

**ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
МГУ им. М.В. ЛОМОНОСОВА**



**А.Л.Клавсюк, Е.А. Никанорова,
А.М. Салецкий, А.И. Слепков**

**ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ
ПО МЕХАНИКЕ**

Часть 1



2014

Лабораторный практикум по механике. Часть 1. Учебное пособие/ А.Л. Клавсюк, Е.А. Никонорова, А.М. Салецкий, А.И. Слепков. –М.: ООП Физ. Фак-та МГУ, 2014, 215с.

Настоящее пособие содержит описания лабораторных работ раздела «Механика» практикума по общей физике физического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова. Подбор лабораторных работ соответствует программе курса общей физики и является логическим продолжением соответствующего теоретического курса, читаемого на физическом факультете МГУ.

Включенные в пособие материалы достаточны для подготовки к выполнению работ без привлечения дополнительной литературы. Однако, в конце каждой главы дан список литературы, позволяющий более глубоко познакомиться с теоретическим материалом, изучаемым в работе. В пособии выделено общее теоретическое введение, более подробное изложение теории содержится в описании к каждой лабораторной работе. Описания работ написаны в едином стиле: в каждой работе сформулированы цель и идея эксперимента, дано описание установки и подробное изложение последовательности проведения эксперимента и обработки результатов, в разделе «основные итоги работы» перечислены основные физические результаты, которые должны быть получены и проанализированы студентом. Такой подход, по мнению авторов, приучает студентов к правильной организации проведения эксперимента и вполне уместен в 1-м семестре 1-го курса.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Глава 1</i>	Динамика материальной точки и простейших систем	9
	Введение	10
<i>Лабораторная работа 1.1</i>	Кинетика и динамика прямолинейного движения тела вдоль скамьи с воздушной подушкой	14
	Цель работы	14
	Идея эксперимента	14
	Теоретическое введение	14
	Экспериментальная установка	15
	Проведение эксперимента	17
	<i>Упражнение 1.</i> Юстировка скамьи с воздушной подушкой и определение ее параметров	17
	<i>Упражнение 2.</i> Анализ закона движения и определени ускорения тележки	17
	<i>Упражнение 3.</i> Проверка независимости ускорения тележки от ее массы	18
	Основные итоги работы	19
	Контрольные вопросы	19
<i>Лабораторная работа 1.2</i>	Изучение динамики простейших систем с помощью машины Атвуда	20
	Цель работы	20
	Идея эксперимента	20
	Теоретическое введение	20
	Экспериментальная установка	23
	Проведение эксперимента	24
	<i>Упражнение 1.</i> Анализ закона движения и определени ускорения	24
	<i>Упражнение 2.</i> Определение момента силы трения в оси блока (I метод)	26
	<i>Упражнение 3.</i> Определение момента силы трения в оси блока (II метод)	28
	Основные итоги работы	29
	Контрольные вопросы	29
	<i>Приложение 1.</i> Метод наименьших квадратов	30
	Литература к главе 1	31
<i>Глава 2</i>	Механика твердого тела	32
	Введение	33
<i>Лабораторная работа 2.1</i>	Изучение вращательного движения твердого тела вокруг закрепленной оси	42
	Цель работы	42
	Идея эксперимента	42
	Теоретическое введение	42
	Экспериментальная установка	44
	Проведение эксперимента	45
	<i>Упражнение 1.</i> Проверка закона движения	45
	<i>Упражнение 2.</i> Проверка независимости инерционных свойств маятника (момента инерции) от момента внешних	47

	сил	
	<i>Упражнение 3.</i> Проверка основного уравнения вращательного движения и теоремы Гюйгенса–Штейнера	50
	Основные итоги работы	52
	Контрольные вопросы	52
<i>Лабораторная работа 2.2</i>	Определение моментов инерции тел простой формы и проверка теоремы Гюйгенса–Штейнера методом крутильных колебаний	53
	Цель работы	53
	Идея эксперимента	53
	Теоретическое введение	53
	Экспериментальная установка	56
	Проведение эксперимента	57
	<i>Упражнение 1.</i> Проверка теоремы Гюйгенса–Штейнера	57
	<i>Упражнение 2.</i> Определение момента инерции тела методом колебаний	58
	Основные итоги работы	60
	Контрольные вопросы	60
<i>Лабораторная работа 2.3</i>	Определение моментов инерции тел простой формы	61
	Цель работы	61
	Идея эксперимента	61
	Теоретическое введение	61
	Экспериментальная установка	64
	Проведение эксперимента	64
	<i>Упражнение 1.</i> Определение коэффициента жесткости пружины и момента инерции тела маятника	64
	<i>Упражнение 2.</i> Определение моментов инерции тел простой формы	66
	Основные итоги работы	68
	Контрольные вопросы	68
<i>Лабораторная работа 2.4</i>	Определение момента инерции колеса	69
	Цель работы	69
	Идея эксперимента	69
	Теоретическое введение	69
	Экспериментальная установка	73
	Проведение эксперимента	75
	<i>Упражнение 1.</i> Определение момента инерции колеса методом колебаний	75
	<i>Упражнение 2.</i> Определение момента инерции колеса методом вращения	76
	<i>Упражнение 3.</i> Прямой расчет момента инерции колеса	77
	Основные итоги работы	79
	Контрольные вопросы	79
<i>Лабораторная работа 2.5</i>	Изучение тензора инерции твердого тела	80

	Цель работы	80
	Идея эксперимента	80
	Теоретическое введение	80
	Экспериментальная установка	81
	Проведение эксперимента	84
	<i>Упражнение 1.</i> Изучение тензора инерции динамическим методом	84
	<i>Упражнение 2.</i> Изучение тензора инерции методом колебаний	88
	Основные итоги работы	93
	Контрольные вопросы	94
<i>Лабораторная работа 2.6</i>	Определение тензора инерции твердого тела	95
	Цель работы	95
	Идея эксперимента	95
	Теоретическое введение	95
	Экспериментальная установка	99
	Проведение эксперимента	100
	<i>Упражнение 1.</i> Определение коэффициента упругости подвеса и момента инерции пустой рамки	100
	<i>Упражнение 2.</i> Определение сечения эллипсоида инерции	101
	<i>Упражнение 3.</i> Определение компонент тензора инерции	103
	<i>Упражнение 4.</i> Определение компонент тензора инерции тела, состоящего из стержней и шаров	104
	Основные итоги работы	106
	Контрольные вопросы	106
<i>Приложение 2</i>	Определение моментов инерции тел, имеющих простейшую геометрическую форму	107
	<i>Приложение 2.1.</i> Определение момента инерции тонкого стержня, относительно оси, проходящей через его середину	107
	<i>Приложение 2.2.</i> Моменты инерции прямоугольной пластины относительно главных центральных осей	108
	<i>Приложение 2.3.</i> Момент инерции треугольной пластины относительно главной центральной оси, перпендикулярной его плоскости	110
	<i>Приложение 2.4.</i> Моменты инерции тонкого диска относительно его главных центральных осей	111
	<i>Приложение 2.5.</i> Моменты инерции цилиндра относительно его главных центральных осей	112
	<i>Приложение 2.6.</i> Момент инерции цилиндра с центральным отверстием относительно его продольной оси	113
	<i>Приложение 2.7.</i> Момент инерции шара	114
	<i>Приложение 2.8.</i> Моменты инерции параллелепипеда со сторонами a , b и c относительно его главных осей	115
	<i>Приложение 2.9.</i> Моменты инерции равнобедренной	116

	треугольной призмы относительно ее главных осей	
	<i>Приложение 2.10.</i> Моменты инерции полудиска относительно его главных центральных осей	118
	<i>Приложение 2.11.</i> Моменты инерции тел, рассмотренных в приложениях (относительно осей, указанных на рисунках)	120
Литература к главе 2		122
Глава 3 Законы сохранения в механике		123
	Введение	124
<i>Лабораторная работа 3.1</i>	Измерение скорости полета пули с помощью баллистического маятника	129
	Цель работы	129
	Идея эксперимента	129
	Теоретическое введение	129
	Экспериментальная установка	133
	Проведение эксперимента	134
	<i>Упражнение 1.</i> Определение скорости пуль	134
	<i>Упражнение 2.</i> Оценка потенциальной энергии сжатых пружин и исследование зависимости скорости пули от ее массы	136
	Основные итоги работы	137
	Контрольные вопросы	137
<i>Лабораторная работа 3.2</i>	Крутильный баллистический маятник	138
	Цель работы	138
	Идея эксперимента	138
	Теоретическое введение	138
	Экспериментальная установка	140
	Проведение эксперимента	142
	<i>Упражнение 1.</i> Измерение периодов колебания крутильного баллистического маятника при различных значениях его момента инерции.	142
	<i>Упражнение 2.</i> Определение скорости пули	144
	<i>Упражнение 3.</i> Оценка времени соударения пули	145
	Основные итоги работы	145
	Контрольные вопросы	145
<i>Лабораторная работа 3.3</i>	Изучение движения маятника Максвелла	147
	Цель работы	147
	Идея эксперимента	147
	Теоретическое введение	147
	Экспериментальная установка	154
	Проведение эксперимента	155
	<i>Упражнение 1.</i> Определение величин ускорений и скоростей маятника Максвелла при его спуске и подъеме	155
	<i>Упражнение 2.</i> Определение момента инерции маятника Максвелла	158
	<i>Упражнение 3.</i> Уточнение уравнения кинематической	159

	связи	
	<i>Упражнение 4.</i> Определение времени удара и максимального увеличения силы натяжения нитей	160
	Основные итоги работы	161
	Контрольные вопросы	161
<i>Лабораторная работа 3.4</i>	Измерение реактивной силы	162
	Цель работы	162
	Идея эксперимента	162
	Теоретическое введение	162
	Экспериментальная установка	164
	Проведение эксперимента	166
	<i>Упражнение 1.</i> Измерение реактивной силы струи по углу отклонения маятника при различных положениях цилиндра	166
	<i>Упражнение 2.</i> Измерение реактивной силы струи по объему Q вытекающей за время t воды	167
	Основные итоги работы	168
	Контрольные вопросы	168
<i>Лабораторная работа 3.5</i>	Проверка закона сохранения количества движения	169
	Цель работы	169
	Идея эксперимента	169
	Теоретическое введение	169
	Экспериментальная установка	175
	Проведение эксперимента	175
	<i>Упражнение 1.</i> Определение моментов инерции J_1 и J_2 и величин работ сил трения при опускании и подъеме груза	175
	<i>Упражнение 2.</i> Определение отношения моментов инерции для двух конфигураций системы тел	179
	<i>Упражнение 3.</i> Определение моментов количества движения механической системы для двух положений цилиндров. Проверка закона сохранения момента количества движения	180
	Основные итоги работы	181
	Контрольные вопросы	182
Литература к главе 3		182
Глава 4 Силы трения		183
	Введение	184
<i>Лабораторная работа 4.1</i>	Определение коэффициента силы сухого трения	188
	Цель работы	188
	Идея эксперимента	188
	Теоретическое введение	188
	Экспериментальная установка	191
	Проведение эксперимента	191
	<i>Упражнение 1.</i> Определение коэффициента трения из	192

	значения максимальной силы трения покоя	
	<i>Упражнение 2.</i> Определение коэффициента трения и значения силы трения скольжения	194
	Основные итоги работы	196
	Контрольные вопросы	196
<i>Лабораторная работа 4.2</i>	Определение коэффициента трения качения	197
	Цель работы	197
	Идея эксперимента	197
	Теоретическое введение	197
	Экспериментальная установка	200
	Проведение эксперимента	201
	<i>Упражнение 1.</i> Определение коэффициентов трения качения для различных материалов	201
	Основные итоги работы	202
	Контрольные вопросы	202
<i>Лабораторная работа 4.3</i>	Определение коэффициентов сил вязкого и трения качения	204
	Цель работы	204
	Идея эксперимента	204
	Теоретическое введение	204
	Экспериментальная установка	209
	Проведение эксперимента	210
	<i>Упражнение 1.</i> Определение коэффициента вязкого трения	210
	<i>Упражнение 2.</i> Определение коэффициента трения качения	211
	Основные итоги работы	214
	Контрольные вопросы	214
Литература к главе 4		215

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПРОСТЕЙШИХ СИСТЕМ

1

- Кинематика и динамика прямолинейного движения тела вдоль склади с воздушной подушкой
- Изучение динамики простейших систем с помощью машины Атвуда



Введение

В реальном мире, который и является предметом изучения физики, связи между явлениями, материальными объектами столь разнообразны, что их принципиально невозможно описать во всех деталях. Так же как человек в повседневной жизни пользуется построенными им моделями поведения, общения, модельными (общими) представлениями о происходящих событиях, так и физика при анализе реального мира создает и использует модели физической действительности. При создании моделей принимаются только существенные для данного круга явлений и объектов свойства и связи.

Созданию моделей предшествует формирование понятий, относящихся к объекту исследования. Например, для обозначения физических тел, размеры которых несущественны в условиях данной задачи, задачи вводится понятие «*материальная точка*». Тогда при формировании моделей более сложных явлений можно задавать положение материальной точки ее радиус-вектором.

Важнейшим понятием в механике является понятие об *инерциальной системе отсчета* – такой системе отсчета, относительно которой тела остаются в состоянии покоя или продолжают двигаться равномерно и прямолинейно, если на них не действуют другие тела.

Именно для *инерциальных систем отсчета* формулируются основные законы классической механики.

Система отсчета – это совокупность тела отсчета, связанной с ним системы координат и часов, синхронизованных в каждой точке пространства.

Тело отсчета – тело, относительно которого рассматривается движение других тел.

Система координат – совокупность трех некопланарных осей, пересекающихся в одной точке с указанием масштаба на них. Декартова система координат – это прямоугольная система координат, оси которой – три взаимно перпендикулярные прямые линии, пересекающиеся в одной точке – начале системы координат.

Часы – прибор для измерения времени, принцип действия которого основан на сравнении длительности исследуемого временного интервала с длительностью выбранного за эталон периодического процесса.

Радиус-вектор – вектор, начало которого лежит в начале системы координат, а конец – в той точке, где в данный момент находится материальная точка.

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \{x, y, z\}, \quad (1.1)$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} – орты системы отсчета $S - |\mathbf{i}| = 1, |\mathbf{j}| = 1, |\mathbf{k}| = 1$; x, y, z – координаты материальной точки в выбранной системе отсчета.

Закон движения – зависимость радиус-вектора от времени или в проекциях на оси координат – координат материальной точки от времени.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = \{x(t), y(t), z(t)\} \quad (1.2)$$

Траектория – кривая, по которой движется материальная точка.

Путь – длина траектории от начальной до конечной точки движения.

Перемещение материальной точки $\Delta\mathbf{r}(t)$ – вектор, начало которого находится в начальной, а конец – в конечной точке движения.

Скорость материальной точки

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} \frac{dx}{dt} + \mathbf{j} \frac{dy}{dt} + \mathbf{k} \frac{dz}{dt}. \quad (1.3)$$

Ускорение материальной точки

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{i} \frac{dv_x}{dt} + \mathbf{j} \frac{dv_y}{dt} + \mathbf{k} \frac{dv_z}{dt}. \quad (1.4)$$

Для определения угловой скорости определим вначале вектор элементарного углового перемещения:

$$d\varphi = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t + dt)]}{|\mathbf{r}(t)|^2}. \quad (1.5)$$

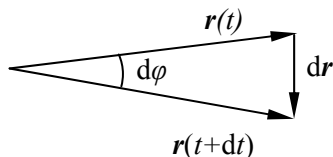


Рис. 1.1. Элементарное угловое перемещение.

Очевидно, что введенное таким образом элементарное угловое перемещение равно по величине углу $d\varphi$ (см. рис.1.1).

Действительно

$$|d\varphi| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{r}(t)| \cdot |\mathbf{r}(t + dt)| \cdot \sin d\varphi}{|\mathbf{r}(t)|^2} = d\varphi. \quad (1.6)$$

Заметим что $d\varphi$ – псевдовектор или аксиальный вектор, его направление определяется выбором правой или левой тройки базисных векторов системы координат.

Угловая скорость также является векторной величиной:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (1.7)$$

Угловое ускорение

$$\beta = \frac{d\omega}{dt}. \quad (1.8)$$

Уравнения кинематической связи – уравнения, связывающие кинематические характеристики тел системы.

Первый закон Ньютона. Существуют такие системы отсчета, относительно которых изолированная материальная точка (на которую не действуют силы) движется равномерно и прямолинейно или покоится. Такие системы отсчета называются **инерциальными**.

Второй закон Ньютона. В инерциальной системе отсчета произведение массы материальной точки на ее ускорение равно сумме всех сил, действующих на эту материальную точку со стороны других тел:

$$ma = \sum_i F_i. \quad (1.9)$$

Третий закон Ньютона. Силы взаимодействия двух материальных точек:

- 1) парные и приложены к разным материальным точкам,
- 2) одной природы,
- 3) равны по модулю,
- 4) противоположны по направлению,
- 5) направлены вдоль прямой, соединяющей материальные точки.

Уравнение движения – второй закон Ньютона, записанный в векторной форме или в проекциях на оси инерциальной системы отсчета:

$$ma = \sum_i F_i \quad \text{или} \quad \begin{cases} ma_x = \sum_i F_{ix}, \\ ma_y = \sum_i F_{iy}, \\ ma_z = \sum_i F_{iz}. \end{cases} \quad (1.10)$$

Заметим, что уравнение движения можно записать в проекциях на любую, в том числе и произвольно движущуюся относительно инерциальной системы отсчета, ось. Для этого достаточно умножить скалярно левую и правую части векторного уравнения движения (1.10) на единичный вектор (орт), задающий направление этой оси. Например, на направление скорости $\boldsymbol{\tau}$ и на направление, перпендикулярное скорости \boldsymbol{n} :

$$\begin{aligned} m\boldsymbol{a}_n &= \sum_i \vec{F}_{in}, \\ m\boldsymbol{a}_\tau &= \sum_i \vec{F}_{i\tau}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где $\boldsymbol{a}_n(t) = a_n(t)\boldsymbol{n}(t)$ и $\boldsymbol{a}_\tau(t) = a_\tau(t)\boldsymbol{\tau}(t)$ – нормальная и тангенциальная составляющие ускорения материальной точки.

Законы динамики – это законы Ньютона и законы, описывающие индивидуальные свойства сил.

Лабораторная работа 1.1

КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА ВДОЛЬ СКАМЬИ С ВОЗДУШНОЙ ПОДУШКОЙ

Цель работы

Изучение законов равноускоренного движения.

Идея эксперимента

Изучение законов равноускоренного движения производится на основе анализа кинематических характеристик движения тела по наклонной плоскости. Используется скамья с воздушной подушкой, с помощью которой можно практически полностью устранить силу трения между движущимся телом и поверхностью.

Теоретическое введение

При движении тела вдоль наклонной плоскости на него, в общем случае, в направлении движения действуют проекция силы тяжести и сила трения (см. рис. 1.2).

Выберем инерциальную лабораторную систему отсчета, жестко связанную с наклонной поверхностью. Ось X декартовой системы координат направим вниз по наклонной плоскости (рис. 1.2).

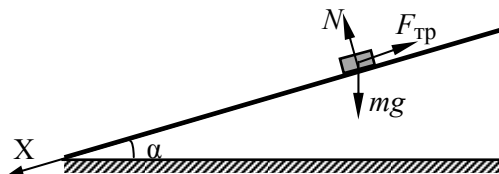


Рис. 1.2. Силы, действующие на тело при движении.

Уравнение движения тела в проекции на ось X имеет вид:

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}. \quad (1.1.1)$$

При использовании скамьи с воздушной подушкой можно пренебречь силой трения. В этом случае из уравнения движения (1.12) получаем следующее значение ускорения тела:

$$\ddot{x} = g \sin \alpha. \quad (1.1.2)$$

Для нахождения закона движения необходимо дважды проинтегрировать по времени выражение (1.1.2) при заданных начальных условиях. Зададим начальные условия – координату и скорость тела в начальный момент времени:

$$x(t = 0) = x_0, \quad (1.1.3)$$

$$\dot{x}(t=0) = v_0. \quad (1.1.4)$$

Интегрируя (1.1.2) по времени с учетом (1.1.4), получаем закон изменения скорости тела:

$$v(t) = \int g \sin \alpha t dt = g \sin \alpha t + v_0. \quad (1.1.5)$$

Интегрируя (1.1.5) с учетом (1.1.3), находим закон движения тела:

$$x(t) = \int (g \sin \alpha t + v_0) dt = \frac{g \sin \alpha t^2}{2} + v_0 t + x_0. \quad (1.1.6)$$

Исключая время из выражений (1.1.5), (1.1.6), легко получить связь скорости тела с его координатой в любой момент времени:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0), \quad (1.1.7)$$

где $a = g \sin \alpha$.

Как видим, зависимость квадрата скорости тела от его координаты является линейной функцией, следовательно, построив график зависимости $v^2(x)$ можно определить ускорение тела по углу наклона графика, который не зависит от выбранных начальных условий (v_0, x_0) .

Экспериментальная установка

Скамья с воздушной подушкой представляет собой полую тонкостенную дюралюминиевую трубу 1 треугольного сечения, установленную на горизонтальном основании так, как показано на рис. 1.3. Торцы трубы закрыты заглушками. В одной из заглушек имеется отверстие, соединенное с гибким шлангом 2, через который в трубу при помощи компрессора нагнетается воздух, выходящий затем через множество маленьких отверстий, просверленных в двух гранях трубы, ориентированных вверх. Благодаря потоку воздуха через мелкие отверстия между трубой и специально изготовленной тележкой 3 создается воздушная подушка, благодаря которой тележка «зависает» над скамьей и движется по ней практически без трения.

На основании конструкции имеются регулировочные винты 4 и 5, позволяющие изменять угол α наклона трубы к горизонту. В работе предполагается все регулировки проводить винтом 4.

