “непослушную” катушку.

Все эти опыты вполне согласуются с известными законами динамики, сформулированными для системы материальных точек: законом движения центра масс и законом изменения момента импульса системы под действием момента внешних сил. Таким образом, в качестве двух векторных уравнений движения твердого тела можно использовать:

1. Уравнение движения центра масс

$$m \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \sum \mathbf{F}. \quad (3.1)$$

Здесь  $\mathbf{v}_0$  — скорость центра масс тела,  $\sum \mathbf{F}$  — сумма всех внешних сил, приложенных к телу.

2. Уравнение моментов

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{M}. \quad (3.2)$$

Здесь  $\mathbf{L}$  — момент импульса твердого тела относительно некоторой точки,  $\sum \mathbf{M}$  — суммарный момент внешних сил относительно той же самой точки.

К уравнениям (3.1) и (3.2), являющимся уравнениями динамики твердого тела, необходимо дать следующие комментарии:

1. Внутренние силы, как и в случае произвольной системы материальных точек, не влияют на движение центра масс и не могут изменить момент импульса тела.

2. Точку приложения внешней силы можно произвольно перемещать вдоль линии, по которой действует сила. Это следует из того, что в модели абсолютно твердого тела локальные деформации, возникающие в области приложения силы, в расчет не принимаются. Указанный перенос не повлияет и на момент силы относительно какой бы то ни было точки, так как плечо силы при этом не изменится.

3. Векторы  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{M}$  в уравнении (3.2), как правило, рассматриваются относительно некоторой неподвижной в лабораторной системе XYZ точки. Во многих задачах  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{M}$  удобно рассматривать относительно движущегося центра масс тела. В этом случае уравнение моментов имеет вид, формально

совпадающий с (3.2). В самом деле, момент импульса тела  $\mathbf{L}_0$  относительно движущегося центра масс  $O$  связан с моментом импульса  $\mathbf{L}_{0'}$  относительно неподвижной точки  $O'$  соотношением, полученным в конце лекции №2:

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_{0'} - \mathbf{R} \times \mathbf{p}, \quad (3.3)$$

где  $\mathbf{R}$  – радиус-вектор от  $O'$  к  $O$ ,  $\mathbf{p}$  – полный импульс тела. Аналогичное соотношение легко может быть получено и для моментов силы:

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_{0'} - \mathbf{R} \times \mathbf{F}, \quad (3.4)$$

где  $\mathbf{F}$  – геометрическая сумма всех сил, действующих на твердое тело.

Поскольку точка  $O'$  неподвижна, то справедливо уравнение моментов (3.2):

$$\frac{d\mathbf{L}_{0'}}{dt} = \mathbf{M}_{0'}. \quad (3.5)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_0}{dt} &= \left( \frac{d\mathbf{L}_{0'}}{dt} - \mathbf{R} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) - \frac{d\mathbf{R}}{dt} \times \mathbf{p} = \\ &= \left( \frac{d\mathbf{L}_{0'}}{dt} - \mathbf{R} \times \mathbf{F} \right) - \mathbf{v}_0 \times \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь учтено, что  $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$ .

Величина  $\mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$  есть скорость точки  $O$  в лабораторной системе XYZ.

Учитывая (3.4), получим

$$\frac{d\mathbf{L}_0}{dt} = \mathbf{M}_0 - \mathbf{v}_0 \times \mathbf{p}. \quad (3.7)$$

Поскольку движущаяся точка  $O$  – это центр масс тела, то  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_0$  ( $m$  – масса тела),  $\mathbf{v}_0 \times \mathbf{p} = 0$  и  $\frac{d\mathbf{L}_0}{dt} = \mathbf{M}_0$ , то есть уравнение моментов относительно движущегося центра масс имеет такой же вид, что и относительно неподвижной точки. Существенно отметить, что в этом случае, как было показано в конце лекции №2, скорости всех точек тела при определении  $\mathbf{L}_0$  следует брать относительно центра масс тела.

Ранее было показано, что произвольное движение твердого тела можно разложить на поступательное (вместе с системой  $x_0y_0z_0$ , начало которой находится в некоторой точке – полюсе, жестко связанном с телом) и вращательное (вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс). С точки зрения кинематики выбор полюса особого значения не имеет, с точки же зрения динамики полюс, как теперь понятно, удобно поместить в центр масс. Именно в этом случае уравнение моментов (3.2) может быть записано относительно центра масс (или оси, проходящей через центр масс) в том же виде, как и относительно неподвижного начала (или неподвижной оси).

4. Если  $\sum \mathbf{F}$  не зависит от угловой скорости тела, а  $\sum \mathbf{M}$  – от скорости центра масс, то уравнения (3.1) и (3.2) можно рассматривать независи-

мо друг от друга. В этом случае уравнение (3.1) соответствует просто задаче из механики точки, а уравнение (3.2) — задаче о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки или неподвижной оси. Пример ситуации, когда уравнения (3.1) и (3.2) нельзя рассматривать независимо — движение вращающегося твердого тела в вязкой среде.

Далее в этой лекции мы рассмотрим уравнения динамики для трех частных случаев движения твердого тела: вращения вокруг неподвижной оси, плоского движения и, наконец, движения твердого тела, имеющего ось симметрии и закрепленного в центре масс.

### I. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

В этом случае движение твердого тела определяется уравнением

$$\frac{dL_{\parallel}}{dt} = M_{\parallel} .$$

Здесь  $L_{\parallel}$  — это момент импульса относительно оси вращения, то есть проекция на ось момента импульса, определенного относительно некоторой точки, принадлежащей оси (см. лекцию №2).  $M_{\parallel}$  — это момент внешних сил относительно оси вращения, то есть проекция на ось результирующего момента внешних сил, определенного относительно некоторой точки, принадлежащей оси, причем выбор этой точки на оси, как и в случае с  $L_{\parallel}$ , значения не имеет. Действительно (рис. 3.4),

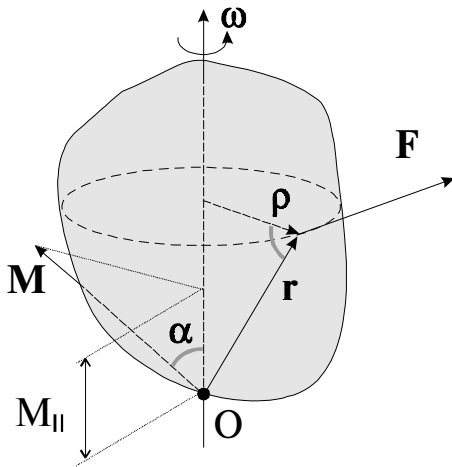


Рис. 3.4

$M_{\parallel} = rF \cos \alpha = \rho F$ , где  $F$  — составляющая силы, приложенной к твердому телу, перпендикулярная оси вращения,  $\rho$  — плечо силы  $F$  относительно оси.

Поскольку  $L_{\parallel} = J\omega$  ( $J = \int \rho^2 dm$  — момент инерции тела относительно оси вращения), то вместо  $\frac{dL_{\parallel}}{dt} = M_{\parallel}$

можно записать

$$\frac{d}{dt}(J\omega) = M_{\parallel} \quad (3.8)$$

или

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_{\parallel} , \quad (3.9)$$

поскольку в случае твердого тела  $J = \text{const}$ .

Уравнение (3.9) и есть основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. Его векторная форма имеет вид:

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_{\parallel} \quad (3.10)$$



Вектор  $\omega$  всегда направлен вдоль оси вращения, а  $M_{\parallel}$  — это составляющая вектора момента силы вдоль оси.

В случае  $M_{\parallel} = 0$  получаем  $\omega = \text{const}$ , соответственно и момент импульса относительно оси  $L_{\parallel}$  сохраняется.

При этом сам вектор  $L$ , определенный относительно какой-либо точки на оси вращения, может меняться. Пример такого движения показан на рис. 3.5.

Стержень АВ, шарнирно закрепленный в точке А, вращается по инерции вокруг вертикальной оси таким образом, что угол  $\alpha$  между осью и стержнем остается постоянным. Вектор момента импульса  $L$  относительно точки А движется по конической поверхности с углом полура-

створа  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ , однако проекция  $L$  на вертикальную ось остается постоянной, поскольку момент силы тяжести относительно этой оси равен нулю.

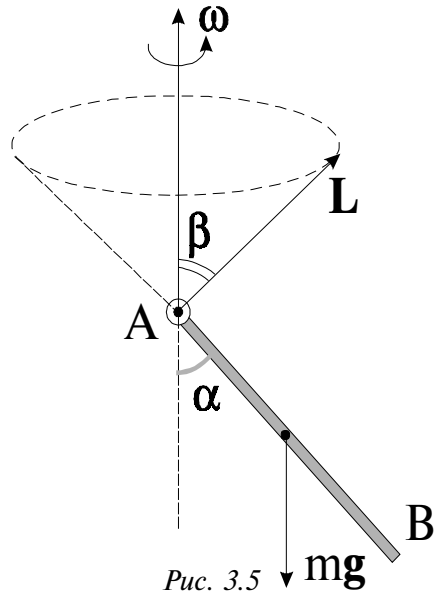


Рис. 3.5

**Кинетическая энергия вращающегося тела и работа внешних сил** (ось вращения неподвижна).

Скорость  $i$ -й частицы тела

$$v_i = \omega \rho_i, \tag{3.11}$$

где  $\rho_i$  — расстояние частицы до оси вращения. Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \rho_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2, \tag{3.12}$$

так как угловая скорость вращения для всех точек одинакова.

В соответствии с законом изменения механической энергии системы элементарная работа всех внешних сил равна приращению кинетической энергии тела:

$$\delta A = d\left(\frac{1}{2} J \omega^2\right) = J \omega \cdot d\omega = M_{\parallel} \omega \cdot dt = M_{\parallel} \cdot d\varphi. \tag{3.13}$$

Работа внешних сил при повороте тела на конечный угол  $\varphi_0$  равна

$$A = \int_0^{\varphi_0} M_{\parallel} \cdot d\varphi. \tag{3.14}$$

Допустим, что диск точила вращается по инерции с угловой скоростью  $\omega_0$ , и мы останавливаем его, прижимая какой-либо предмет к краю диска с постоянным усилием. При этом на диск будет действовать постоян-

ная по величине сила  $F_{тр}$ , направленная перпендикулярно его оси. Работа этой силы

$$A_{тр} = -F_{тр} \cdot R\varphi,$$

где  $R$ — радиус диска,  $\varphi$  — угол его поворота. Число оборотов, которое сделает диск до полной остановки,

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{J\omega_0^2}{4\pi \cdot F_{тр} \cdot R},$$

где  $J$  — момент инерции диска точила вместе с якорем электромотора.

**Замечание.** Если силы таковы, что  $M_{||} = 0$ , то работу они не производят.

**Свободные оси. Устойчивость свободного вращения.** При вращении тела вокруг неподвижной оси эта ось удерживается в неизменном положении подшипниками. При вращении несбалансированных частей механизмов оси (валы) испытывают определенную динамическую нагрузку, возникают вибрации, тряска, и механизмы могут разрушиться.

Если твердое тело раскрутить вокруг произвольной оси, жестко связанной с телом, и высвободить ось из подшипников, то ее направление в пространстве, вообще говоря, будет меняться. Для того, чтобы произвольная ось вращения тела сохраняла свое направление неизменным, к ней необходимо приложить определенные силы. Возникающие при этом ситуации показаны на рис. 3.6.

В качестве вращающегося тела здесь использован массивный однородный стержень  $AB$ , прикрепленный к достаточно эластичной оси (изображена двойными штриховыми линиями). Эластичность оси позволяет визуализировать испытываемые ею динамические нагрузки. Во всех случаях ось вращения вертикальна, жестко связана со стержнем и укрепена в подшипниках; стержень раскручен вокруг этой оси и предоставлен сам себе.

