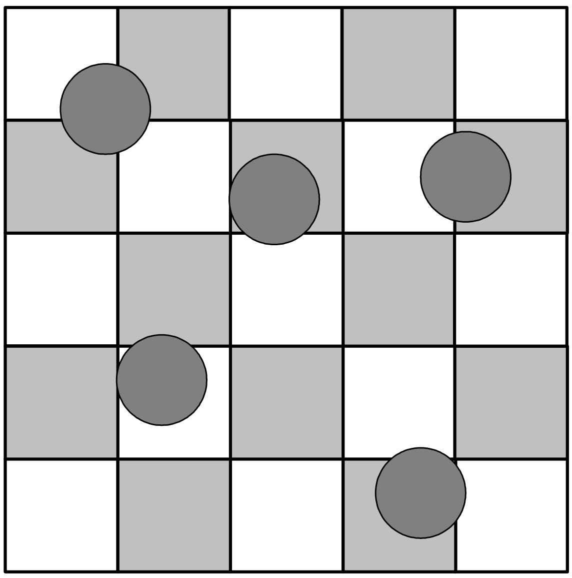
Лабораторный практикум
по ФИЗИКЕ
для школьников

И.В. Митин, М.Л. Сердобольская

Вероятность и частота



МОСКВА 2017

Вероятность и частота

Цель работы: знакомство с основными понятиями теории вероятностей (случайность, вероятность, случайная величина, распределение, математическое ожидание, дисперсия) и базовыми инструментами математической статистики, позволяющими осуществлять экспериментальную проверку теории и по данным измерений получать оценки параметров исследуемого объекта и погрешности этих оценок.

Идея эксперимента: на шахматную доску случайным образом помещают 10 круглых дисков и подсчитывают число реализаций того или иного взаимного расположения каждого из дисков и клетки. Многократно повторяя эксперимент, получают статистические данные для последующей обработки. В результате обработки данных вычисляются оценки вероятностей различных случайных событий, связанных со взаимным расположением диска и клетки, и погрешности этих оценок. Тем самым проверяется основополагающее свойство вероятности события: она равна пределу частоты наступления этого события при бесконечном увеличении числа повторений эксперимента.

1. Основы теории

Начнём с трёх мысленных экспериментов.

Эксперимент 1. Имеется сосуд, наполненный воздухом. Выделим некоторым образом одну молекулу в сосуде и зададим себе вопрос: какова скорость этой молекулы в фиксированный момент времени?

Эксперимент 2. Рассмотрим капельки дождя, падающие на горизонтальную поверхность, например на квадратную площадку. Выделим некоторым образом одну дождинку. В какую точку площадки она упадёт?

Эксперимент 3. Бросим кубик, на гранях которого нанесены цифры от 1 до 6. Какой гранью вверх он упадёт?

В каждом из этих экспериментов мы измеряем некую величину, характеризующую исследуемый объект, – скорость молекулы, координату упавшей капельки или число очков на верхней грани кубика; в последнем случае нам, конечно, не потребуются никакие измерительные приборы, кроме собственных глаз.

Что общего в этих трёх измерениях? Во-первых, ответ на вопрос эксперимента неоднозначен, и его нельзя заранее предсказать или рассчитать. Однако следует заметить, что эта особенность присуща любым научным опытам:

смысл научного исследования как раз и состоит в том, чтобы ставить вопросы, ответ на которые заранее неизвестен.

Во-вторых, и это более важно, во всех этих экспериментах имеется мысленная или реальная возможность многократно повторить эксперимент во времени или в пространстве. Так, в первом эксперименте мы можем выбрать другую молекулу или другой момент времени; во втором эксперименте в нашем распоряжении имеется множество отдельных дождинок; в третьем эксперименте можно бросить кубик несколько раз или бросить несколько кубиков. Исход каждого такого акта эксперимента непредсказуем, но тем не менее мы можем очертить (пусть иногда очень большое) множество всех возможных исходов.

Будем говорить, что результат эксперимента является **случайным событием**, если выполнены два условия:

1) возможно многократное повторение эксперимента (мысленное или реальное, во времени или в пространстве),

2) при каждом повторении непредсказуемым образом реализуется один исход из заранее известного множества всех возможных результатов эксперимента.

Посмотрим, какие следствия вытекают из наложенных условий.

1.2. Частота наступления события. Рассмотрим самый простой, третий, эксперимент с бросанием кубика. Повторим этот эксперимент n раз, бросая n раз один кубик или один раз n кубиков одновременно. Тщательно зафиксируем, какой гранью вверх упал кубик при каждом бросании, и рассчитаем долю, или частоту случаев, когда кубик выпал вверх гранью с одним очком, двумя очками и т. д. Обозначим через n_i/n долю случаев, когда кубик выпал вверх гранью с i очками, $i = 1, 2, \ldots, 6$. Очевидно, что $0 \leqslant n_i/n \leqslant 1$ и

$$\frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \frac{n_3}{n} + \frac{n_4}{n} + \frac{n_5}{n} + \frac{n_6}{n} = 1. \tag{1}$$

Опыт показывает, что если мы будем бросать кубик достаточно много раз, то все n_i/n будут примерно равны друг другу. Учитывая условие (1), мы можем сказать, что $n_i/n \approx 1/6$. Более того, равенство $n_i/n \approx 1/6$ выполняется всё точнее и точнее с ростом n.

В рамках данного эксперимента можно рассмотреть более сложные события, например выпадение грани с чётным числом очков. Можно рассчитать доли случаев, когда выпали «чётные» и «нечётные» грани. Опыт показывает, что эти доли примерно одинаковы и примерно равны $1/2$.

Теперь обратимся к эксперименту 2 с падающими дождевыми капельками. Предположим, что нас интересует, упадёт ли дождинка на крышку люка, расположенного на этой площадке. И вновь, как и в предыдущем примере, мы можем рассчитать долю капель, упавших на крышку люка, по отношению ко всем капелькам, упавшим, скажем, за полчаса, на нашу площадку.

В самом сложном, первом, эксперименте ситуация аналогична: можно найти, например, долю тех молекул, скорость которых по модулю больше некоторого наперёд заданного значения.

Подведём итог. *Для любого случайного события из условия* **1** *вытекает возможность рассчитать* **частоту** *появления события в длинном ряду повторений эксперимента.* Эта частота равна отношению количества случаев, когда наше событие реализовалось, к общему числу повторений эксперимента. Обратим внимание на то, что для расчёта частоты нам вовсе не нужно знать, каковы все возможные исходы, т. е. не требуется условие **2**.

