

# ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ МЕХАНИКА

## ИЗУЧЕНИЕ ДИНАМИКИ ПРОСТЕЙШИХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ МАШИНЫ АТВУДА



Москва – 2018

## Цель работы

*Изучение законов равноускоренного движения*

## Идея эксперимента

Изучение законов равноускоренного движения производится с помощью машины Атвуда, на которой можно получать различные, не слишком большие (по сравнению с ускорением свободного падения) ускорения.

## Теоретическое введение

Экспериментальная установка, получившая название машины Атвуда, представляет собой вращающийся с малым трением легкий блок, через который перекинута тонкая нить с грузами массой  $m_1$  и  $m_2$  (рис. 1.5).

Выберем систему координат так, как показано на рис. 1.5, и изобразим действующие на тела системы силы: силы тяжести и силы, действующие со стороны нитей.

Выберем следующую модель системы. Грузы будем считать материальными точками, подвешенными на невесомой и нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый абсолютно твердый цилиндрический блок. Грузы движутся вертикально, нить не проскальзывает относительно блока, сопротивления воздуха и трения в оси блока нет.

Запишем уравнения движения двух грузов в проекции на ось  $X$  и уравнение кинематической связи, являющееся следствием нерастяжимости нити:

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1, \quad (1.20)$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - T_2, \quad (1.21)$$

$$a_1 + a_2 = 0. \quad (1.22)$$

Здесь  $a_1$  и  $a_2$  – проекции ускорений грузов на ось  $X$ ,  $T_1$  и  $T_2$  – модули сил, действующих на грузы со стороны нити.

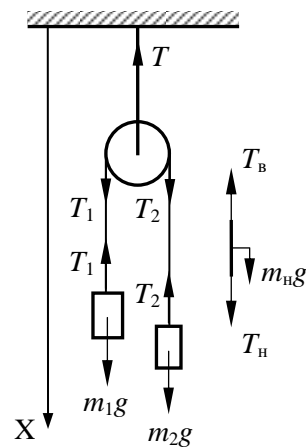


Рис. 1.5. Силы, действующие на грузы, блок и участок нити

Установим связь между модулями сил  $T_1$  и  $T_2$ . Сначала докажем постоянство модуля силы натяжения нити вдоль всей ее длины в условиях данной задачи. Для этого выделим мысленно прямолинейный участок нити произвольной длины (см. рис. 1.5) и запишем уравнение его движения в проекции на ось X:

$$m_n a_n = T_n - T_b + m_n g, \quad (1.23)$$

где  $m_n$  – масса выделенного участка нити,  $a_n$  – проекция его ускорения на ось X,  $T_n$  и  $T_b$  – модули сил натяжения, действующих на выделенный участок нити со стороны нижнего и верхнего примыкающих к нему участков нити.

Поскольку нить по условию задачи невесома (т.е.  $m_n = 0$ ), то из (1.23) следует, что модуль силы натяжения нити постоянен вдоль прямолинейного участка нити. Следовательно, сила, приложенная к грузу со стороны нити и сила натяжения нити в верхней части прямолинейного участка (у блока) равны по модулю.

Запишем уравнение вращательного движения блока вместе с примыкающим к нему участком нити относительно оси, проходящей через центр блока и направленной за плоскость чертежа (рис. 1.5):

$$J \frac{d\omega}{dt} = -T_1 R + T_2 R - M_{тр}, \quad (1.24)$$

Здесь  $J$  – момент инерции блока вместе с примыкающим к нему участком нити относительно выбранной оси,  $\omega$  – угловая скорость вращения блока,  $M_{тр}$  – момент сил трения, действующих в оси блока.

Поскольку блок и нить невесома (т.е.  $J=0$ ), нет трения в оси блока (т.е.  $M_{тр}=0$ ) и силы сопротивления воздуха, то в соответствии с (1.24) модули сил натяжения нити слева и справа от блока равны. Следовательно, равны и силы натяжения нити, приложенные к грузам:

$$T_1 = T_2. \quad (1.25)$$

Решим полученную систему уравнений (1.20) – (1.22), (1.25) относительно ускорений грузов:

$$a_1 = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}, \quad a_2 = -g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = -a_1. \quad (1.26)$$

Формулу (1.26) можно записать в виде:

$$a_1 = g \cdot \frac{\Delta m}{m} \quad (1.27)$$

где  $\Delta m = m_1 - m_2$  – разность масс тел системы;

$m = m_1 + m_2$  – суммарная масса тел системы.