В случае, изображенном на рис. 3.6а, ось вращения является для точки  $B$  стержня главной, но не центральной,  $L \parallel \omega$ . Ось изгибается, со стороны оси на стержень действует сила  $F_{упр}$ , обеспечивающая его вращение (в НИСО,

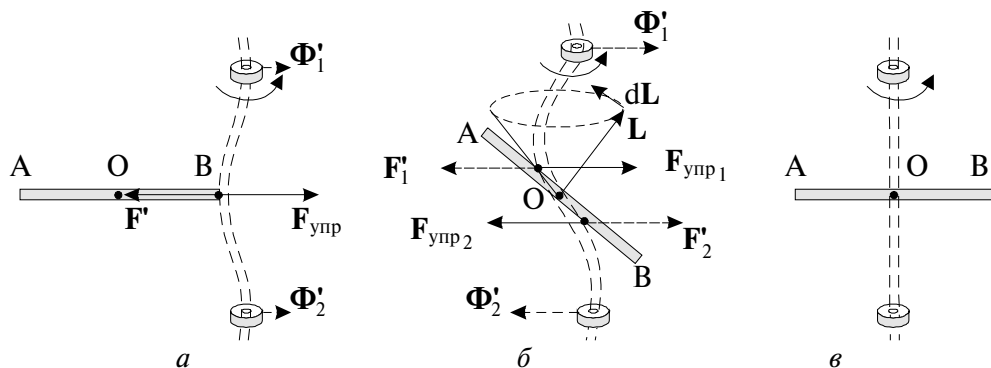


Рис. 3.6

связанной со стержнем, эта сила уравнивает центробежную силу инерции). Со стороны стержня на ось действует сила  $\mathbf{F}'$ , уравновешенная силами  $\Phi'$  со стороны подшипников.

В случае рис. 3.6б ось вращения проходит через центр масс стержня и является для него центральной, но не главной. Вектор момента импульса относительно центра масс  $O$  не сохраняется и описывает коническую поверхность. Ось сложным образом деформируется (изламывается), со стороны оси на стержень действуют силы  $\mathbf{F}_{\text{упр1}}$  и  $\mathbf{F}_{\text{упр2}}$ , момент которых обеспечивает приращение  $dL$ . (В НИСО, связанной со стержнем, момент упругих сил компенсирует момент центробежных сил инерции, действующих на одну и другую половины стержня). Со стороны стержня на ось действуют силы  $\mathbf{F}'_1$  и  $\mathbf{F}'_2$ , направленные противоположно силам  $\mathbf{F}_{\text{упр1}}$  и  $\mathbf{F}_{\text{упр2}}$ . Момент сил  $\mathbf{F}'_1$  и  $\mathbf{F}'_2$  уравновешен моментом сил  $\Phi'_1$  и  $\Phi'_2$ , возникающих в подшипниках.

И только в том случае, когда ось вращения совпадает с главной центральной осью инерции тела (рис. 3.6в), раскрученный и предоставленный сам себе стержень не оказывает на подшипники никакого воздействия в горизонтальном направлении. Такие оси называют свободными осями, потому что, если убрать подшипники, они будут сохранять свое направление в пространстве неизменным.

Иное дело, будет ли это вращение устойчивым по отношению к малым возмущениям, всегда имеющим место в реальных условиях. опыты показывают, что вращение вокруг главных центральных осей с наибольшим и наименьшим моментами инерции является устойчивым, а вращение вокруг оси с промежуточным значением момента инерции — неустойчивым. В этом можно убедиться, подбрасывая вверх тело в виде параллелепипеда, раскрученное вокруг одной из трех взаимно перпендикулярных главных центральных осей (рис. 3.7). Ось  $AA'$  соответствует наибольшему, ось  $BB'$  — среднему, а ось  $CC'$  — наименьшему моменту инерции параллелепипеда. Если подбросить такое тело, сообщив ему быстрое вращение вокруг оси  $AA'$  или вокруг оси  $CC'$ , можно убедиться в том, что это вращение является вполне устойчивым. Попытки заставить тело вращаться вокруг оси

$BB'$  к успеху не приводят — тело движется сложным образом, кувыркаясь в полете.

В телах вращения устойчивой оказывается свободная ось, соответствующая наибольшему моменту инерции. Так, если сплошной однородный диск подвесить к быстровращающемуся

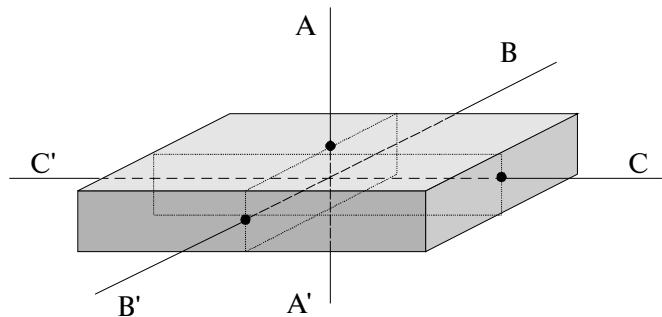


Рис. 3.7

валу электромотора (рис. 3.8, ось вращения вертикальна), то диск довольно быстро займет горизонтальное положение, устойчиво вращаясь вокруг центральной оси, перпендикулярной к плоскости диска.

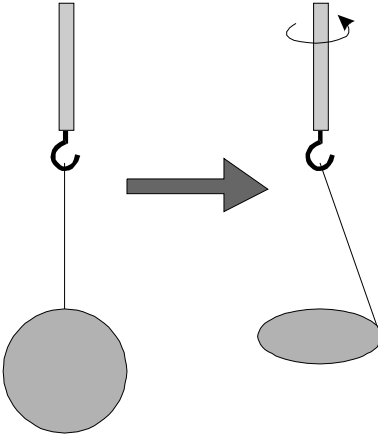


Рис. 3.8

**Центр удара.** Опыт показывает, что если тело, закрепленное на оси вращения, испытывает удар, то действие удара в общем случае передается и на ось. При этом величина и направление силы, приложенной к оси, зависят от того, в какую точку тела нанесен удар.

Рассмотрим сплошной однородный стержень  $AB$ , подвешенный в точке  $A$  на горизонтальной, закрепленной в подшипниках оси  $OO'$  (рис. 3.9). Если удар (короткодействующая сила  $F$ ) нанесен близко к оси вращения, то ось прогибается в направлении действия силы  $F$  (рис. 3.9а). Если удар нанесен по нижнему концу стержня, вблизи точки  $B$ , то ось прогибается в противоположном направлении (рис. 3.9б). Наконец, если удар нанесен в строго определенную точку стержня, называемую центром удара (рис. 3.9в, точка  $C$ ), то ось не испытывает никаких дополнительных нагрузок, связанных с ударом. Очевидно, в этом случае скорость поступательного движения, приобретаемого точкой  $A$  вместе с центром масс  $O$ , будет компенсироваться линейной скоростью вращательного движения вокруг центра масс  $O$  (оба эти движения инициируются силой  $F$  и происходят одновременно).

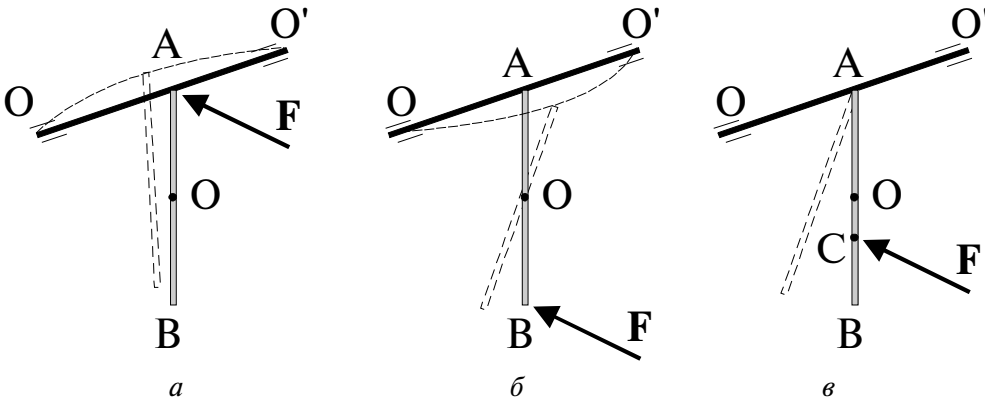


Рис. 3.9

Вычислим, на каком расстоянии  $\ell$  от точки подвеса стержня находится центр удара. Уравнение моментов относительно оси вращения  $OO'$  дает

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = F \cdot \ell. \quad (3.15)$$

Сил реакции со стороны оси, как предполагается, при ударе не возникает, поэтому на основании теоремы о движении центра масс можно записать

$$m \cdot \frac{dv_0}{dt} = F, \quad (3.16)$$

где  $m$  – масса тела,  $v_0$  – скорость центра масс. Если  $a$  – расстояние от оси до центра масс тела, то

$$v_0 = \omega a, \quad (3.17)$$

и в результате из уравнения моментов и уравнения движения центра масс находим

$$\ell = \frac{J}{ma}. \quad (3.18)$$

При этом точка  $C$  (центр удара) совпадает с так называемым центром качения данного физического маятника – точкой, где надо сосредоточить всю массу твердого тела, чтобы полученный математический маятник имел такой же период колебаний, как и данный физический.

В случае сплошного однородного стержня длиной  $L$  имеем:

$$a = \frac{L}{2}, \quad J = \frac{mL^2}{3}, \quad \text{и} \quad \ell = \frac{2}{3}L.$$

**Замечание.** Полученное выражение для  $\ell$  (3.18) справедливо и для произвольного твердого тела. При этом надо только иметь в виду, что точка подвеса тела  $A$  и центр масс  $O$  должны лежать на одной вертикали, а ось вращения должна совпадать с одной из главных осей инерции тела, проходящих через точку  $A$ .

**Пример 1.** При ударах палкой длиной  $L$  по препятствию рука “не чувствует” удара (не испытывает отдачи) в том случае, если удар приходится в точку, расположенную на расстоянии  $L - \ell = L - \frac{2}{3}L = \frac{1}{3}L$  от свободного конца палки.

**Пример 2.** При горизонтальном ударе кием по бильярдному шару (рис. 3.10) шар начинает качение без проскальзывания в том случае, если удар нанесен в точку, находящуюся на высоте

$$h = \frac{J}{ma} = \frac{\frac{7}{5}mR^2}{mR} = \frac{7}{5}R$$

от поверхности бильярда, то есть на  $h - R = \frac{2}{5}R$  выше центра шара.

Если удар будет нанесен ниже, качение будет сопровождаться скольжением в направлении движения шара. Если удар нанесен выше, то шар в точке касания с бильярдным столом будет проскальзывать назад.

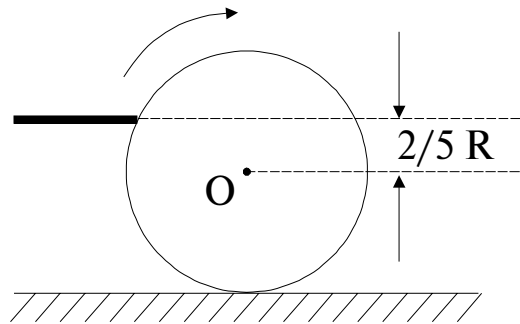


Рис. 3.10

Рассмотренные примеры формально не относятся к вращению твердого тела вокруг неподвижной оси, однако все приведенные выше соображения о центре удара, очевидно, остаются в силе и в этих случаях.

## II. Плоское движение твердого тела.

Напомним, что при плоском движении все точки тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости, поэтому достаточно рассмотреть движение одного из сечений тела, например, того, в котором лежит центр масс. При разложении плоского движения на поступательное и вращательное скорость поступательного движения определена неоднозначно — она зависит от выбора оси вращения, однако угловая скорость вращательного движения оказывается одной и той же (см. лекцию №1).

Если в качестве оси вращения выбрать ось, проходящую через центр масс, то уравнениями движения твердого тела будут:

1. Уравнение движения центра масс

$$m \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \mathbf{F}_0. \quad (3.19)$$

2. Уравнение моментов относительно оси, проходящей через центр масс

$$J_0 \frac{d\omega}{dt} = M_0. \quad (3.20)$$

Особенностью плоского движения является то, что ось вращения сохраняет свою ориентацию в пространстве и остается перпендикулярной плоскости, в которой движется центр масс. Еще раз подчеркнем, что уравнение моментов (3.20) записано относительно, в общем случае, ускоренно движущегося центра масс, однако, как было отмечено в начале лекции, оно имеет такой же вид, как и уравнение моментов относительно неподвижной точки.

В качестве примера рассмотрим задачу о скатывании цилиндра с наклонной плоскости. Приведем два способа решения этой задачи с использованием уравнений динамики твердого тела.