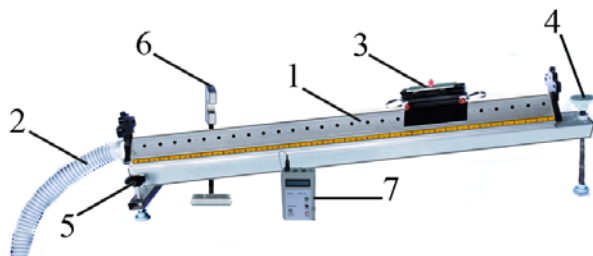


Рис. 1.3. Экспериментальная установка.

При описании движения тележки ее можно считать абсолютно твердым телом. Такое тело рассматривается как система материальных точек, взаимное расположение которых друг относительно друга строго фиксировано.

Прямолинейное движение абсолютно твердого тела является поступательным движением, при котором все точки тела движутся по одинаковым траекториям. Скорости и ускорения всех точек тела равны между собой, поэтому прямолинейное движение твердого тела может быть описано как движение материальной точки, масса которой равна массе всего тела.

На тележке имеется специальная насадка, с закрепленными на ней двумя тонкими пластинами, расположенными на небольшом расстоянии l друг от друга. Когда тележка проходит под датчиком времени τ , пластины последовательно перекрывают и открывают световой поток, соответственно, запуская и останавливая таймер 7. Таким образом, датчики работают как «световые ворота» и фиксируют время τ_i , в течение которого тележка проходит малое расстояние l , равное расстоянию между пластинами (см. рис. 1.4). Измеряя время τ_i , можно вычислить среднюю скорость движения на малом участке пути l :

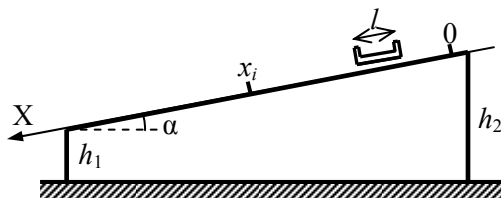


Рис. 1.4. Обозначение размеров и координат тележки.

$$\langle v_i \rangle = \frac{l}{\tau_i}. \quad (1.1.8)$$

Поскольку расстояние между пластинами мало, можно считать среднюю скорость $\langle v_i \rangle$ на интервале времени τ_i мгновенной скоростью тележки в точке траектории с координатой x_i .

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Юстировка скамьи с воздушной подушкой и определение ее параметров.

1. С помощью *регулирующего винта 4* установить скамью горизонтально ($\alpha=0$). Для этого включить вентилятор, аккуратно установить тележку на скамью и, вращая регулируемый винт, добиться, чтобы тележка не перемещалась по скамье. Устанавливая тележку в разные точки скамьи, убедиться, что тележка остается неподвижной в любом месте. Убедитесь, что нет перекосов скамьи в какую либо сторону.

2. Оценить точность установки горизонтального положения. Для этого, вращая регулируемый винт определить пределы изменения высоты h_2 , при которых тележка будет оставаться неподвижной. Учесть, что шаг резьбы регулирующего винта равен 1 мм (один оборот винта изменяет высоту на 1 мм).

3. Измерить линейкой длину скамьи L между регулирующими винтами, высоты h_1 и h_2 , а также расстояние l между пластинами, закрепленными на тележке (см. рис. 1.4).

Упражнение 2. Анализ закона движения и определение ускорения тележки.

Измерения

1. С помощью регулирующего винта установить наклон скамьи, увеличив высоту h_2 на 3 мм (три полных оборота регулирующего винта).

2. Взвесить тележку, записать значение ее массы. Установить тележку на скамью.

3. Установить датчик в положение $x_i = 20$ см.

4. Измерить время τ_i прохождения тележки мимо датчика.

Полученные значения занести в табл. 1.1.

5. Измерить время прохождения тележки мимо датчика для различных положений датчика, каждый раз перемещая датчик на 20 см.

6. Повторить п. 3 – п. 5, для 6 и 9 полных оборотов регулирующего винта.

Таблица 1.1

Экспериментальные данные

x	τ	v	v^2
0,2			
0,4			
0,6			
0,8			
1,0			

Обработка результатов

1. Вычислить значения скоростей тележки в соответствии с формулой (1.1.8) для каждого проведенного измерения.

2. Вычислить квадрат скорости v^2 .

3. Построить график зависимости $v^2(x)$. Убедиться, что эта зависимость является линейной. С помощью метода наименьших квадратов (см. *Приложение 1*) определить коэффициент наклона и, используя соотношение (1.1.7), определить ускорение тележки.

4. Оценить погрешность измерения ускорения.

5. Сравнить полученное значение ускорения с рассчитанным по формуле (1.1.2).

Упражнение 3. Проверка независимости ускорения тележки от ее массы.

Измерения

1. Установить высоту h_2 , соответствующую шести оборотам регулировочного винта.

2. Прикрепить груз к тележке. Взвесить тележку с грузом, записать значение ее массы. Установить тележку на скамью.

3. Установить датчик в положение $x_i = 20$ см.

4. Измерить время τ_i прохождения тележки мимо датчика.

Полученные значения занести в табл. 1.1.

5. Измерить время прохождения тележки мимо датчика для различных его положений, каждый раз перемещая датчик на 20 см.

6. Повторить п. 2 – п. 5 для тележки с грузом другой массы. Данные занести в табл. 1.1.

Обработка результатов

1. Вычислить значения скоростей тележки в соответствии с формулой (1.1.8) для каждого проведенного измерения.

2. Вычислить квадрат скорости v^2 .

3. Построить график зависимости $v^2(x)$. Убедиться, что эта зависимость является линейной. С помощью метода наименьших квадратов (см. Приложение) определить коэффициент наклона и, используя соотношение (1.1.7), определить ускорение тележки.

4. Оценить погрешность измерения ускорения.

5. Сравнить полученное значение ускорения с полученным в *упражнении 2* для соответствующего угла наклона. Убедиться, что ускорение не зависит от массы тележки.

Основные итоги работы

В результате выполнения работы должно быть показано, что движение тела вдоль наклонной плоскости является равноускоренным, причем его ускорение не зависит от массы.

Контрольные вопросы

1. Что такое инерциальные системы отсчета? Сформулировать первый закон Ньютона.
2. Что такое масса? Как ее измерить?
3. Что такое сила? Как ее измерить?
4. Сформулировать второй закон Ньютона.
5. Сформулировать третий закон Ньютона.
6. Что такое средняя скорость, мгновенная скорость?
7. Как изменятся экспериментальные зависимости, если будет заметной сила вязкого трения, пропорциональная скорости?

Лабораторная работа 1.2 ИЗУЧЕНИЕ ДИНАМИКИ ПРОСТЕЙШИХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ МАШИНЫ АТВУДА

Цель работы

Изучение законов равноускоренного движения.

Идея эксперимента

Изучение законов равноускоренного движения производится на основе анализа кинематических характеристик движения системы тел. Для проведения такого анализа используется машина Атвуда, с помощью которой можно получать различные, не слишком большие (по сравнению с ускорением свободного падения) ускорения.

Теоретическое введение

Экспериментальная установка, получившая название «машина Атвуда», представляет собой вращающийся с малым трением легкий блок, через который перекинута тонкая нить с грузами массой m_1 и m_2 (рис. 1.5).

Выберем систему координат так, как показано на рис. 1.5, и изобразим действующие на тела системы силы: силы тяжести и силы, действующие со стороны нитей.

Выберем модели тел и их движений. Грузы считаем материальными точками, подвешенными на невесомой и нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый абсолютно твердый цилиндрический блок. Будем считать, что грузы движутся вертикально, нить не проскальзывает относительно блока, сопротивления воздуха и трения в оси блока нет.

Запишем уравнения движения двух грузов в проекции на ось X и уравнение кинематической связи, являющееся следствием нерастяжимости нити:

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1, \quad (1.2.1)$$

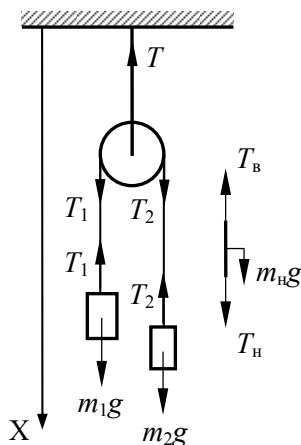


Рис. 1.5. Силы, действующие на грузы, блок и участок нити.

$$m_2 a_2 = m_2 g - T_2, \quad (1.2.2)$$

$$a_1 + a_2 = 0. \quad (1.2.3)$$

Здесь a_1 и a_2 – проекции ускорений грузов на ось X , T_1 и T_2 – модули сил, действующих на грузы со стороны нити.

Докажем постоянство модуля силы натяжения нити вдоль всей ее длины в условиях данной задачи. Для этого выделим мысленно прямолинейный участок нити произвольной длины (см. рис. 1.5) и запишем уравнение его движения в проекции на ось X :

$$m_n a_n = T_n - T_v + m_n g, \quad (1.2.4)$$

где m_n – масса выделенного участка нити, a_n – проекция его ускорения на ось X , T_n и T_v – модули сил натяжения, действующих на выделенный участок нити со стороны нижнего и верхнего примыкающих к нему участков нити.

Поскольку нить по условию задачи невесома, то из (1.2.4) следует, что модуль силы натяжения нити постоянен вдоль прямолинейного участка нити, а, следовательно, сила, приложенная к грузу со стороны нити и сила натяжения нити в верхней части прямолинейного участка равны по модулю.

Запишем уравнение вращательного движения блока вместе с примыкающим к нему участком нити относительно оси, проходящей через центр блока и направленной за плоскость чертежа (рис. 1.5):

$$J \frac{d\omega}{dt} = -T_1 R + T_2 R + M_{тр}, \quad (1.2.5)$$

Здесь J – момент инерции блока вместе с примыкающим к нему участком нити относительно выбранной оси, ω – угловая скорость вращения блока, $M_{тр}$ – момент сил трения, действующих в оси блока.

Поскольку блок и нить невесомы, нет трения в оси блока и силы сопротивления воздуха, то в соответствии с (1.2.5) модули сил натяжения нити слева и справа от блока равны. Следовательно, равны и силы натяжения нити, приложенные к грузам:

$$T_1 = T_2. \quad (1.2.6)$$

Решим полученную систему уравнений (1.2.1) – (1.2.3), (1.2.6) относительно ускорений грузов:

$$a_1 = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}, \quad a_2 = -g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}. \quad (1.2.7)$$

Пусть $m_2 = m$, $m_1 = m + \Delta m$, тогда, выражение для модуля ускорений грузов a принимает вид:

$$a = g \frac{\Delta m}{2m + \Delta m}. \quad (1.2.8)$$

Ускорение тел системы всегда меньше ускорения свободного падения и меняется при изменении соотношения между массами грузов.

Для выбранной системы тел можно учесть влияние массы блока и силы трения в его оси. Система уравнений в этом случае дополняется уравнением вращательного движения блока и уравнением кинематической связи между угловым ускорением блока и ускорением одного из грузов. Очевидно, что силы натяжения нитей слева и справа от блока будут отличаться. Окончательно система уравнений имеет вид

$$(m + \Delta m)a_1 = (m + \Delta m)g - T_1, \quad (1.2.9)$$

$$ma_2 = mg - T_2, \quad (1.2.10)$$

$$J\varepsilon = (T_1 - T_2)R - M_{\text{тр}}, \quad (1.2.11)$$

$$a_1 = -a_2 = a, \quad (1.2.12)$$

$$a = \varepsilon R, \quad (1.2.13)$$

где $J = \alpha m_0 R^2$ – момент инерции блока, m_0 и R – его масса и радиус, α – коэффициент, зависящий от распределения массы (от формы блока), ε – угловое ускорение блока, $M_{\text{тр}}$ – момент сил трения в оси.

Решая систему уравнений (1.2.9) – (1.2.13), получаем значение ускорения

$$a = \frac{\Delta mg - M_{\text{тр}} / R}{\alpha m_0 + 2m + \Delta m}. \quad (1.2.14)$$

В случае, когда блок имеет форму диска или цилиндра, момент инерции блока равен

$$J = \frac{m_0 R^2}{2}, \quad (1.2.15)$$

и, следовательно, коэффициент равен $\alpha = 1/2$.

Очевидно, что ненулевые значения силы трения в оси и массы блока уменьшают величину ускорения по сравнению с идеальным случаем.

Экспериментальная установка

Машина Атвуда состоит из прикрепленной к основанию вертикальной стойки, на которую нанесена *шкала 1* (рис. 1.6). На верхнем конце стойки имеется легкий *блок 2*, способный вращаться с малым трением. Через блок перекинута легкая нить, к концам которой прикреплены два одинаковых груза *3*. На правый груз можно помещать добавочные *грузы 4* в виде тонких пластин (перегрузки), в результате этого система грузов начинает двигаться с некоторым ускорением. Меняя массу перегрузки, можно менять ускорение системы.

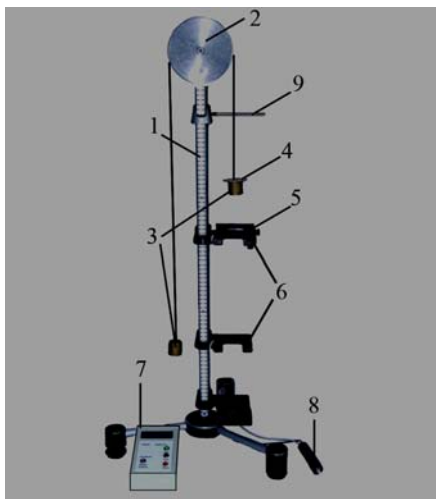


Рис. 1.6. Экспериментальная установка.

После того, как груз с перегрузкой проходит некоторое расстояние L_1 , перегрузка снимается с помощью *кронштейна 5*. После этого грузы начинают двигаться равномерно. На стойке укреплены два *фотоэлектрических датчика 6*, соединенные с *таймером 7*. При этом верхний фотодатчик соединен с *кронштейном 5*. Фотодатчики могут крепиться на стойке в разных положениях. Система грузов удерживается в состоянии покоя специальной фрикционной муфтой, управляемой с помощью электромагнита.

Для измерения времени равномерного движения и управления фрикционной муфтой установка снабжена электронным блоком, в состав которого входят *таймер 7* и *система управления электромагнитом 8*.

При нажатии на клавишу "сброс" происходит обнуление таймера. В исходном состоянии система блокируется фрикционной муфтой. При нажатии на *кнопку системы управления электромагнитом 8* происходит разблокировка системы. Во время прохождения правым грузом верхнего фотодатчика запускается

таймер. Импульс от нижнего фотоэлектрического датчика останавливает работу таймера, результат высвечивается на табло. При этом снова замыкается цепь электромагнита и система затормаживается фрикционной муфтой.

Перед выполнением эксперимента следует убедиться, что правый груз может свободно опускаться, не касаясь кронштейна и фотодатчиков. В противном случае при помощи винтов, крепящих кронштейн и фотодатчики, следует провести необходимые регулировки.

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Анализ закона движения и определение ускорения.

Исходя из анализа движения системы тел, проведенного в теоретическом введении, можно предположить, что реальное движение тел на участке L_1 будет равнопеременным. В этом случае закон движения, т.е. зависимость координаты тела от времени, будет иметь вид:

$$x = x_0 + \frac{at^2}{2}, \quad (1.2.16)$$

где x_0 – координата, от которой груз начинает свое движение. Учитывая, что при равнопеременном движении (с нулевой начальной скоростью) скорость меняется по закону

$$v = at,$$

получаем

$$L_1 = x_1 - x_0 = \frac{v_1^2}{2a}, \quad (1.2.17)$$

где v_1 – скорость груза в момент снятия перегрузки и включения таймера, x_1 – координата верхнего фотодатчика. Если в системе отсутствуют силы трения, то с этой же скоростью груз будет проходить расстояние между фотодатчиками после снятия с него перегрузки:

$$v_1 = \frac{L_2}{t_2}, \quad (1.2.18)$$

Здесь $L_2 = x_2 - x_1$ – расстояние между двумя фотодатчиками (x_2 – координата нижнего фотодатчика), t_2 – время движения на этом участке пути.

Измерения

1. Установить правый груз в верхнем положении x_0 и положить на него один из перегрузков. Затем установить верхний фотодатчик с закрепленным на нем кронштейном на отметке x_1 так, чтобы расстояние между датчиками L_2 составляло 15–20 см. В дальнейшем величина L_2 не изменяется.

2. Систему тел привести в движение и определить время пролета t_2 груза между фотодатчиками. Результаты измерений занести в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Экспериментальные данные

n	L_1	t_2	v_1	v_1^2
1				
2				
3				
4				
...				

3. Изменить координату начального положения x_0 груза. Для нового значения L_1 провести измерения в соответствии с п. 2. Необходимо произвести измерения времени движения груза между двумя фотодатчиками не менее, чем для пяти различных значений L_1 .

4. Выполнить п. 1 – 3 для трех перегрузков с различными массами.

Обработка результатов

1. Для каждого значения L_1 определить значение скорости $v_1 = \frac{L_2}{t_2}$ и квадрата скорости v_1^2 . Результаты вычислений занести в табл. 1.2.

2. По результатам измерений построить график зависимости $v_1^2(L_1)$. Убедиться, что эта зависимость близка к пропорциональной зависимости, т.е. движение груза на участке x_0-x_1 является равноускоренным и выполняется соотношение (1.2.17). С помощью метода наименьших квадратов (см. **Приложение1**) определить наклон прямой $v_1^2(L_1)$. По наклону прямой найти значение ускорения

a и погрешность его определения. Сравнить полученное значение ускорения с найденным по формуле (1.2.8).

Упражнение 2. Определение момента силы трения в оси блока (I метод).

В случае малых значениях масс перегрузков Δm по сравнению с массой грузов и блока выражение (1.2.14) для ускорения груза принимает вид:

$$a \approx \frac{\Delta mg}{am_0 + 2m} - \frac{M_{\text{тр}} / R}{am_0 + 2m}. \quad (1.2.19)$$

Будем считать, что блок представляет собой однородный диск, тогда коэффициент α , зависящий от распределения массы (от формы блока), следует принять равным $\alpha=1/2$.

Как видим, ускорение является линейной функцией массы перегрузка. В данном упражнении следует построить график зависимости ускорения груза от массы перегрузка $a(\Delta m)$ и по точке пересечения графика с осью ускорений определить значение момента силы трения в оси блока.

Для экспериментального определения ускорения a можно воспользоваться соотношениями (1.2.17) и (1.2.18), из которых следует, что

$$a = \frac{v_1^2}{2L_1} = \frac{L_2^2}{2t_2^2 L_1}. \quad (1.2.20)$$

Измерения

1. Установить верхний фотодатчик в среднем положении (по шкале, нанесенной на стойку). Нижний датчик установить так, чтобы расстояние L_2 составляло 15–20 сантиметров.

2. Поместить на правый груз один из перегрузков, входящих в комплект установки.

3. Определить 3–5 раз время t_2 прохождения расстояния L_2 между фотодатчиками. Результаты измерений занесите в табл. 1.3.

4. Провести аналогичные измерения с перегрузками различных масс, а также для их комбинаций, положив на груз два, а затем три перегрузка. Результаты измерений также внесите в табл. 1.3.

6. В комплект установки входит незакрепленный блок, имеющий такие же размеры и массу, как и блок, закрепленный на вертикальной стойке. Масса блока определяется взвешиванием.

7. Штангенциркулем определите радиус блока.

Таблица 1.3

Экспериментальные данные

$\Delta m, \text{ г}$	n	t_2	$\langle t_2 \rangle$	S_{t_2}	$a,$	S_a
	1					
	2					
	3					
	1					
	2					
	3					

Обработка результатов

1. По экспериментальным данным для каждого из перегрузков определить среднее значение времени пролета между фотодатчиками $\langle t_2 \rangle$ с использованием формулы

$$\langle t_2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N t_{2n}, \quad (1.2.21)$$

где N – число измерений.

2. Вычислить выборочное стандартное отклонение среднего арифметического значения $\langle t_2 \rangle$

$$S_{t_2} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{n=1}^N (t_{2n} - \langle t_2 \rangle)^2}. \quad (1.2.22)$$

Результаты вычислений внести в табл. 1.3.

3. Используя (1.2.20) для каждого Δm вычислить значение ускорения a :

$$a = \frac{L_2^2}{2 \langle t_2 \rangle^2 L_1}. \quad (1.2.23)$$

4. Вычислить стандартное отклонение величины ускорения S_a

$$S_a = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial L_2} S_{L_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial L_1} S_{L_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial t_2} S_{t_2} \right)^2}. \quad (1.2.24)$$

и внести результат в табл. 1.3.

5. Используя метод наименьших квадратов (см. Приложение), построить график зависимости ускорения от массы перегрузка $a(\Delta m)$.

6. Определить значение момента силы трения в оси блока по точке пересечения графика $a(\Delta m)$ с осью ускорений.

Упражнение 3. Определение момента силы трения в оси блока (II метод).

В данном упражнении для определения значения силы трения необходимо постепенно увеличивать массу одного из грузов на Δm_{\min} (добавляя на него маленькие перегрузки) до того момента, когда система придет в движение. В соответствии с формулой (1.2.14) при $a = 0$ момент силы трения равен:

$$M = \Delta m_{\min} gR. \quad (1.2.25)$$

Измерения

В комплект установки входит набор разновесов – маленьких предметов, которые следует использовать для определения минимальной массы перегрузка, необходимой для вычисления силы трения в оси блока. Измерения повторить три раза.

Обработка результатов

1. По экспериментальным данным определить среднее значение Δm_{\min} и выборочное стандартное отклонение среднего арифметического.

2. Вычислить значение момента силы трения в оси блока в соответствии с формулой (1.2.25), используя значение радиуса блока, определенное в *упражнении 2*.

3. Оценить погрешность измерения момента силы трения.

4. Сравнить полученное значение момента силы трения с определенным в *упражнении 2*.

5. Используя выражение (1.2.14), рассчитать ускорения для трех значений масс перегрузков, использовавшихся в *упражнении 1*.

6. Сравнить значения ускорений, измеренных в *упражнении 1* с рассчитанными с учетом силы трения в оси блока и ненулевой массы блока.

Основные итоги работы

На основании проведенных экспериментов и выполненных расчетов должно быть показано, что движение системы тел под действием постоянной силы является равноускоренным, а также проанализировано влияние момента силы трения в оси блока и массы блока на точность определения ускорения.