Ускорение тел системы всегда меньше ускорения свободного падения и меняется при изменении соотношения между массами грузов.

Для выбранной системы тел можно учесть влияние массы блока и силы трения в его оси. Система уравнений в этом случае дополняется уравнением вращательного движения блока и уравнением кинематической связи между угловым ускорением блока и ускорением одного из грузов. Очевидно, что силы натяжения нитей слева и справа от блока будут отличаться. Окончательно система уравнений имеет вид

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1, \quad (1.28)$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - T_2, \quad (1.29)$$

$$J\varepsilon = (T_1 - T_2)R - M_{\text{тр}}, \quad (1.30)$$

$$a_1 = -a_2 = a, \quad (1.31)$$

$$a = \varepsilon R, \quad (1.32)$$

где  $J = \alpha m_{\text{бл}} R^2$  – момент инерции блока,  $m_{\text{бл}}$  и  $R$  – его масса и радиус,  $\alpha$  – коэффициент, зависящий от распределения массы (от формы блока),  $\varepsilon$  – угловое ускорение блока,  $M_{\text{тр}}$  – момент силы трения в оси.

Решая систему уравнений (1.28) – (1.32), получаем значение ускорения

$$a = \frac{\Delta m g - M_{\text{тр}} / R}{\alpha m_{\text{бл}} + m}. \quad (1.33)$$

Очевидно, что ненулевые значения силы трения в оси и массы блока уменьшают величину ускорения по сравнению с идеальным случаем.

## Экспериментальная установка

Машина Атвуда состоит из прикрепленной к массивному основанию вертикальной стойки, на верхнем конце которой имеется система из двух легких блоков 1, способных вращаться с малым трением (рис. 1.6). Через блоки перекинута легкая нить, к концам которой прикреплены два одинаковых груза 2. На эти грузы можно помещать добавочные грузы 3 в виде тонких пластин (перегрузки), в результате этого система грузов начнет двигаться с ускорением. Изменяя общую массу перегрузков, можно изменять и ускорение системы.

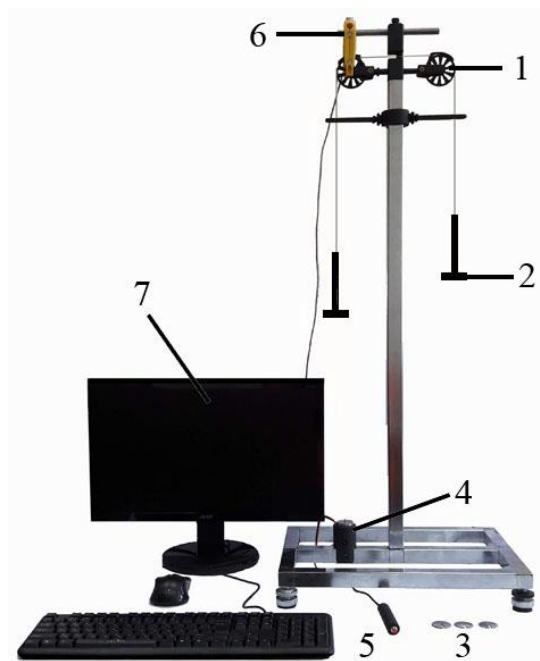


Рис. 1.6. Схема экспериментальной установки.

Система грузов удерживается в состоянии покоя с помощью электромагнита 4, притягивающего один из грузов. При нажатии на кнопку системы управления электромагнитом 5 происходит разблокировка системы, и грузы начинают движение.

Измерение зависимости расстояния, пройденного грузами 2, от времени, осуществляется при помощи фотоэлектрического датчика 6, помещенного у одного из блоков, и программы, установленной на компьютере 7. Датчик 6 представляет собой «световые ворота», которые открываются и закрываются при прохождении отдельных непрозрачных «лепестков» блока. Зная радиус блока и число «лепестков», можно по вращению блока рассчитать изменение координаты  $x$  груза. Информация о времени срабатывания «световых ворот» передается в установленную на компьютере программу «Машина Атвуда».