**Первый способ.** Рассматривается вращение цилиндра относительно оси, проходящей через центр масс (рис. 3.11).

Система уравнений (3.19 - 3.20) имеет вид:

$$\begin{cases} m \cdot \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{тр}} + \mathbf{N}; & (3.21) \\ J_0 \frac{d\omega}{dt} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}_{\text{тр}}. & (3.22) \end{cases}$$

К этой системе необходимо добавить уравнение кинематической связи

$$\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \mathbf{R} \times \frac{d\omega}{dt}. \quad (3.23)$$

Последнее уравнение получается из условия, что цилиндр скатывается без проскальзывания, то есть скорость точки М цилиндра равна нулю.

Уравнение движения центра масс (3.21) запишем для проекций ускорения и сил на ось x вдоль наклонной плоскости, а уравнение моментов (3.22) — для проекций углового ускорения и момента силы трения

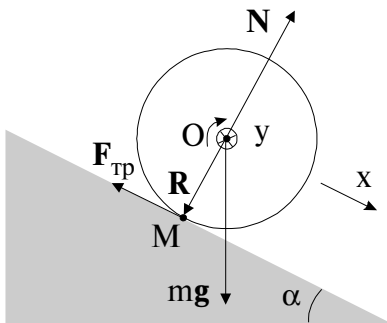


Рис. 3.11

на ось  $y$ , совпадающую с осью цилиндра. Направления осей  $x$  и  $y$  выбраны согласованно, в том смысле, что положительному линейному ускорению оси цилиндра соответствует положительное же угловое ускорение вращения вокруг этой оси. В итоге получим:

$$\begin{cases} ma = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}; & (3.24) \\ J_0 \frac{d\omega}{dt} = F_{\text{тр}} \cdot R; & (3.25) \\ a = \frac{d\omega}{dt} \cdot R. & (3.26) \end{cases}$$

Отсюда

$$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{J_0}{mR^2}}. \quad (3.27)$$

Следует подчеркнуть, что  $F_{\text{тр}}$  – сила трения сцепления – может принимать любое значение в интервале от 0 до  $(F_{\text{тр}})_{\text{макс}}$  (сила трения скольжения) в зависимости от параметров задачи. Работу эта сила не совершает, но обеспечивает ускоренное вращение цилиндра при его скатывании с наклонной плоскости. В данном случае

$$F_{\text{тр}} = \frac{J_0}{R^2} \cdot \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{J_0}{mR^2}}. \quad (3.28)$$

Если цилиндр сплошной, то

$$J_0 = \frac{1}{2} mR^2; \quad a = \frac{2}{3} g \sin \alpha; \quad F_{\text{тр}} = \frac{1}{3} mg \sin \alpha. \quad (3.29)$$

Качение без проскальзывания определяется условием

$$F_{\text{тр}} \leq kN, \quad (3.30)$$

где  $k$  – коэффициент трения скольжения,  $N = mg \cos \alpha$  – сила реакции опоры. Это условие сводится к следующему:

$$\frac{1}{3} mg \sin \alpha \leq kmg \cos \alpha, \quad (3.31)$$

или

$$\text{tg} \alpha \leq 3k. \quad (3.32)$$

**Второй способ.** Рассматривается вращение цилиндра относительно неподвижной оси, совпадающей в данный момент времени с мгновенной осью вращения (рис. 3.12).

Мгновенная ось вращения проходит через точку соприкосновения цилиндра и плоскости (точку  $M$ ). При таком подходе отпадает необходимость в уравнении движения центра масс. Уравнение моментов относительно мгновенной оси имеет вид:

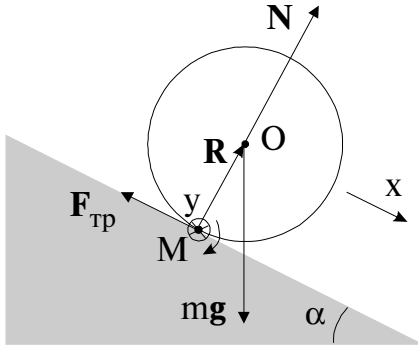


Рис. 3.12

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = \mathbf{R} \times (\mathbf{mg}). \quad (3.33)$$

Здесь

$$J = J_0 + mR^2. \quad (3.34)$$

В проекции на ось вращения (ось y)

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = Rmg \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = Rmg \sin \alpha. \quad (3.35)$$

Ускорение центра масс выражается через угловое ускорение

$$a = \frac{d\omega}{dt} R = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{J_0}{mR^2}}. \quad (3.36)$$

**Кинетическая энергия при плоском движении.** Кинетическая энергия твердого тела представляет собой сумму кинетических энергий отдельных частиц:

$$T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_i)^2, \quad (3.37)$$

где  $\mathbf{v}_0$  — скорость центра масс тела,  $\mathbf{u}_i$  — скорость  $i$ -й частицы относительно системы координат, связанной с центром масс и совершающей поступательное движение вместе с ним. Возводя сумму скоростей в квадрат, получим:

$$T = \frac{v_0^2}{2} \sum_i m_i + \mathbf{v}_0 \sum_i m_i \mathbf{u}_i + \frac{1}{2} \sum_i m_i u_i^2 = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{J_0 \omega^2}{2}, \quad (3.38)$$

так как  $\sum_i m_i \mathbf{u}_i = 0$  (суммарный импульс частиц в системе центра масс равен нулю).

Таким образом, кинетическая энергия при плоском движении равна сумме кинетических энергий поступательного и вращательного движений (теорема Кёнига). Если рассматривать плоское движение как вращение вокруг мгновенной оси, то кинетическая энергия тела есть энергия вращательного движения.

В этой связи задачу о скатывании цилиндра с наклонной плоскости можно решить, используя закон сохранения механической энергии (напомним, что сила трения при качении без проскальзывания работу не совершает).

Приращение кинетической энергии цилиндра равно убыли его потенциальной энергии:

$$\frac{J\omega^2}{2} = mgh = mgx \sin \alpha. \quad (3.39)$$

Здесь  $x$  — смещение цилиндра вдоль наклонной плоскости,  $J = J_0 + mR^2$  — момент инерции цилиндра относительно мгновенной оси вращения.



Поскольку скорость оси цилиндра  $v = \frac{dx}{dt} = \omega R$ , то

$$\frac{J}{2} \cdot \frac{v^2}{R^2} = mgx \sin \alpha. \quad (3.40)$$

Дифференцируя обе части этого уравнения по времени, получим

$$\frac{J}{2R^2} \cdot 2v \frac{dv}{dt} = mg \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \sin \alpha, \quad (3.41)$$

откуда для линейного ускорения  $a = \frac{dv}{dt}$  оси цилиндра будем иметь то же выражение, что и при чисто динамическом способе решения (см. (3.27, 3.36)).

**Замечание.** Если цилиндр катится с проскальзыванием, то изменение его кинетической энергии будет определяться также и работой сил трения.

### III. Движение аксиально симметричного твердого тела, закрепленного в центре масс.

Такое движение можно реализовать с помощью специального устройства, называемого кардановым подвесом (рис. 3.13). Положение тела в подвесе должно быть таким, чтобы оси  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  пересекались в центре масс. В этом случае при любых возможных движениях тела его центр масс остается неподвижным. При этом ось  $AA'$  (в данном случае — ось симметрии тела) может иметь произвольную ориентацию в пространстве.

Задачей о движении твердого тела, закрепленного в точке, занимались многие ученые: Л.Эйлер, большая часть жизни которого была связана с Петербургской Академией Наук, выдающиеся русские ученые Н.Е.Жуковский, С.В.Ковалевская, С.А.Чаплыгин, французские ученые Ж.Лагранж, С.Пуассон, Л.Пуансо. Оказалось, что в общем случае эта задача аналитически неразрешима. Даже в простейшем случае движения твердого тела только под действием силы тяжести точное решение существует лишь в особых частных случаях. Один из этих случаев, когда однородное тело вращения закреплено в центре масс, мы рассмотрим в этой лекции, другой, имеющий отношение к движению гироскопа, — в лекции №4.

**Уравнения Эйлера.** Рассмотрим однородное аксиально симметричное тело вращения, закрепленное в центре масс  $O$

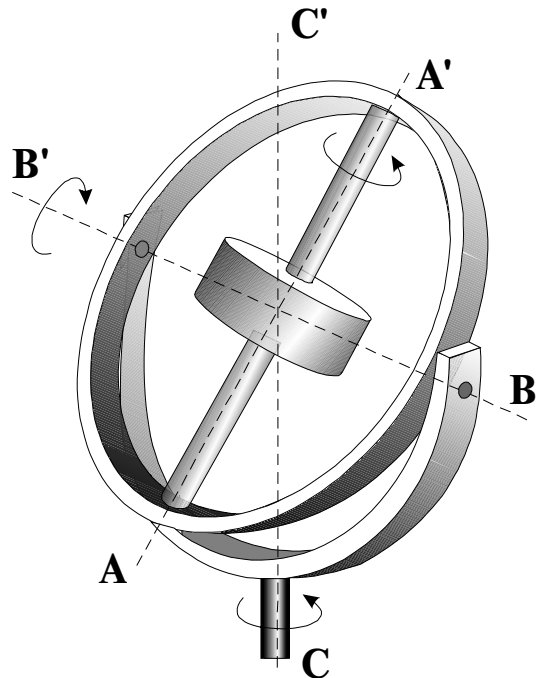


Рис. 3.13

(рис. 3.14). Центральный эллипсоид инерции такого тела является эллипсоидом вращения с осью симметрии  $Oz$ .

Система координат  $x_0y_0z_0$  на рис. 3.14 – лабораторная, система хуз жестко связана с телом, причем оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  – главные центральные оси инерции тела. Поскольку это тело вращения, то главные осевые моменты инерции  $J_x$  и  $J_y$  равны между собой:  $J_x = J_y$ .

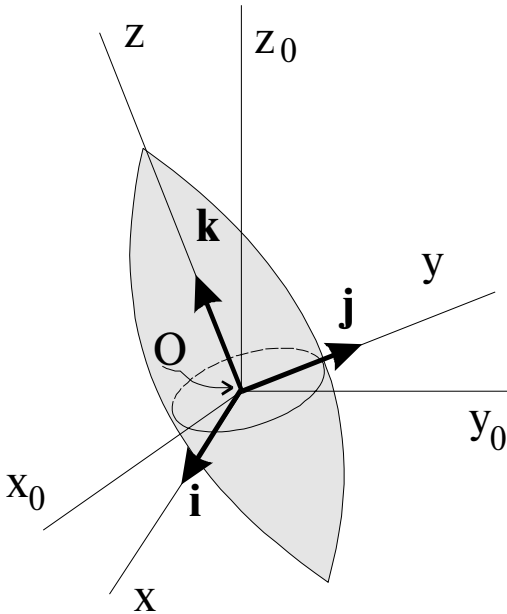


Рис. 3.14

Суммарный момент сил тяжести относительно точки закрепления (центра масс) равен нулю, иных сил, кроме сил тяжести, нет, поэтому уравнение моментов (3.2) имеет вид

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \quad (3.42)$$

откуда

$$\mathbf{L} = \text{const}, \quad (3.43)$$

то есть момент импульса раскрученного и предоставленного самому себе тела остается постоянным по величине и направлению.

**Замечание.** Если исследуемое тело – шар, то  $J_z = J_x = J_y$ , и

центральный эллипсоид инерции трансформируется в сферу. Это означает, что любая центральная ось вращения является главной осью инерции шара, то есть имеет место простое соотношение  $\mathbf{L} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$ , где  $\mathbf{J}$  – момент инерции относительно центральной оси, и при  $\mathbf{L} = \text{const}$  получаем  $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$ . Ось вращения совпадает по направлению с  $\mathbf{L}$  и сохраняет свою ориентацию в пространстве.

Теперь допустим, что  $J_z$  отлично от  $J_x$  и  $J_y$ , как, например, на рис. 3.14. В этом случае чистое вращение имеет место только тогда, когда ось вращения либо совпадает с осью симметрии тела, либо перпендикулярна к ней.

Общий случай более сложен; обычно его рассматривают с помощью дифференциальных уравнений Эйлера. Дело заключается в том, что если в уравнении (3.42) вектор  $\mathbf{L}$  спроектировать на оси лабораторной системы  $x_0y_0z_0$ , то скалярные дифференциальные уравнения движения будут весьма сложными, поскольку моменты инерции относительно неподвижных осей будут функциями времени. Поэтому гораздо удобнее рассматривать  $\mathbf{L}$  в проекциях на оси системы хуз, жестко связанной с твердым телом.