1.3. Вероятность события. Чтобы сформулировать понятие вероятности события, мы должны задать **математическую модель эксперимента**. В ней мы описываем множество всех возможных исходов эксперимента и указываем, как рассчитать вероятность события. Обязательно нужно учитывать, что никакая математическая модель не может быть абсолютно точным описанием конкретного эксперимента – это всегда некоторая идеализация, которая содержит разного рода допущения и приближения.

Вновь обратимся к рассмотренным выше примерам. При бросании кубика мы считаем, что возможны 6 исходов: кубик выпал вверх гранью с i очками, где $i = 1, 2, \ldots, 6$. При этом мы пренебрегаем экзотическими исходами типа падения кубика за шкаф или отлёта его с большой скоростью на орбиту Земли.

Рассмотрим каждый из взаимоисключающих исходов эксперимента: будем говорить, что произошло событие Γ_i, если *кубик выпал вверх гранью с i очками* (здесь $i = 1, 2, \ldots, 6$). Можно рассмотреть и более сложные события, например событие Ч, заключающееся в том, что *кубик выпал вверх гранью с чётным числом очков*, или событие П, заключающееся в том, что *количество очков на верхней грани кубика меньше пяти.*

Теперь бросим кубик один раз. Реализуется один из шести возможных исходов. Какой бы исход ни реализовался, мы можем однозначно сказать, произошло или нет любое из событий, упомянутых выше. Например, если выпали 3 очка, то реализовались события Γ_3 и П, но не реализовались события Ч и, скажем, Γ_4. Аналогично можно проверить, какие из событий Γ_3, П и Ч происходят, если выпали 1, 2, 4, 5 или 6 очков. Таким образом, любое (простое или сложное) событие при бросании кубика можно описать как множество тех исходов из шести возможных, которые влекут наступление данного события, или, как говорят, благоприятны для наступления этого события.

Пусть A – произвольное событие, которое может произойти при бросании кубика. Обозначим через $M(A)$ – число благоприятных для наступления события A исходов. Зададим вероятность события A как

$$P(A) = \frac{M(A)}{6}. \tag{2}$$

Здесь число 6 в знаменателе в точности отвечает шести возможным исходам одного бросания кубика. По этой формуле мы получаем

$$P(\Gamma_i) = \frac{1}{6}, \qquad P(\text{Ч}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \qquad P(\text{П}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

(проверьте это самостоятельно). Заметим, что рассчитанные нами значения вероятностей вытекают только из формулы (2). Другими словами, вероятность – это чисто математическая характеристика события, для расчёта которой требуется задать математическую модель эксперимента.

Для задания математической модели эксперимента 2 нам придётся не только написать формулу, аналогичную (2), но и сделать некоторые физические предположения. Так, мы будем считать, что дождь идёт с примерно постоянной интенсивностью и нет порывистого ветра. Это позволит нам считать поток дождевых капель однородным во времени и пространстве. Выделим внутри площадки некоторую область A, например круглую крышку люка. Попробуем аналогично (2) задать вероятность $P(A)$ того, что дождинка упадёт в область A. Однако теперь множество всех возможных исходов нашего эксперимента – это бесконечное множество точек, поэтому формула (2) уже не годится (в знаменателе стоит бесконечно большое число). Зададим вероятность как

$$P(A) = \frac{\mathcal{S}(A)}{\mathcal{S}}, \tag{3}$$

где $\mathcal{S}(A)$ – площадь области A и $\mathcal{S}$ – площадь площадки. В случае квадратной площадки со стороной a и круглой области радиуса r имеем

$$P(A) = \frac{\pi r^2}{a^2}.$$

В случае эксперимента 1, чтобы задать математическую модель, которая была бы согласована с реальной физикой системы, потребуются весьма сложные формулы. Для идеального газа, состоящего из одинаковых молекул массы m и находящегося при температуре T (в градусах Кельвина), распределение вероятностей для модуля V вектора скорости задаётся следующей формулой (распределение Максвелла):

$$P(v \leqslant V < v + \Delta v) \approx \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot 4\pi v^2 \cdot \Delta v,$$

где k – постоянная Больцмана. Здесь $P(v \leqslant V < v+\Delta v)$ означает вероятность того, что модуль скорости частицы лежит в пределах от v до $v + \Delta v$, а Δv есть очень малая положительная величина.

Подведём итог. *Из условия* **2** *вытекает возможность сформулировать математическую модель эксперимента со случайным исходом.* Любое событие в рамках этого эксперимента можно охарактеризовать как множество тех исходов, которые благоприятны для его наступления. Задать математическую модель означает задать для любого события формулу, по которой будет рассчитываться вероятность. Обратим внимание на то, что для расчёта вероятности нам вовсе не нужно многократно повторять эксперимент, т. е. не требуется выполнение условия **1**.

Как и частота, вероятность показывает, насколько ожидаемо наступления события. Но частота – это величина, которая получается в эксперименте, а вероятность рассчитывается на основании данных, взятых «из головы». Методы расчёта вероятностей при заданных и известных математических моделях эксперимента составляют предмет математической дисциплины, которая называется **теория вероятностей**.

Но неизбежно возникает вопрос, верны ли теоретические представления об эксперименте. Ответ на него можно получить, сравнив численные значения частоты и вероятности. Как проводить это сравнение, как сделать математически строгие и корректные выводы в ситуации, когда всё случайно и нельзя почти ни в чём быть быть уверенным? Ответы на эти вопросы даёт **математическая статистика**.

Один вывод мы можем сделать уже сейчас. Если при достаточно большом числе повторений эксперимента мы наблюдаем устойчивое отклонение частоты от вероятности, то это может означать только одно: наша математическая модель эксперимента неверна, например, ошибочны формулы для расчёта вероятности или вовсе нельзя использовать вероятностный подход потому, что частота «прыгает» и не сходится к определённому пределу.

Сопоставление вероятности и частоты обязывает нас наложить на вероятность как математическую функцию некоторые требования.