Контрольные вопросы

1. Что такое инерциальные и неинерциальные системы отсчета? Сформулировать первый закон Ньютона.
2. Что такое масса, как ее измерить?
3. Что такое сила, как ее измерить?
4. Сформулировать второй закон Ньютона.
5. Сформулировать третий закон Ньютона.

Приложение 1. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

1. Случай пропорциональной зависимости

Пусть $\{x_i; y_i; \sigma_i\}$ – совокупность n независимых измерений $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, связанных уравнением совместных измерений вида

$$y = ax, \quad (\text{П1.1})$$

где a – константа, значение которой необходимо оценить, σ_i^2 – дисперсии прямо измеренных величин y_i . В соответствии с методом наименьших квадратов для оценки истинного значения a используем выражение:

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}}. \quad (\text{П1.2})$$

Оценка дисперсии величины a находится по формуле:

$$S_{\hat{a}}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}}. \quad (\text{П1.3})$$

В случае одинаковых по величине дисперсий $\sigma_i^2 = \sigma_0^2$ формулы (П1.2) и (П1.3) упрощаются:

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad (\text{П1.4})$$

$$S_{\hat{a}}^2 = \frac{\sigma_0^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (\text{П1.5})$$

2. Случай линейной зависимости

Пусть $\{x_i; y_i; \sigma_i\}$ – совокупность n независимых измерений $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, связанных уравнением совместных измерений вида

$$y = ax + b, \quad (\text{П1.6})$$

где a – константа, значение которой необходимо оценить, σ_i^2 – дисперсии прямо измеренных величин y_i .

В соответствии с методом наименьших квадратов для оценки истинного значения a используем выражение

$$\hat{a} = \frac{\Delta_a}{\Delta}, \quad (\text{П1.7})$$

в котором введены следующие обозначения:

$$\Delta_a = \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sigma_i^2}. \quad (\text{П1.8})$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2, \quad (\text{П1.9})$$

Оценка дисперсии величины a находится по формуле:

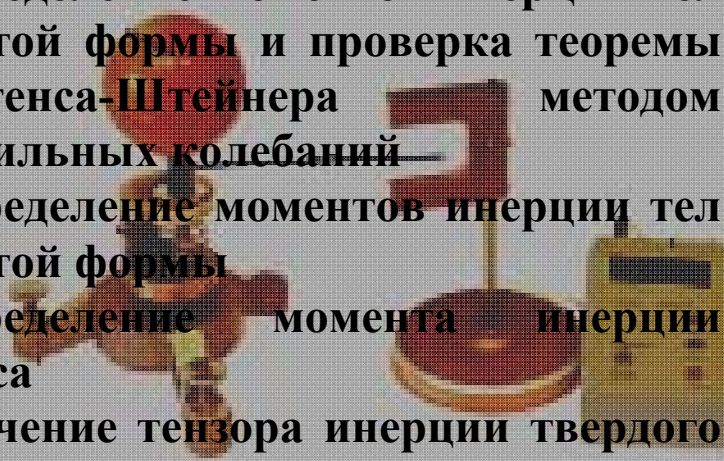
$$S_{\hat{a}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}{\Delta}. \quad (\text{П1.10})$$

Литература к главе 1

1. А. Н. Матвеев. Механика и теория относительности. – М. Изд. дом «Оникс 21 век», 2003. – 432 с. Гл. 1, 2.
2. В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев. Механика. – М.: Изд. центр «Академия», 2004. – 480 с. Лекции 1 – 3.
3. С. П. Стрелков. Механика. – СПб.: «Лань», 2005. – 560 с. Гл. 1, 2.
4. Д. В. Сивухин. Общий курс физики. В пяти томах. Т. 1. Механика. – М.: ФИЗМАТЛИТ / МФТИ, 2005. – 559 с. Гл. 1, 2.
5. В. С. Русаков, А. И. Слепков, Е. А. Никанорова, Н. И. Чистякова. Механика. Методика решения задач. Учебное пособие. М.: Физический факультет МГУ, 2010. – 368 с. Гл. 1, 2.
6. Митин И. В., Русаков В. С. Анализ и обработка экспериментальных данных. Учебно-методическое пособие для студентов младших курсов. – М.: МГУ. 2002, гл.V.

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

2

- Изучение вращательного движения твердого тела вокруг закрепленной оси
 - Определение моментов инерции тел простой формы и проверка теоремы Гюйгенса-Штейнера методом крутильных колебаний
 - Определение моментов инерции тел простой формы
 - Определение момента инерции колеса
 - Изучение тензора инерции твердого тела
 - Определение тензора инерции твердого тела
- 

Введение

Изучение движения твердого тела проводится в предположении, что тело является *абсолютно твердым*.

Абсолютно твердое тело – тело (система материальных точек), расстояния между двумя любыми материальными точками которого не меняются в условиях данной задачи.

В дальнейшем мы будем вместо термина "абсолютно твердое тело" использовать термин "твердое тело".

Кинематика твердого тела. Любое произвольное движение твердого тела можно представить как суперпозицию поступательного и вращательного движений.

Поступательное движение твердого тела – движение, при котором прямая, соединяющая любые две материальные точки тела, перемещается параллельно самой себе.

В этом случае скорости всех точек тела в любой момент времени одинаковы, и его движение можно характеризовать движением одной лишь точки тела. Анализ такого движения производится по законам, справедливым для движения материальной точки.

Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси – плоское движение, при котором материальные точки тела двигаются по окружностям с центрами, лежащими на этой оси, называемой *осью вращения*.

При вращении твердого тела проекция радиус-вектора каждой его точки на плоскость, перпендикулярную оси вращения, за малый промежуток времени dt поворачивается на один и тот же угол $d\varphi$. Здесь $d\varphi$ – вектор, длина которого равна углу поворота $d\varphi$, а направление определяется в соответствии с правилом правого винта и совпадает с осью вращения.

Скорость изменения угла

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.1)$$

называется *угловой скоростью* и, так же как $d\varphi$, является вектором.

Угловая скорость ω связана с линейной скоростью любой точки тела v_i соотношением

$$v_i = \omega \times r_i, \quad (2.2)$$

где r_i – радиус-вектор любой указанной точки.

Изменение ω со временем определяется величиной **углового ускорения**

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \quad (2.3)$$

Совместим начало системы координат, движущейся поступательно, с какой-либо точкой А твердого тела (точкой отсчета). Тогда скорость любой другой точки В тела можно представить как векторную сумму скорости движения системы координат v_0 (скорость точки А) и v' – относительной скорости точки В:

$$v = v_0 + v'. \quad (2.4)$$

В качестве точки отсчета может быть выбрана любая точка твердого тела или пространства (если положение этой точки относительно твердого тела не меняется со временем), поэтому и разложение (2.4) будет неоднозначным. Однако угол поворота $d\varphi$ за малый промежуток времени dt не зависит от выбора точки отсчета и является одинаковым для всех точек твердого тела.

С учетом (2.2) выражение (2.4) может быть представлено в следующем виде

$$v = v_0 + \omega \times r, \quad (2.5)$$

где ω – угловая скорость вращения твердого тела (не зависящая от выбора точки отсчета), r – радиус-вектор, начало которого лежит в точке А. Поступательная скорость тела v_0 зависит от выбора точки отсчета. В частности, точку А можно выбрать таким образом, чтобы v_0 была равна нулю. Для плоского, движения твердого тела ось вращения, проходящая через точку А, является *мгновенной осью вращения*.

Плоское движение твердого тела – движение, при котором траектории всех материальных точек тела лежат в параллельных плоскостях.

Мгновенная ось вращения твердого тела – ось, относительно которой поступательная скорость тела в данный момент времени равна нулю.

Поэтому плоское движение твердого тела в каждый момент времени может быть представлено как вращательное движение вокруг некоторой мгновенной оси.

Уравнение моментов. Момент инерции относительно закрепленной оси. Рассмотрим твердое тело как систему жестко связанных между собой материальных точек. Уравнение движения

для i -й материальной точки массой m_i , в лабораторной системе отсчета имеет вид:

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{f}_{ij}, \quad (2.6)$$

где \mathbf{F}_i – сумма всех внешних сил, действующих на i -ю материальную точку, \mathbf{f}_{ij} – сила, действующая на i -ю материальную точку со стороны j -й материальной точки, т.е. внутренняя сила. Будем полагать, что силы взаимодействия являются центральными, то есть векторы \mathbf{f}_{ij} и $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ коллинеарны.

Умножим обе части уравнения движения (2.6) на радиус-вектор \mathbf{r}_i :

$$m_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}. \quad (2.7)$$

С учетом того, что $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{v}_i = \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$ (так как $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i$, то $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{v}_i = 0$), в результате суммирования по всем материальным точкам системы получим

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}. \quad (2.8)$$

Величина $\mathbf{L} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ (\mathbf{p}_i – импульс i -й материальной точки) называется **моментом импульса** системы относительно некоторой неподвижной точки, выбранной за начало координат; $\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ – **момент внешних сил** относительно той же точки; величина $\sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}$ является моментом всех внутренних сил. Выражение для момента внутренних сил можно преобразовать:

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ji}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{f}_{ij} \end{aligned} \quad (2.9)$$

В связи с тем, что для центральных сил $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{f}_{ij} = 0$, уравнение (2.8) (с учетом введенных выше обозначений) может быть записано в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}. \quad (2.10)$$

Это уравнение называется *уравнением моментов*.

Если твердое тело вращается вокруг закрепленной оси, то векторное уравнение (2.10) сведется к скалярному уравнению. В частности, если ось вращения совпадает с осью координат Z , то

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z, \quad (2.11)$$

где L_z, M_z – соответственно проекции \mathbf{L} и \mathbf{M} на ось Z .

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси Z с угловой скоростью ω скорость каждой материальной точки m_i тела будет равна $v_i = \omega \rho_i$ где ρ_i – ее расстояние до оси Z . Проекция моментов импульса на ось Z для этих точек будут равны $L_{iz} = \rho_i m_i v_i = \omega m_i \rho_i^2$. В связи с тем, что ω одинакова для всех точек твердого тела, момент импульса всего тела относительно оси Z будет равен

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \omega \sum_i m_i \rho_i^2 = \omega J. \quad (2.12)$$

Величину

$$J = \sum_i m_i \rho_i^2 \quad (2.13)$$

называют *моментом инерции твердого тела относительно закрепленной оси*, который является мерой инертности тела при вращательном движении относительно этой оси.

Подставляя (2.12) в (2.11), получаем *основное уравнение вращательного движения* тела вокруг закрепленной оси z :

$$\frac{d(\omega J)}{dt} = M_z. \quad (2.14)$$

В связи с тем, что взаимное расположение точек в твердом теле не изменяется со временем, то момент инерции является постоянной величиной. Поэтому уравнение (2.14) может быть представлено в следующем виде

$$J \frac{d\omega}{dt} = J\varepsilon = M_z. \quad (2.15)$$

При непрерывном распределении массы по объему для вычисления момента инерции пользуются не суммированием, а интегрированием по всему объему тела, и тогда (2.13) приводится к следующему виду:

$$J = \int \rho^2 dm. \quad (2.16)$$

Если известен момент инерции J_0 относительно некоторой оси, проходящей через центр масс – точку с радиус-вектором

$\mathbf{R} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{r}_i$, (m_i – масса материальной точки тела, \mathbf{r}_i – ее радиус-вектор, m – масса тела), то в соответствии с *теоремой Гюйгенса–Штейнера* момент инерции тела J относительно любой другой оси, параллельной первоначальной, и находящейся на расстоянии a от нее, равен

$$J = J_0 + ma^2, \quad (2.17)$$

где m – масса тела.

Тензор инерции. Предположим, что твердое тело закреплено таким образом, что оно может вращаться вокруг некоторой неподвижной точки O . Введем в лабораторной системе отсчета декартову систему координат XYZ с началом в этой точке. Произвольная i -я точка твердого тела массой m_i будет иметь скорость $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$, где $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения твердого тела, а \mathbf{r}_i – радиус-вектор, проведенный из начала координат в точку, где в данный момент времени находится i -я материальная точка. Момент импульса этой точки равен по определению

$$\mathbf{L}_i \equiv m_i [\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i] = m_i [\mathbf{r}_i \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i]] = m_i [\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_i)^2 - \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})].$$

Векторы \mathbf{L} , $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{r}_i можно рассматривать как в лабораторной системе координат, так и в системе координат XYZ , жестко связанной с телом.

Перепишем выражение для \mathbf{L}_i в проекциях на оси системы координат XYZ , начало которой лежит в точке O . Учитывая, что

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2, \text{ и } (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) = x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z,$$

получаем

$$\begin{aligned} L_{ix} &= m_i [\omega_x (y_i^2 + z_i^2) - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z] \\ L_{iy} &= m_i [\omega_y (x_i^2 + z_i^2) - x_i y_i \omega_x - y_i z_i \omega_z], \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$L_{iz} = m_i [\omega_z (x_i^2 + y_i^2) - x_i z_i \omega_x - y_i z_i \omega_y].$$

Момент импульса твердого тела равен сумме моментов импульсов всех его материальных точек:

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i [\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_i)^2 - \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i \boldsymbol{\omega})]. \quad (2.19)$$

Учитывая (2.18), соотношение (2.19) можно переписать в проекциях на координатные оси:

$$\begin{aligned} L_x &= J_{xx} \omega_x + J_{xy} \omega_y + J_{xz} \omega_z, \\ L_y &= J_{yx} \omega_x + J_{yy} \omega_y + J_{yz} \omega_z, \\ L_z &= J_{zx} \omega_x + J_{zy} \omega_y + J_{zz} \omega_z. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Совокупность девяти величин J_{xx} , J_{xy} , J_{xz} , J_{yx} , J_{yy} , J_{yz} , J_{zx} , J_{zy} , J_{zz} определяет **тензор инерции**

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Проекция момента импульса на оси координат (2.20) удобно записать в матричном виде. В рассматриваемом случае начало декартовой системы координат совпадает с точкой О (центром вращения), поэтому из (2.18) и (2.20) получаем

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i (x_i y_i) & -\sum_i m_i (x_i z_i) \\ -\sum_i m_i (y_i x_i) & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i (y_i z_i) \\ -\sum_i m_i (z_i x_i) & -\sum_i m_i (z_i y_i) & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Отметим, что выражение (2.19) принимает точно такой же вид, если векторы \mathbf{L} , $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{r}_i проецировать на оси лабораторной системы координат XYZ. Отличие заключается в том, что в покоящейся лабораторной системе отсчета постоянно меняются координаты x_i , y_i , z_i каждого бесконечно малого элемента тела, поэтому и компоненты тензора \hat{J} меняются со временем. В выбранной системе координат XYZ радиус-вектор \mathbf{r}_i – неизменная

величина, а проекции угловой скорости ω_x , ω_y , ω_z меняются со временем.

Диагональные элементы тензора инерции J_{xx} , J_{yy} , J_{zz} называются **осевыми моментами инерции**. Недиагональные элементы J_{xy} , J_{yx} , J_{xz} , J_{zx} , J_{yz} , J_{zy} , называются **центробежными моментами инерции**.

Тензор инерции является симметричным, так как $J_{xy} = J_{yx}$, $J_{xz} = J_{zx}$, $J_{yz} = J_{zy}$. Симметричный тензор всегда можно привести к диагональному виду, т.е. выбрать такую систему координат, определяемую формой тела, в которой все недиагональные элементы будут равны нулю. Соответствующие направления координатных осей называются **главными осями инерции**, а величины $J_x \equiv J_{xx}$, $J_y \equiv J_{yy}$, $J_z \equiv J_{zz}$, — **главными моментами инерции**. Оси, проходящие через центр масс тела, будем называть **центральными осями**, а оси, проходящие через центр масс и одновременно являющиеся главными, будем называть **главными центральными осями**.

Связь между моментом инерции и компонентом тензора инерции. Рассмотрим вращение твердого тела относительно некоторой закрепленной оси AA' , имеющей произвольное направление в пространстве. Представим радиус-вектор i -й материальной точки массы dm в виде $r_i = d_i + \rho_i$, где $d_i \parallel \omega$, $\rho_i \perp \omega$ (вектор ω направлен вдоль оси в соответствии с правилом правого винта) (рис. 2.1).

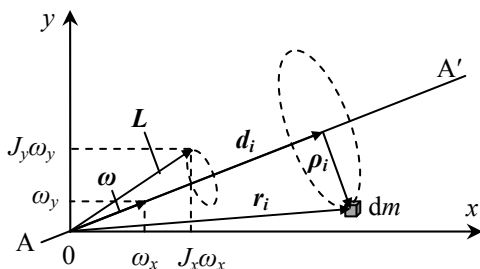


Рис. 2.1. Схематическое представление вращения тела вокруг закрепленной оси.

Так как ось AA' закреплена, то линейная скорость любой материальной точки тела перпендикулярна этой оси и равна $v_i = \omega \times \rho_i$. Предположим, что в жестко связанной с телом системе координат XYZ ось AA' (рис. 2.1) лежит в плоскости XY , а тензор инерции имеет диагональный вид:

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}.$$

Вектор угловой скорости будет иметь компоненты $\omega = \{\omega_x, \omega_y, 0\}$. В соответствии с (2.20) $L_x = J_x \omega_x$, $L_y = J_y \omega_y$, $L_z = 0$. Отсюда следует, что в общем случае ($J_x \neq J_y$) направление вектора момента импульса, даже при вращении вокруг закрепленной оси, не совпадает с направлением вектора угловой скорости. Кроме того (см. 2.19), в рассматриваемом случае положение вектора L жестко связано с телом. Поэтому при вращении тела вектор момента импульса меняет свое направление в пространстве: конец этого вектора описывает окружность с центром, лежащим на оси AA' . Вектор L так же, как и радиус-вектор, удобно разложить на две составляющие – одну, совпадающую с вектором угловой скорости ω , и другую, перпендикулярную к нему, т.е. $L = L_{AA'} + L_{\perp}$. В этом случае векторное уравнение моментов (2.10) можно разбить на два скалярных уравнения:

$$\frac{dL_{AA'}}{dt} = M_{AA'}, \quad (2.23)$$

$$\frac{dL_{\perp}}{dt} = M_{\perp}. \quad (2.24)$$

В уравнении (2.23) $M_{AA'}$ – это проекция момента внешних сил на ось AA' (включая силы трения в оси). Это уравнение полностью описывает вращательное движение твердого тела вокруг закрепленной оси. В уравнении (2.24) M_{\perp} – это перпендикулярная проекция суммарного момента внешних сил, включая силы упругости, действующие на тело со стороны оси. Наличие этого момента приводит к повороту вектора L вокруг AA' . Уравнение (2.24) необходимо решать, если встает вопрос о деформациях, возникающих в оси.

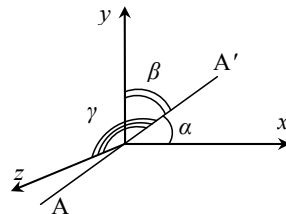


Рис. 2.2. Положение оси AA' относительно системы координат.

Уравнение (2.23) совпадает с рассмотренным выше уравнением (2.11). Из него следует основное уравнение (2.15) вращательного движения твердого тела вокруг закрепленной оси.

Значение момента инерции J твердого тела относительно некоторой оси, можно найти, зная направление этой оси в пространстве и значения компонент тензора инерции. Выразим момент инерции относительно закрепленной оси AA' , проходящей через начало координат, через компоненты тензора \hat{J} . Пусть система координат XYZ расположена произвольным образом относительно тела так, что все компоненты тензора \hat{J} являются ненулевыми.

Воспользуемся соотношением $L_{AA'} = \omega J$. С учетом (2.20) и того, что $L_{AA'} = L_x \cos \alpha + L_y \cos \beta + L_z \cos \gamma$, $\omega_x = \omega \cos \alpha$, $\omega_y = \omega \cos \beta$, $\omega_z = \omega \cos \gamma$, α, β, γ – углы, определяющие положение оси AA' относительно осей координат (см. рис. 2.2), получим

$$J = J_{xx} \cos^2 \alpha + J_{yy} \cos^2 \beta + J_{zz} \cos^2 \gamma + 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta + 2J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma + 2J_{yx} \cos \beta \cos \gamma. \quad (2.25)$$

Уравнение (2.25) может быть использовано и для решения обратной задачи – определения компонент тензора инерции \hat{J} через известные значения моментов инерции J относительно нескольких различных закрепленных осей.

Лабораторная работа 2.1 ИЗУЧЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ ЗАКРЕПЛЕННОЙ ОСИ

Цель работы

Экспериментальная проверка основного уравнения вращательного движения твердого тела вокруг закрепленной оси.

Идея эксперимента

В эксперименте исследуется вращательное движение закрепленной на оси системы тел, у которой может меняться момент инерции под действием различных моментов внешних сил.

Теоретическое введение

Основное уравнение вращательного движения твердого тела с моментом инерции J вокруг неподвижной оси Z имеет вид:

$$J\varepsilon = M, \quad (2.1.1)$$

где $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ – угловое ускорение, M – момент внешних сил.

Для экспериментального доказательства этого соотношения в работе используется маятник Обербека (рис. 2.3). Он состоит из четырех стержней A и двух шкивов различного радиуса R_1 и R_2 , укрепленных на одной горизонтальной оси. По стержням могут перемещаться и закрепляться в нужном положении четыре (по одному на каждом стержне) груза одинаковой массой m' . При помощи груза массой m , прикрепленного к концу намотанной на тот или иной шкив нити, маятник может приводиться во вращение.

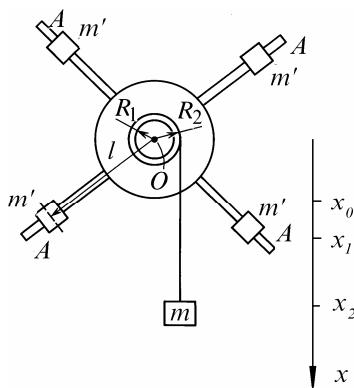


Рис. 2.3. Схематическое изображение маятника Обербека.