Внешний вид программы показан на рис. 1.7. Запуск измерений осуществляется нажатием кнопки «Start» в верхнем левом углу и последующем нажатием кнопки системы управления

электромагнитом 5. На экране компьютера в режиме реального времени появляются экспериментальные данные – зависимость координаты  $x$  груза (в метрах) от времени  $t$  (в секундах). По этим данным программа может рассчитать зависимости скорости и ускорения грузов от времени, графики показываются на экране при нажатии кнопок «V» или «A» соответственно. Отметим, что, так как расчет ведется по экспериментальным точкам, то графики  $v(t)$  и  $a(t)$ , как правило, сильно «зашумлены».

Для повышения точности расчетов используется метод наименьших квадратов (МНК). Сначала необходимо нажать кнопку «Proc.» и выделить мышкой область с экспериментальными точками, соответствующими движению тела. Программа, используя МНК, по выделенным экспериментальным точкам строит параболу вида

$$x = At^2 + Bt + C$$

и находит коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$ , значения которых появляются в нижней строке (обратите внимание: коэффициенты имеют размерность) (см. рис. 1.7).

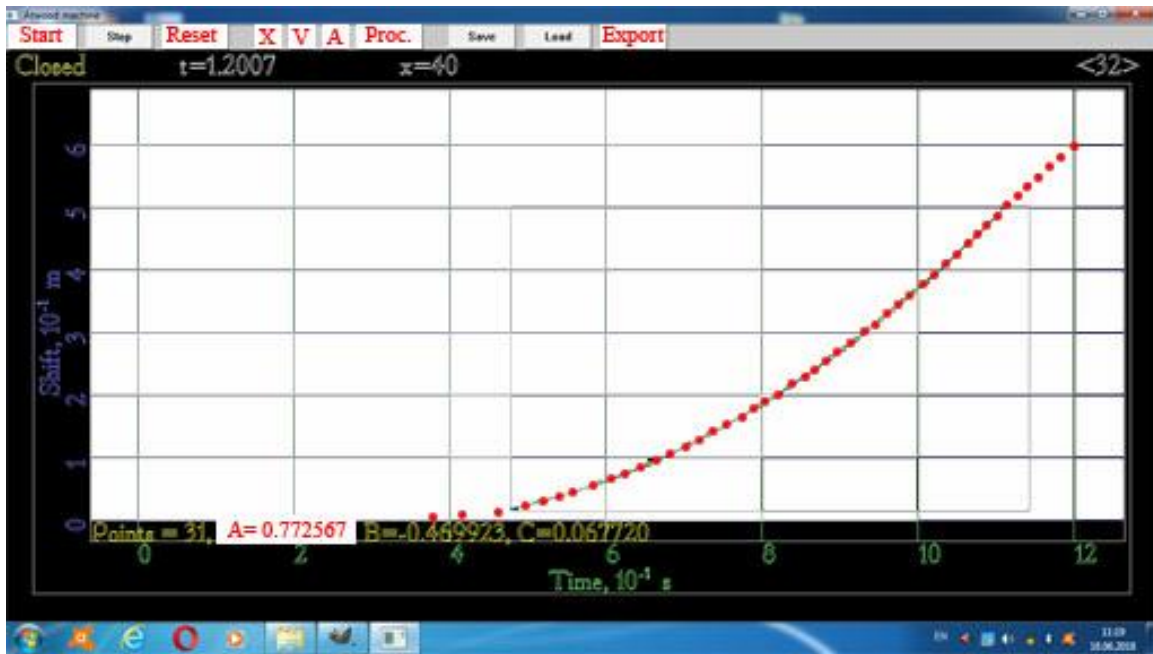


Рис. 1.7. Внешний вид программы «Машина Атвуда».

Так как закон равноускоренного движения имеет вид

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0t + x_0,$$

то ускорение  $a$  груза находится по формуле

$$a = 2A.$$

Для дальнейшего самостоятельного построения графиков и обработки экспериментальных данных имеется возможность кнопкой «Export» экспортировать данные в текстовый файл. Для очистки экрана компьютера и проведения нового эксперимента необходимо нажать кнопку «Reset».

## Проведение эксперимента

### Упражнение 1. Анализ закона движения и определение ускорения

#### Измерения

1. С помощью весов определите массу  $m_0$  двух грузов и связывающей их нити. Результат занесите в табл. 1.1.