1. Одним из очевидных свойств является то, что частота n_A/n любого события A при n повторениях эксперимента лежит между нулём и единицей. Следовательно, мы обязаны считать, что $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

2. Пусть мы повторили наш эксперимент n раз и среди этих повторений n_A раз реализовалось событие A. Тогда $n - n_A$ раз событие A не произошло. Поэтому, если мы обозначим как $\overline{A}$ событие, заключающееся в том, что A *не* *случилось*, и положим $n_{\overline{A}} = n - n_A$, мы получим

$$\frac{n_A}{n} + \frac{n_{\overline{A}}}{n} = \frac{n}{n} = 1,$$

т. е. частóты событий A и $\overline{A}$ в сумме дают единицу. А тогда мы должны потребовать выполнения равенства

$$P(A) + P(\overline{A}\,) = 1. \tag{4}$$

3. Аналогичное свойство должно выполняться и для вероятностей любых событий $A_1, A_2 \ldots, A_m$, удовлетворяющих следующему условию: при одном повторении эксперимента реализуется **обязательно одно и всегда ровно одно** событие из $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Тогда

$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_m) = 1. \tag{5}$$

Мы уже сталкивались с примером таких событий, когда говорили, что Γ_i – это выпадение i очков на верхней грани кубика для $i = 1, 2, \ldots, 6$.

1.4. Случайная величина и её математическое ожидание и дисперсия. Решать математические задачи со случайными событиями не очень удобно: в самом деле, что можно сделать с такой математической «величиной», как *кубик выпал вверх гранью с чётным числом очков*? Но можно попробовать описать события более привычным образом – числами. В теории вероятностей и математической статистике вводится понятие **случайной величины**, которая является количественной характеристикой случайного события.

Попробуем понять, что такое случайная величина и что можно с ней делать, на нескольких примерах. Пусть нас интересует, произойдёт или не произойдёт какое-то событие A в нашем эксперименте. Мы всегда можем ввести величину X, которая равна 1, если событие A произошло, и равна 0, если событие A не произошло. Эта величина случайна, как и событие A. Если $p = P(A)$ есть вероятность события A, то

$$P(X = 1) = p, \qquad P(X = 0) = q, \qquad p + q = 1, \tag{6}$$

где мы учли, что $X = 0$, когда A не происходит, и воспользовались формулой (4). Говорят, что формулы (6) задают **распределение** случайной величины X.

Теперь повторим наш эксперимент n раз (считая n фиксированным) и введём случайную величину Y, которая равна k, если интересующее нас событие A реализовалось k раз, или, что эквивалентно, не реализовалось $n-k$ раз.

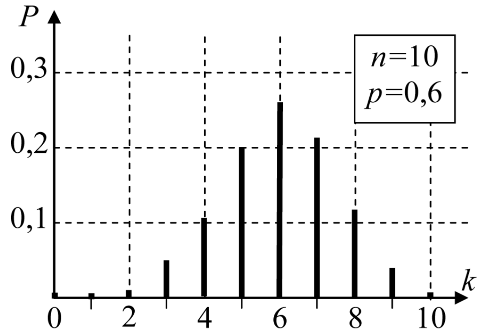


Рис. 1: Вероятности в биномиальном распределении при $n = 10$ и $p = 0.6$.

Очевидно, что возможны $k = 0, 1, \ldots, n$. Можно показать, что вероятность того, что Y примет значение k, задаётся формулой

$$P(Y = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\, p^k\, q^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n \tag{7}$$

(здесь $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, и эта величина называется «n-факториал»).

Формулы (7) задают так называемое **биномиальное распределение**. Название «биномиальное» связано с тем, что условие нормировки (5) для этого распределения совпадает с известной формулой бинома Ньютона:

$$\sum_{k=0}^{n} P(Y = k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, p^k\, q^{n-k} \underset{\text{бином}}{=\!=} (p+q)^n = 1^n = 1.$$

Значения вероятностей (7) для частного случая $n = 10$ и $p = 0.6$ показаны в виде диаграммы на рис. 1.

Особая роль биномиального распределения в теории вероятностей связана с тем, что частота наступления события при n повторениях эксперимента простейшим образом связана со случайной величиной Y: частота равна Y/n, при этом, конечно,

$$P\left(\frac{Y}{n} = \frac{k}{n}\right) = P(Y = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\, p^k\, q^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Упражнение. Найдите вероятность того, что при восьми бросаниях кубика «единица» выпадет ровно три раза? Ответ дается формулой (7), в которой $n = 8$, $k = 3$, $p = 1/6$, $q = 5/6$.

Обобщим наши формулы: пусть случайная величина X принимает конечное число m каких-либо значений $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Тогда **распределением случайной величины** X называется набор из m равенств

$$P(X = x_i) = p_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{9}$$

При этом обязательно выполнено условие нормировки

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_m) = 1. \tag{10}$$

Итак, мы ушли от необходимости рассматривать события (как множества исходов) и перешли к числам. Но всё ещё формулы остаются слишком сложными: мы постоянно имеем дело с наборами из нескольких равенств, задающих распределение. Возникает вопрос, нельзя ли охарактеризовать поведение случайной величины одним-двумя числами, например её средним значением и числом, характеризующим разброс значений случайной величины относительно среднего.

Рассмотрим ещё один пример. Мы бросаем монету на стол и прибавляем к своему счёту a баллов, если монета выпала вверх «орлом», и b баллов, если выпала «решкой». Каков будет наш выигрыш за n бросаний, отнесённый к числу бросаний (т. е. сколько в среднем баллов мы будем получать за одно бросание)? Если мы полагаем, что при каждом бросании не происходит ничего, кроме выпадения «орла» или «решки», то ответ очевиден: при условии, что монета k раз из n выпала вверх «орлом» и, следовательно, $n-k$ раз из n выпала вверх «решкой», средний (приходящийся на одно бросание) выигрыш равен

$$\langle W \rangle = \frac{k \cdot a + (n-k) \cdot b}{n} = a\frac{k}{n} + b\frac{n-k}{n}. \tag{11}$$

В правой части этой формулы легко увидеть частóты k/n и $(n-k)/n$ выпадения «орла» и «решки» при n бросаниях. С другой стороны, в нашем примере прямо-таки напрашивается введение случайной величины, равной нашему выигрышу при одном бросании: $W = a$, если выпал «орёл», и $W = b$, если выпала «решка». Для этой случайной величины, заменив частоту на вероятность, получим вместо (11) число

$$M_W = a \cdot P(W = a) + b \cdot P(W = b). \tag{12}$$

Если монета правильная, т. е. «орёл» и «решка» выпадают одинаково часто, то $P(W = a) = P(W = b) = 1/2$ и $M_W = (a+b)/2$,

Теперь обобщим формулу (12), считая, что случайная величина X принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_m$. **Математическим ожиданием случайной величины** X с распределением, заданным формулами (9), (10), называется число

$$M_X = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \cdots + x_m \cdot P(X = x_m). \tag{13}$$

Математическое ожидание равно среднему значению случайной величины при бесконечном числе повторений эксперимента.