Пренебрегая силами трения и считая нить невесомой и нерастяжимой, можем записать уравнение вращательного движения маятника

$$J\varepsilon = RT, \quad (2.1.2)$$

уравнение поступательного движения груза на нити

$$ma = mg - T, \quad (2.1.3)$$

уравнение кинематической связи

$$a = \varepsilon R. \quad (2.2.4)$$

Здесь R – радиус шкива, T – натяжение нити, a – линейное ускорение груза массы m , g – ускорение свободного падения.

Из системы уравнений (2.1.2)–(2.1.4) следует, что груз массой m должен двигаться с постоянным ускорением, равным

$$a = \frac{mR^2}{J + mR^2} g. \quad (2.1.5)$$

Основное уравнение вращательного движения (2.1.1) было записано без учета момента сил трения в оси маятника и момента сил вязкого трения о воздух. Для доказательства правомерности такого подхода в процессе выполнения работы необходимо убедиться, что суммарный момент сил трения $M_{\text{тр}}$ много меньше момента силы натяжения нити M , который равен:

$$M = RT = Rm(g - a) = mgR \frac{J}{J + mR^2}.$$

С учетом неравенства $mR^2 \ll J$ можно записать, что $M \approx mgR$.

Оценить величину момента сил трения можно, если предположить, что он остается неизменным во время движения. При опускании груза m с отметки x_0 на полную длину нити до отметки x_3 и при последующем подъеме до отметки x_4 изменение его потенциальной энергии будет равно работе силы трения, т. е.

$$mg(x_4 - x_0) = M_{\text{тр}} \Phi$$

где Φ – полный угол поворота маятника Обербека. При этом

$$R\Phi = (x_3 - x_0) + (x_3 - x_4),$$

поэтому

$$M_{\text{тр}} = mgR \frac{x_4 - x_0}{2x_3 - (x_0 + x_4)}.$$

Таким образом, условие записи основного уравнения вращательного движения без учета момента сил трения окончательно имеет вид

$$\frac{M_{\text{тр}}}{mgR} = \frac{x_4 - x_0}{2x_3 - (x_0 + x_4)} \ll 1. \quad (2.1.6)$$

Экспериментальная установка

Установка для изучения вращательного движения (рис. 2.4) состоит из вертикальной *стойки 1* с закрепленными на ней двумя подвижными *кронштейнами 2, 3*, на которых крепятся оптические датчики положения. На стойке закреплены два неподвижных *кронштейна 4, 5*.

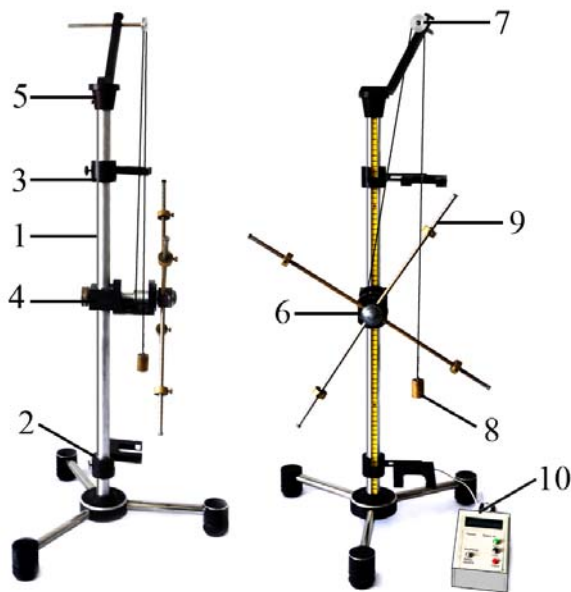


Рис. 2.4. Экспериментальная установка для изучения вращательного движения твердого тела.

На нижнем *кронштейне 4* закреплен двухступенчатый *вал 6*. На верхнем *кронштейне 5* закреплен *блок 7*. Через блок перекинута нить, один конец которой намотан на двухступенчатый *вал 6*, а на втором конце закреплен *груз 8*. На двухступенчатом валу крепится *тело маятника 9*.

Кронштейны 2, 3 с фотодатчиками могут крепиться на разной высоте. Расстояние между этими кронштейнами измеряется по шкале, нанесенной на вертикальную стойку 1. Время движения грузов определяют с помощью электронного таймера 10. Запуск таймера 10 осуществляется нажатием кнопки «Пуск», остановка – кнопкой «Стоп». При подготовке к дальнейшим измерениям результаты предыдущих измерений убираются с табло таймера нажатием кнопки «Сброс».

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Проверка закона движения.

Из (2.1.2) – (2.1.4) следует, что вращение маятника Обербека происходит с постоянным угловым ускорением ϵ , при этом груз m опускается с постоянным линейным ускорением a . Координата x груза, отпущенного без начальной скорости с отметки x_0 меняется по закону (ось X системы координат направлена вниз (см. рис. 2.3))

$$x = x_0 + \frac{at^2}{2}. \quad (2.1.7)$$

Используя (2.23), определим время Δt пролета груза между двумя отметками x_1 и x_2 :

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2}{a}(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})}. \quad (2.1.8)$$

Из (2.1.8) следует, что в случае равнопеременного движения ($a = const$) и фиксированных положений x_0 и x_2 , зависимость времени Δt от $\sqrt{x_1 - x_0}$ является линейной и изображается на графике прямой линией.

Измерения

1. Установить максимальное расстояние между кронштейнами с фотодатчиками.

2. Установить грузы m' в среднее положение, разместив их на равном расстоянии от оси таким образом, чтобы маятник находился в положении безразличного равновесия. Начало движения груза m всегда осуществляют от одного и того же положения x_0 , которое необходимо записать в рабочий журнал. Нить наматывают на вал большего диаметра виток к витку.

3. Опустить груз m и произвести измерение времени Δt пролета груза между фотодатчиками. Данные записать в табл. 2.1.

Провести измерения времени Δt для нескольких положений x_1 верхнего датчика (рекомендуется менять x_1 с шагом 5 см). Для каждого положения датчика измерения времени проводят не менее трех раз.

4. Для 5–7 первых опытов измерить значения x_4 – отметки, до которой поднимается груз при вращении маятника в одну сторону. Результаты занести в табл. 2.1.

5. Определить значение x_3 – максимальной отметки, до которой опускается груз m при своем движении.

Таблица 2.1

Экспериментальные данные

N	x_{1i}	x_4	$\sqrt{x_1 - x_0}$	Δt_{ij}	$\langle \Delta t_i \rangle$	$S_{\langle \Delta t_i \rangle}$	$\langle x_4 \rangle$	$\frac{M_{\text{тр}}}{mgR}$
1								
2								
3								
1								
2								
3								
1								
2								
3								
1								
2								
3								

Обработка результатов

1. По экспериментальным данным для каждого положения фотодатчика x_1 рассчитать среднее значение величины Δt_i по формуле

$$\langle \Delta t_i \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Delta t_{ij},$$

где N – число измерений при каждом фиксированном положении датчика x_1 .

2. Вычислить погрешность измерения (выборочное стандартное отклонение) $\langle \Delta t_i \rangle$

$$S_{\langle \Delta t_i \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{j=1}^N (\Delta t_{ij} - \langle \Delta t_i \rangle)^2}.$$

Результаты вычислений внести в табл. 2.1.

3. Построить зависимость Δt от $\sqrt{x_1 - x_0}$, которая должна быть линейной. Близость получившейся зависимости к линейной указывает на то, что движение тела является равнопеременным. С помощью метода наименьших квадратов определить ускорение груза.

4. Определить момент инерции маятника с помощью выражения (2.1.5).

5. Найти среднее значение $\langle x_4 \rangle$ и оценить величину $\frac{M_{\text{тр}}}{mgR}$ по

формуле (2.1.6). Убедиться в малости момента сил трения по сравнению с начальным моментом силы натяжения нити.

Упражнение 2. Проверка независимости инерционных свойств маятника (момента инерции) от момента внешних сил.

В данном упражнении экспериментально показывается, что инерционные свойства маятника, а именно – момент инерции – не зависят от момента внешних сил.

Из уравнения (2.1.2) имеем

$$\frac{M_1}{\varepsilon_1} = \frac{M_2}{\varepsilon_2} = J. \quad (2.1.9)$$

Из уравнений (2.1.5), (2.1.8) следует, что

$$J = mR^2 \left(\frac{g\Delta t^2}{2(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2} - 1 \right). \quad (2.1.10)$$

В уравнение (2.1.10) входят величины, определяемые экспериментально.

Измерения

1. Измерить штангенциркулем радиусы R_1 и R_2 шкивов, результаты занести в рабочую тетрадь.

2. Установить максимальное расстояние между кронштейнами с фотодатчиками. Занести в рабочий журнал координаты фотодатчиков x_1, x_2 и значение x_0 .

3. Установить грузы m' в среднее положение, разместив их на равном расстоянии от оси таким образом, чтобы маятник находился в положении безразличного равновесия.

4. На конец нити, намотанной на шкив радиуса R_1 , прикрепить груз массы m_1 и измерить время прохождения груза между двумя фотодатчиками Δt . Одновременно измерить отметку x_4 , до которой поднимается груз. Измерение провести 3 раза и результаты внести в табл. 2.2.

5. Перебросить нить на другой шкив (радиуса R_2) и измерить время Δt и значение x_4 (3 раза). Результаты занести в табл. 2.2.

6. Провести аналогичные измерения (пп.4, 5), прикрепив к концу нити груз массы m_2 . Результаты измерений занести в таблицу 2.2.

Таблица 2.2

Экспериментальные данные

Комбинации значений радиусов шкивов и масс при измерениях	N	Δt_{ij}	x_4	$\langle \Delta t_i \rangle$ $S_{\langle \Delta t_i \rangle}$	J_i , S_{J_i}	$\langle x_4 \rangle$	$\frac{M_{\text{тр}}}{mgR}$
R_1, m_1	1						
	2						
	3						
R_2, m_1	4						
	5						
	6						
R_1, m_2	7						
	8						
	9						
R_2, m_2	10						
	11						
	12						

Обработка результатов

1. По экспериментальным данным вычислить средние значения величин Δt и ошибки их измерений для четырех различных опытов. Результаты вычислений занести в табл. 2.2.

2. Вычислить значения моментов инерции $J_1 \div J_4$ по формуле (2.1.10).

3. Определить значение $\langle x_4 \rangle$ для каждого опыта.

4. Найти отношение $\frac{M_{\text{гр}}}{mgR}$ аналогично тому, как это было

сделано в *упражнении 1*. Результаты занести в табл. 2.2.

5. Произвести оценку погрешностей полученных результатов. Так как экспериментальные значения J_i являются результатом косвенных измерений, то стандартное отклонение функции нескольких независимых переменных находится через погрешности прямых измерений по методу, описанному в 1-ой части.

6. Проанализировать полученный результат. Для этого отметить значения моментов инерции $J_1 \div J_4$ с учетом погрешностей на числовых осях (рис. 2.5). Пересечение этих

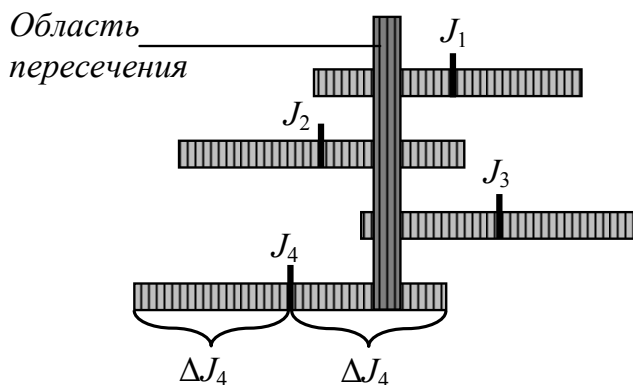


Рис. 2.5. Сравнение моментов инерции между собой для четырех опытов.

областей будет указывать на выполнение соотношения (2.1.9), что свидетельствует о *независимости инерционных свойств маятника от момента внешних сил*.

Упражнение 3. Проверка основного уравнения вращательного движения и теоремы Гюйгенса–Штейнера.

Пусть J'_0 – суммарный момент инерции четырех грузов с массами m' относительно осей, проходящих через их центры масс. При удалении центров грузов на расстояние $l = l_1$, от оси вращения (см. рис. 2.3), согласно теореме Гюйгенса – Штейнера, момент инерции J'_1 будет равен

$$J'_1 = J'_0 + 4m'l_1^2. \quad (2.1.11)$$

Если J_0 – момент инерции маятника без грузов, то полный момент инерции маятника будет равен

$$J_1 = J_0 + J'_0 + 4m'l_1^2. \quad (2.1.12)$$

При удалении центров масс грузов на расстояние l_2 соответственно имеем

$$J_2 = J_0 + J'_0 + 4m'l_2^2. \quad (2.1.13)$$

С учетом уравнений (2.1.2)–(2.1.4) и (2.1.10) зависимость квадрата времени пролета груза между двумя отметками x_1 и x_2 от расстояния центра грузов m' от оси вращения l имеет вид

$$\Delta t^2 = \frac{2(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2}{g} \left(1 + \frac{J_0 + J'_0}{mR^2} + \frac{4m'l^2}{mR^2} \right). \quad (2.1.14)$$

Если $l_1 > l_2$, то

$$J_1 - J_2 = 4m'(l_1^2 - l_2^2). \quad (2.1.15)$$

Уравнения (2.1.14) и (2.1.15) дают

$$\Delta t_1^2 - \Delta t_2^2 = 8 \frac{m'}{m} \frac{l_1^2 - l_2^2}{R^2 g} (\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2, \quad (2.1.16)$$

где $\Delta t_1, \Delta t_2$ – времена пролета груза между датчиками для случаев $l = l_1, l = l_2$ соответственно.

В это уравнение входят величины, определяемые экспериментально.

Измерения

1. На конец нити, намотанной на шкив радиуса R_2 (большого по размеру), прикрепить груз наибольшей массы. Фотодатчики оставить в том же положении, что и в упражнении 2.

2. Установить минимальное значение момента инерции маятника. Для этого грузы m' установить в положение, наиболее близкое к оси. Измерить расстояние от грузов до оси. Занести это значение в табл. 2.3.

3. Определить величину Δt – время прохождения груза m между двумя фотодатчиками и x_4 – отметку, до которой он поднимается в процессе движения. Измерения проводят 3 раза. Результаты заносят в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Экспериментальные данные

N	Δt_{ij}	x_4	$\Delta t_i,$ $S_{\langle \Delta t_i \rangle}$	$(\Delta t_i)^2,$ $S_{(\Delta t_i)^2}$	l	l^2	$\langle x_4 \rangle$	$\frac{M_{\text{тр}}}{mgR}$
1								
2								
3								
...								

4. Изменяя положение грузов m' на стержнях с шагом 3 см, каждый раз измеряют время Δt . Результаты измерения и соответствующие им расстояния l от оси маятника до центров грузов записать в табл. 2.3. Одновременно для каждого опыта измеряют и заносят в табл. 2.3 значения величины x_4 .

Обработка результатов

1. По экспериментальным данным для каждого положения грузов m' найти средние значения величин Δt_i .

2. Вычислить погрешности измерения Δt_i и $(\Delta t_i)^2$.

3. Построить график зависимости квадрата времени опускания груза $(\Delta t)^2$ от l^2 – это должна быть прямая линия.

4. Проверить соотношение (2.1.16) для нескольких пар значений Δt^2 и l^2 .

5. Для каждого момента инерции определить $\langle x_4 \rangle$ и отношение $\frac{M_{\text{тр}}}{mgR}$. Убедиться в выполнении приближения

$$\frac{M_{\text{тр}}}{mgR} \ll 1.$$

Основные итоги работы

В результате выполнения работы должна быть осуществлена экспериментальная проверка выполнения основного уравнения вращательного движения – уравнения моментов. Должны быть проверены соотношения (2.1.9) и (2.1.16) и установлена линейная зависимость $(\Delta t)^2$ от l^2 .

Контрольные вопросы

1. Что такое абсолютно твердое тело? Сколько степеней свободы имеет твердое тело? Сколько независимых скалярных уравнений требуется для описания движения твердого тела?
2. Куда направлен вектор угловой скорости?
3. Что такое момент силы относительно некоторой точки? Куда он направлен? Что такое момент силы относительно закрепленной оси?
4. Что такое момент импульса системы тел?
5. Что такое момент инерции тела относительно закрепленной оси?
6. Сформулируйте теорему Гюйгенса – Штейнера.
7. Как получить уравнение моментов и основное уравнение вращательного движения относительно закрепленной оси?

Лабораторная работа 2.2
ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ ПРОСТОЙ
ФОРМЫ И ПРОВЕРКА ТЕОРЕМЫ ГЮЙГЕНСА –
ШТЕЙНЕРА МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Цель работы

Экспериментальная проверка теоремы Гюйгенса–Штейнера и определение моментов инерции тел простой формы.

Идея эксперимента

В эксперименте используется связь между периодом колебаний крутильного маятника и его моментом инерции. В качестве маятника выбрана круглая платформа, подвешенная в поле тяжести на трех длинных нитях (трифилярный подвес). Платформа может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси. На платформу помещаются тела различной формы, измеряются периоды колебаний маятника и определяются значения моментов инерции этих тел. Теорема Гюйгенса–Штейнера проверяется по соответствию между экспериментальной и теоретической зависимостями моментов инерции грузов от их расстояния до центра платформы.

Теоретическое введение

Теорема Гюйгенса–Штейнера. Если момент инерции тела относительно некоторой оси вращения, проходящей через центр масс, имеет значение J_0 , то относительно любой другой оси, находящейся на расстоянии a от первой и параллельной ей, он будет равен

$$J = J_0 + ma^2, \quad (2.2.1)$$

где m – масса тела.

Для проверки теоремы Гюйгенса–Штейнера в данной работе исследуются крутильные колебания твердого тела на трифилярном подвесе.

Трифилярный подвес представляет собой круглую платформу радиуса R , подвешенную на трех симметрично расположенных нитях одинаковой длины, укрепленных у ее краев (рис. 2.6). Наверху эти нити также симметрично прикреплены к диску несколько меньшего размера (радиуса r). Платформа может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси OO' ,

перпендикулярной к ее плоскости и проходящей через ее центр. Такое движение платформы приводит к изменению положения ее центра тяжести по высоте.

Потенциальная энергия платформы массы m на высоте h будет равна

$$E_p = mgh, \quad (2.2.2)$$

где g – ускорение свободного падения. Кинетическая энергия равна

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2}, \quad (2.2.3)$$

где J – момент инерции платформы, ω – угловая скорость вращения платформы.

Пренебрегая работой сил трения, на основании закона сохранения механической энергии имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}(E_k + E_p) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{J\omega^2}{2} + mgh\right) = 0. \quad (2.2.4)$$

Если l – длина нитей подвеса, R – расстояние от центра платформы до точек крепления нитей на ней, r – радиус верхнего диска (рис. 2.6), то легко видеть, что

$$h = OO_1 = BC - BC_1 = \frac{(BC)^2 - (BC_1)^2}{BC + BC_1}. \quad (2.2.5)$$

Так как

$$(BC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2 = l^2 - (R - r)^2, \quad (2.2.6)$$

а при максимальном отклонении платформы от положения равновесия

$$(BC_1)^2 = (A_1B)^2 - (A_1C_1)^2 = l^2 - (R^2 + r - 2rR \cos \alpha), \quad (2.2.7)$$

то

$$h = \frac{2rR(1 - \cos \alpha)}{BC + BC_1} = \frac{4rR \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{BC + BC_1}. \quad (2.2.8)$$

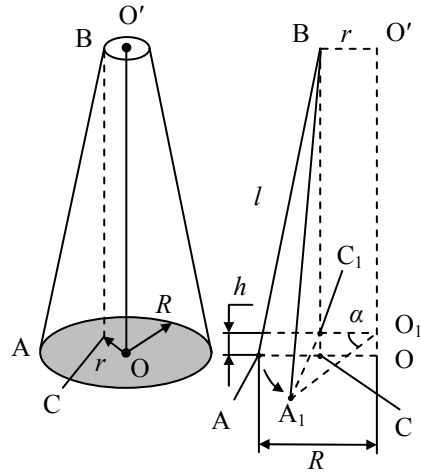


Рис. 2.6. Схематическое изображение трифилярного подвеса.

При малых углах отклонения α значение синуса этого угла можно заменить просто значением α . Учитывая также, что при $R \ll l$ величину знаменателя можно положить равной $2l$, получаем

$$h = \frac{rR\alpha^2}{2l}. \quad (2.2.9)$$

При этом закон сохранения энергии (2.2.4) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{J\omega^2}{2} + mg \frac{rR\alpha^2}{2l} \right) = 0. \quad (2.2.10)$$

Учитывая то, что

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} \quad (2.2.11)$$

закон сохранения энергии (2.2.10) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{mgrR}{Jl} \alpha = 0, \quad (2.2.12)$$

или

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \omega^2 \alpha = 0. \quad (2.54)$$

Уравнение (2.54) является уравнением собственных (свободных) гармонических колебаний, его решение имеет вид

$$\alpha = \alpha_0 \sin(\omega t) = \alpha_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right), \quad (2.2.13)$$

где α – угловое смещение платформы, α_0 – угол максимального поворота платформы, т.е. амплитуда углового смещения, T – период колебаний. Из выражений (2.2.12) и (2.2.13) следует, что

$$J = \frac{mgrR}{4\pi^2 l} T^2. \quad (2.2.15)$$

По формуле (2.2.15) можно экспериментально определить момент инерции пустой платформы или платформы с телом, положенным на нее, так как все величины в правой части формулы непосредственно измеряются. Следует помнить, что m – это суммарная масса платформы и исследуемого тела, положенного на нее.

Соотношение (2.2.15) используется в лабораторной работе для определения моментов инерции тел простой формы и подтверждения справедливости теоремы Гюйгенса–Штейнера.

Экспериментальная установка

Вид установки показан на рис. 2.7. Отношение радиуса платформы 1 к длине нитей подвеса составляет $\frac{R}{l} \leq 0,05$, что соответствует приближениям, используемым при выводе формулы (2.2.15).

Тела 2 на платформу 1 необходимо устанавливать строго симметрично, так, чтобы не было перекоса платформы. Для облегчения определения положения грузов и более точной их установки на платформе нанесены концентрические окружности на определенном расстоянии друг от друга (5 мм).