2. Используемые в задаче перегрузки имеют примерно одинаковую массу  $m_{\text{п}}$ . Определив массу  $m_i$  каждого из перегрузков, в качестве оценки  $m_{\text{п}}$  возьмите среднее арифметическое  $\bar{m}_{\text{п}}$ , а оценку погрешности массы каждого из перегрузков рассчитайте по формуле

$$S_m = \sqrt{\frac{\sum (m_i - \bar{m}_{\text{п}})^2}{N - 1}},$$

где  $N$  – общее количество перегрузков.

**Таблица 1.1**

*Результаты измерений массы объектов*

$m_0$ (г)										
$m_{\text{п}}$ (г)										
$\bar{m}_{\text{п}}$ (г)					$S_m$ (г)					

3. С помощью электромагнита зафиксируйте левый груз в нижнем положении, а на правый груз положите один из перегрузков. Нажмите кнопку «Start» в программе «Машина Атвуда» и кнопку системы управления электромагнитом 5. Система тел придет в движение, а на экране появится график зависимости  $x(t)$ .

4. Используя встроенный в программу МНК, определите ускорение  $a_{\text{экс}}$  груза. Для этого нажмите кнопку «Proc.», выделите мышкой область с экспериментальными точками и по рассчитанным программой коэффициентам  $A$ ,  $B$  и  $C$  найдите искомое ускорение.

Результат занесите в таблицу 1.2. в строку  $n=1$ , где  $n$  – число перегрузков.

Измерение ускорения повторите не менее 3-х раз.

**Таблица 1.2**

*Результаты экспериментов и обработки упр.1 (n – число перегрузков)*

n	$a_{\text{эксн}} \text{ (м/с}^2\text{)}$			$\bar{a}_{\text{эксн}}$	$S_{\bar{a}}$	$a_{\text{рас}}$	$S_{a_{\text{рас}}}$
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	м/с <sup>2</sup>	м/с <sup>2</sup>	м/с <sup>2</sup>	м/с <sup>2</sup>
1							
2							
3							
4							

5. Повторите измерения п. 3 – 4, постепенно увеличивая число перегрузков ( $n=2, 3, 4, \dots$ ).

6.<sup>1</sup> Для одного-двух измерений экспериментальные данные необходимо кнопкой «Export» экспортировать в текстовый файл. Далее этот файл необходимо сохранить на свою карту памяти или открыть файлы и переписать данные в тетрадь. По полученным данным самостоятельно рассчитать ускорение и сравнить с полученным в программе.

### Обработка результатов

1. Для каждой серии измерений найти оценку ускорения и оценку случайной погрешности. Считать, что «прибором», измеряющим непосредственно ускорение, является компьютер. Поэтому требуемые оценки находятся по формулам для серии прямых измерений, проведенных в одинаковых условиях:

$$\bar{a}_{\text{эксн}} = \frac{\sum a_{\text{эксн},i}}{N}; \quad S_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{\sum (a_{\text{эксн},i} - \bar{a}_{\text{эксн}})^2}{N(N-1)}}$$

(здесь  $N$  – число измерений в серии).

2. Формула (1.27) для расчета ускорения при отсутствии потерь запишется в виде:

$$a = g \frac{n \cdot m_{\text{п}}}{m_0 + n \cdot m_{\text{п}}}. \quad (1.27a)$$

<sup>1</sup> Выполняется по указанию преподавателя



(здесь  $n$  – число перегрузков). Видно, что ускорение тел зависит от  $n$  нелинейно.

Зная массы всех тел, рассчитайте по (1.27а) ускорения  $a_{рас}$  для каждого числа  $n$  перегрузков, оцените погрешности и сравните с результатами экспериментов.

На одних осях постройте графики зависимостей  $\bar{a}_{эксн}(n)$  и  $a_{рас}(n)$ . Сделайте вывод о необходимости учета потерь.

## Упражнение 2. Определение момента силы трения в оси блока и ускорения свободного падения

### Измерения

1. В этом упражнении используется нечетное ( $2N-1$ ) число перегрузков, которые помещаются на обоих грузах системы. Первоначально разместите на правом грузе  $N$  перегрузков, а на левом –  $N-1$  (разность масс равна массе одного перегрузка). Проведите измерение ускорения (не менее трех раз) по описанной выше методике. Результат занесите в таблицу 1.3.