Понятно, что если мы несколько раз бросим монету, то реальное значение нашего выигрыша при одном бросании ($W = a$ или $W = b$), всякий раз будет отличаться от среднего значения $M_W = (a+b)/2$. Если нас не интересует знак отклонения значения случайной величины W от её среднего значения M_W, то мы можем выбрать величину квадрата отклонения $(W - M_W)^2$ как характеристику разброса значений. Дальше разумно найти средний разброс по аналогии с формулой (11):

$$\langle \Delta W^2 \rangle = (a - M_W)^2 \cdot \frac{k}{n} + (b - M_W)^2 \cdot \frac{n-k}{n}. \tag{14}$$

Заменяя частоту на вероятность, аналогично тому, как это сделано выше, получаем

$$D_W = (a - M_W)^2 \cdot P(W = a) + (b - M_W)^2 \cdot P(W = b). \tag{15}$$

Теперь обобщим формулу, считая, что случайная величина X принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_m$. **Дисперсией случайной величины** X с распределением, заданным формулами (9), (10), называется число

$$\begin{aligned} D_X = (x_1 - M_X)^2 \cdot P(X = x_1) + (x_2 - M_X)^2 \cdot P(X = x_2) + \cdots + \\ + (x_m - M_X)^2 \cdot P(X = x_m). \end{aligned} \tag{16}$$

Дисперсия равна среднему значению квадрата отклонения случайной величины от своего среднего значения при бесконечном числе повторений эксперимента (уф-ф, наверное, сложная для понимания фраза, но, если её медленно прочесть несколько раз и разобрать «по косточкам», можно осознать, что же мы хотели сказать). Дисперсия показывает, насколько ожидаемы большие отклонения нашей случайной величины от своего среднего значения: чем более вероятны большие отклонения, тем больше дисперсия.

Возьмём уже рассмотренную выше простейшую случайную величину X, которая равна 1, если произошло некоторое интересующее нас событие (назовём его *успех*), и равна 0, если этот успех не реализовался (будем говорить, что при этом случилась *неудача*). Пусть вероятность успеха равна, как и раньше, p, а вероятность неудачи равна $q = 1 - p$. Тогда очень просто рассчитать математическое ожидание такой случайной величины,

$$M_X = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p, \tag{17}$$

и чуть посложнее – дисперсию:

$$D_X = (1 - p)^2 \cdot p + (0 - p)^2 \cdot q = q^2 p + p^2 q = pq(q + p) = pq. \tag{18}$$

Расчёт математического ожидания и дисперсии биномиального распределения (7) – случайной величины, которая равна количеству успехов в n повторениях эксперимента – не такой сложный, как кажется на первый взгляд, но довольно длинный, поэтому мы сразу приведём ответ (можете попробовать его получить самостоятельно хотя бы для M_Y):

$$M_Y = np, \qquad D_Y = npq. \tag{19}$$

Упражнение. Покажите, что если две случайные величины Y и Z связаны равенством $Z = aY + b$, где a, b – неслучайные постоянные числа, то

$$M_Z = aM_Y + b, \qquad D_Z = a^2 \cdot D_Y. \tag{20}$$

Из равенств (20) и формул (19) вытекает, что для частоты успеха, т. е. для случайной величины $Z = Y/n$, математическое ожидание и дисперсия равны

$$M_Z = p, \qquad D_Z = \frac{pq}{n}. \tag{21}$$

Видно, что частота успеха в среднем равна вероятности успеха, а разброс значений частоты относительно значения вероятности стремится к нулю при $n \to \infty$. Совсем с другой стороны мы получили уже отмечавшийся ранее фундаментальный принцип теории вероятностей: *рассчитанное теоретически значение вероятности события всегда можно проверить, сравнив её с частотой этого события, полученной в достаточно длинной серии повторений эксперимента.*

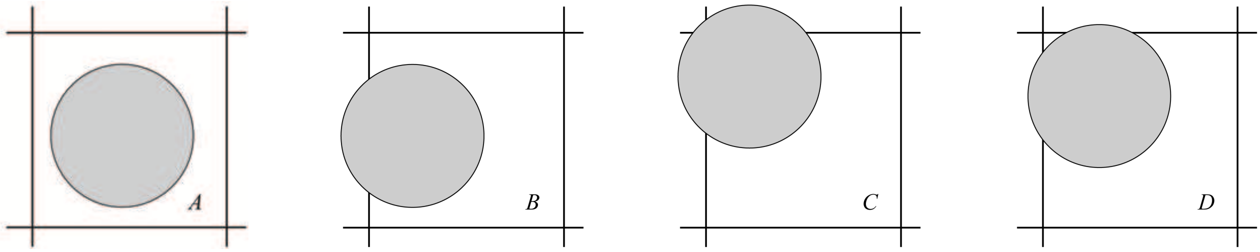


Рис. 2: Возможные взаимные расположения клетки и диска.

2. Эксперимент

На шахматную доску, размеченную на 8×8 или 10×10 квадратных клеток с длиной стороны a, случайным образом помещают n круглых дисков радиуса r (шашек, пуговиц и пр.). Если радиус диска меньше половины длины стороны клетки, $r < a/2$, то возможны четыре случая взаимного расположения диска и клетки:

A: диск целиком располагается внутри клетки (рис. 2A);
B: диск перекрывает только одну из сторон клетки (рис. 2B);
C: диск перекрывает вершину клетки (рис. 2C);
D: диск перекрывает две стороны клетки, но вершина клетки остаётся свободной (рис. 2D).

Какое из событий A, B, C или D реализуется, однозначно определяется тем, в какой точке клетки располагается **центр** диска. Определить геометрически, где должен быть расположен этот центр в каждом из случаев, довольно просто, если воспользоваться рис. 3. Расставьте на нём буквы A, B, C, D, показывающие, какая область рисунка соответствует каждому из событий. Из рисунка найдите площади областей, соответствующих событиям A, B, C или D. Приведём для проверки ответ (чтобы не нагромождать обозначения, соответствующие друг другу области и события мы обозначаем одной буквой):

$$\mathcal{S}(A) = (a-2r)^2, \qquad \mathcal{S}(B) = 4(a-2r)r,$$
$$\mathcal{S}(C) = 4\cdot\frac{\pi r^2}{4} = \pi r^2, \qquad \mathcal{S}(D) = 4\left(r^2 - \frac{\pi r^2}{4}\right) = (4-\pi)r^2.$$

Проверьте, что $\mathcal{S}(A)+\mathcal{S}(B)+\mathcal{S}(C)+\mathcal{S}(D) = a^2$, т. е. мы закрыли областями A, B, C и D весь квадрат клетки.