Вращательный импульс, необходимый для запуска крутильных колебаний, сообщается платформе путем поворота верхнего диска 3 вокруг его оси. Это достигается с помощью шнура, связанного с рычагом 4, закрепленным на верхнем диске. При таком возбуждении колебаний почти полностью отсутствуют другие типы колебаний, наличие которых затрудняет измерения. При измерениях недопустимо пользоваться амплитудами колебаний, большими 10° .

Система измерения времени включает в себя электронный таймер 5 с фотодатчиком 6, укрепленным на подставке. При проведении измерений датчик устанавливается в удобное положение. Запуск таймера 5 осуществляется нажатием кнопки «Пуск», остановка — кнопкой «Стоп». При подготовке к дальнейшим измерениям результаты предыдущих убираются с табло таймера нажатием кнопки «Сброс».

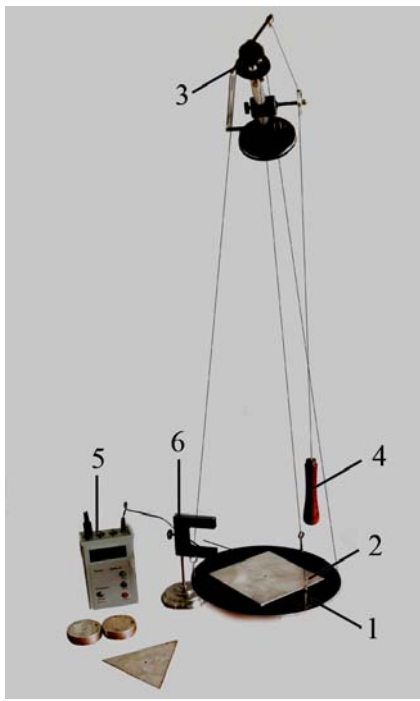


Рис. 2.7. Экспериментальная установка.

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Проверка теоремы Гюйгенса–Штейнера.

Измерения

Для проверки теоремы Гюйгенса–Штейнера выбирают два одинаковых тела (в данной работе они имеют цилиндрическую форму). Перед каждым измерением следует остановить колебания платформы.

1. Произвести взвешивание грузов.
2. Установить грузы в центре платформы, положив их один на другой. Создать крутильные колебания платформы. Измерить время t_n нескольких колебаний ($n = 15–20$). Данные занести в табл. 2.4.

Таблица 2.4

Экспериментальные данные

N	a	a ²	n	t _n	T _i = $\frac{t_n}{n}$	J _i
1						
2						
3						
.....						

3. Расположить грузы симметрично на платформе. Провести измерения времени колебаний t_n для 5–7 положений грузов, постепенно перемещая их к краям платформы. Рекомендуется проводить измерения через 1 см. Занести в табл. 2.4 значения расстояний от центра масс каждого тела до центра платформы, число колебаний n и значения времени этих колебаний t_n .

Обработка результатов

1. Для каждого положения грузов определить период колебаний грузов T_i .
2. Занести в табл. 2.4 значения a^2 .
3. Для каждого положения грузов найти значения момента инерции платформы с грузами J_i по формуле (2.2.15).
4. Полученные значения J_i нанести на график зависимости момента инерции системы тел от квадрата расстояния центра масс

каждого груза до оси вращения $J(a^2)$ (схематично эта зависимость представлена на рис. 2.8).

Как следует из теоремы Гюйгенса–Штейнера, этот график должен быть прямой линией, с угловым коэффициентом численно равным $2m_{гр}$.

5. С помощью метода наименьших квадратов (МНК) построить зависимость J от a^2 , $J=B+Aa^2$. Определить погрешности определения значений A и B по формулам МНК. Из зависимости $J(a^2)$ определить значение $2m_{гр}=A/2$. Сравнить полученное значение с массами грузов $m_{гр}$, найденными при взвешивании. Совпадение этих величин (с учетом погрешностей вычислений) также указывает на выполнимость теоремы Гюйгенса–Штейнера.

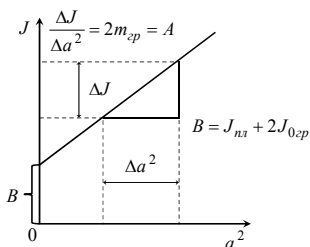


Рис. 2.8. Схематическое представление зависимости J от a^2 .

Упражнение 2. Определение момента инерции тела методом колебаний.

Измерения

1. Сообщают платформе вращательный импульс и измеряют время t_n некоторого числа ($n = 15 - 20$) полных колебаний, что дает возможность достаточно точно определить величину периода колебаний пустой платформы $T_{пл}$. Такие измерения проводят 3–5 раз. Полученные результаты заносят в табл. 2.5. Чтобы облегчить оценку погрешностей эксперимента, для каждой серии экспериментов значения n выбирают одинаковыми.

2. Платформу поочередно нагружают исследуемыми телами таким образом, чтобы их центр масс совпадал с осью вращения платформы (совпадали отверстия в теле и на платформе). Масса этих тел известна или может быть определена с помощью взвешивания. В качестве исследуемых тел выбирают пластины, имеющие форму квадрата и равностороннего треугольника. Измеряют время t_n нескольких колебаний всей системы. Для каждого тела проводят измерения 3–5 раз. Результаты измерений заносят в табл. 2.5.

Таблица 2.5

Экспериментальные данные

Тело	N	n	t_n	T_n	T	S_T	J	S_J
1. Пустая платформа	1							
	2							
	3							
2. Платформа с квадратной пластиной	1							
	2							
	3							
3. Платформа с треугольной пластиной	1							
	2							
							

Обработка результатов

1. По экспериментальным данным для каждого опыта найти значение величины периода крутильных колебаний

$$T_{ni} = \frac{t_{ni}}{n}.$$

2. Найти средние арифметические значения и среднеквадратичные отклонения для периодов колебаний пустой платформы $T_{пл}$ и платформы с исследуемыми телами (T_2 и T_3).

3. По формуле (2.2.15) определить величины $J_{пл}$, J_2 , J_3 и среднеквадратичные отклонения этих величин.

4. Вычислить моменты инерции квадратной и треугольной пластин по формулам:

$$J_{кв} = J_2 - J_{пл}, \quad J_{тр} = J_3 - J_{пл} \quad (2.2.16)$$

Найти среднеквадратичные отклонения этих величин.

5. Провести сравнение экспериментально полученных значений $J_{кв}$ и $J_{тр}$ с рассчитанными теоретически (см. **Приложение 2**) по формулам:

$$J_{кв} = \frac{1}{6}md^2 \quad (2.2.17)$$

для квадрата и

$$J_{тр} = \frac{1}{12}md^2 \quad (2.2.18)$$

для равностороннего треугольника, где m – масса пластины, d – его сторона.

6. Провести сопоставление величины $J_{\text{пл}}$ с величиной B , полученной в упражнении 1, таким образом проверить соотношение $B=J_{\text{пл}}+2(md^2/2)$ ($(md^2/2)$ – момент инерции дисков, используемых при выполнении упражнения 1).

Основные итоги работы

В результате выполнения работы должна быть проведена проверка выполнения теоремы Гюйгенса–Штейнера. Должно быть также проведено сравнение экспериментально найденного значения момента инерции для тела заданной формы с соответствующим значением, рассчитанным теоретически.

Контрольные вопросы

1. Что такое главные оси инерции? Центральные оси? Привести примеры?
2. Что такое момент инерции тела относительно закрепленной оси?
3. Чему равны моменты инерции следующих тел: тонкая палочка, тонкий диск, тонкие прямоугольная и треугольная пластины, цилиндр, шар, параллелепипед? Как их получить?
4. Сформулируйте теорему Гюйгенса – Штейнера.

Лабораторная работа 2.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ ПРОСТОЙ ФОРМЫ

Цель работы

Экспериментальное определение моментов инерции тел простой формы.

Идея эксперимента

Идея эксперимента состоит в использовании связи между периодом колебаний крутильного маятника и его моментом инерции. Исследуемое тело является составной частью, крутильного маятника. В процессе эксперимента находится период колебаний маятника и коэффициент жесткости пружины. Моменты инерции исследуемых тел определяются из этих данных.

Теоретическое введение

Соотношение между моментом количества движения L твердого тела, вращающегося вокруг закрепленной оси, и моментом внешних сил M имеет вид:

$$\frac{dL}{dt} = M. \quad (2.3.1)$$

В свою очередь, момент количества движения относительно одной из главных осей вращения абсолютно твердого тела связан с осевым моментом инерции J угловой скоростью ω следующим соотношением

$$L = J\omega. \quad (2.3.2)$$

С учетом (2.3.2) соотношение (2.3.1) можно переписать в следующем виде:

$$M = J \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad (2.3.3)$$

где φ – угол поворота тела вокруг оси.

Рассмотрим случай, когда тело, закрепленное на оси, совершает крутильные колебания под действием спиральной пружины (рис. 2.9). В соответствии с законом Гука для небольших отклонений от положения равновесия вращающий момент упругой пружины равен

$$M = -D\varphi, \quad (2.3.4)$$

где D – жесткость пружины.

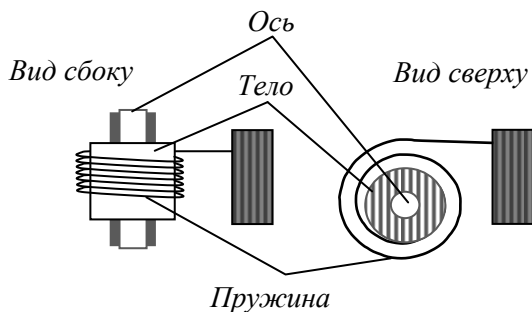


Рис. 2.9. Схематическое представление крутильного маятника.

С учетом (2.3.3) и (2.3.4) можно записать уравнение движения тела в виде:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + D \varphi = 0 \quad (2.3.5)$$

или

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{D}{J} \varphi = 0. \quad (2.3.6)$$

Из (2.3.6) для частоты колебаний крутильного маятника ω_0 ($\omega_0 = 2\pi/T$) получаем

$$\omega_0^2 = \frac{D}{J}. \quad (2.3.7)$$

Период колебаний T , в свою очередь, равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} \quad (2.3.8)$$

Рассмотрим колебания крутильного маятника, в состав которого входят два одинаковых груза, закрепленных на стержне на одинаковых расстояниях a от оси вращения. В этом случае момент инерции маятника в соответствии с теоремой Гюйгенса–Штейнера равен

$$J = J_0 + J_c + 2m_{\text{гр}} a^2 + 2J_{\text{гр}}, \quad (2.3.9)$$

где J_0 – момент инерции той части маятника, на которой крепятся все остальные элементы кроме грузов, J_c – момент инерции стержня, $J_{\text{гр}}$ – момент инерции груза относительно его центра масс, $m_{\text{гр}}$ – масса груза. Тогда период колебаний (см. (2.3.8)) запишется так:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + J_c + 2m_{гр} a^2 + 2J_{гр}}{D}}, \quad (2.3.10)$$

т.е. квадрат периода колебаний линейно зависит от квадрата расстояния a

$$T^2 = 4\pi^2 \left(\frac{J_0 + J_c + 2J_{гр}}{D} \right) + \frac{8\pi^2 m_{гр}}{D} a^2. \quad (2.3.11)$$

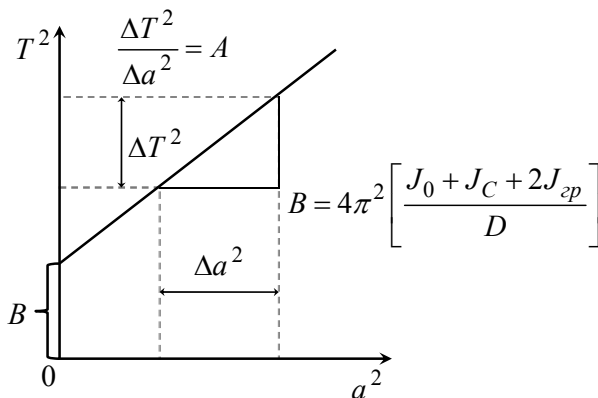


Рис. 2.10. Схематичное представление зависимости квадрата колебаний крутильного маятника от квадрата расстояния от оси вращения до центра масс груза $m_{гр}$, укрепленного на стержне.

На рис. 2.10 схематично представлена зависимость T^2 от a^2 . Зная эту зависимость, можно легко определить коэффициент жесткости пружины D (через угловой коэффициент прямой $A = 8\pi^2 m_{гр} / D$ и величину J_0 (используя значение B (см. рис. 2.10) и рассчитанные значения J_c и $J_{гр}$).

Если теперь вместо стержня с грузами в состав маятника включить тело с неизвестным моментом инерции J_x , то период колебаний такого маятника будет равен

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + J_x}{D}}, \quad (2.3.12)$$

откуда

$$J_x = \frac{T_1^2 D}{4\pi^2} - J_0. \quad (2.3.13)$$

Экспериментальная установка

Установка состоит из крутильного маятника, системы для измерения времени колебаний и набора образцов, для которых производят измерения моментов инерции (рис. 2.11).

Крутильный маятник может вращаться вокруг вертикальной оси. Пружина 1 маятника изготовлена из упругой стальной проволоки. Образцы 2 крепятся на вертикальной оси маятника. В наборе съемных образцов имеются стержень с цилиндрическими грузами, цилиндр, шар, диск. В случае, когда измерения проводятся для цилиндра, шара или диска к вертикальной оси крепится так же тонкий стержень 3.

Система измерения времени включает в себя фотодатчик 4 и электронный таймер 5. При проведении измерений датчик устанавливается в удобное положение. Запуск таймера осуществляется нажатием кнопки "Пуск", остановка – кнопкой "Стоп". При подготовке к дальнейшим измерениям результаты предыдущих убираются с табло таймера нажатием кнопки "Сброс".

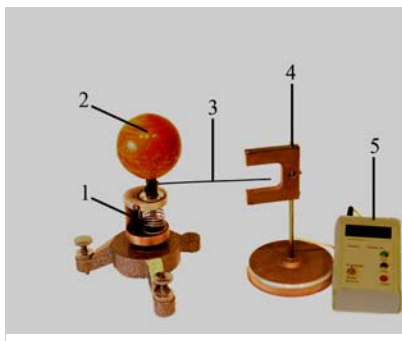


Рис. 2.11. Экспериментальная установка.

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Определение коэффициента жесткости пружины и момента инерции тела маятника.

На маятнике закрепляют стержень с грузами. Производят измерения периода малых колебаний маятника для различных положений грузов, строят зависимость квадрата периода колебаний от квадрата расстояния a .

Измерения

1. Определить массу стержня m_c , массу груза $m_{гр}$, длину стержня l_c , радиус отверстия R_1 , внешний радиус R_2 и длину цилиндрических грузов $l_{гр}$, крепящихся на нем. Данные занести в табл. 2.6.

2. Закрепить на маятнике стержень с цилиндрическими грузами, расположив его симметрично относительно оси вращения так, как показано на рис. 2.12.

Таблица 2.6

Экспериментальные данные

m_c	$m_{гр}$	l_c	R_1	R_2	$l_{гр}$

3. Установить грузы симметрично на стержне в положении, наиболее близком к оси. Записать расстояние от грузов до оси l_0 (см. рис. 2.12) в табл. 2.7.

4. Измерить время t_n нескольких колебаний ($n = 10 - 20$). Угловые амплитуды колебаний маятника должны быть $\sim 5 - 7^\circ$. Данные занести в табл. 2.7.

5. Произвести измерения времени колебаний t_n для 7–9 положений грузов, постепенно перемещая их к краям стержня. Рекомендуется проводить измерения через каждые 2 см.

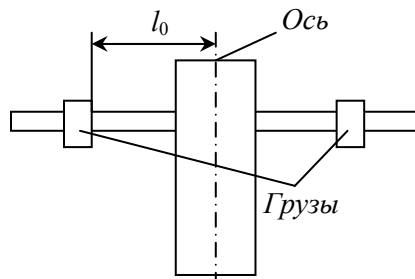


Рис. 2.12. Положение грузов на стержне крутильного маятника.

Таблица 2.7

Экспериментальные данные

N	l_0	n	t_n	T	T^2	a^2
1						
2						
3						
·						

Обработка результатов

1. Для каждого положения грузов вычислить период колебаний T и квадрат этой величины. Результаты занести в табл. 2.7.

2. Определить значения $a^2 = (l_0 + l_{гр}/2)^2$ для каждого положения грузов.

3. Построить зависимость T^2 от a^2 . С помощью метода наименьших квадратов (МНК) определить коэффициенты A и B в

зависимости $T^2=B+Aa^2$ по соответствующим формулам МНК. Определить ошибки значений A и B . Результаты занести в табл. 2.8.

4. По наклону этой прямой (см. рис. 2.3.11) в соответствии с (2.70) определить коэффициент жесткости пружины

$$D = 4\pi^2 \frac{2m_{\text{гр}}}{A}.$$

Результаты вычислений занести в табл. 2.8.

Таблица 2.8

Экспериментальные данные

A	S_A	B	S_B	D	S_D	J_c	S_{J_c}	$J_{\text{гр}}$	$S_{J_{\text{гр}}}$	J_0	S_{J_0}

5. Определить стандартное отклонение значения коэффициента жесткости – S_D . Результаты записать в табл. 2.8.

6. Определить моменты инерции стержня и грузов по формулам (см. *Приложение 2.1*)

$$J_c = \frac{1}{12} m_c l_c^2,$$

$$J_{\text{гр}} = \frac{1}{12} m_{\text{гр}} l_{\text{гр}}^2 + \frac{1}{4} m_{\text{гр}} (R_1^2 + R_2^2)$$

и стандартные отклонения для этих величин. Результаты вычислений внести в табл. 2.8.

7. В соответствии с (2.3.11) $B = 4\pi^2 (J_0 + J_c + 2J_{\text{гр}}) / D$, т. е.

$$J_0 = \frac{BD}{4\pi^2} - J_c - 2J_{\text{гр}}.$$

Определить величину момента инерции маятника J_0 и ее стандартное отклонение. Момент инерции маятника незначителен, поэтому при больших погрешностях его определения (большие амплитуды колебаний и т. д.) вычисления могут давать отрицательные значения его величины. Результаты вычислений занести в табл. 2.8.

Упражнение 2. Определение моментов инерции тел простой формы.

В этом упражнении проводится измерение моментов инерции цилиндра, шара и тонкого диска.

Измерения

1. Определить массу (путем взвешивания) и геометрические размеры цилиндра, шара и диска. Оценить погрешности измерений. Результаты измерений занести в табл. 2.9.

Таблица 2.9

Экспериментальные данные

Тело	m	S_m	R	S_R	H	S_h
Цилиндр						
Шар						
Диск						

2. Закрепить цилиндр на оси маятника. Три раза измерить время t_n нескольких колебаний ($n = 10-15$). Данные занести в табл. 2.10.

3. Провести аналогичные измерения для шара и диска. Данные измерений занести в табл. 2.9 и 2.10.

Таблица 2.10

Экспериментальные данные

Тело	N	n	t_n	T	$\langle T \rangle$	S_T	$J_{\text{эксп}}$	$S_{J_{\text{эксп}}}$	$J_{\text{теор}} \pm S_{J_{\text{теор}}}$
Цилиндр									
Шар									
Диск									

Обработка результатов

1. Для каждого опыта вычислить значение периода колебаний.

2. Определить выборочные средние значения (средние арифметические значения) периода колебаний $\langle T \rangle$ для каждого тела. Результаты внести в табл. 2.10.

3. Вычислить выборочные стандартные отклонения (средне-квадратичные ошибки) для $\langle T \rangle$. Результаты вычислений внести в табл. 2.10.

4. По формуле (2.3.13) определить значения моментов инерции цилиндра, шара и диска (соответственно $J_{\text{ц}}^{\text{эксп}}$, $J_{\text{ш}}^{\text{эксп}}$, $J_{\text{д}}^{\text{эксп}}$). Занести эти значения в табл. 2.10.

5. Найти стандартные отклонения этих величин. Результаты вычислений занести в табл. 2.10.

6. Рассчитать теоретические значения моментов инерции цилиндра, шара и диска по формулам (см. **Приложение 2.11**):

$$J_{\text{ц}}^{\text{теор}} = \frac{1}{2} m_{\text{ц}} R_{\text{ц}}^2; \quad J_{\text{ш}}^{\text{теор}} = \frac{2}{5} m_{\text{ш}} R_{\text{ш}}^2; \quad J_{\text{д}}^{\text{теор}} = \frac{1}{2} m_{\text{д}} R_{\text{д}}^2.$$

7. Сравнить экспериментальные и теоретические значения моментов инерции всех исследованных тел (должны перекрываться области ($J_{\text{эксп}} - S_{J_{\text{эксп}}}$, $J_{\text{эксп}} + S_{J_{\text{эксп}}}$) и ($J_{\text{теор}} - S_{J_{\text{теор}}}$, $J_{\text{теор}} + S_{J_{\text{теор}}}$)).

Основные итоги работы

В процессе выполнения работы должны быть определены коэффициент жесткости пружины, момент инерции маятника, шара, цилиндра, диска и проведено сравнение последних трех значений со значениями, рассчитанными теоретически.

Контрольные вопросы

1. Что такое главные оси инерции? Центральные оси? Привести примеры.
2. Что такое момент инерции тела относительно закрепленной оси?
3. Чему равны моменты инерции следующих тел: тонкая палочка, тонкий диск, тонкие прямоугольная и треугольная пластины, цилиндр, шар, параллелепипед? Как их получить?
4. Сформулируйте теорему Гюйгенса–Штейнера.

Лабораторная работа 2.4 **ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ КОЛЕСА**

Цель работы

Знакомство с методами определения момента инерции твердого тела.

Идея эксперимента

В работе используются два способа экспериментального определения момента инерции. Первый основан на использовании зависимости периода колебаний физического маятника от его момента инерции. Второй – на анализе инерционных свойств твердого тела, закрепленного на оси, при его вращательном движении. Кроме того, проводится прямой расчет момента инерции исследуемого тела известной геометрии.

