Прямые измерения

Случайные погрешности

В однотипных условиях измерена случайная выборка : $\{x_i\} = \{x_1, x_2, x_3 \ldots x_N\}$
Обработка: Наиболее вероятное значение – среднее арифметическое

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \,.$$

Разброс $\{x_i\}$ вокруг среднего значения $\bar{x}$ характеризуется выборочным стандартным отклонением случайной величины $\{x_i\}$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} \,.$$

При $N \to \infty$ выборочное стандартное отклонение S_x стремится к постоянной величине σ, называемой стандартным отклонением, квадрат которой σ^2 называется дисперсией.
Разброс средних арифметических $\bar{x}_m$, полученных из разных m случайных выборок$\{x_i\}_m$, характеризуется стандартным отклонением среднего арифметического:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} \quad \text{(не путать с } S_x\text{ !)}$$

При $N \to \infty$ $S_{\bar{x}} \to \sigma_{\bar{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} \to 0$, таким образом, разброс средних (т.е. погрешность результатов измерений) уменьшается.

Форма ответа: $x = \bar{x} \pm t \cdot S_{\bar{x}}$ где $t = t(\alpha, N)$ – коэффициент Стьюдента,

α – коэффициент доверия – вероятность попадания результата в доверительный интервал

$$\Delta = [\,\bar{x} - t\cdot S_{\bar{x}}\,,\ \ \bar{x} + t\cdot S_{\bar{x}}\,].$$

Суммарные погрешности

В предположении независимости отдельных источников ошибок стандартное отклонение находится суммированием их дисперсий (например, для погрешностей случайных, приборных, считывания по шкалам, округления и т.д.)

$$\sigma_\Sigma = \sqrt{S^2_{случ} + \sigma^2_{прибор} + \sigma^2_{счит} + \sigma^2_{окр} + \ldots}$$

Доверительный интервал в данном случае определяется коэффициентом Чебышева t :

$$\Delta_\Sigma = t\,(\alpha)\cdot \sigma_\Sigma$$

Косвенные измерения

Нужно рассчитать погрешности для функции n переменных

$$y = f\,(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

где x_i ($i = 1\ldots n$) – результаты прямых измерений n независимых величин:

$$x_i = \bar{x}_i \pm t \cdot \sigma_{\bar{x}_i}$$

В качестве наиболее вероятного значения для y принимается

$$\bar{y} = f\,(\bar{x}_1, \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n),$$

Стандартное отклонение рассчитывается по формуле

$$\sigma_{\bar{y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2_{\substack{x_1 = \bar{x}_1 \\ \ldots\ldots \\ x_n = \bar{x}_n}} \sigma^2_{x_i}}$$

Форма ответа: $y = \bar{y} \pm t \cdot \sigma_{\bar{y}}$,

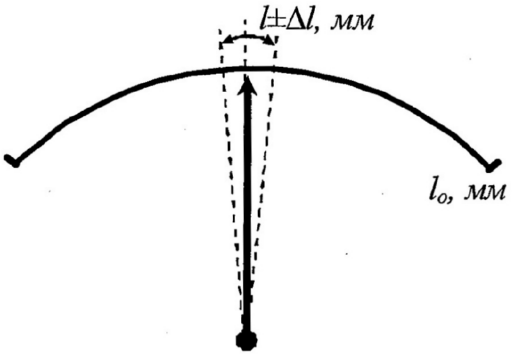
где $t\,(\alpha)$– коэффициент Чебышева.

Числа в окончательном представлении результата нужно округлить в соответствии с величиной погрешности.

Ошибки при измерениях стрелочными приборами

Ошибки считывания

$\sigma_{счит} \approx \Delta x/(3\div4)$, где Δ – цена наименьшего деления в окрестности точки измерения.



Приборные ошибки

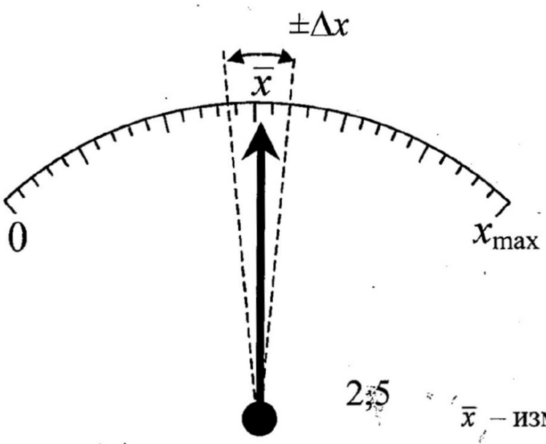
Обусловлены погрешностями работы измерительного механизма прибора (напр. из-за трения, неточности градуировки, влияния внешних факторов и т.д.).