Теперь, как и в примере с падением капелек дождя, рассчитаем вероятно-

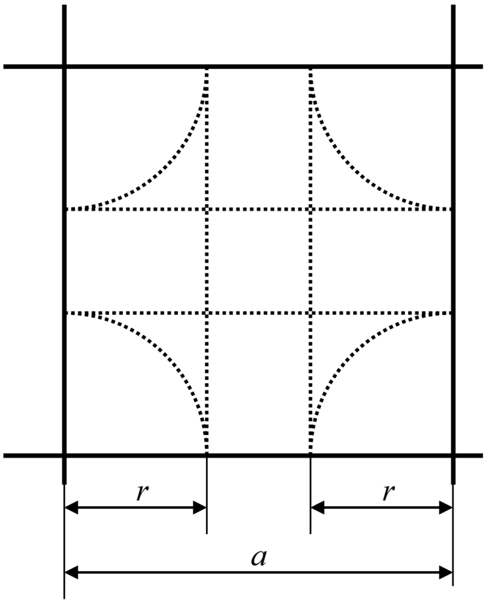


Рис. 3: Разбиение клетки на области, соответствующие событиям на рис. 2.

сти по формуле (3). Имеем

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{(a-2r)^2}{a^2}, \qquad & P(B) &= \frac{4(a-2r)r}{a^2}, \\ P(C) &= \frac{\pi r^2}{a^2}, \qquad & P(D) &= \frac{(4-\pi)r^2}{a^2}. \end{aligned} \tag{22}$$

Проверьте, что при условии $2r < a$ все вероятности положительны и меньше единицы. При этом мы имеем аналог формулы (5),

$$P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1,$$

и это равенство можно рассматривать как прямое следствие того факта, что в нашем эксперименте всегда реализуется одно и только одно из событий A, B, C или D.

2.1. Измерения. Проведите следующие измерения величин, необходимых для расчёта вероятностей.

1. С помощью штангенциркуля найдите диаметр диска d. Для повышения точности несколько раз (M_d раз) проведите прямые измерения диаметров нескольких дисков, $M_d = 5 \div 7$.

2. С помощью линейки найдите длину стороны клетки a. Для повышения точности проведите $M_\ell = 5 \div 7$ раз прямые измерения суммарной длины ℓ сторон нескольких ($m = 5 \div 7$) соседних клеток (число клеток m остаётся неизменным в каждом измерении в серии). Результаты прямых измерений занесите в табл. 1. Для простоты можно взять $M_\ell = M_d$.

Обратите внимание на то, что в строке значений m этой таблицы во всех столбцах должно стоять одно и то же число.

Таблица 1: Результаты измерений размеров диска и клетки.

№ эксп.	1	2	3	4	5	6
d (мм)						
m						
ℓ (мм)						

3. Не глядя на доску, поместите на неё $n = 10$ дисков случайным образом. Подсчитайте количество дисков n_A, n_B, n_C, n_D, которые оказались в положениях A, B, C, D. Запишите результаты в первый пустой столбец таблицы 2.

4. Опять же не глядя на доску, переместите на небольшое расстояние случайным образом каждый из $n = 10$ дисков. Аналогично п. **3** подсчитайте и запишите результаты. Старайтесь не ошибаться при подсчётах, проверяйте, что для каждого эксперимента $n_A + n_B + n_C + n_D = n = 10$. Так как статистические закономерности проявляются при большом числе измерений, повторите эксперименты не менее $N = 30$ раз. Результаты занесите в последующие столбцы табл. 2.

Таблица 2: Результаты экспериментов.

№ эксп.	1	2	3	4	5	6	...	N
n_A								
n_B								
n_C								
n_D								

2.2. Расчёт вероятностей. Получите оценки радиуса диска и длины стороны клетки, а также погрешности этих величин. Используя эти результаты, вычислите вероятности $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(D)$ и погрешности этих вероятностей, связанные с неточностями измерений размеров диска и клетки.

1. Получите оценку радиуса диска r и оцените случайную S_r и систематическую σ_r погрешности. Для этого сначала найдите оценку диаметра как среднее арифметическое прямых его измерений:

$$\bar{d} = \frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_{M_d}}{M_d}, \tag{23}$$

где $d_1, d_2, \ldots, d_{M_d}$ – результаты измерений диаметра из табл. 1. Затем вычислите квадрат случайной погрешности измерений диаметра, используя формулу

$$S_d^2 = \frac{(d_1 - \bar{d}\,)^2 + (d_2 - \bar{d}\,)^2 + \cdots + (d_{M_d} - \bar{d}\,)^2}{M_d(M_d - 1)}, \tag{24}$$

и, наконец, рассчитайте систематическую погрешность как

$$\sigma_{d,\text{сист.}} = \frac{\Delta_d}{2}, \tag{25}$$

где $\Delta_d = 0.1$ мм – точность штангенциркуля. Суммарная погрешность определяется по формуле

$$\sigma_d = \sqrt{S_d^2 + \sigma^2_{d,\text{сист.}}}. \tag{26}$$

Отсюда получите оценку радиуса и её погрешность:

$$r = \frac{\bar{d}}{2}, \qquad \sigma_r = \frac{\sigma_d}{2}. \tag{27}$$

2. Аналогично найдите оценку длины стороны клетки a и погрешность этой оценки. Для этого сначала получите оценку и погрешности для величины ℓ – суммарной длины сторон m клеток. При расчётах используйте измерения $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{M_\ell}$ из табл. 1 и формулы, аналогичные (23)–(26), с заменой в них всех букв d (включая индексы) на ℓ. При этом учтите, что точность линейки Δ_ℓ – это цена деления, равная 1 мм. Отсюда получите $\bar{\ell}$ и σ_ℓ, а из них – оценку стороны клетки и её погрешность:

$$a = \frac{\bar{\ell}}{m}, \qquad \sigma_a = \frac{\sigma_\ell}{m}. \tag{28}$$

Обратите внимание: измерение нескольких клеток вместе действительно повышает точность оценки.

3. Рассчитайте вероятности и их погрешности. Для расчёта погрешностей удобно сначала выразить вероятности (22) через отношение

$$\theta = \frac{r}{a}; \tag{29}$$

вероятности тогда можно записать как

$$\begin{aligned} &P(A) = (1 - 2\theta)^2, \qquad &&P(B) = 4\theta(1 - 2\theta), \\ &P(C) = \pi\theta^2, &&P(D) = (4 - \pi)\theta^2. \end{aligned} \tag{30}$$

Возьмите значения r и a из формул (27), (28) и рассчитайте $\theta = r/a$ и значения вероятностей.