Теоретическое введение

Уравнение вращательного движения для твердого тела, закрепленного на оси, имеет вид

$$J\varepsilon = M, \quad (2.4.1)$$

где J – момент инерции твердого тела относительно оси вращения, ε – его угловое ускорение, M – момент внешних сил, приложенных к телу.

Величина момента инерции относительно какой-либо оси определяется пространственным распределением массы тела. В частности, для тела, состоящего из конечного числа элементарных (малых) масс m_i

$$J = \sum_i m_i \rho_i^2, \quad (2.4.2)$$

где ρ_i – расстояние от элементарной массы до оси вращения. В общем случае, для сплошных тел, суммирование заменяется интегрированием:

$$J = \int \rho^2 dm.$$

Для некоторых тел простой формы, возможен прямой расчет момента инерции. При сложной форме тела и неравномерном распределении его плотности аналитический расчет величины момента инерции может стать достаточно сложной задачей.

В данной работе применяются два способа экспериментального определения момента инерции: с помощью

анализа колебаний физического маятника, составной частью которого является исследуемое тело, и с помощью изучения вращательного движения этого тела.

Определение момента инерции твердого тела на основе анализа его колебаний как физического маятника. Если закрепить исследуемое тело А на горизонтальной оси О, проходящей через центр масс (рис. 2.13), то момент сил тяготения будет равен нулю, и тело остается в состоянии безразличного равновесия. Если теперь закрепить на исследуемом теле на некотором удалении L от оси малое тело В с известной массой m , то равновесие перестанет быть безразличным – при равновесии момент силы тяжести, действующий на тело В будет равен нулю. Такую систему тел можно рассматривать как физический маятник.

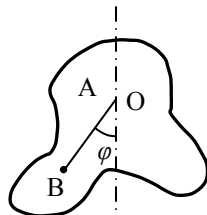


Рис. 2.13. Схематическое представление физического маятника.

Уравнение движения такого маятника имеет вид

$$(J + J_B) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mgL \sin \varphi, \quad (2.4.3)$$

где J , J_B – моменты инерции твердого тела А и дополнительного грузика В относительно оси О, g – ускорение свободного падения,

φ – угол отклонения тела от положения равновесия, $\frac{d^2 \varphi}{dt^2}$ – его угловое ускорение.

Если углы отклонения малы ($\varphi \leq 10^\circ$), то $\sin \varphi \approx \varphi$ и можно записать

$$(J + J_B) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + mgL \varphi = 0. \quad (2.4.4)$$

Данное уравнение является уравнением собственных (свободных) гармонических колебаний, его решение имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0), \quad (2.4.5)$$

где $\omega_0 = 2\pi/T$ – собственная циклическая частота, T – период колебаний, φ_0 – амплитуда колебаний, θ_0 – начальная фаза колебаний.

Дважды дифференцируя соотношение (2.4.5) по времени, получаем

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega_0^2\varphi. \quad (2.4.6)$$

Сопоставляя (2.4.4) и (2.4.6), находим, что

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{mgL}{J + J_B}. \quad (2.4.7)$$

В связи с тем, что размеры малого тела В во много раз меньше расстояния до оси L , можно считать его материальной точкой и положить

$$J_B = mL^2. \quad (2.4.8)$$

Тогда из уравнений (2.4.7) и (2.4.8) получаем

$$J = mL \left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - L \right). \quad (2.4.9)$$

Таким образом, для определения момента инерции твердого тела можно закрепить его на оси, проходящей через центр масс, установить на нем добавочное малое тело с известной массой, измерить период колебаний и, зная расстояние L , по формуле (2.80) определить неизвестный момент инерции.

Отметим, что при выводе соотношения (2.4.9) не учитывалось влияние момента сил трения $M_{тр}$ в оси. Это приближение обусловлено тем, что при достаточно малом $M_{тр}$ его воздействие приводит прежде всего к постепенному уменьшению амплитуды колебаний и практически не влияет на их период.

Определение момента инерции твердого тела на основе анализа его равноускоренного вращательного движения. Рассмотрим, как и в предыдущем случае, тело А, закрепленное на оси О, проходящей через центр масс (рис. 2.14). Соосно с телом закреплен цилиндр С, на который наматывается нить с прикрепленным к ней грузом В.

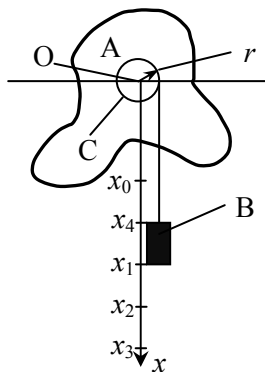


Рис. 2.14. Схематическое представление твердого тела, закрепленного на оси и вращающегося под действием груза В.

Под действием силы тяжести груз будет опускаться, приводя исследуемое тело А во вращение. Уравнение движения груза В, уравнение вращательного движения тела А и уравнение кинематической связи имеют вид

$$ma = mg - T, \quad (2.4.10)$$

$$J\varepsilon = Tr - M_{\text{тр}}, \quad (2.4.11)$$

$$a = \varepsilon r, \quad (2.4.12)$$

где m – масса груза В, J – момент инерции исследуемого тела вместе с цилиндром С, g – ускорение свободного падения, T – натяжение нити, r – радиус цилиндра, на который намотана нить, $M_{\text{тр}}$ – момент сил трения, a – ускорение тела В.

Из уравнений (2.4.10) – (2.4.12) получаем

$$J = mr^2 \left(\frac{g}{a} - 1 \right) - \frac{M_{\text{тр}} r}{a}. \quad (2.4.13)$$

Таким образом, если известно ускорение груза В и момент сил трения в оси, то по формуле (2.4.13) мы можем определить момент инерции исследуемого тела.

Предположим, что груз начинает опускаться с отметки $x_0=0$, а мы измеряем время Δt прохождения его между двумя точками x_1 и x_2 . Движение груза на участке $x_1 - x_2$ является равноускоренным, и можно записать

$$x_1 = x_0 + \frac{at_1^2}{2}, \quad (2.4.14)$$

$$x_2 = x_0 + \frac{a(t_1 + \Delta t)^2}{2}, \quad (2.4.15)$$

где t_1 – время прохождения участка $x_1 - x_0$, Δt – время прохождения участка $x_2 - x_1$.

Из (2.4.14) и (2.4.15) следует:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2}{a}} (\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0}). \quad (2.4.16)$$

Решая это уравнение относительно ускорения a , находим

$$a = 2 \frac{(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2}{(\Delta t)^2}. \quad (2.4.17)$$

Таким образом, для определения a нам нужно знать x_0, x_1, x_2 и время Δt прохождения грузика между точками с координатами x_1 и x_2 .

Рассмотрим соотношения, позволяющие определить момент сил трения.

При опускания груза с отметки x_0 на полную длину нити до отметки x_3 его потенциальная энергия переходит в кинетическую и в некоторое количество тепловой энергии, по величине равное работе сил трения,

$$mg(x_3 - x_0) = E_k + \Phi M_{\text{тр}}, \quad (2.4.18)$$

где Φ – полный угол поворота тела при его опускании, E_k – кинетическая энергия системы в нижней точке. Предполагается, что момент силы трения при движении остается постоянным, т.е. не зависит от скорости.

После того, как груз опустится на полную длину нити до отметки x_3 , тело будет продолжать вращаться, и нить начнет наматываться на цилиндр. В результате груз поднимется до отметки x_4 . Очевидно,

$$E_k = mg(x_3 - x_4) + \Phi_1 M_{\text{тр}}, \quad (2.4.19)$$

где Φ_1 – полный угол поворота тела при подъеме груза.

Учитывая, что $x_3 - x_0 = r\Phi$ и $x_3 - x_4 = r\Phi_1$, получаем величину момента силы трения

$$M_{\text{тр}} = mgr \frac{x_4 - x_0}{2x_3 - x_0 - x_4}. \quad (2.4.20)$$

Экспериментальная установка

Основной частью установки является сплошное колесо 1 (рис. 2.15), которое может вращаться вокруг горизонтальной оси. К цилиндру, расположенному на оси колеса, с помощью нити прикреплен груз 2. Помещая груз в устройство 3 для его крепления, получаем физический маятник, который может колебаться около положения равновесия. Угол отклонения может быть определен по угломерной шкале 4. В том случае, когда груз освобожден (при этом устройство для его крепления снимается с колеса), под действием силы тяжести он начинает опускаться, приводя колесо во вращение. Установка снабжена системами регистрации периода колебаний колеса и времени опускания груза.

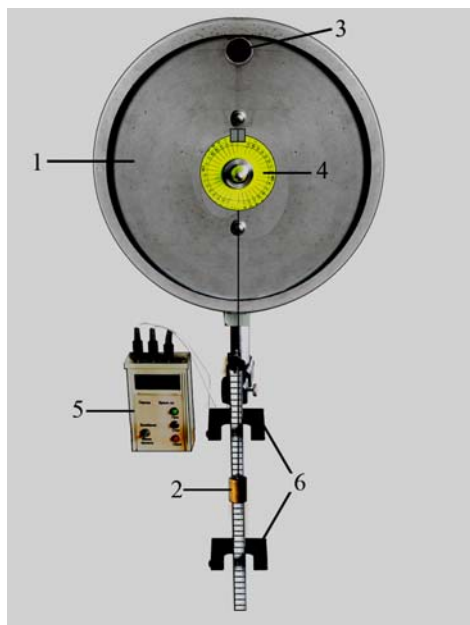


Рис. 2.15. Экспериментальная установка для определения момента инерции колеса.

Для регистрации периода колебаний на колесе с обратной стороны симметрично расположены два легких одинаковых по массе тела. На одном из тел закреплен стержень, являющийся составной частью системы измерения периода колебаний. В исходном положении система зафиксирована с помощью фрикционной муфты, управляемой электромагнитом. При выключении электромагнита фрикционная муфта освобождает колесо, и оно начинает движение (колебательное или вращательное). Время колебаний колеса определяется с помощью электронного *таймера* 5.

Время перемещения груза при вращательном движении колеса определяется с помощью того же *таймера* 5, включение и выключение которого в этом случае осуществляется оптическими датчиками 6. Эти датчики крепятся на кронштейнах и могут фиксироваться на различных высотах. Положение датчиков определяется с помощью линейки (рис. 2.15).

Запуск таймера в режиме измерения периодов колебаний осуществляется нажатием кнопки «Пуск», остановка — кнопкой «Стоп». При измерении времени опускания груза нажимают на кнопку «Пуск», после чего на индикаторе электронного таймера высвечивается время прохождения груза между двумя датчиками положения. Переключение таймера в тот или иной режим работы осуществляется тумблером «Колеб.–Вращ.». При подготовке к дальнейшим измерениям результаты предыдущих убираются с табло нажатием кнопки «Сброс».

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Определение момента инерции колеса методом колебаний.

Измерения

1. На краю колеса закрепляют устройство для крепления груза, в которое устанавливают груз. Колесо выводят из положения равновесия на угол, не превышающий 10° . С помощью секундомера определяют время t_n n полных колебаний $n = 10 \div 15$. Такое измерение проводят 3–5 раз. Результаты измерений времени заносятся в табл. 2.11.

2. После этого не менее трех раз измеряют расстояние L от оси вращения до центра масс груза (это есть расстояние от оси вращения до центра винта, закрепляющего устройство крепления груза на колесе). Результаты заносятся в табл. 2.11.

3. Взвешивают устройство для крепления груза и сам груз. Значение масс этих тел m_k и $m_{гр}$ заносят в табл. 2.11.

Таблица 2.11

Экспериментальные данные

N	n	t_n	T_n	$\langle T \rangle$	S_T	L_N	$\langle L \rangle$	S_L	$m_k, m_{гр}$	J	S_J
1											
2											
3											
4											
5											

Обработка результатов

1. По экспериментальным данным вычислить выборочные средние значения (средние арифметические значения) величин периода T и расстояния L .

2. Вычислить выборочные стандартные отклонения (среднеквадратичные ошибки среднего арифметического) для T и L .

3. По полученным данным, пользуясь уравнением (2.4.9) и учитывая, что в этом уравнении $m = m_k + m_{гр}$, определить момент инерции колеса J .

4. Оценить погрешности для J , используя следующую формулу для расчета погрешностей косвенных измерений:

$$S_j(L, T, m, g) = \sqrt{\left(\frac{\partial J}{\partial L} S_L\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial T} S_T\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial m} S_m\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial g} S_g\right)^2}, \quad (2.4.21)$$

где S_m дана в описании используемых весов, а S_g находится из таблиц физических постоянных.

Упражнение 2. Определение момента инерции колеса методом вращения.

Измерения

1. Снять с колеса устройство для крепления груза.
2. Измерить время Δt прохождения груза между отметками x_1 и x_2 . Измерения провести не менее 5–7 раз для фиксированных значений x_0 , x_2 и разных x_1 , каждый раз заноса данные в табл. 2.12. Измеряют также координату x_3 точки, до которой опускается груз при полностью размотанной нити и координату x_4 точки, до которой поднимается груз при дальнейшем наматывании нити на цилиндр, пока колесо продолжает свободно вращаться.

3. Несколько раз измерить радиус r цилиндра, на который наматывается нить.

Таблица 2.12

Экспериментальные данные

N	x_1	x_2	Δt	a_n	$\langle a \rangle$	S_a	x_0	x_3	x_4	$M_{\text{тр}}$	$\langle M_{\text{тр}} \rangle$	$S_{M_{\text{тр}}}$
1												
2												
3												

Обработка результатов

1. По формулам (2.4.17) и (2.4.20) определить ускорения a_n и моменты сил трения $M_{\text{тр}}$ для каждого измерения. Результаты измерений занести в табл. 2.12.

2. Поскольку a_n , $M_{\text{тр}}$ определяются для различных значений x_1 , то будем считать полученные значения ускорений и моментов сил трения независимыми. Найти выборочные средние значения ускорения и момента сил трения и выборочные стандартные отклонения этих величин. Результаты вычислений занести в табл. 2.12.

3. Вычислить выборочное среднее значение радиуса цилиндра $\langle r \rangle$ и среднеквадратичную ошибку этой величины.

4. По формуле (2.4.13) определить значение момента инерции колеса и его погрешность.

Упражнение 3. Прямой расчет момента инерции колеса

Измерения

Используемое в установке колесо можно представить как совокупность тел простой формы (рис. 2.16): диска радиуса R_1 , толщины l_1 ; обода толщины l_2 с внешним и внутренним радиусами R_2, R_1 ; двух малых тел C_1, C_2 , расположенных на расстоянии R_3 от оси; цилиндра, имеющего радиус R_4 и толщину l_3 .

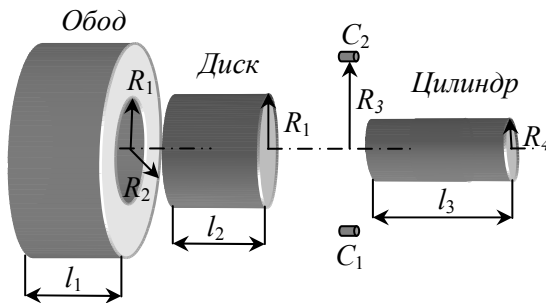


Рис. 2.16. Схематическое представление колеса в виде совокупности тел простой формы.

Для всех этих тел момент инерции можно рассчитать.

Известно, что момент инерции диска массы m_d относительно оси равен (см. Приложение 2.4)

$$J_d = \frac{1}{2} m_d R_1^2, \quad (2.4.22)$$

а для обода массой $m_{об}$ (см. Приложение 2.5)

$$J_{об} = \frac{1}{2} m_{об} (R_1^2 + R_2^2). \quad (2.4.23)$$

Учитывая, что диск, обод и цилиндр сделаны из одного материала с плотностью ρ , получаем окончательно выражение для момента инерции колеса

$$J = \frac{1}{2} \pi \rho l_1 R_1^4 + \frac{1}{2} \pi \rho l_2 (R_2^4 - R_1^4) + \frac{1}{2} \pi \rho l_3 R_4^4 + m_C R_3^2, \quad (2.4.24)$$

где m_C – суммарная масса тел C_1 и C_2 .

С помощью штангенциркуля и линейки определяют геометрические размеры каждой выделенной части колеса по несколько раз. Результаты измерений заносят в табл. 2.13.

Таблица 2.13

Результаты измерений

N	1	2	3	4	5
R_{1n}					
$\langle R_1 \rangle$					
S_{R1}					
R_{2n}					
$\langle R_2 \rangle$					
S_{R2}					
R_{3n}					
$\langle R_3 \rangle$					
S_{R3}					
R_{4n}					
$\langle R_4 \rangle$					
S_{R4}					
l_{1n}					
$\langle l_1 \rangle$					
S_{l1}					
l_{2n}					
$\langle l_2 \rangle$					
S_{l2}					
l_{3n}					
$\langle l_3 \rangle$					
S_{l3}					

Обработка результатов

1. Определяют средние арифметические значения $R_1, R_2, R_3, l_1, l_2, l_3$. Результаты заносят в табл. 2.13.

2. Вычисляют выборочные стандартные отклонения для этих величин. Результаты заносят в табл. 2.13.

3. По формуле (2.4.24) рассчитывают значение момента инерции колеса и определяют погрешность.

4. Рассчитанное значение момента инерции колеса сравнивают со значениями, полученными экспериментально в упражнениях 1 и 2.

Основные итоги работы

В процессе выполнения работы должен быть определен момент инерции колеса двумя способами. Следует сопоставить эти результаты с величиной вычисленного по (2.4.24) момента инерции.

Контрольные вопросы

1. Что такое главные оси инерции? Центральные оси? Привести примеры.

2. Что такое момент инерции тела относительно закрепленной оси?

3. Чему равны моменты инерции следующих тел: тонкая палочка, тонкий диск, тонкие прямоугольная и треугольная пластины, цилиндр, шар, параллелепипед? Как их получить?

4. Сформулируйте теорему Гюйгенса–Штейнера.

Лабораторная работа 2.5 ИЗУЧЕНИЕ ТЕНЗОРА ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Цель работы

Знакомство с понятием “тензор инерции”.

Идея эксперимента

Идея эксперимента заключается в исследовании вращательного и колебательного движений твердого тела правильной формы относительно различных осей, проходящих через центр масс и определения на основе данных эксперимента главных моментов инерции. В процессе работы устанавливается связь между моментом инерции относительно произвольной фиксированной оси и компонентами тензора инерции.

Теоретическое введение

Рассмотрим твердое тело, закрепленное таким образом, что оно может вращаться вокруг некоторой неподвижной точки O . Тензор инерции будем рассматривать в системе координат, жестко связанной с твердым телом. Существует связь между моментом импульса L твердого тела и угловой частотой ω (см. введение)

$$L = \hat{J}\omega, \quad (2.5.1)$$

где

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i (x_i y_i) & -\sum_i m_i (x_i z_i) \\ -\sum_i m_i (y_i x_i) & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i (y_i z_i) \\ -\sum_i m_i (z_i x_i) & -\sum_i m_i (z_i y_i) & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}. \quad (2.5.2)$$

В том случае, когда вращение твердого тела происходит относительно произвольной закрепленной оси AA' , проходящей через точку O , проекция момента импульса на эту ось равна (см. рис. 2.17)

$$L_{AA'} \equiv \left(\sum_i \Delta m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \right)_{AA'} = \sum_i \Delta m_i \rho_i^2 \omega = J \omega, \quad (2.5.3)$$

где ρ_i – расстояние от i -го элемента тела до оси AA' , а величина

$$J = \sum_i \Delta m_i \rho_i^2. \quad (2.5.4)$$

является моментом инерции относительно закрепленной оси.

Значение момента инерции J твердого тела относительно оси, имеющей произвольное направление, связано с компонентами тензора инерции соотношением (2.25)

В дальнейшем будем использовать такую систему координат, оси которой совпадают с главными осями инерции.

В этом случае тензор инерции будет иметь диагональный вид, а соотношение (2.25) запишется так:

$$J = J_{xx} \cos^2 \alpha + J_{yy} \cos^2 \beta. \quad (2.5.5)$$

Экспериментальная установка

Экспериментальная установка смонтирована на основании, на котором установлены две стойки с направляющими для винтов, положение одного из которых может регулироваться. Эти винты вставляются в подшипники, которые закреплены в рамке 1 (рис. 2.18) специальной конструкции, в результате этого рамка может вращаться вокруг горизонтальной оси. Рамка состоит из двух планок, одна из которых соединена с цилиндром, другая – со шкивом. Эти планки закреплены на фиксированном расстоянии двумя направляющими. На планке с цилиндром закреплен конус 2 для крепления исследуемого тела. По направляющим перемещается планка 3. Эта планка 3 может фиксироваться на направляющих с помощью цанговых зажимов (для этого необходимо повернуть винты 4 на них). В центре подвижной планки имеется винт 5 с конусным наконечником. Исследуемое тело 6 закрепляется между конусом неподвижной левой и конусным винтом подвижной планок, для чего в исследуемых телах имеются специальные углубления.

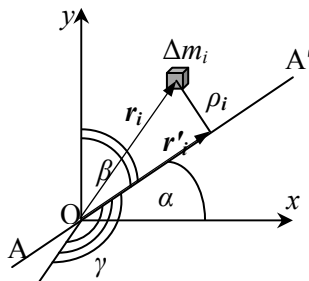


Рис. 2.17. Схематическое представление вращения тела вокруг закрепленной оси.

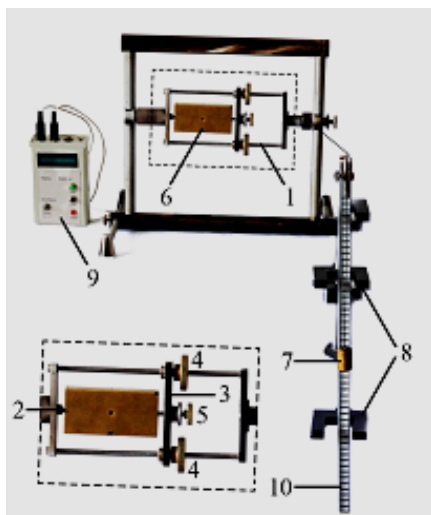


Рис. 2.18. Экспериментальная установка для определения тензора инерции динамическим методом.