2. Переместите один перегрузок с левого груза на правый, при этом общая масса системы не изменится, а разность масс станет равной массе трех перегрузков. Проведите измерение ускорения.

3. Продолжайте перемещение перегрузков и измерения ускорения, пока все перегрузки не окажутся на одном грузе.

**Таблица 1.3**

*Результаты экспериментов и обработки упр. 2 ( $\Delta n$  – разность числа перегрузков)*

$\Delta n$	$a_{эксн} \text{ (м/с}^2\text{)}$			$\bar{a}_{эксн}$	$S_{\bar{a}}$	$a_{рас}$	$S_{a,рас}$
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	м/с <sup>2</sup>	м/с <sup>2</sup>	м/с <sup>2</sup>	
1							
3							
5							
7							

### Обработка результатов

1. По описанной в Упр. 1 методике для каждой серии измерений найти оценку ускорения и оценку погрешности.

2. Формула (1.33) для расчета ускорения с учетом потерь запишется в виде:

$$a = \frac{\Delta n \cdot m_{\text{п}} g - M_{\text{тр}} / R}{\alpha m_{\text{бл}} + m_0 + (2N - 1)m_n}. \quad (1.33a)$$

(здесь  $(2N-1)$  – общее число перегрузков,  $\Delta n$  – разность числа перегрузков; параметры блоков считать известными и равными:  $\alpha=0,3$ ,  $m_{\text{бл}}=0,0175$  кг,  $R=0,025$  м).

Из (1.33a) следует, что ускорение грузов линейно зависит от разности  $\Delta n$  числа перегрузков, так как общая масса системы остается неизменной.

Постройте график зависимости ускорения  $a(\Delta n)$ .

Используя МНК, найдите уравнение прямой в виде

$$a = A \cdot \Delta n + B,$$

наилучшим образом проходящей по экспериментальным точкам.

По наклону этой прямой, задаваемого коэффициентом

$$A = \frac{m_{\text{п}} g}{\alpha m_{\text{бл}} + m_0 + (2N - 1)m_n},$$

получите оценку для ускорения свободного падения  $g$  и оценку погрешности.

По коэффициенту

$$B = \frac{-M_{\text{тр}} / R}{\alpha m_{\text{бл}} + m_0 + (2N - 1)m_n},$$

равному координате точки пересечения прямой с вертикальной осью, получите оценку для момента силы трения  $M_{\text{тр}}$  и оценку погрешности.

Для наглядности сравните полученное значение с моментом сил, создаваемым одним перегрузком массой  $m_{\text{п}}$ . Проверьте результат, используя легкие перегрузки (можно, например, вырезать из бумаги).

### Основные итоги работы

*На основании проведенных экспериментов и выполненных расчетов должно быть показано, что движение системы тел под действием постоянной силы является равноускоренным, а также проанализировано влияние момента силы трения в оси блока и массы блока на точность определения ускорения.*

### Контрольные задания и вопросы

1. Какие системы отсчета называют инерциальными?  
Сформулировать первый закон Ньютона.

2. Сформулировать второй закон Ньютона.
3. Сформулировать третий закон Ньютона.
4. Груз подвешен на весомерной нити. Как при этом изменяется сила натяжения нити?

### **Литература**

1. А. Н. Матвеев. Механика и теория относительности. – М. Изд. дом «Оникс 21 век», 2003. – 432 с. Гл. 1, 2.
2. В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев. Механика. – М.: Изд. центр «Академия», 2004. – 480 с. Лекции 1 – 3.
3. С. П. Стрелков. Механика. – СПб.: «Лань», 2005. – 560 с. Гл. 1, 2.
4. Д. В. Сивухин. Общий курс физики. В пяти томах. Т. 1. Механика. – М.: ФИЗМАТЛИТ / МФТИ, 2005. – 559 с. Гл. 1, 2.
5. В. С. Русаков, А. И. Слепков, Е. А. Никанорова, Н. И. Чистякова. Механика. Методика решения задач. Учебное пособие. М.: Физический факультет МГУ, 2010. – 368 с. Гл. 1, 2.
6. Митин И. В., Русаков В. С. Анализ и обработка экспериментальных данных. Учебно-методическое пособие для студентов младших курсов. – М.: МГУ. 2002, гл. V.