Далее рассчитайте погрешность отношения $\theta = r/a$, используя уже вычисленные значения величин r, a и σ_r, σ_a по формуле

$$\sigma_\theta = \sqrt{\left(\frac{\sigma_r}{a}\right)^2 + \left(\frac{r\sigma_a}{a^2}\right)^2} = \frac{r}{a}\sqrt{\left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2}.$$

Используя полученное значение σ_θ, найдите погрешности для вероятностей событий A, B, C, D:

$$\begin{aligned} \sigma_A &= 4(1-2\theta)\cdot\sigma_\theta, \qquad & \sigma_B &= 4(1-4\theta)\cdot\sigma_\theta, \\ \sigma_C &= 2\pi\theta\cdot\sigma_\theta, & \sigma_D &= 2(4-\pi)\theta\cdot\sigma_\theta. \end{aligned} \tag{31}$$

Для удобства дальнейшей работы запишите результаты в табл. 3.

Таблица 3: Вероятности событий A, B, C, D.

Событие	Вероятность p	Погрешность σ_p
A		
B		
C		
D		

Замечание. В одной из формул (31) есть небольшая неточность. Постарайтесь ее отыскать.

3. Обработка полученных экспериментальных данных

На основе данных из табл. 2 получите экспериментальные значения частот событий A, B, C, D и сравните их с вероятностями.

3.1. Основные формулы для расчёта. Сначала мы расскажем, как проводить расчёт в общем случае, а потом применим общие формулы к результатам наших измерений.

Предположим, что мы провели в одинаковых условиях s измерений некоторой (случайной) величины X. Пусть в результате измерений получены числа $x_1, x_2, \ldots, x_2$. Выборочное среднее (т. е. среднее, полученное по значениям, выбранным из результатов измерений) рассчитывается как среднее арифметическое по формуле, аналогичной (23):

$$\langle X\rangle_s = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_s}{s}. \tag{32}$$

Выборочное среднее есть оценка математического ожидания M_X **случайной величины** X. Другими словами, при неизвестном значении M_X мы можем использовать $\langle X\rangle_s$ как его приближение.

Рассчитаем величину так называемой выборочной дисперсии:

$$\langle\Delta X^2\rangle_s = \frac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \cdots + (x_s-\bar{x})^2}{s-1}, \quad \text{где} \quad \bar{x} = \langle X\rangle_s. \tag{33}$$

Выборочная дисперсия есть оценка дисперсии D_X случайной величины X.

Замечание. Видно, что формула (33) похожа на (32). Мы вычисляем почти что среднее арифметическое от квадрата разброса значений случайной величины X относительно (выборочного) среднего $\bar{x}$, но делим не на s, а на $s-1$. Наверное, у всех возникает вопрос, почему так? Попробуем объяснить этот казус. В формуле (33) мы используем не «настоящее» математическое ожидание M_X, которое нам неизвестно. Мы подставляем вместо него величину $\bar{x} = \langle X \rangle_s$, на расчёт которой мы уже «израсходовали» часть информации, полученной из эксперимента. И это «убывание» информации эквивалентно тому, что мы просто сделали на одно измерение меньше.

Общая идея экспериментальной проверки вероятностной модели заключается в том, что если эта модель верна, то

$$\langle X \rangle_s \approx M_X, \qquad \langle \Delta X^2 \rangle_s \approx D_X,$$

причём точность приближения должна возрастать с ростом числа измерений (с ростом s).

3.2. Сравнение вероятности и частоты события. Посмотрим на примере события A, как написанные выше соотношения применяются к нашим экспериментальным данным из табл. 2 (возьмём числа $n_{A,1}, n_{A,2}, \ldots, n_{A,N}$ из первой строки таблицы).

Сначала мы включим в свои расчёты только один результат эксперимента из первого столбца, что отвечает первой попытке размещения десяти дисков.

Введём случайную величину X, которая равна 1, если случилось событие A (диск целиком оказался внутри клетки). Если это событие не случилось (диск лёг любым другим образом), положим $X = 0$.

Размещая каждый из десяти дисков и проверяя, случилось ли при этом размещении событие A, мы как бы проводим измерение нашей случайной величины: если случилось событие A, то результат данного (скажем, i-го) измерения $x_i = 1$, если не случилось, то результат данного измерения $x_i = 0$. Итак, размещая 10 дисков, мы формально получаем результаты $x_1, x_2, \ldots, x_s$ для $s = 10$ измерений, где каждый из x_i равен 1 или 0.

Вычислим по этим результатам выборочное среднее и выборочную дисперсию (для $s = 10$). Отметим один чрезвычайно удобный для расчётов факт. Подсчитаем, сколько раз среди результатов измерений $x_1, x_2, \ldots, x_s$ встретятся $x_i = 1$. Таких результатов ровно столько, сколько раз диск целиком уместился внутри клетки. Если помните, мы использовали это число для расчёта частоты события A и обозначали его как n_A. Остальные $s - n_A$ результатов наших измерений равны нулю, поэтому $x_1 + x_2 + \cdots + x_s = n_A$. Таким образом, выборочное среднее равно

$$\langle X \rangle_s = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_s}{s} = \frac{n_A}{10}. \tag{34}$$

Мы видим, что в качестве выборочного среднего выступает частота события A при 10 повторениях нашего опыта. Как сказано выше, эта величина есть оценка математического ожидания M_X, которое нетрудно рассчитать по формуле (17):

$$M_X = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p, \quad \text{где} \quad p = P(A).$$

Обратите внимание, мы получили тот факт, о котором говорили с самого начала: частота есть оценка вероятности события.

Мы также можем рассчитать выборочную дисперсию по формуле (33), но сначала совершим следующие алгебраические преобразования:

$$\begin{aligned}
&(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_s - \bar{x})^2 = \\
&\quad = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_s^2) - 2\bar{x}(x_1 + x_2 + \cdots + x_s) + (\bar{x}^2 + \bar{x}^2 + \cdots + \bar{x}^2) = \\
&\quad = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_s^2) - 2\bar{x}(x_1 + x_2 + \cdots + x_s) + s \cdot \bar{x}^2.
\end{aligned} \tag{35}$$

Теперь подставим $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_s}{s}$ во второе и третье слагаемые в правой части равенства и получим

$$\begin{aligned}
\bar{x}(x_1 + x_2 + \cdots + x_s) &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_s}{s} \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_s) = \\
&= \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_s)^2}{s},
\end{aligned}$$

$$s \cdot \bar{x}^2 = s \cdot \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_s}{s} \right)^2 = s \cdot \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_s)^2}{s^2}.$$