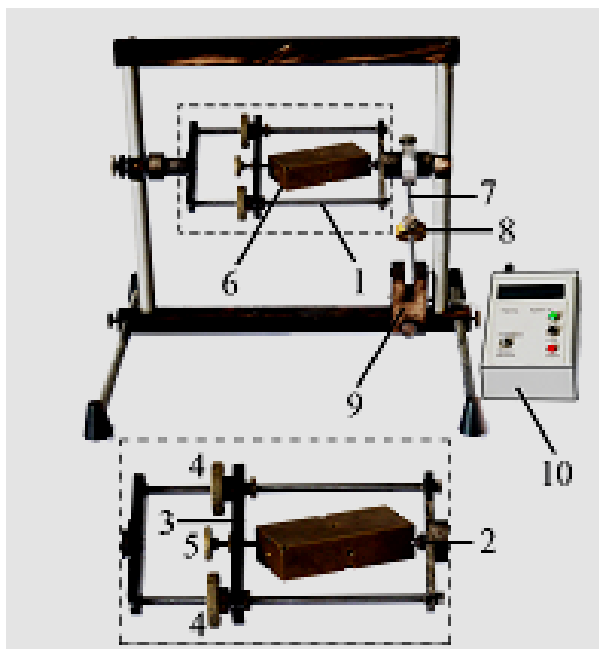


Рис. 2.19. Экспериментальная установка для определения тензора инерции методом колебаний.

Закрепление исследуемых тел в рамке осуществляется

передвижением подвижной *планки 3* (при отжатых *винтах 4* цангового зажима). После чего, положение *планки 3* фиксируется *винтами 4*, и только затем, вращением *винта 5* с коническим наконечником, осуществляется более точная установка исследуемого тела.

Рамка с исследуемым телом может совершать как вращательное, так и колебательное движение. Экспериментальные установки для определения тензора инерции динамическим методом и методом колебаний показаны на рис. 2.18 и рис. 2.19 соответственно. При использовании динамического метода вращение рамки с исследуемым телом происходит при опускании *груза 7* (рис. 2.18), висящего на нити, намотанной на шкив. Масса груза и радиус шкива указываются на установке.

Установка снабжена системой автоматического отсчета времени, включающей в себя два фотоэлектронных *датчика 8* и *таймер 9* для определения времени перемещения груза. Расстояние между датчиками определяется по *линейке 10*, укрепленной на установке.

При использовании метода колебаний для определения периодов колебаний рамки с исследуемым грузом на цилиндре закрепляется кольцо со *стержнем 7* (рис. 2.18), на котором закреплен дополнительный *груз 8*, устанавливаемый в различных положениях. Установка снабжена системой автоматического отсчета периода, включающей в себя фотоэлектронный *датчик 9* и *таймер 10* для определения периода колебаний.

В работе определяются компоненты тензора инерции однородного металлического параллелепипеда (рис. 2.20) и цилиндра (рис. 2.21).

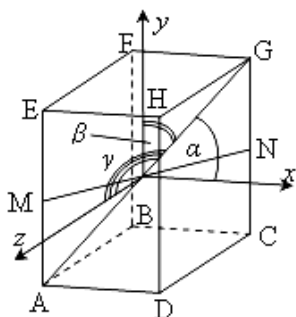


Рис. 2.20. Схематическое представление параллелепипеда.

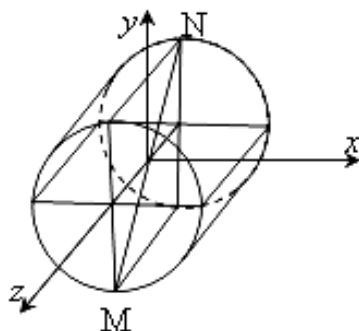


Рис. 2.21. Схематическое представление цилиндра.

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Изучение тензора инерции динамическим методом.

Рассмотрим вращение тела правильной формы, закрепленного в рамке, вокруг некоторой оси под действием момента внешних сил. Момент внешних сил создается с помощью нити, намотанной на шкив, к концу которой подвешен груз массы m (рис. 2.22). В качестве исследуемого тела используется параллелепипед.

Пусть груз начал движение от отметки x_0 , затем прошел отметку x_1 со скоростью v_1 и, через время Δt после этого – отметку x_2 со скоростью v_2 . На основании закона сохранения механической энергии можно записать:

$$mg(x_1 - x_2) = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2) + \frac{1}{2} J'(\omega_2^2 - \omega_1^2) + M_{\text{тр}}\Delta\varphi, \quad (2.5.6)$$

где $mg(x_2 - x_1)$ – изменение потенциальной энергии груза,

$\frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2)$ – изменение его

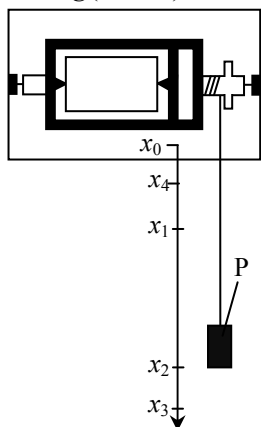
кинетической энергии, $\frac{1}{2} J'(\omega_2^2 - \omega_1^2)$ –

изменение кинетической энергии вращательного движения рамки с телом, $M_{\text{тр}}\Delta\varphi$ – работа сил трения в оси рамки, m – масса груза, подвешенного на нити, $J' = J + J_0$; J и J_0 – моменты инерции

тела и рамки, ω_1, ω_2 – угловые скорости вращения рамки для положений груза в точках $x = x_1$ и $x = x_2$ соответственно, g – ускорение свободного падения, $M_{\text{тр}}$ –

момент сил трения, $\Delta\varphi = \frac{x_2 - x_1}{r}$ – угол,

Рис. 2.22. Схема установки для определения тензора инерции динамическим методом.



на который повернулась рамка при прохождении груза между отметками x_1 и x_2 , r – радиус шкива.

Учитывая, что $v = \omega r$, $v_2 = \sqrt{2a(x_2 - x_0)}$, $x_2 = x_1 + v_1 t + \frac{at^2}{2}$, где a – ускорение груза, t – время прохождения грузом расстояния $x_2 - x_1$, получаем:

$$J' = \frac{mg - M_{\text{тр}}/r}{a} r^2 - mr^2 =$$

$$= r^2 \left(\frac{(mg - M_{\text{тр}}/r)t^2}{2(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2} - m \right). \quad (2.5.7)$$

Для момента инерции пустой рамки (без тела) имеем:

$$J_0 = r^2 \left(\frac{(mg - M_{\text{тр}}/r)t_0^2}{2(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2} - m \right), \quad (2.5.8)$$

где t_0 – время прохождения грузом расстояния $x_2 - x_1$. Из двух последних уравнений момента инерции тела относительно оси вращения получаем:

$$J = J' - J_0 = r^2 \frac{mg - M_{\text{тр}}/r}{2(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2} (t^2 - t_0^2). \quad (2.5.9)$$

Пользуясь этой формулой, можно определять моменты инерции тела относительно произвольных осей. Это можно сделать, в частности для главных центральных осей, совпадающих с выбранными осями координат (J_x , J_y , J_z), а также для осей, совпадающих с одной из диагоналей параллелепипеда, например AG (J_{AG}) или MN (J_{MN}) (см. рис. 2.20), выразив их соответственно через времена опускания груза t_x , t_y , t_z , t_{AG} , t_{MN} .

Момент сил трения, входящий в (2.5.9), можно оценить следующим образом. Если опустить груз на отметке x_0 , то он после опускания до нижней точки x_3 поднимется затем до отметки x_4 . Разность значений потенциальной энергии груза в точках x_4 и x_0 и будет равна работе сил трения, т. е.

$$mg(x_4 - x_0) = \frac{M_{\text{тр}}}{r}(x_3 - x_0) + \frac{M_{\text{тр}}}{r}(x_3 - x_4), \quad (2.5.10)$$

где $\frac{M_{\text{тр}}}{r}(x_3 - x_0)$ – работа сил трения при движении груза вниз от верхней точки до полного разматывания нити, $\frac{M_{\text{тр}}}{r}(x_3 - x_4)$ – работа сил трения при подъеме груза. Из (2.5.10) следует

$$\frac{M_{\text{тр}}}{r} = mg \frac{x_4 - x_0}{2x_3 - x_0 - x_4}. \quad (2.5.11)$$

Пусть размер параллелепипеда по оси Ox равен a , по оси Oy – b , по оси Oz – c . Квадраты направляющих косинусов для его диагонали AG соответственно равны

$$\cos^2 \alpha = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad \cos^2 \beta = \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2},$$

$$\cos^2 \gamma = \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

(2.5.12)

Подстановка уравнений (2.5.9) (для различных осей вращения) и (2.5.12) в формулу (2.5.5) для момента инерции относительно закрепленной оси дает

$$\begin{aligned} & \frac{r^2 (mg - M_{\text{тр}} / r) (t_{AG}^2 - t_0^2)}{2(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2} = \\ & = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \frac{r^2 (mg - M_{\text{тр}} / r) (t_x^2 - t_0^2)}{2(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2} + \\ & + \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2} \frac{r^2 (mg - M_{\text{тр}} / r) (t_y^2 - t_0^2)}{2(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2} + \\ & + \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \frac{r^2 (mg - M_{\text{тр}} / r) (t_z^2 - t_0^2)}{2(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2}. \end{aligned}$$

В связи с тем, что сумма квадратов направляющих косинусов равна единице, получаем

$$t_{AG}^2 = \frac{a^2 t_x^2 + b^2 t_y^2 + c^2 t_z^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (2.5.13)$$

Эта закономерность может быть проверена экспериментально.

Измерения

1. Для выполнения работы необходимо измерить радиус шкива r и размеры тела a , b , c (ребра параллелепипеда). Величины a , b , c , r измеряют штангенциркулем не менее трех раз в различных сечениях тела, заносят их в табл. 2.14.

2. Заносят в табл. 2.15 значения x_0 , x_1 , x_2 , x_3 . Взвешивают груз P и заносят в табл. 2.15 его массу.

Таблица 2.14

Экспериментальные данные

N	a	$\langle a \rangle, S_{\langle a \rangle}$	b	$\langle b \rangle, S_{\langle b \rangle}$	c	$\langle c \rangle, S_{\langle c \rangle}$	r	$\langle r \rangle, S_{\langle r \rangle}$
1								
2								
3								

3. Определяют время опускания груза P при пустой рамке t_0 . Для этого нить, имеющую на конце груз, аккуратно виток к витку наматывают полностью на шкив. Освобождают груз. Измерение времени необходимо проводить не менее трех раз. Данные заносят в табл. 2.15. Одновременно для каждого опыта в таблицу заносят значения x_4 .

4. Закрепляют в рамке параллелепипед в разных положениях и измеряют времена $t_x, t_y, t_z, t_{AG}, t_{MN}$ не менее трех раз. Результаты заносят в табл. 2.16.

Таблица 2.15

Экспериментальные данные

Параметры исследуемой системы	N	t_0	$\langle t_0 \rangle, S_{t_0}$	x_4	$\langle x_4 \rangle$	M_{TP} / r	$S_{M_{TP} / r}$
$x_1 =$	2						
$x_2 =$	3						
$x_3 =$	4						
$M =$	5						

Таблица 2.16

Экспериментальные данные

N	t_x	$\langle t_x \rangle, S_{t_x}$	t_y	$\langle t_y \rangle, S_{t_y}$	t_z	$\langle t_z \rangle, S_{t_z}$	t_{AG}	$\langle t_{AG} \rangle, S_{t_{AG}}$	t_{MN}	$\langle t_{MN} \rangle, S_{t_{MN}}$
1										
2										

Обработка результатов

1. Определяют средние арифметические значения a , b , c , r и выборочные стандартные отклонения для этих величин. Данные заносят в табл. 2.14.

2. Находят средние арифметические значения и выборочные стандартные отклонения для t_0 и x_4 . Данные заносят в табл. 2.15. По формуле (2.5.11) находят величину $M_{тр}/r$ и погрешность ее определения.

3. Находят средние арифметические значения t_x , t_y , t_z , t_{AG} , t_{MN} и погрешности их определения. Результаты заносят в табл. 2.16.

4. По формуле (2.5.9) находят экспериментальные значения величин J_x , J_z , J_{MN} и погрешности их определения. Данные заносят в табл. 2.17.

Таблица 2.17

Экспериментальные данные

J_x	S_{J_x}	J_z	S_{J_z}	J_{MN}	$S_{J_{MN}}$	$J_{MN}^{теор}$	$S_{J_{MN}^{теор}}$

5. Так как ось MN лежит в плоскости xz , то соотношение (2.100) для J_{MN} принимает вид $J_{MN} = J_x \cos^2 \alpha + J_z \cos^2 \gamma$, где

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Подставляя в это выражение определенные в п. 4 значения J_x , J_y вычисляют теоретическое значение $J_{MN}^{теор}$ и сравнивают его с экспериментальным (табл. 2.17).

6. Подставляя в (2.5.13) определенные экспериментально геометрические размеры a , b , c и времена t_x , t_y , t_z , t_{AG} опускания груза для различных способов крепления тела в рамке, убеждаются в правильности (в пределах погрешности измерений) соотношения (2.108), а следовательно, и уравнения (2.5.5).

Упражнение 2. Изучение тензора инерции методом колебаний.

Рассмотрим малые колебания физического маятника, представляющего собой сложное тело, состоящее из рамки, закрепленного на стержне дополнительного груза и исследуемого

тела, в качестве которого выбран параллелепипед (рис. 2.20) или цилиндр (рис. 2.21) колебания происходят вокруг оси, проходящей через центр масс рамки и исследуемого тела. Действие моментов сил тяжести, приложенных к стержню и добавочному грузу, закрепленному на нем, приводит к возникновению колебаний всей системы. Основное уравнение вращательного движения в этом случае имеет вид

$$J' \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = mgl\varphi + \frac{1}{2} m_0 gl_0 \varphi, \quad (2.5.14)$$

где φ – угол отклонения рамки от положения равновесия, m – масса груза, l – расстояние от центра масс груза до оси вращения, m_0 , l_0 – масса и длина стержня, на котором закреплен дополнительный груз, $J' = J + J_0$ – момент инерции физического маятника, включающего в себя исследуемое тело J , рамку со стержнем и дополнительным грузом J_0 .

Уравнение (2.5.14) является уравнение колебаний

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (2.5.15)$$

где циклическая частота колебаний определяется из соотношения

$$\omega_0^2 = \frac{mgl + \frac{1}{2} m_0 gl_0}{J'}.$$

Так как $\omega_0 = 2\pi/T$, то

$$J' = \frac{\left(mgl + \frac{1}{2} m_0 gl_0\right) T^2}{4\pi^2}. \quad (2.5.16)$$

Определив период колебаний рамки без тела T_0 , можно найти момент инерции маятника без тела – J_0 .

Для момента инерции исследуемого тела относительно фиксированной оси вращения получаем: $J = J' - J_0$, или

$$J = \frac{\left(mgl + \frac{1}{2} m_0 gl_0\right) (T^2 - T_0^2)}{4\pi^2}. \quad (2.5.17)$$

Пользуясь этой формулой, можно определять моменты инерции тела относительно произвольных осей.

В частности, для параллелепипеда можно определить J_x , J_y , J_z для осей, совпадающих с главными центральными осями (рис. 2.20), а также момент инерции относительно оси,

совпадающей с одной из диагоналей параллелепипеда – например AG, выразив J_x, J_y, J_z, J_{AG} в соответствии с (2.5.17) через периоды колебаний T_x, T_y, T_z, T_{AG} и период колебаний пустой рамки T_0 .

Выразим момент инерции тела относительно оси AG в соответствии с уравнением (2.5.9) через J_x, J_y, J_z :

$$J_{AG} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma,$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\left(mgl + \frac{1}{2} m_0 gl_0\right) \left(T_{AG}^2 - T_0^2\right)}{4\pi^2} &= \frac{\left(mgl + \frac{1}{2} m_0 gl_0\right) \left(T_x^2 - T_0^2\right)}{4\pi^2} \cos^2 \alpha + \\ &\frac{\left(mgl + \frac{1}{2} m_0 gl_0\right) \left(T_y^2 - T_0^2\right)}{4\pi^2} \cos^2 \beta + \frac{\left(mgl + \frac{1}{2} m_0 gl_0\right) \left(T_z^2 - T_0^2\right)}{4\pi^2} \cos^2 \gamma \end{aligned}$$

Учитывая, что сумма квадратов направляющих косинусов равна единице, получаем

$$T_{AG}^2 = T_x^2 \cos^2 \alpha + T_y^2 \cos^2 \beta + T_z^2 \cos^2 \gamma$$

или

$$T_{AG}^2 = \frac{a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (2.5.18)$$

Это уравнение может быть проверено экспериментально.

Рассматривая колебания цилиндра относительно осей Oy, Oz, MN можно найти величины J_y, J_z, J_{MN} определяя, соответственно, периоды колебаний T_y, T_z, T_{MN} .

Рассмотрим колебания цилиндра относительно оси MN (рис. 2.21). Направляющие косинусы для этой оси равны

$$\cos^2 \alpha = 0, \quad \cos^2 \beta = \frac{4R^2}{4R^2 + d^2}, \quad \cos^2 \gamma = \frac{d^2}{4R^2 + d^2}, \quad (2.5.19)$$

где R – радиус цилиндра, d – его длина.

Момент инерции цилиндра относительно оси MN, как и в предыдущем уравнении, можно выразить через компоненты тензора инерции J_y, J_z , записанного в главных осях (см. 2.5.5):

$$J_{MN} = J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma, \quad (2.5.20)$$

и, следовательно

$$T_{MN}^2 = \frac{4R^2 T_y^2 + d^2 T_z^2}{4R^2 + d^2}. \quad (2.5.21)$$

Отметим, что уравнение (2.5.14) было записано без учета сил трения в оси маятника. Это обстоятельство, однако, практически не сказывается на уравнении (2.5.17), так как силы трения слабо влияют на период колебаний физического маятника.

Измерения

1. Для выполнения работы необходимо измерить массы и размеры тел: радиус R и длину d цилиндра, ребра параллелепипеда a , b , c , а также массу груза m , массу и длину стержня m_0 , l_0 . Рекомендуется проводить измерения каждой величины не менее трех раз, а линейные величины измерять в различных сечениях тела. Данные заносят в табл. 2.18.

2. Дополнительный груз закрепляют в крайнем нижнем положении. Параллелепипед закрепляют в рамке в разных положениях и измеряют время t_n , $n = 3 - 5$ колебаний маятника. Для каждого положения тела проводят не менее трех измерений. Значения n и t_n заносят в табл. 2.19.

Таблица 2.18

Экспериментальные данные

Параметр	Исследуемое тело						m	m_0	l_0
	Цилиндр			Параллелепипед					
N	1	2	3	1	2	3			
R									
$R, S_{<R>}$									
D									
$d, S_{<d>}$									
A									
$a, S_{<a>}$									
B									
$b, S_{}$									
C									
$c, S_{<c>}$									

Таблица 2.19

Характеристики колебательного движения параллелепипеда

N	n_x	t_{nx}	T_x	n_y	t_{ny}	T_y	n_z	t_{nz}	T_z	n_{AG}	t_n	T_{AG}

3. Измеряют время t_{n0} 3–5 колебаний рамки без тела. Измерения проводят не менее трех раз. Данные заносят в табл. 2.20.

Таблица 2.20

Характеристики колебательного движения цилиндра

N	n_0	t_{n0}	T_0	n_y	t_{ny}	T_y	n_z	t_{nz}	T_z	n_{MN}	t_n	T_{MN}

4. Закрепляют в рамке цилиндр, измеряют времена t_n для колебаний цилиндра относительно осей y , z , MN . Результаты заносят в табл. 2.20.

Обработка результатов

1. Определяют средние арифметические значения и среднеквадратичные отклонения для размеров цилиндра и параллелепипеда и их погрешности. Результаты заносят в табл. 2.21.

Таблица 2.21

Погрешности измерения размеров цилиндра и параллелепипеда

a, S_a	b, S_b	c, S_c	R, S_R	d, S_d

2. Находят средние значения периодов колебаний параллелепипеда T_x, T_y, T_z, T_{AG} . Находят погрешности этих величин. Результаты заносят в табл. 2.22.

Таблица 2.22

**Средние значения периодов колебаний
параллелепипеда и их погрешности**

$\langle T_x \rangle, S_{\langle T_x \rangle}$	$\langle T_y \rangle, S_{\langle T_y \rangle}$	$\langle T_z \rangle, S_{\langle T_z \rangle}$	$\langle T_{AG} \rangle, S_{\langle T_{AG} \rangle}$

3. Подставляют в (2.5.18) определенные экспериментально геометрические размеры и периоды колебаний маятника для различных способов крепления параллелепипеда в рамке. Находят ошибки определения величин, стоящих в правой и левой частях уравнения (2.5.18). Убеждаются в правильности равенства (2.5.18) в пределах ошибок измерений.

Таблица 2.23

**Средние значения периодов колебаний цилиндра
и пустой рамки T_0 и их погрешности**

$\langle T_0 \rangle, S_{\langle T_0 \rangle}$	$\langle T_y \rangle, S_{\langle T_y \rangle}$	$\langle T_z \rangle, S_{\langle T_z \rangle}$	$\langle T_{MN} \rangle, S_{\langle T_{MN} \rangle}$

4. Находят средние значения периодов колебаний цилиндра T_z, T_y, T_{MN} и пустой рамки T_0 и их погрешности. Результаты вносят в табл. 2.23. Определяют по формуле (2.5.17) значения моментов инерции J_z, J_y, J_{MN} для цилиндра. Находят погрешности этих величин. Результаты заносят в табл. 2.24.

Таблица 2.24

Значения моментов инерции для цилиндра и их погрешности

J_x	S_{J_x}	J_y	S_{J_y}	J_{MN}	$S_{J_{MN}}$	$J_{MN}^{теор}$	$S_{J_{MN}^{теор}}$

5. Подставляя в (2.5.20) определенные в п.4 значения J_z, J_y , находят теоретическое значение момента инерции J_{MN} , сравнивают его с экспериментальным (найденным в п.4).