Пусть  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – орты системы хуз, жестко связанной с твердым телом (рис. 3.14). Тогда (3.42) принимает вид

$$\frac{d}{dt}(L_x \mathbf{i} + L_y \mathbf{j} + L_z \mathbf{k}) = 0, \quad (3.44)$$

где не только проекции  $L_x, L_y, L_z$ , но и единичные орты  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  являются функциями времени. Поэтому из (3.44) следует

$$\frac{\partial L_x}{\partial t} \mathbf{i} + \frac{\partial L_y}{\partial t} \mathbf{j} + \frac{\partial L_z}{\partial t} \mathbf{k} + L_x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + L_y \frac{d\mathbf{j}}{dt} + L_z \frac{d\mathbf{k}}{dt} = 0. \quad (3.45)$$

Здесь использован символ  $\frac{\partial}{\partial t}$ , чтобы подчеркнуть, что рассматриваются изменения во времени проекций  $L_x$ ,  $L_y$  и  $L_z$  относительно подвижной системы хуз – системы, которая, в свою очередь, поворачивается вместе с телом с мгновенной угловой скоростью  $\omega$ .

Что касается производных по времени от единичных векторов  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , то их изменения во времени обусловлены только вращением системы хуз с угловой скоростью  $\omega$ , поэтому

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \omega \times \mathbf{i}; \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \omega \times \mathbf{j}; \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \omega \times \mathbf{k} \quad (3.46)$$

(см. рис. 3.15). Подставляя эти выражения в (3.45), получим:

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} + \omega \times \mathbf{L} = 0. \quad (3.47)$$

Преобразование

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} + \omega \times \mathbf{L} \quad (3.48)$$

находится в полной аналогии с преобразованием скорости при переходе от неподвижной к вращающейся системе координат. Существенно, что наблюдатель, находящийся в системе хуз, фиксирует только относительное изменение  $\mathbf{L}$  (член  $\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t}$ ).

Для наблюдателя в лабораторной системе к относительному изменению  $\mathbf{L}$  добавляется его “переносное” изменение, связанное с вращением системы хуз с мгновенной угловой скоростью  $\omega$ .

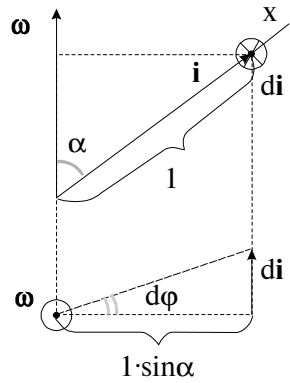
Проецируя векторы  $\mathbf{L}$  и  $\omega$  на оси системы хуз, жестко связанной с твердым телом, получим:

$$\frac{\partial L_x}{\partial t} + \omega_y L_z - \omega_z L_y = 0; \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial L_y}{\partial t} + \omega_z L_x - \omega_x L_z = 0; \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial L_z}{\partial t} + \omega_x L_y - \omega_y L_x = 0. \quad (3.51)$$

Поскольку оси  $Ox, Oy$  и  $Oz$  – главные оси инерции для точки закрепления, то  $L_x = J_x \omega_x, L_y = J_y \omega_y, L_z = J_z \omega_z$ , и из (3.49-3.51) будем иметь следующие уравнения:



$$|\mathbf{di}| = 1 \cdot \sin \alpha \cdot d\varphi;$$

$$\frac{|\mathbf{di}|}{dt} = 1 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{d\varphi}{dt};$$

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \omega \times \mathbf{i}$$

Рис. 3.15

$$J_x \frac{\partial \omega_x}{\partial t} + \omega_y \omega_z (J_z - J_y) = 0; \quad (3.52)$$

$$J_y \frac{\partial \omega_y}{\partial t} + \omega_z \omega_x (J_x - J_z) = 0; \quad (3.53)$$

$$J_z \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \omega_x \omega_y (J_y - J_x) = 0, \quad (3.54)$$

где  $J_x, J_y, J_z$  – главные моменты инерции тела. Обычно эти уравнения называют уравнениями Эйлера при отсутствии моментов внешних сил.

В частном случае (рис. 3.14)  $J_x = J_y$ , и из (3.52-3.54) получаем:

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial t} + \omega_y \omega_0 = 0; \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial \omega_y}{\partial t} - \omega_x \omega_0 = 0; \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = 0, \quad (3.57)$$

где введено обозначение

$$\omega_0 = \omega_z \cdot \frac{J_z - J_y}{J_x}. \quad (3.58)$$

Из (3.57) следует, что  $\omega_z = \text{const}$ , то есть проекция вектора  $\omega$  на ось симметрии тела остается постоянной. Ясно, что  $\omega_0$  – также постоянная величина. Ее физический смысл становится понятным, если записать решение уравнений (3.55, 3.56):

$$\omega_x = \omega_{\perp} \cos(\omega_0 t + \varphi); \quad \omega_y = \omega_{\perp} \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (3.59)$$

где  $\omega_{\perp} = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$  – проекция вектора  $\omega$  на плоскость  $xy$ .

Таким образом, вектор  $\omega$  составляет с осью симметрии тела угол  $\theta = \text{arctg} \frac{\omega_{\perp}}{\omega_z}$  и вращается вокруг этой оси, как следует из (3.59), с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$ . Начальная фаза  $\varphi$  этого вращения определяется начальными условиями.

Посмотрим, как будет выглядеть движение твердого тела в лабораторной системе  $x_0 y_0 z_0$ . Поскольку нам известны значения  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  и  $\omega_z$ , то закон движения тела (зависимость углов Эйлера от времени) в принципе может быть получен из кинематических уравнений Эйлера (1.30 - 1.32). Однако это связано с решением в общем случае довольно сложных дифференциальных уравнений, поэтому мы ограничимся качественным рассмотрением движения тела. В силу того, что

$$\mathbf{L} = J_x \omega_x \mathbf{i} + J_y \omega_y \mathbf{j} + J_z \omega_z \mathbf{k} \quad (3.60)$$

( $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – орты главных осей инерции тела), а  $J_x = J_y$ , можно записать

$$\mathbf{L} = J_z \omega_z \mathbf{k} + J_x (\omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j}) + J_x \omega_z \mathbf{k} - J_x \omega_z \mathbf{k} \quad (3.61)$$

Здесь добавлен и вычтен член  $J_x \omega_z \mathbf{k}$ , что позволяет представить (3.61) в виде

$$\mathbf{L} = (J_z - J_x) \omega_z \mathbf{k} + J_x \boldsymbol{\omega} \quad (3.62)$$

Отсюда видно, что  $\mathbf{k}$  (ось фигуры),  $\mathbf{L}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  лежат в одной плоскости. Из (3.62) следует, что

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} - \omega_0 \mathbf{k}, \quad (3.63)$$

где

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{\mathbf{L}}{J_x} \quad (3.64)$$

есть составляющая угловой скорости по направлению  $\mathbf{L}$ . Плоскость, в которой лежат ось фигуры,  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{L}$ , поворачивается (прецессирует) вокруг направления  $\mathbf{L}$  с угловой скоростью  $\boldsymbol{\Omega}$ , называемой скоростью прецессии (рис. 3.16). Само движение называется регулярной прецессией свободного симметричного волчка.

Отметим, что в случае веретенообразного тела, изображенного на рис. 3.16,  $J_z < J_x$ , поэтому  $\omega_0 < 0$  (см. (3.58)), и вектор  $-\omega_0 \mathbf{k}$  направлен в ту же сторону, что и  $\mathbf{k}$ .

**Замечание 1.** Закрепление аксиально симметричного твердого тела в центре масс может быть выполнено не только с помощью карданова подвеса, но, например, так, как показано на рис. 3.17. Массивное тело, сечение которого плоскостью рисунка заштриховано, шарнирно закреплено в точке  $O$ , совпадающей с центром масс тела.

**Замечание 2.** Используя построение Пуансо (см. лекцию №2), регулярной прецессии свободного симметричного волчка можно дать наглядную геометрическую интерпретацию (рис. 3.18).

Момент импульса  $\mathbf{L}$  тела относительно неподвижного центра масс  $O$  представляет собой вектор, постоянный по величине и направлению. Эллип-

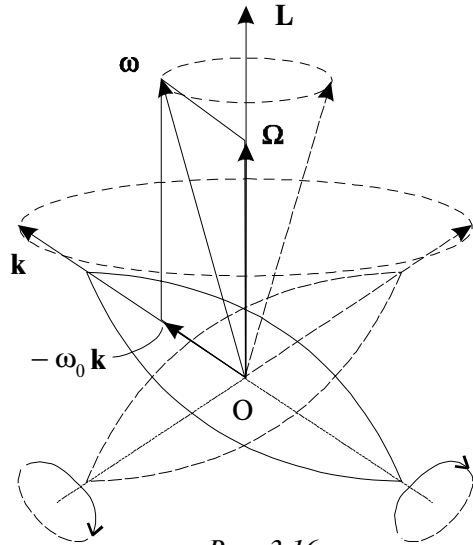


Рис. 3.16

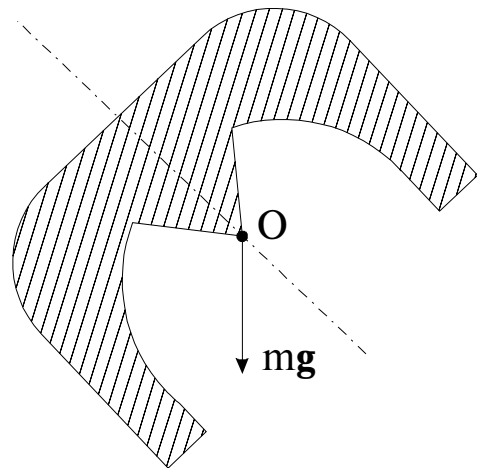


Рис. 3.17

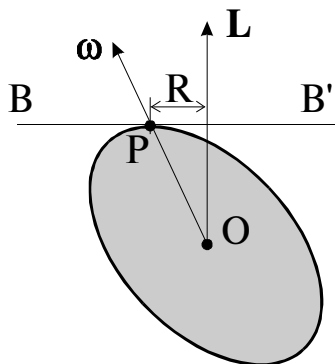


Рис. 3.18

соид инерции тела с центром в точке  $O$ , сечение которого изображено на рис. 3.18, является эллипсоидом вращения. Касательная к эллипсоиду плоскость  $BB'$  проведена через полюс  $P$  пересечения мгновенной угловой скорости  $\omega$  с эллипсоидом; эта плоскость перпендикулярна к вектору  $L$  и в лабораторной системе отсчета сохраняет свое положение неизменным. При регулярной прецессии волчка эллипсоид инерции тела катится по плоскости  $BB'$  без скольжения, так что геометрическим местом полюсов  $P$  является окружность радиуса  $R$ , принадлежащая плоскости  $BB'$ .

**Замечание 3.** Во избежание путаницы отметим следующее. Описанное выше движение связано с изменением угла прецессии  $\psi$  (см. рис. 1.3), поэтому оно и было названо регулярной прецессией (кинематическое определение). Однако существуют определения прецессии как движения оси симметрии тела под действием момента внешних сил (динамическое определение, см. лекцию №4). Описанное же выше движение с точки зрения динамического определения называют нутацией.

## ЛЕКЦИЯ №4.

*Гироскопы. Свободный гироскоп. Прецессия гироскопа под действием внешних сил. Угловая скорость прецессии. Нутации. Гироскопические силы, их природа и проявления.*

*Волчки. Устойчивость вращения симметричного волчка.*

Гироскоп – это массивное аксиально-симметричное тело, вращающееся с большой угловой скоростью вокруг своей оси симметрии.

**Свободный гироскоп.** В этом случае моменты всех внешних сил, включая и силу тяжести, относительно центра масс гироскопа равны нулю. Это можно реализовать, например, поместив гироскоп в карданов подвес, описанный в лекции №3 и изображенный на рис. 3.13.