Мы видим, что второе и третье слагаемые в правой части равенства (35) подобны, и в результате имеем

$$\begin{aligned}
&(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_s - \bar{x})^2 = \\
&\quad = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_s^2) - \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_s)^2}{s}.
\end{aligned}$$

Теперь вспомним, что $x_i = 0$ или $x_i = 1$, поэтому $x_i = x_i^2$. Таким образом, учитывая равенство $x_1 + x_2 + \cdots + x_s = n_A$, получаем из формулы (36), что в нашем случае

$$\langle \Delta X^2 \rangle_s = \frac{n_A - (n_A^2/s)}{s - 1} = \frac{n_A}{s - 1} \left(1 - \frac{n_A}{s} \right). \tag{36}$$

Сравните последнее выражение с дисперсией случайной величины X: по формуле (18) имеем

$$D_X = p\big(1-p\big), \quad \text{где} \quad p = P(A).$$

Как мы говорили раньше, при больших s

$$\frac{n_A}{s-1} \approx P(A), \qquad 1 - \frac{n_A}{s} \approx 1 - P(A),$$

и мы видим, что в самом деле $\langle \Delta X^2 \rangle_s \approx D_X$.

Приятной особенностью получившихся результатов является то, что для расчёта выборочных среднего и дисперсии не нужно знать результаты отдельных измерений (в нашем случае – то, как именно лёг каждый из дисков). Нам достаточно взять значение n_A из первой строки табл. 2 и подставить его в формулы (34) и (36).

Рассчитайте выборочные средние и выборочные дисперсии при разных s по данным табл. 2.

Возьмите данные для n_A из первого столбца табл. 2, рассчитайте $\langle X \rangle_s$ и $\langle \Delta X^2 \rangle_s$ по формулам (34) и (36) (при $s = 10$) и запишите эти два числа в первый столбец табл. 4.

Аналогично, заменяя в формулах (34), (36) значение n_A на n_B, n_C и n_D из первого столбца табл. 2, заполните последующие строки табл. 4 для $s = 10$.

Теперь запишите в таблицу результаты для $s = 20$. Для этого суммируйте данные из первого и второго столбцов табл. 2 (т. е. возьмите сумму значений n_A для первой и второй расстановок дисков), то это будет эквивалентно тому, что мы сделали $s = 2 \cdot 10$ измерений. Заменяя в формулах (34), (36) значение $s = 10$ на $s = 20$ и суммируя числа $n_{A,1}$ и $n_{A,2}$ из первого и второго столбцов табл. 2, получите новые значения выборочных средних и дисперсии:

$$\langle X \rangle_s = \frac{n_{A,1} + n_{A,2}}{s}, \quad \langle \Delta X^2 \rangle_s = \frac{n_{A,1} + n_{A,2}}{s-1}\left(1 - \frac{n_{A,1} + n_{A,2}}{s}\right), \qquad s = 20.$$

Занесите результаты в клетку первой строки (строки A) и второго столбца (для $s = 20$) табл. 4.

Суммируйте последовательно данные из первых $k = 5$, потом данные из первых $k = 10, 15, 20, 30$ столбцов табл. 2 и в каждом случае найдите суммарное количество раз, когда в $s = 10 \cdot k$ попытках размещения диска случилось событие A: вычислите

$$n_{A,1} + n_{A,2} + \cdots + n_{A,k} \quad \text{для} \quad k = 5, 10, 15, 20, 30.$$

Используя этот результат, рассчитайте выборочные средние и дисперсии для $s = 10, 20, 50, 100, 150, 200, 250, 300$ и заполните столбцы табл. 4 для последующих значений $s = k \cdot 10$. Вычислите и запишите в первую строку табл. 4

величины

$$\langle X\rangle_s = \frac{n_{A,1}+n_{A,2}+\dots+n_{A,k}}{s},$$

$$\langle \Delta X^2\rangle_s = \frac{n_{A,1}+n_{A,2}+\dots+n_{A,k}}{s-1}\left(1-\frac{n_{A,1}+n_{A,2}+\dots+n_{A,k}}{s}\right).$$

Так же получите выборочные средние и дисперсии для событий B, C и D и заполните вторую, третью и четвёртые строки табл. 4 для последующих значений s.

Таблица 4: Выборочные средние и дисперсии.

Число	$s = 10$		$s = 20$		$\cdots$		$s = 300$		Теория	
экспер.	$\langle X\rangle$	$\langle \Delta X^2\rangle$	$\langle X\rangle$	$\langle \Delta X^2\rangle$	$\langle X\rangle$	$\langle \Delta X^2\rangle$	$\langle X\rangle$	$\langle \Delta X^2\rangle$	M_X	D_X
A										
B										
C										
D										

Для заполнения последнего столбца табл. 4 найдите теоретические значения математического ожидания и дисперсии. А именно, для события A найдите $M_X = p$ и $D_X = p(1-p)$ при $p = P(A)$, взяв рассчитанное ранее значений вероятности $P(A)$ из табл. 3. Аналогично, положив $p = P(B)$, $p = P(C)$ и $p = P(D)$ из табл. 3, найдите теоретические средние и дисперсии для других событий.

Представление результатов. Выберите одно из событий A, B, C или D по своему усмотрению. Постройте для этого события графики зависимости выборочного среднего $\langle X\rangle_s$ от числа экспериментов $s = 10, 20, \dots, 300$. На координатной плоскости переменных s (ось абсцисс) и $\langle X\rangle$ (ось ординат) поставьте точки, отвечающие рассчитанным выборочным средним. Нарисуйте на этом же графике горизонтальную прямую на высоте p, где p – вероятность выбранного события (A, B, C или D). Её значение возьмите из соответствующей строки табл. 3 (столбец «Вероятность»). Нарисуйте также две горизонтальные прямые на высотах $p \pm \sigma_p$, показывающие «коридор» значений вероятностей, связанный с неточным определением размеров диска и клетки. Величину σ_p возьмите из столбца «Погрешность» табл. 3.

Постройте аналогичный график для выборочной дисперсии $\langle \Delta X^2\rangle_s$ в зависимости от числа экспериментов $s = 10, 20, \dots, 300$. Сравните её с теоретической дисперсией $D_X = pq$.

3.3. Оценки для числа успехов и биномиальное распределение. В этом разделе мы используем данные для n_A, n_B, n_C и n_D из табл. 2 как результаты измерения случайных величин, каждая из которых имеет биномиальное распределение (7). Объясним методику расчёта, как обычно, на примере события A, (данные из первой строки таблицы 2).