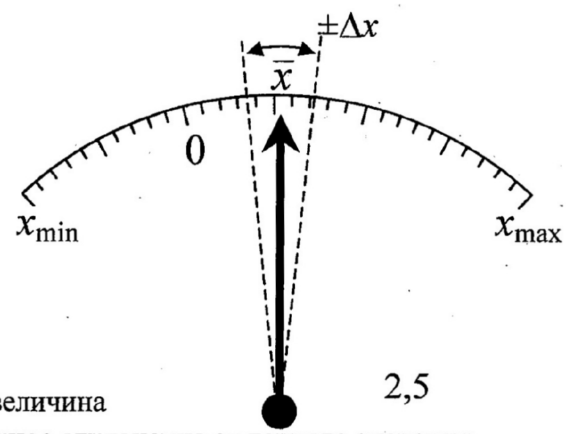
Для любого стрелочного прибора характеризуются классом точности прибора $k = \dfrac{\Delta l}{l_0}100\%$, где l_0 – длина шкалы, $\pm\ \Delta l$ – **максимальное** возможное отклонение от точного значения отклонения стрелки. Δl считается **одинаковым для любого участка шкалы**.

Обычно бывает $k = 4,\ 2.5,\ 1,\ 0.5$ и т.д.

Вероятное отклонение можно характеризовать стандартным отклонением $\sigma \approx \dfrac{\Delta l}{\sqrt{12}} \approx \dfrac{\Delta l}{3}$

Равномерные шкалы (x ~ l)





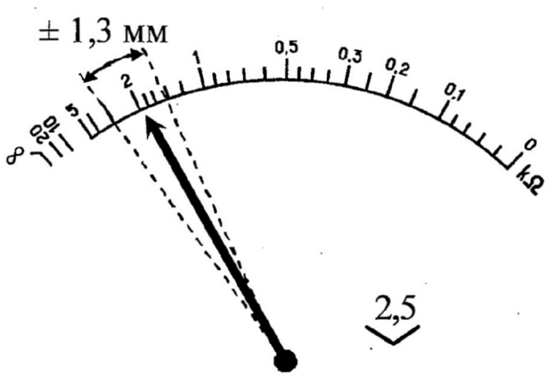
$\bar{x}$ – измеренная величина

$\pm\ \Delta x$ – гарантированное **максимально возможное** отклонение от точного значения

$\Delta x = \dfrac{k}{100\%}\, \boldsymbol{x_{max}}$ (а не $\bar{x}$!)

$\Delta x = \dfrac{k}{100\%}\, (\boldsymbol{x_{max}} - \boldsymbol{x_{min}})$

Неравномерные шкалы



Пример:

Длина шкалы $l = 52$ мм

Класс точности $k = 2.5$

Максимальное значение погрешности в мм

$\Delta l = 1.3$ мм

Отсчет: $x = 2^{+1}_{-0.6}\,\text{k}\Omega$

$\Delta x = 1.6/2 = 0.8$

или в симметричном виде

$\boldsymbol{x} = 2.2\pm0.8\ \text{k}\Omega$

Стандартное отклонение для $\bar{x}$ **:** $\sigma_{\bar{x}} \approx \dfrac{\Delta x}{\sqrt{12}} \approx \dfrac{\Delta x}{3}$

Ответ : $x = \bar{x} \pm t\cdot\sigma_{\bar{x}}$ $\quad t(\alpha)$ – коэффициент Чебышева

Совместные измерения

Измеряется экспериментальная зависимость величины y от x. Пусть значения аргумента $\{x_i\} = x_1, x_2,\ldots x_N$, точно известны, а соответствующие им $\{y_i\} = y_1, y_2,\ldots y_N$, определены со стандартными отклонениями $\sigma_1, \sigma_2,\ldots \sigma_N$.

Имеется предполагаемая аналитическая функциональная связь $y = f(x, a, b,\ldots c)$, зависящая от нескольких параметров $a, b,\ldots c$.

Нужно: подобрать значения параметров $a, b,\ldots c$ такие, чтобы аналитическая функция

$$y_i = f(x_i, a, b,\ldots c)$$

давала наилучшее приближение к экспериментальным значениям $\{y_i\}$.

Критерий наилучшего приближения: найти набор $a, b,\ldots c$, дающих минимум функционала

$$\chi^2 (a, b,\ldots c) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{y_i - f(x_i, a, b,\ldots c)}{\sigma_i}\right)^2,$$

равного сумме нормированных квадратов отклонения экспериментальных точек от теоретических. При таком подходе точки, измеренные с большей точностью, т.е. с меньшим σ, имеют больший "вес" в определении решения, чем менее точно измеренные точки.

Проверка правильности выбранной теоретической зависимости – коэффициент корреляции $|r| \geq 0.9$.

Пример линейной аппроксимации (обработка программой Origin)