При этом

$$\mathbf{M} = 0; \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \quad (4.1)$$

и момент импульса сохраняется:

$$\mathbf{L} = \text{const}. \quad (4.2)$$

Гироскоп ведет себя так же, как и свободное тело вращения (см. лекцию №3). В зависимости от начальных условий возможны два варианта поведения гироскопа:

1. Если гироскоп раскручен вокруг оси симметрии, то направления момента импульса и угловой скорости совпадают:

$$\mathbf{L} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \text{const}, \quad (4.3)$$

и направление оси симметрии гироскопа остается неизменным. В этом можно убедиться, поворачивая подставку, на которой расположен карданов подвес – при произвольных поворотах подставки ось гироскопа сохраняет неизменное направление в пространстве. По этой же причине волчок, “запущенный” на листе картона и подброшенный вверх (рис. 4.1), сохраняет направление своей оси во время полета, и, падая острием на картон, продолжает устойчиво вращаться, пока не израсходуется запас его кинетической энергии.

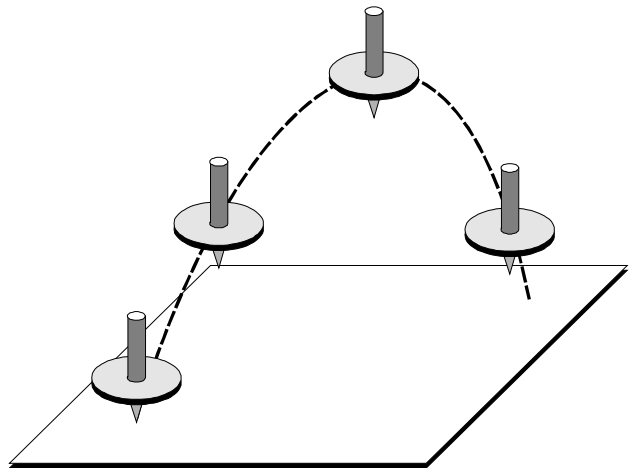


Рис. 4.1

Свободный гироскоп, раскрученный вокруг оси симметрии, обладает весьма значительной устойчивостью. Из основного уравнения моментов следует, что изменение момента импульса

$$\Delta \mathbf{L} = \int_0^{\Delta t} \mathbf{M} \cdot dt . \quad (4.4)$$

Если интервал времени  $\Delta t$  мал, то и  $\Delta \mathbf{L}$  мало, то есть при кратковременных воздействиях даже очень больших сил движение гироскопа изменяется незначительно. Гироскоп как бы сопротивляется попыткам изменить его момент импульса и кажется «затвердевшим».

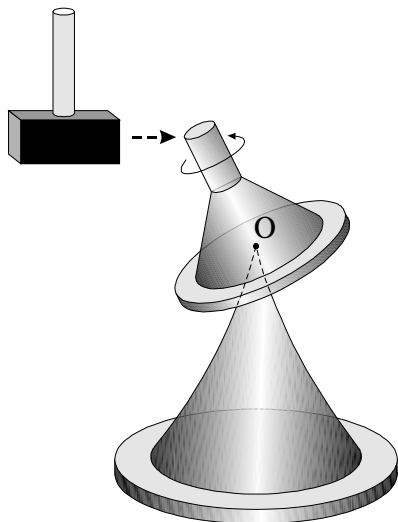


Рис. 4.2

Возьмем гироскоп конусообразной формы, опирающийся на стержень подставки в своем центре масс  $O$  (рис. 4.2). Если тело гироскопа не вращается, то оно находится в состоянии безразличного равновесия, и малейший толчок сдвигает его с места. Если же это тело привести в быстрое вращение вокруг своей оси, то даже сильные удары деревянным молотком не смогут сколько-нибудь значительно изменить направление оси гироскопа в пространстве. Устойчивость свободного гироскопа используется в различных технических устройствах, например, в автопилоте.

2. Если свободный гироскоп раскручен так, что вектор мгновенной угловой скорости и ось симметрии гироскопа не совпадают (как правило, это несовпадение при быстром вращении бывает незначительным), то наблюдается движение, описанное в лекции

№3 как “свободная регулярная прецессия”. Применительно же к гироскопу его называют нутацией. При этом ось симметрии гироскопа, векторы  $\mathbf{L}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  лежат в одной плоскости, которая вращается вокруг направления  $\mathbf{L} = \text{const}$  с

угловой скоростью, равной  $\frac{L}{J_x}$ , где  $J_x$  — момент инерции гироскопа относи-

тельно главной центральной оси, перпендикулярной оси симметрии. Эта угловая скорость (назовем ее скоростью нутации) при быстром собственном вращении гироскопа оказывается достаточно большой, и нутация воспринимается глазом как мелкое дрожание оси симметрии гироскопа.

Нутационное движение легко продемонстрировать с помощью гироскопа, показанного на рис. 4.2 — оно возникает при ударах молотком по стержню вращающегося вокруг своей оси гироскопа. При этом чем сильнее раскручен гироскоп, тем больше его момент импульса  $\mathbf{L}$  — тем больше скорость нутации и тем “мельче” дрожания оси фигуры. Этот опыт демонстрирует еще одну характерную особенность нутации — с течением времени она постепенно уменьшается и исчезает. Это — следствие неизбежного трения в опоре гироскопа.

Наша Земля — своего рода гироскоп, и ей тоже свойственно нутационное движение. Это связано с тем, что Земля несколько приплюснута к полюсам, в силу чего моменты инерции относительно оси симметрии ( $J_z$ ) и



относительно оси, лежащей в экваториальной плоскости ( $J_x, J_y$ ) различаются. При этом  $J_x = J_y$ , а  $\frac{J_z - J_x}{J_x} \approx \frac{1}{300}$ . В системе отсчета, связанной с Землей, ось вращения движется по поверхности конуса вокруг оси симметрии Земли с угловой скоростью  $\omega_0$ , рассчитываемой по формуле (3.58), то есть она должна совершать один оборот примерно за 300 дней. На самом деле в силу, как предполагается, неабсолютной жесткости Земли, это время оказывается больше — оно составляет около 440 суток. При этом расстояние точки земной поверхности, через которую проходит ось вращения, от точки, через которую проходит ось симметрии (Северный полюс), равно всего нескольким метрам. Нутационное движение Земли не затухает — по-видимому, его поддерживают сезонные изменения, происходящие на поверхности нашей планеты.

**Прецессия гироскопа под действием внешних сил. Элементарная теория.** Рассмотрим теперь ситуацию, когда к оси гироскопа приложена сила, линия действия которой не проходит через точку закрепления. Опыты показывают, что в этом случае гироскоп ведет себя весьма необычным образом.

Если к оси шарнирно закрепленного в точке  $O$  гироскопа (рис. 4.3) прикрепить пружину и тянуть за нее вверх с силой  $F$ , то ось гироскопа будет перемещаться не в направлении силы, а перпендикулярно к ней, вбок. Это движение называется прецессией гироскопа под действием внешней силы.

Опытным путем можно установить, что угловая скорость прецессии зависит не только от величины силы  $F$  (рис. 4.3), но и от того, к какой точке оси гироскопа эта сила приложена: с увеличением  $F$  и ее плеча  $l$  относительно точки закрепления  $O$  скорость прецессии увеличивается. При этом оказывается, что чем сильнее раскручен гироскоп, тем меньше угловая скорость прецессии при данных  $F$  и  $l$ .

В качестве силы  $F$ , вызывающей прецессию, может выступать сила тяжести, если точка закрепления гироскопа

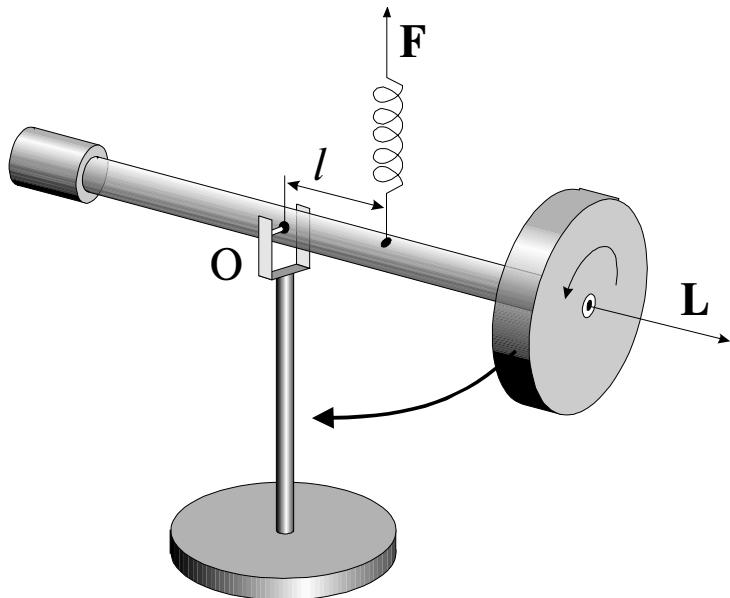


Рис. 4.3

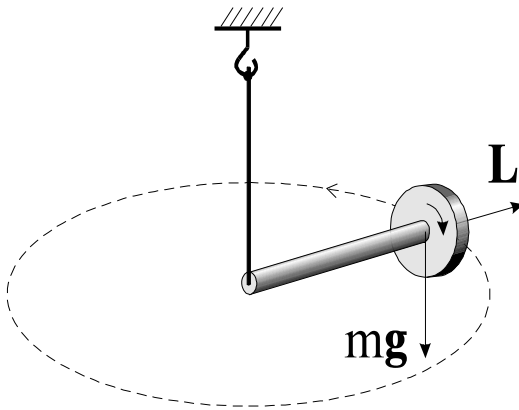


Рис. 4.4

не совпадает с центром масс. Так, если стержень с быстро вращающимся диском подвесить на нитке (рис. 4.4), то он не опускается вниз, как это можно было бы предположить, а совершает прецессионное движение вокруг нитки. Наблюдение прецессии гироскопа под действием силы тяжести в некотором смысле даже удобнее — линия действия силы “автоматически” смещается вместе с осью гироскопа, сохраняя свою ориентацию в пространстве.

Можно привести и другие примеры прецессии — например, движение оси хорошо известной детской игрушки — юлы с заостренным концом (рис. 4.5). Юла, раскрученная вокруг своей оси и поставленная на горизонтальную плоскость слегка наклонно, начинает прецессировать вокруг вертикальной оси под действием силы тяжести (рис. 4.5).

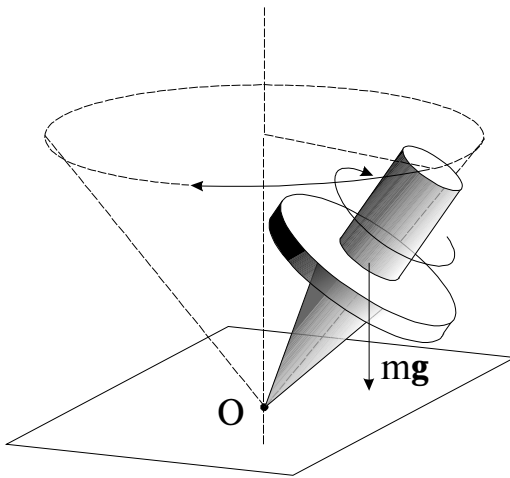


Рис. 4.5

Точное решение задачи о движении гироскопа в поле внешних сил довольно сложно. Однако, выражение для угловой скорости прецессии можно легко получить в рамках так называемой **элементарной теории гироскопа**. В этой теории делается допущение, что мгновенная угловая скорость вращения гироскопа и его момент импульса направлены вдоль оси симметрии гироскопа. Другими словами, предполагается, что угловая скорость вращения гироскопа вокруг своей оси значительно больше угловой скорости прецессии:

$$\omega \gg \Omega, \quad (4.5)$$

так что вкладом в  $\mathbf{L}$ , обусловленным прецессионным движением гироскопа, можно пренебречь. В этом приближении момент импульса гироскопа, очевидно, равен

$$\mathbf{L} = J_z \boldsymbol{\omega}, \quad (4.6)$$

где  $J_z$  — момент инерции относительно оси симметрии.

Итак, рассмотрим тяжелый симметричный гироскоп, у которого неподвижная точка  $S$  (точка опоры о подставку) не совпадает с центром масс  $O$  (рис. 4.6).

Момент силы тяжести относительно точки  $S$

$$\mathbf{M} = mg\ell \sin \theta, \quad (4.7)$$

где  $\theta$  — угол между вертикалью и осью симметрии гироскопа. Вектор  $\mathbf{M}$  направлен по нормали к плоскости, в которой лежат ось симметрии гироскопа и вертикаль, проведенная через точку  $S$  (рис. 4.6). Сила реакции опоры проходит через  $S$ , и ее момент относительно этой точки равен нулю.