Размещая 10 дисков, мы провели $n = 10$ испытаний. Назовём успехом испытания исход, при котором диск целиком уместился внутри клетки. Теперь измеряемая случайная величина Y равна количеству успехов в серии из 10 испытаний. Вероятность успеха $p = P(A)$, вероятность неудачи $q = 1 - P(A)$. Каждое значение $n_{A,i}$ в столбцах $i = 1, 2, \ldots, 30$ первой строки табл. 2 можно понимать как результат i-го измерения величины Y. Таким образом, мы можем считать, что у нас есть результаты $n_{A,1}, n_{A,2}, \ldots, n_{A,30}$ измерений случайной величины, распределённой по биномиальному закону (7) при $n = 10$. Каждое из чисел $n_{A,i}$ принимает значения от 0 до 10.

Возьмём данные $n_{A,1}$, $n_{A,2}$, $n_{A,3}$, $n_{A,4}$, $n_{A,5}$ из первых пяти столбцов и по ним найдём выборочное среднее и выборочную дисперсию при $s = 5$ по стандартным формулам:

$$\langle Y \rangle_s = \frac{n_{A,1} + n_{A,2} + \cdots + n_{A,s}}{s},$$
$$\langle \Delta Y^2 \rangle_s = \frac{(n_{A,1} - \bar{y})^2 + (n_{A,2} - \bar{y})^2 + \cdots + (n_{A,s} - \bar{y})^2}{s-1}, \qquad \bar{y} = \langle Y \rangle_s. \tag{37}$$

Согласно теории эти величины должны при увеличении s стремиться соответственно к $M_Y = np$, $D_Y = npq$.

Если мы повторим расчёт по данным из первых $s = 10$, 20, 25, 30 столбцов табл. 2, то, используя формулы (37), получим значения

$$\langle Y \rangle_s, \qquad \langle \Delta Y^2 \rangle_s, \qquad s = 10,\ 20,\ 25,\ 30.$$

Возьмите данные для события C (диск накрыл угол клетки) и проведите расчёты выборочного среднего и выборочной дисперсии для случайной величины, имеющий биномиальное распределение с $p = P(C)$, $q = 1 - P(C)$ и $n = 10$. Расчёты проводите по формулам (37), взяв вместо $n_{A,i}$ значения $n_{C,i}$ из первых $s = 5$, 10, 20, 25, 30 столбцов табл. 2. Результаты занесите в табл. 5

Для заполнения последнего столбца («Теория») табл. 5 найдите теоретические значения математического ожидания $M_Y = np$ и дисперсии $D_Y = npq$ при $p = P(C)$, $q = 1 - P(C)$ и $n = 10$.

Для того же события C рассчитайте по формуле биномиального распределения (7) (при $p = P(C)$, $q = 1 - P(C)$ и $n = 10$) вероятности того, что при размещении $n = 10$ дисков событие C произойдет $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$ раз.

Таблица 5: Выборочные средние и дисперсии для биномиального распределения.

Число экспер.	$s = 5$		$s = 10$		$s = 20$		$s = 30$		Теория	
	$\langle Y\rangle$	$\langle \Delta Y^2\rangle$	$\langle Y\rangle$	$\langle \Delta Y^2\rangle$	$\langle Y\rangle$	$\langle \Delta Y^2\rangle$	$\langle Y\rangle$	$\langle \Delta Y^2\rangle$	M_Y	D_Y
C										

Результаты расчёта $P(Y = k)$ занесите в первую строку табл. 6. По результатам экспериментов (см. строку значений n_C в табл. 2) подсчитайте, сколько раз из $s = 30$ экспериментов получилось, что событие C реализовалось k раз (сколько раз в строке встречается число $n_C = 0$, сколько раз $n_C = 1$ и т. д.). Пусть s_k – это число раз, когда в строке таблицы встретилось число k; очевидно, должно обязательно выполняться равенство $s_0 + s_1 + \cdots + s_{10} = s$. Поделив каждое число s_k на $s = 30$, найдите частоту случаев, когда в 30 экспериментах мы получили значение $n_C = k$. Эти частоты занесите во вторую строку табл. 6.

Таблица 6: Вероятности и частоты значений $Y = k$ биномиального распределения.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(Y = k)$											
Частóты $\dfrac{s_k}{s}$											

Представление результатов. Проанализируйте, как зависит выборочное среднее $\langle Y\rangle_s$ от числа экспериментов $s = 5$, 10, 20, 25, 30. По данным табл. 5 на координатной плоскости переменных s (ось абсцисс) и $\langle Y\rangle_s$ (ось ординат) поставьте точки, отвечающие рассчитанным выборочным средним. Нарисуйте на этом же графике горизонтальную прямую на высоте $10p$ при $p = P(C)$. Величину $P(C)$ возьмите из табл. 3. В каждой точке $\langle Y\rangle_s$ нарисуйте вертикальные отрезки симметрично вверх и вниз на длину $\sqrt{\langle \Delta Y^2\rangle_s}$. Эти отрезки будут показывать, насколько велика ошибка выборочного среднего.

Используя данные из первой строки табл. 6, аналогично рис. 1 постройте диаграмму зависимости вероятностей $P(Y = k)$ в биномиальном распределении (7) (с параметрами $p = P(C)$, $q = 1 - P(C)$ и $n = 10$) от k. Поставьте для каждого $k = 0, 1, \ldots, 10$ крестики или жирные точки на высоте s_k/s, отвечающие экспериментально полученным значениям частот (для $s = 30$). Сделайте по этой картинке вывод о сходстве результатов расчётов и оценок, полученных по экспериментальным данным, а также о достаточности $s = 30$ измерений для хорошего согласия теории и эксперимента..

3.3. Экспериментальное определение числа π. В качестве дополнительного упражнения получите экспериментальную оценку числа π. Для этого замените в левой части равенства

$$P(C) = \frac{\pi r^2}{a^2}$$

вероятность $P(C)$ того, что диск накроет угол клетки, на среднее значение частоты $\langle Y \rangle_s/10$, где $\langle Y \rangle_s$ – выборочное среднее из последней табл. 5 при максимальном числе $s = 30$ повторений эксперимента. Как обещает теория, $\langle Y \rangle_s \approx 10 \cdot P(C)$ при больших s. В результате имеем

$$\frac{\langle Y \rangle_{30}}{10} \approx \frac{\pi r^2}{a^2}, \qquad \pi \approx \frac{\langle Y \rangle_{30}}{10} \cdot \frac{a^2}{r^2}.$$

Сравните получившееся число с истинным значением $\pi = 3.14\ldots$.