Изменение момента импульса  $\mathbf{L}$  определяется выражением

$$d\mathbf{L} = \mathbf{M} \cdot dt. \quad (4.8)$$

При этом и  $\mathbf{L}$ , и ось волчка прецессируют вокруг вертикального направления с угловой скоростью  $\Omega$ . Еще раз подчеркнем: делается допущение, что выполнено условие (4.5) и что  $\mathbf{L}$  постоянно направлен вдоль оси симметрии гироскопа. Из рис. 4.6 следует, что

$$dL = L \cdot \sin \theta \cdot \Omega \cdot dt. \quad (4.9)$$

В векторном виде

$$d\mathbf{L} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L} \cdot dt. \quad (4.10)$$

Сравнивая (4.8) и (4.10), получаем следующую связь между моментом силы  $\mathbf{M}$ , моментом импульса  $\mathbf{L}$  и угловой скоростью прецессии  $\boldsymbol{\Omega}$ :

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}. \quad (4.11)$$

Это соотношение позволяет определить направление прецессии при заданном направлении вращения волчка вокруг своей оси.

Обратим внимание, что  $\mathbf{M}$  определяет угловую скорость прецессии, а не угловое ускорение, поэтому мгновенное «выключение»  $\mathbf{M}$  приводит к мгновенному же исчезновению прецессии, то есть прецессионное движение является безынерционным.

Сила, вызывающая прецессионное движение, может иметь любую природу. Для поддержания этого движения важно, чтобы вектор момента силы  $\mathbf{M}$  поворачивался вместе с осью гироскопа. Как уже было отмечено, в случае силы тяжести это достигается автоматически. При этом из (4.11) с учетом того, что в нашем приближении справедливо соотношение (4.6), можно получить:

$$mg\ell \cdot \sin \theta = \Omega J_z \omega \sin \theta. \quad (4.12)$$

Отсюда для угловой скорости прецессии получаем

$$\Omega = \frac{mg\ell}{J_z \omega}. \quad (4.13)$$

Следует отметить, что  $\Omega$  не зависит от угла  $\theta$  наклона оси гироскопа и обратно пропорциональна  $\omega$ , что хорошо согласуется с опытными данными.

**Прецессия гироскопа под действием внешних сил. Отход от элементарной теории. Нутации.** Опыт показывает, что прецессионное движение гироскопа под действием внешних сил в общем случае сложнее, чем то, которое

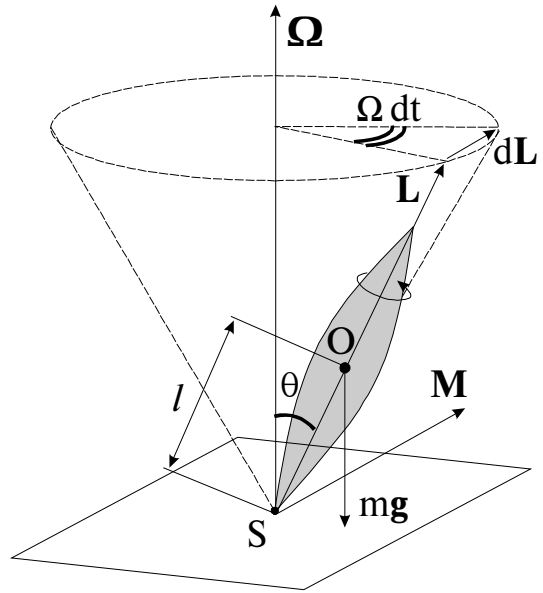


Рис. 4.6

было описано выше в рамках элементарной теории. Если сообщить гироскопу толчок, изменяющий угол  $\theta$  (см. рис. 4.6), то прецессия перестанет быть равномерной (часто говорят: регулярной), а будет сопровождаться мелкими колебаниями вершины гироскопа – нутациями. Для их описания необходимо учесть несовпадение вектора полного момента импульса  $\mathbf{L}$ , мгновенной угловой скорости вращения  $\boldsymbol{\omega}$  и оси симметрии гироскопа.

Точная теория гироскопа выходит за рамки курса общей физики. Из соотношения  $d\mathbf{L} = \mathbf{M}dt$  следует, что конец вектора  $\mathbf{L}$  движется в направлении  $\mathbf{M}$ , то есть перпендикулярно к вертикали и к оси гироскопа. Это значит, что проекции вектора  $\mathbf{L}$  на вертикаль  $L_v$  и на ось гироскопа  $L_0$  остаются постоянными. Еще одной постоянной является энергия

$$E = T + mg\ell \cdot \cos \theta, \quad (4.14)$$

где  $T$  – кинетическая энергия гироскопа. Выражая  $L_v$ ,  $L_0$  и  $T$  через углы Эйлера и их производные, можно с помощью уравнений Эйлера описать движение тела аналитически.

Результат такого описания оказывается следующим: вектор момента импульса  $\mathbf{L}$  описывает неподвижный в пространстве конус прецессии, и при этом ось симметрии гироскопа движется вокруг вектора  $\mathbf{L}$  по поверхности конуса нутации. Вершина конуса нутации, как и вершина конуса прецессии, находится в точке закрепления гироскопа, а ось конуса нутации совпадает по направлению с  $\mathbf{L}$  и движется вместе с ним. Угловая скорость нутации определяется выражением

$$\omega_{\text{нут}} = \frac{L}{J_s} \approx \frac{J_z \omega}{J_s}, \quad (4.15)$$

где  $J_z$  и  $J_s$  – моменты инерции гироскопа относительно его оси симметрии и относительно оси, проходящей через точку опоры и перпендикулярной оси симметрии,  $\omega$  – угловая скорость вращения вокруг оси симметрии (сравн. с (3.64)).

Таким образом, ось гироскопа участвует в двух движениях: нутационном и прецессионном. Траектории абсолютного движения вершины гироскопа представляют собой замысловатые линии, примеры которых представлены на рис. 4.7.

Характер траектории, по которой движется вершина гироскопа, зависит от начальных условий. В случае рис. 4.7а гироскоп был раскручен вокруг оси симметрии, установлен на подставке под некоторым углом к вертикали и осторожно отпущен. В случае рис. 4.7б ему, кроме того, был сообщен некоторый толчок вперед, а в случае рис. 4.7в – толчок назад по ходу прецессии. Кривые на рис. 4.7 вполне аналогичны циклоидам, описываемым точкой на ободе колеса, катящегося по плоскости без проскальзывания или с проскальзыванием в ту или иную сторону. И лишь сообщив гироскопу начальный толчок вполне определенной величины и направления, можно добиться того, что ось гироскопа будет прецессировать без нутаций. Чем быстрее вращается гироскоп, тем больше угловая скорость нутаций и тем меньше их амплитуда. При очень быстром вращении нутации делаются практически незаметными для глаза.

Может показаться странным: почему гироскоп, будучи раскручен, установлен под углом к вертикали и отпущен, не падает под действием силы тяжести, а движется вбок? Откуда берется кинетическая энергия прецессионного движения?

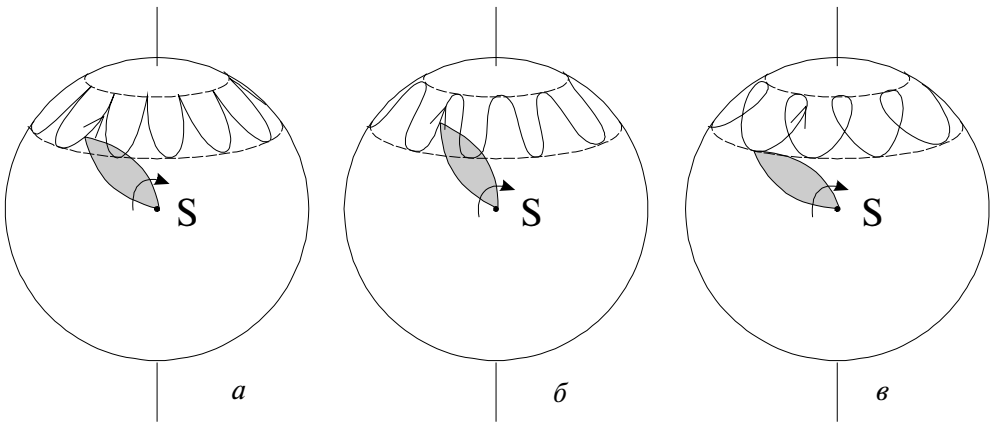


Рис. 4.7

Ответы на эти вопросы можно получить только в рамках точной теории гироскопа. На самом деле гироскоп действительно начинает падать, а прецессионное движение появляется как следствие закона сохранения момента импульса. В самом деле, отклонение оси гироскопа вниз приводит к уменьшению проекции момента импульса на вертикальное направление. Это уменьшение должно быть скомпенсировано моментом импульса, связанным с прецессионным движением оси гироскопа. С энергетической точки зрения кинетическая энергия прецессии появляется за счет изменения потенциальной энергии гироскопа.

Если за счет трения в опоре нутации гасятся быстрее, чем вращение гироскопа вокруг оси симметрии (как правило, так и бывает), то вскоре после “запуска” гироскопа нутации исчезают и остается чистая прецессия (рис. 4.8). При этом угол наклона оси гироскопа к вертикали ( $\theta_2$ ) оказывается больше, чем он был вначале ( $\theta_1$ ), то есть потенциальная энергия гироскопа уменьшается. Таким образом, ось гироскопа должна немного опуститься, чтобы иметь возможность прецессировать вокруг вертикальной оси.

**Гироскопические силы.** Обратимся к простому опыту: возьмем в руки вал АВ с насаженным на него колесом С (рис. 4.9). Пока колесо не раскручено, не представляет никакого труда поворачивать вал в пространстве произвольным образом. Но если колесо раскручено, то попытки повернуть вал, например, в горизонтальной плоскости с небольшой угловой скоростью  $\Omega$  приводят к интересному эффекту: вал стремится вырваться из рук и повернуться в вертикальной плоскости; он действует на кисти рук с определенными силами  $\mathbf{R}_A$  и  $\mathbf{R}_B$  (рис. 4.9).

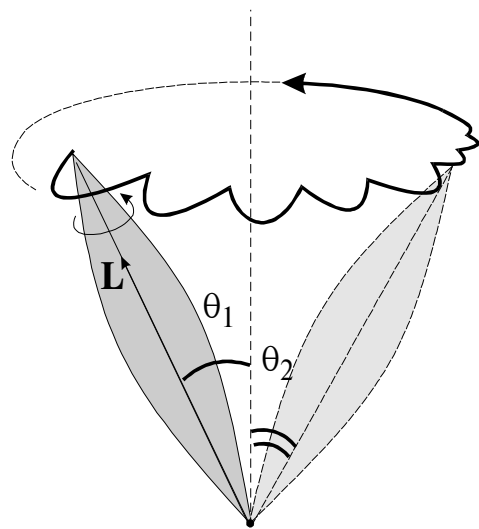


Рис. 4.8

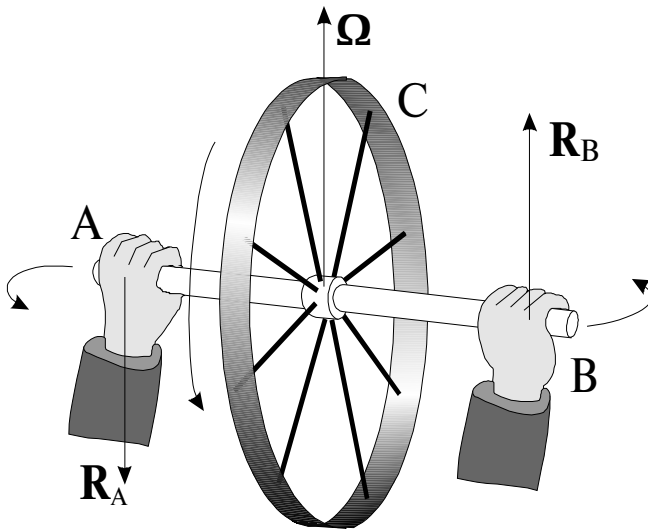


Рис. 4.9

в горизонтальной плоскости и выйти из нее не может.

Раскрутим гироскоп вокруг его оси симметрии до большой угловой скорости (момент импульса  $\mathbf{L}$ ) и станем поворачивать раму с укрепленным в ней гироскопом вокруг вертикальной оси  $OO'$  с некоторой угловой скоростью  $\Omega$ , как показано на рис. 4.10. Момент импульса  $\mathbf{L}$ , получит при этом приращение  $d\mathbf{L}$ , которое должно быть обеспечено моментом сил  $\mathbf{M}$ , приложенным к оси гироскопа. Момент  $\mathbf{M}$ , в свою очередь, создан парой сил  $\mathbf{F} \div \mathbf{F}'$ , возникающих при вынужденном повороте оси гироскопа и действующих на ось со стороны рамы. По третьему закону Ньютона ось действует на

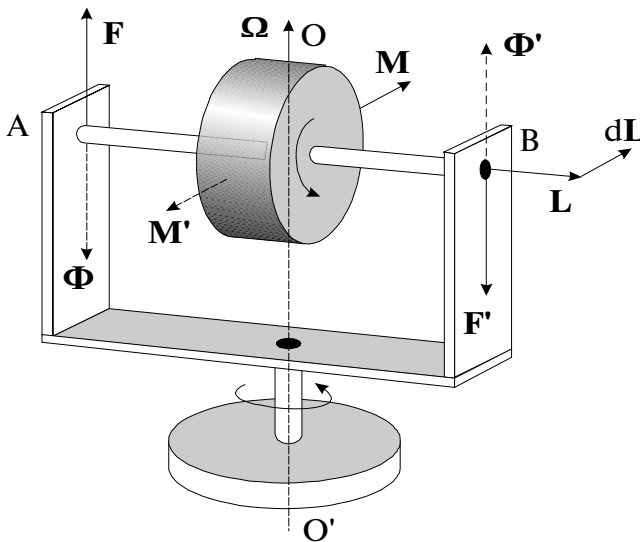


Рис. 4.10

Требуется приложить осязательное физическое усилие, чтобы удержать вал с вращающимся колесом в горизонтальной плоскости.

Рассмотрим эффекты, возникающие при вынужденном вращении оси гироскопа, более подробно. Пусть ось гироскопа укреплена в U-образной раме, которая может поворачиваться вокруг вертикальной оси  $OO'$  (рис. 4.10). Такой гироскоп обычно называют несвободным — его ось лежит

раму с силами  $\Phi \div \Phi'$  (рис. 4.10). Эти силы называются гироскопическими; они создают гироскопический момент  $\mathbf{M}'$ . Появление гироскопических сил называют гироскопическим эффектом. Именно эти гироскопические силы мы и чувствуем, пытаясь повернуть ось вращающегося колеса (рис. 4.9).

Гироскопический момент нетрудно рассчитать. Положим, согласно элементарной теории, что

$$\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega}, \quad (4.16)$$

где  $J$  — момент инерции

гироскопа относительно его оси симметрии, а  $\omega$  – угловая скорость собственного вращения. Тогда момент внешних сил, действующих на ось, будет равен

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L} = \boldsymbol{\Omega} \times (J\boldsymbol{\omega}), \quad (4.17)$$

где  $\boldsymbol{\Omega}$  – угловая скорость вынужденного поворота (иногда говорят: вынужденной прецессии). Со стороны оси на подшипники действует противоположный момент

$$\mathbf{M}' = -\mathbf{M} = J\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}. \quad (4.18)$$

Таким образом, вал гироскопа, изображенного на рис. 4.10, будет прижиматься кверху в подшипнике В и оказывать давление на нижнюю часть подшипника А.

Направление гироскопических сил можно легко найти с помощью правила, сформулированного Н.Е.Жуковским: гироскопические силы стремятся совместить момент импульса  $\mathbf{L}$  гироскопа с направлением угловой скорости вынужденного поворота. Это правило можно наглядно продемонстрировать с помощью устройства, представленного на рис. 4.11.

Ось гироскопа закреплена в кольце, которое может свободно поворачиваться в обойме. Приведем обойму во вращение вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\boldsymbol{\Omega}$  (вынужденный поворот), и кольцо с гироскопом будет поворачиваться в обойме до тех пор, пока направления  $\mathbf{L}$  и  $\boldsymbol{\Omega}$  не совпадут. Такой эффект лежит в основе известного магнитомеханического явления – намагничивания железного стержня при его вращении вокруг собственной оси – при этом спины электронов выстраиваются вдоль оси стержня (опыт Барнетта).

Гироскопические усилия испытывают подшипники осей быстро вращающихся частей машины при повороте самой машины (турбины на корабле, винта на самолете и т.д.). При значительных величинах угловой скорости вынужденной прецессии  $\boldsymbol{\Omega}$  и собственного вращения  $\boldsymbol{\omega}$ , а также больших размерах маховика эти силы могут даже разрушить подшипники. Рассмотрим некоторые примеры проявления гироскопических сил.

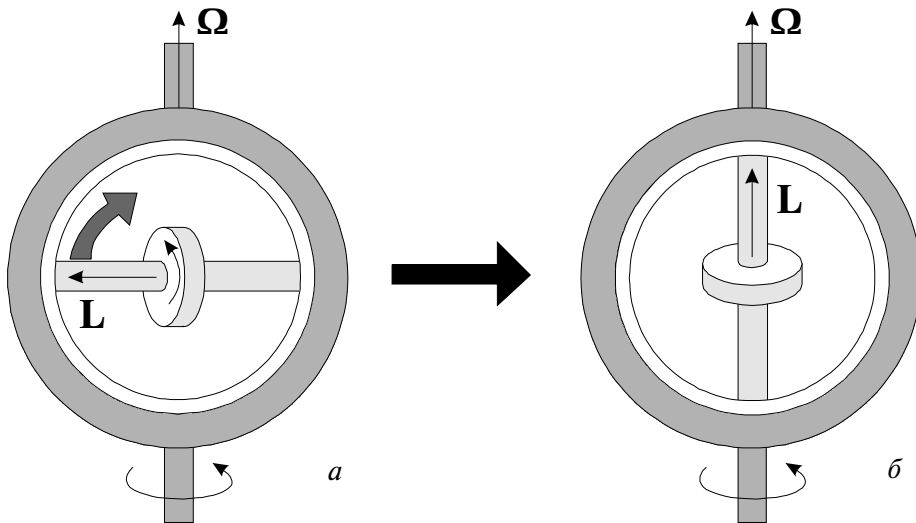


Рис. 4.11

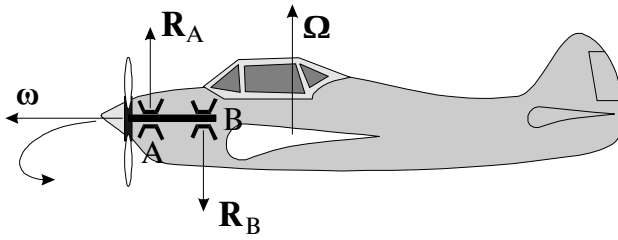


Рис. 4.12

винта (вектор  $\omega$ ) с осью вынужденной прецессии (вектор  $\Omega$ ). Самолет начинает задирать нос кверху, и летчик должен “дать ручку от себя”, то есть опустить вниз руль высоты. Таким образом, момент гироскопических сил будет компенсирован моментом аэродинамических сил.

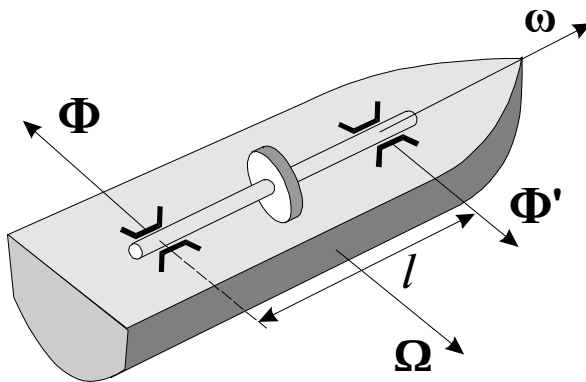


Рис. 4.13

плоскости. При качке эти силы, как и гироскопический момент, периодически меняют свое направление на противоположное и могут вызвать “рыскание” корабля, если он не слишком велик (например, буксира).

Допустим, что масса турбины  $m = 3000$  кг, ее радиус инерции  $R_{ин} = 0,5$  м, скорость вращения турбины  $n = 3000$  об/мин, максимальная угловая скорость корпуса судна при килевой качке  $\Omega = 5$  град/с, расстояние между подшипниками  $l = 2$  м. Максимальное значение гироскопической силы, действующей на каждый из подшипников, составит

$$\Phi = \frac{M}{l} = \frac{J\omega\Omega}{l} = \frac{mR_{ин}^2 \cdot 2\pi n \cdot \Omega}{l}. \quad (4.19)$$

После подстановки числовых данных получим  $\Phi \approx 10^4$  Н, то есть около 1 тонны.

**Пример 3.** Гироскопические силы могут вызвать так называемые колебания “шимми” колес автомобиля (рис. 4.14) [9]. Колесу, вращающемуся вокруг оси  $AA'$  с угловой скоростью  $\omega$ , в момент наезда на препятствие сообщается дополнительная скорость вынужденного поворота вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка. При этом возникает момент гироскопических сил, и колесо начнет поворачиваться вокруг оси  $BB'$ . Приобретая угловую скорость поворота вокруг оси  $BB'$ , колесо снова начнет поворачи-

**Пример 1.** Легкий одномоторный самолет с правым винтом совершает левый вираж (рис. 4.12). Гироскопический момент передается через подшипники А и В на корпус самолета и действует на него, стремясь совместить ось собственного вращения

**Пример 2.** При килевой качке корабля (с носа на корму и обратно) ротор быстроходной турбины участвует в двух движениях: во вращении вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$  и в повороте вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной валу турбины, с угловой скоростью  $\Omega$  (рис. 4.13). При этом вал турбины будет давить на подшипники с силами  $\Phi \div \Phi'$ , лежащими в горизонтальной



ваться вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка. В результате возникают колебательные движения колеса вокруг двух взаимно перпендикулярных осей: оси поворота  $BB'$  и оси, совмещенной с направлением движения автомобиля. Если в конструкции автомобиля не принять специальных мер, эти колебания могут привести к срыву покрышки с обода колеса и к поломке деталей его крепления. В современных конструкциях подвески колесо при наезде на препятствие практически остается в вертикальной плоскости.

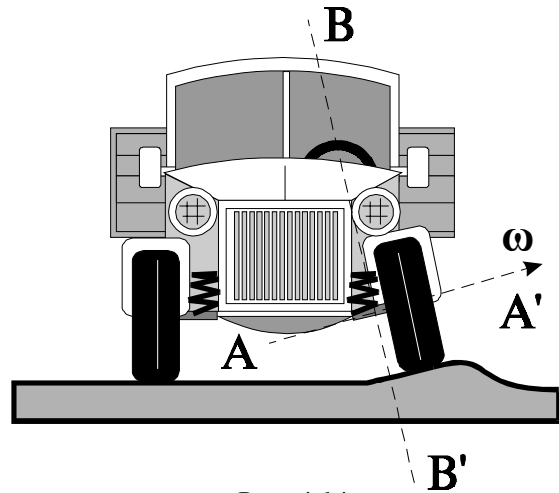


Рис. 4.14

**Пример 4.** С гироскопическим эффектом мы сталкиваемся и при езде на велосипеде (рис. 4.15). Совершая, например, поворот направо, велосипедист инстинктивно смещает центр тяжести своего тела вправо, как бы заваливая велосипед. Возникшее принудительное вращение велосипеда с угловой скоростью  $\Omega$  приводит к появлению гироскопических сил с моментом  $M'$ . На заднем колесе этот момент будет погашен в подшипниках, жестко связанных с рамой. Переднее же колесо, имеющее по отношению к раме свободу вращения в рулевой колонке, под действием гироскопического момента начнет поворачиваться как раз в том направлении, которое было необходимо для правого поворота велосипеда. Опытные велосипедисты совершают подобные повороты, что называется, “без рук”.

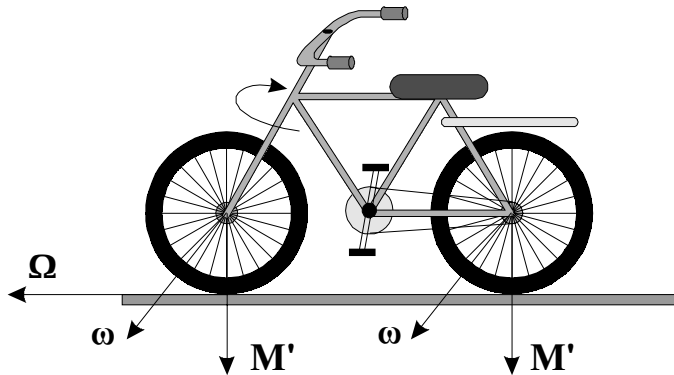


Рис. 4.15

Вопрос о возникновении гироскопических сил можно рассматривать и с другой точки зрения. Можно считать, что гироскоп, изображенный на рис. 4.10, участвует в двух одновременных движениях: относительном вращении вокруг собственной оси с угловой скоростью  $\omega$  и переносном, вынужденном повороте вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\Omega$ . Таким образом, элементарные массы  $\Delta m_i$ , на которые можно разбить диск гироскопа (маленькие кружки на рис. 4.16), должны испытывать кориолисовы ускорения

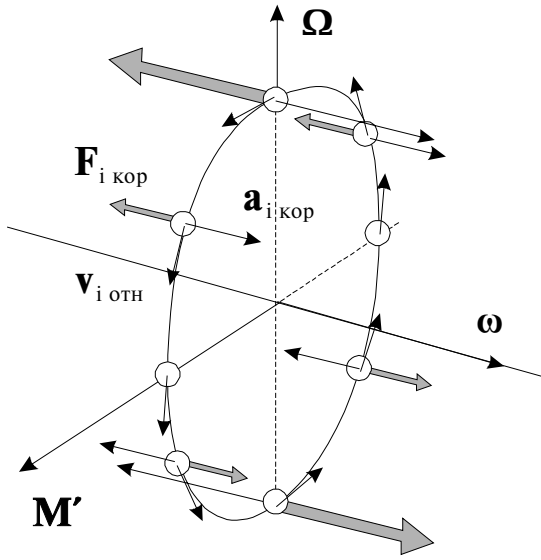


Рис. 4.16

бы вектор  $\omega$  совместился с  $\mathbf{W}$ . Момент  $\mathbf{M}'$  должен быть уравновешен моментом сил реакции  $\mathbf{F} + \mathbf{F}'$  (рис. 4.10), действующих на ось гироскопа со стороны подшипников. По третьему закону Ньютона, ось будет действовать на подшипники, а через них и на раму, в которой эта ось закреплена, с гироскопическими силами  $\Phi + \Phi'$ . Поэтому и говорят, что гироскопические силы обусловлены силами Кориолиса.

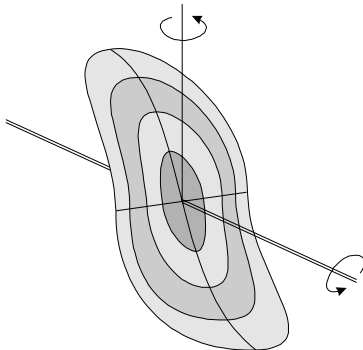


Рис. 4.17

Возникновение кориолисовых сил можно легко продемонстрировать, если вместо жесткого диска гироскопа взять гибкий резиновый диск (рис. 4.17). При повороте вала с раскрученным диском вокруг вертикальной оси он изгибается в направлении действия кориолисовых сил так, как изображено на рис. 4.17.

### Волчки.

Волчки кардинально отличаются от гироскопов тем, что в общем случае они не имеют ни одной неподвижной точки. Произвольное движение волчков имеет весьма сложный характер: будучи раскручены вокруг оси симметрии и поставлены на плоскость, они прецессируют, “бегают” по плоскости, выписывая замысловатые фигуры, а иногда даже переворачиваются с одного конца на другой. Не вдаваясь в детали такого необычного поведения волчков, отметим лишь, что немаловажную роль здесь играет сила трения, возникающая в точке соприкосновения волчка и плоскости.

Кратко остановимся на вопросе об устойчивости вращения симметричного волчка произвольной формы. Опыт показывает, что если симметричный волчок привести во вращение вокруг оси симметрии и установить на плоскость в вертикальном положении, то это вращение в зависимости от

$$\mathbf{a}_{i \text{ кор}} = 2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{i \text{ отн}}. \quad (4.20)$$

Эти ускорения будут максимальными для масс, находящихся в данный момент времени на вертикальном диаметре диска, и равны нулю для масс, которые находятся на горизонтальном диаметре (рис. 4.16).

В системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$  (в этой системе отсчета ось гироскопа неподвижна), на массы  $\Delta m_i$  будут действовать кориолисовы силы инерции

$$\mathbf{F}_{i \text{ кор}} = 2 \Delta m_i \mathbf{v}_{i \text{ отн}} \times \boldsymbol{\Omega}. \quad (4.21)$$

Эти силы создают момент  $\mathbf{M}'$ , который стремится повернуть ось гироскопа таким образом, что-

формы волчка и угловой скорости вращения будет либо устойчивым, либо неустойчивым.

Пусть имеется симметричный волчок, изображенный на рис. 4.18. Введем следующие обозначения:  $O$  – центр масс волчка,  $h$  – расстояние от центра масс до точки опоры;  $K$  – центр кривизны волчка в точке опоры,  $r$  – радиус кривизны;  $J_z$  – момент инерции относительно оси симметрии,  $J_x$  – момент инерции относительно главной центральной оси, перпендикулярной оси симметрии.

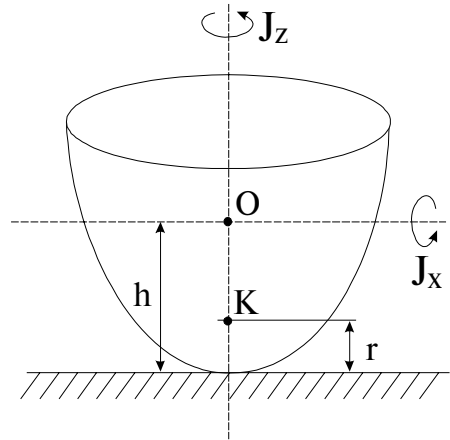


Рис. 4.18

Анализ устойчивости вращения волчка приводит к диаграмме, изображенной на рис. 4.19 [8]. Здесь по оси абсцисс отложено отношение  $\frac{J_z}{J_x}$ , а по оси ординат – отношение  $\frac{h}{r}$ .

Проведем гиперболу  $\frac{h}{r} = \frac{1}{J_z/J_x}$  и прямую  $\frac{h}{r} = 1$ . Эти линии делят область положительных значений  $\frac{h}{r}, \frac{J_z}{J_x}$  на 4 части.

Область I соответствует неустойчивому вращению волчка при всех угловых скоростях, область II – устойчивому вращению при достаточно больших угловых скоростях  $\omega > \omega_{кр}$ . Область III соответствует устойчивому вращению при малых угловых скоростях  $\omega < \omega_{кр}$ , область IV – устойчивому вращению при произвольных  $\omega$ . Критическая угловая скорость  $\omega_{кр}$  зависит от моментов инерции  $J_z, J_x$ , расстояний  $r, h$  и веса тела  $P = mg$  [8]:

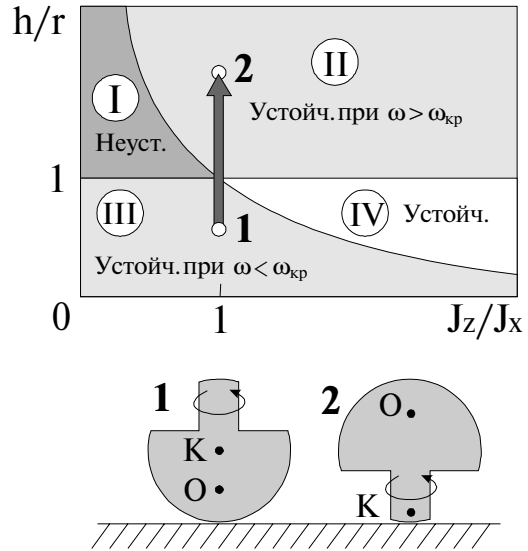


Рис. 4.19

$$\omega_{кр}^2 = \frac{(h - r) \cdot P}{J_x (r / h) \cdot (J_z / J_x - r / h)} \tag{4.22}$$

Рассмотрим, например, китайский волчок, раскрученный до  $\omega > \omega_{кр}$  и поставленный на плоскость вертикально, как показано на рис. 4.20а. Пусть  $J_z = J_x$ . Поскольку  $h < r$ , то этой ситуации соответствует точка 1 в области III на рис. 4.19, то есть область устойчивого вращения лишь при малых  $\omega$ . Таким

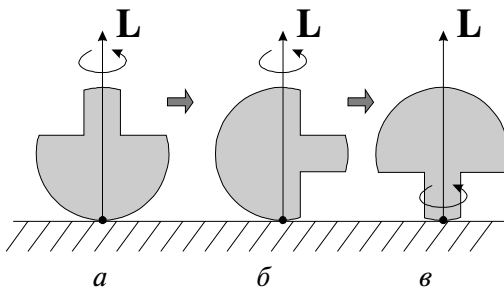


Рис. 4.20

образом, в нашем случае ( $\omega > \omega_{кр}$ ) вращение будет неустойчивым, и волчок перевернется на ножку (точка 2 в области II на рис. 4.19). Следует обратить внимание, что в процессе переворачивания волчка результирующий момент импульса сохраняет свое первоначальное направление, то есть вектор  $\mathbf{L}$  все время направлен вертикально вверх. Это означает, что в ситуации, изображенной на рис. 4.20б, когда ось волчка горизонтальна, вращение вокруг оси симметрии волчка отсутствует! Далее, при опрокидывании на ножку, вращение вокруг оси симметрии будет противоположно исходному (если смотреть все время со стороны ножки, рис. 4.20в).

В случае яйцеобразного волчка поверхность тела в окрестности точки опоры не является сферой, но существуют два взаимно перпендикулярных направления, для которых радиус кривизны в точке опоры принимает экстремальные (минимальное и максимальное) значения. Опыты показывают, что в случае, изображенном на рис. 4.21а, вращение будет неустойчивым, и волчок принимает вертикальное положение, раскручиваясь вокруг оси симметрии и продолжая устойчивое вращение на более остром конце. Это вращение

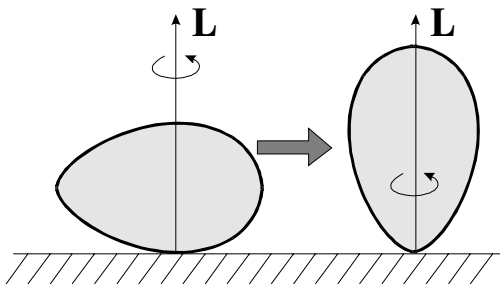


Рис. 4.21

будет продолжаться до тех пор, пока силы трения не погасят в достаточной мере кинетическую энергию волчка, угловая скорость уменьшится (станет меньше  $\omega_0$ ), и волчок упадет.

будет продолжаться до тех пор, пока силы трения не погасят в достаточной мере кинетическую энергию волчка, угловая скорость уменьшится (станет меньше  $\omega_0$ ), и волчок упадет.

будет продолжаться до тех пор, пока силы трения не погасят в достаточной мере кинетическую энергию волчка, угловая скорость уменьшится (станет меньше  $\omega_0$ ), и волчок упадет.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А.Н. Матвеев. Механика и теория относительности. М.: Высшая школа, 1986.
  2. С.П. Стрелков. Механика. М.: Наука, 1975.
  3. С.Э. Хайкин. Физические основы механики. М.: Наука, 1971.
  4. Д.В. Сивухин. Общий курс физики. Т.1. Механика. М.: Наука, 1989.
  5. Р.В. Поль. Механика, акустика и учение о теплоте. М.: Наука, 1971.
  6. Р. Фейнман и др. Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир, 1977.
  7. Ч. Киттель, У. Найт, М. Рудерман. Механика. М.: Наука, 1983.
  8. К. Магнус. Гироскоп. Теория и применение. М., 1974.
  9. В.А. Павлов. Гироскопический эффект, его проявления и использование. Л., 1985.
-



## **Содержание**

<b>ЛЕКЦИЯ №1</b> .....	<b>5</b>
<b>ЛЕКЦИЯ №2</b> .....	<b>21</b>
<b>ЛЕКЦИЯ №3</b> .....	<b>37</b>
<b>ЛЕКЦИЯ №4</b> .....	<b>55</b>
<b>ЛИТЕРАТУРА</b> .....	<b>69</b>

---