Основные итоги работы

В результате выполнения работы должно быть проверено соотношение (2.5.13) или (2.5.18) для параллелепипеда и (2.5.18) (2.5.21) для цилиндра и проведено сравнение экспериментального и теоретического значений величины момента инерции при

вращении тела относительно оси AG (для параллелепипеда) и оси MN (для цилиндра).

Контрольные вопросы

1. Записать уравнение моментов и объяснить смысл входящих в него величин.
2. Какова связь между моментом импульса и угловой скоростью? Что такое тензор инерции?
3. Записать компоненты тензора инерции для простейших систем тонкая палочка, система материальных точек.
4. Что такое главные оси? Что такое центральные оси?

Примеры.

5. Как направлены векторы угловой скорости и момента количества движения при вращении тела вокруг закрепленной оси
 - а) если ось вращения совпадает с одной из главных осей;
 - б) если ось вращения не совпадает ни с одной из главных осей?
6. Связь между компонентами тензора инерции и моментом инерции относительно фиксированной оси.
7. Что такое эллипсоид инерции? Как с помощью эллипсоида инерции определить значение момента инерции тела относительно заданной оси?

Лабораторная работа 2.6 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕНЗОРА ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Цель работы

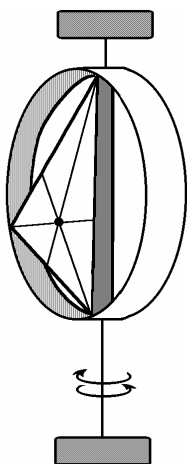
Изучение тензора инерции твердого тела.

Идея эксперимента

С помощью крутильного маятника, представляющего собой рамку с исследуемым телом, закрепленную на упругом подвесе, определяется момент инерции тела относительно закрепленной оси. Сравнивая период колебания маятника без тела и с телом, можно найти момент инерции тела относительно фиксированной оси. Компоненты тензора инерции относительно системы координат, жестко связанной с телом, определяются из нескольких таких опытов, отличающихся направлением оси вращения тела при колебаниях маятника.

Теоретическое введение

Рассмотрим колебания крутильного маятника, представляющего собой сложное тело, состоящее из рамки, закрепленной на вертикальной упругой проволоке, и исследуемого тела (рис. 2.23). Действие момента сил упругости приводит к возникновению колебаний всей системы с периодом



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J'}{D}}, \quad (2.6.1)$$

где D – коэффициент упругости подвеса, J' – момент инерции рамки с исследуемым телом.

Из соотношения (2.6.1) можно найти момент инерции J' :

$$J' = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 D. \quad (2.6.2)$$

Рис. 2.23. Схематическое представление крутильного маятника

Определяя период колебаний пустой рамки T_0 , можно найти момент инерции маятника без тела J_0 :

$$J_0 = \left(\frac{T_0}{2\pi} \right)^2 D. \quad (2.6.3)$$

Для момента инерции исследуемого тела относительно фиксированной оси вращения получаем:

$$J = J' - J_0. \quad (2.6.4)$$

Меняя положение тела относительно рамки, можно определять моменты инерции для осей вращения, имеющих различное направление относительно тела.

Тензор инерции будем рассматривать в системе координат, жестко связанной с твердым телом. При этом, как показано во введении,

$$J = J_{xx} \cos^2 \alpha + J_{yy} \cos^2 \beta + J_{zz} \cos^2 \gamma + 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta + 2J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma + 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma, \quad (2.6.5)$$

где α , β , γ – углы, определяющие положение оси вращения тела относительно системы координат, связанной с исследуемым телом.

Используемая в задаче установка удобна для определения моментов инерции “плоских тел” – т.е. таких тел, толщина которых

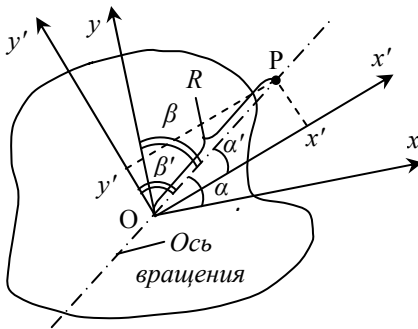


Рис. 2.24. Схематическое представление твердого тела и систем координат xOy , $x'Oy'$. Ось вращения OP и системы координат лежат в плоскости чертежа.

значительно меньше их поперечных размеров. При этом одну из осей (например, ось Oz), связанную с телом системы координат, удобно направить перпендикулярно плоскости тела. Оси Ox и Oy находятся в плоскости тела и их направления произвольны, начало координат совпадает с центром масс тела и находится на оси вращения (рис. 2.24). При этом один из направляющих косинусов ($\cos \gamma$) равен нулю,

и вместо (2.6.5) получим

$$J = J_{xx} \cos^2 \alpha + J_{yy} \cos^2 \beta + 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta. \quad (2.6.6)$$

Величина J – момент инерции данного тела относительно оси, проходящей через его центр масс. При повороте системы координат (осей Ox и Oy в своей плоскости), величина момента

инерции J не изменяется, но каждой ориентации осей соответствуют свои значения компонент тензора инерции J_{xx} , J_{yy} и $J_{xy}=J_{yx}$.

При определенном выборе системы координат, когда направления осей Ox' и Oy' совпадают с главными осями инерции тела, $J_{xy}=J_{yx}=0$, и вместо (2.6.6) имеем

$$J = J'_x \cos^2 \alpha' + J'_y \cos^2 \beta'. \quad (2.6.7)$$

В последнем соотношении $\cos \alpha'$ и $\cos \beta'$ – направляющие косинусы выбранной ранее оси вращения в новых осях координат Ox' , Oy' , J'_x и J'_y – компоненты тензора инерции в системе координат, оси которой совпадают по направлению с главными осями инерции.

Выберем на оси вращения некоторую точку P , находящуюся на расстоянии R от начала координат и имеющую координаты x' и y' . Пусть величина R численно равна $\frac{1}{\sqrt{J}}$. При этом $\cos \alpha' = x'/R$;

$\cos \beta' = y'/R$. Подставив эти величины в (2.6.7), получим

$$J = J'_x \frac{x'^2}{R^2} + J'_y \frac{y'^2}{R^2}$$

или

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1, \quad (2.6.8)$$

где $a^2 = \frac{JR^2}{J'_x}$, $b^2 = \frac{JR^2}{J'_y}$, a и b являются постоянными величинами.

Уравнение (2.6.8) является каноническим уравнением эллипса в координатах x' , y' , полуоси которого равны соответственно

$$a = \frac{1}{\sqrt{J'_x}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{J'_y}}.$$

Эллипс (2.6.8) является сечением эллипсоида инерции плоскостью $x'y'$. Эллипсоидом инерции называется поверхность, характеризующая величины моментов инерции твердого тела относительно множества возможных осей вращения, проходящих через одну точку (в данном случае через центр масс тела). При этом для каждого направления вдоль оси l откладываются отрезки, численно равные величине $\frac{1}{\sqrt{J_l}}$, где J_l – момент инерции тела

относительно оси l . Концы этих отрезков образуют поверхность, называемую *эллипсоидом инерции* (трехмерное уравнение эллипсоида инерции может быть получено из (2.6.5)).

Пусть исследуемое тело имеет форму, показанную на рис. 2.25. Точка O – центр масс тела. Оси Ox и Oy выбраны произвольно. Тело закреплено в рамке крутильного маятника так, что точка O лежит на оси вращения, а положение тела характеризуется углом α ($\beta = \pi/2 - \alpha$).

Если тело закреплено в рамке так, как показано на рис. 2.26 а, то $\alpha = 0$ и $\beta = \pi/2$. Из (2.6.8) получаем

$$J = J_1 = J_{xx}. \quad (2.6.9)$$

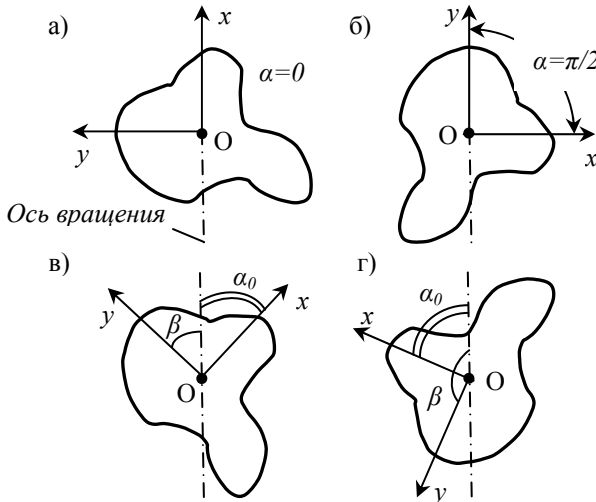


Рис. 2.26. Положения тела относительно оси вращения.

При закреплении тела, соответствующем рис. 2.26 б, $\alpha = \pi/2$ и $\beta = 0$. И, следовательно, из (2.124)

$$J = J_2 = J_{yy}. \quad (2.6.10)$$

При повороте тела в своей плоскости на угол α_0 (рис. 2.26 в) и $(-\alpha_0)$ (рис. 2.26 з) относительно оси вращения получаем, соответственно,

$$J = J_3 = J_{xx} \cos^2 \alpha_0 + J_{yy} \sin^2 \alpha_0 + J_{xy} \sin 2\alpha_0, \quad (2.6.11)$$

$$J = J_4 = J_{xx} \cos^2 \alpha_0 + J_{yy} \sin^2 \alpha_0 - J_{xy} \sin 2\alpha_0. \quad (2.6.12)$$

Из (2.127) и (2.128) следует, что

$$J_3 - J_4 = 2J_{xy} \sin 2\alpha_0 \quad \text{или} \quad J_{xy} = \frac{J_3 - J_4}{2 \sin 2\alpha_0}. \quad (2.6.13)$$

Из (2.122) можно получить, что при $\alpha = \alpha_0 + \pi/2$

$$J = J_5 = J_{xx} \sin^2 \alpha_0 + J_{yy} \cos^2 \alpha_0 - J_{xy} \sin 2\alpha_0. \quad (2.6.14)$$

Складывая (2.127) и (2.130), получаем

$$J_3 + J_5 = J_1 + J_2. \quad (2.6.15)$$

Экспериментальное определение величин J_1 , J_2 , J_3 и J_4 дает возможность найти четыре отличных от нуля компоненты тензора инерции плоского тела: J_{xx} , J_{yy} , $J_{xy}=J_{yx}$ для заданной системы координат. Если оси координат Ox и Oy совпадают с главными осями инерции тела, то $J_{xy}=J_{yx}=0$. Соотношение (2.6.15) может служить проверкой правильности проведенного эксперимента.

Экспериментальная установка

Экспериментальная установка показана на рис. 2.27. Она состоит из стойки и рамки 1, закрепленной на упругом подвесе 2. Исследуемые тела 3 поочередно крепятся в рамке с помощью винта 4. Конструкция крепления рамки на подвесе такова, что рамка может поворачиваться вокруг горизонтальной оси и фиксироваться в различных положениях. В работе изучаются тензоры инерции для нескольких “плоских” тел,

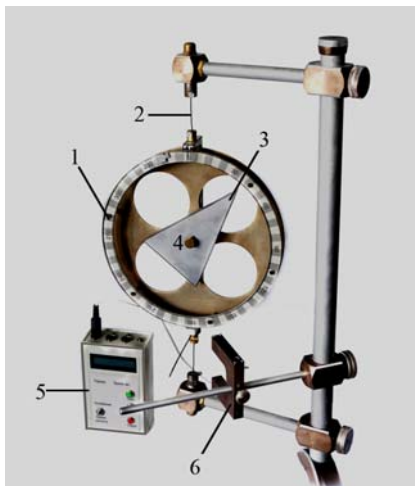


Рис. 2.27. Экспериментальная установка для изучения тензора инерции твердого тела.

имеющих разную форму: малых по толщине параллелепипеда, треугольной призмы, полудиска, а также для тел, конфигурация которых может меняться в процессе эксперимента. Система координат, относительно которой определяется момент инерции тела, жестко связана с телом, а, следовательно, и с рамкой. На рамке имеется шкала, позволяющая определять углы между осью вращения и осями системы координат, связанной с телом.

Установка снабжена системой автоматического отсчета времени и числа периодов, включающей в себя *таймер 5* и *датчик 6*.

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Определение коэффициента упругости подвеса и момента инерции пустой рамки.

Определение упругости подвеса осуществляется из результатов изучения колебаний длинного металлического стержня, закрепленного с помощью специального приспособления в рамке перпендикулярно оси вращения. Предполагается, что предварительно измерена его длина и масса и вычислен его момент инерции, а также определены погрешности этих величин (результаты измерений и расчетов необходимо внести в табл. 2.25)

Таблица 2.25

Длина, масса, момент инерции и их погрешности

Длина стержня $L =$	$S_L =$
Масса стержня $m =$	$S_m =$
Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной стержню, $J =$	$S_J =$

Измерения

1. Измерить время t_n $n = 10 - 20$ колебаний пустой рамки. Измерения провести несколько раз, данные занести в табл. 2.26.

2. Закрепить стержень в рамке симметрично. Измерить время t_n $10 - 20$ колебаний рамки со стержнем. Измерения провести несколько раз, данные занести в табл. 2.26.

Обработка результатов

1. Для каждого опыта определить периоды колебаний пустой рамки T_0 и рамки со стержнем T_2 .

2. Найти средние арифметические значения $\langle T_0 \rangle$ и $\langle T_2 \rangle$ и выборочные стандартные отклонения для этих величин S_{T_0} , S_{T_2} . Результаты вычислений внести в табл. 2.26.

Таблица 2.26

Экспериментальные данные

Колебания без стержня						Колебания со стержнем					
N	t_n	n	T_0	$\langle T_0 \rangle$	S_{T_0}	N	t_n	n	T_2	$\langle T_2 \rangle$	S_{T_2}
1						1					
2						2					
3						3					
.....											

3. Учитывая, что период колебаний крутильного маятника связан с моментом инерции соотношением (2.6.1), получаем, что

$$T_2^2 - T_0^2 = 4\pi^2 \frac{J_{\text{ст}}}{D},$$

где $J_{\text{ст}}$ – вычисленный ранее момент инерции стержня. Отсюда следует, что

$$D = \frac{4\pi^2 J_{\text{ст}}}{T_2^2 - T_0^2}.$$

Используя последнее соотношение, определить коэффициент упругости подвеса, а затем по формуле (2.6.3) – момент инерции пустой рамки J_0 .

Упражнение 2. Определение сечения эллипсоида инерции.*Измерения*

1. Для выполнения работы необходимо измерить размеры одного из тел по указанию преподавателя (ребра параллелепипеда (1), стороны треугольной призмы (2), радиус полудиска (3)). Данные занести в табл. 2.27.

2. Все тела, исследуемые в данной задаче, закрепляются в рамке благодаря ее конструкции, таким образом, что центр масс

лежит на оси вращения. Закрепив в рамке выбранное тело, измеряют время t_n $n = 10 - 20$ колебаний. Проводят несколько таких измерений. Поворачивают рамку на небольшой угол (например, на 15°), и вновь измеряют время t_n . Снова поворачивают рамку на тот же угол и проводят измерения t_n . Так поступают до полного поворота рамки на 180° . Результаты каждого измерения заносят в табл. 2.27.

Таблица 2.27

Экспериментальные данные

Форма и размеры исследуемого тела (номер тела):								
N	α_i	t_n	n	T	$\langle T_\alpha \rangle$	S_{T_α}	J_α	$\sqrt{1/J_\alpha}$
1								
2								
3								
1								
2								
3								
.....								

Обработка результатов

1. Найти периоды колебаний маятника для каждого значения α , их среднее значение $\langle T_\alpha \rangle$ и выборочные стандартные отклонения S_{T_α} . Величины занести в табл. 2.27.

2. Определяют моменты инерции исследуемого тела по формулам (2.6.2)–(2.6.4) для различных значений α . Данные заносят в табл. 2.27.

3. Построить в полярных координатах $R(\alpha)$ сечение эллипсоида инерции $R = \sqrt{1/J(\alpha)}$ для исследованного тела, считая, что $J(180^\circ + \alpha) = J(\alpha)$. На этом же графике необходимо нарисовать и исследуемое тело.

4. Определить положения рамки, при которых момент инерции принимает максимальное и минимальное значения. Эти положения соответствуют главным центральным осям инерции изучаемого тела.

5. Используя известные формулы (см. *Приложение 2*), рассчитать величины моментов инерции тела относительно всех

трех главных центральных осей и сравнить полученные значения с экспериментальными. При этом теоретическое значение J_z сравнивается с суммой значений J_x , J_y , полученной экспериментально, поскольку для плоских тел (см. **Приложение 2**) $J_z = J_x + J_y$.

Упражнение 3. Определение компонент тензора инерции.

Для выполнения этого упражнения используется то же тело, что и в *упражнение 2*. На поверхности всех тел, входящих в комплект установки нанесены прямые, проходящие через точку, соответствующую его центру масс и повернутые относительно друг друга на 15° . Каждая из этих прямых может быть выбрана за ось Ox системы координат, связанной с телом. Вначале любую из этих прямых принимают за направление Ox .

Измерения

1. Определить четыре величины момента инерции тела $J_1^{(1)}$, $J_2^{(1)}$, $J_3^{(1)}$, $J_4^{(1)}$, для случая, когда выбранная ось Ox , соответственно, совпадает, перпендикулярна, составляет угол α_0 и $(-\alpha_0)$ с осью вращения (α_0 – произвольный угол, например 30° или 45°). Для выполнения этого пункта необходимо произвести измерения, аналогичные проведенным в *упражнение 2*. Результаты занести в табл. 2.28.

Приняв за ось Ox другую прямую, нанесенную на поверхности тела, повторить все измерения п.1 и получить новые значения величин $J_1^{(2)}$, $J_2^{(2)}$, $J_3^{(2)}$, $J_4^{(2)}$. Полученные результаты занести в таблицу, аналогичную табл. 2.28.

Обработка результатов

Воспользовавшись измеренными величинами $J_1^{(i)}$, $J_2^{(i)}$, $J_3^{(i)}$, $J_4^{(i)}$ и соотношениями (2.6.9) – (2.6.12) определить J_{xx} , J_{yy} , J_{xy} для двух систем координат, которые использовались в п. 1 и п. 2. Убедиться, что компоненты тензора инерции зависят от выбора системы координат и занести их в табл. 2.28, указать ориентацию системы координат, для которой они получены.

Таблица 2.28

Экспериментальные данные

Формы и размеры тела (номер тела):		N	t_n	n	T	$\langle T \rangle$	S_{CT}	J_i	S_J	
1	Ось Ox параллельна оси вращения	1								$J_{xx} =$
		2								
		3								
2	Ось Ox перпендикулярна оси вращения	1								$J_{yy} =$
		2								
		3								
3	Ось Ox составляет угол α_0 с осью вращения	1								$J_{xy} =$
		2								
		3								
4	Ось Ox составляет угол α_0 с осью вращения	1								$J_{xy} =$
		2								
		3								
.....										

Упражнение 4. Определение компонент тензора инерции тела, состоящего из стержней и шаров.

Изучаемое тело представляет собой крестовину из стержней заданной массы и длины и шаров. Шары закрепляются на крестовине с помощью винтов. В упражнении по указанию преподавателя исследуется одна из трех конфигураций тел, показанных на рис. 2.28.

Измерения

Закрепить тело в рамке. Измерить периоды колебаний маятника для нескольких заданных положений рамки, изменяя угол, определяющий ее положение относительно оси вращения на 15° , начиная от положения при котором два шара находятся на одной вертикали (аналогично п.2 упражнения 2). Результаты измерений занести в табл. 2.29.

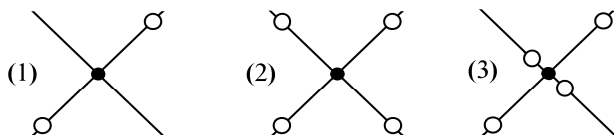


Рис. 2.28. Конфигурации тел, исследуемых в данной работе.

Таблица 2.29

Экспериментальные данные

Выбранная конфигурация системы тел (номер тела):									
α_i	N	t_n	n	T	$\langle T_\alpha \rangle$	$S_{T\alpha}$	J_α	$\sqrt{1/J_\alpha}$	$(\sqrt{1/J_\alpha})_{\text{теор}}$
	1								
	2								
	3								
	1								
	2								
	3								
.....									

Обработка результатов

1. Определить моменты инерции маятников относительно выбранной оси для всех рассмотренных случаев (аналогично п.2 упражнения 2).

2. Определить компоненты тензора инерции выбранного тела J_{xx} , J_{yy} , J_{xy} для системы координат, оси которой направлены вдоль крестовины.

3. Используя известные формулы для моментов инерции стержня и шара (см. *Приложение 2*), определить моменты инерции тела относительно вертикальной оси для использованных значений α . Построить в полярной системе координат сечения эллипсоидов инерции $\sqrt{1/J_\alpha}$ и $(\sqrt{1/J_\alpha})_{\text{теор}}$ по найденным экспериментальным и теоретическим данным.

Основные итоги работы

В результате выполнения работы должно быть экспериментально получено сечение эллипсоида инерции плоскостью xOy исследованного тела. Определены направления главных центральных осей инерции и определены компоненты тензора инерции для двух ориентаций осей Ox и Oy . Следует провести сравнение данных эксперимента с теорией. Для тела в виде крестовины для одного расположения системы координат должны быть определены экспериментально и теоретически компоненты тензора инерции, построены экспериментально и теоретически определенные сечения эллипсоидов инерции.

Контрольные вопросы

1. Записать уравнение моментов и объяснить смысл входящих в него величин.

2. Какова связь между моментом импульса и угловой скоростью? Что такое тензор инерции?

3. Записать компоненты тензора инерции для простейших систем: тонкая палочка, система материальных точек.

4. Что такое главные оси? Что такое центральные оси?
Примеры.

5. Как направлены векторы угловой скорости и момента количества движения тела вокруг закрепленной оси

- 1) если ось вращения совпадает с одной из главных осей;
- 2) если ось вращения не совпадает ни с одной из главных осей?

6. Связь между компонентами тензора инерции и моментом инерции относительно фиксированной оси.

7. Что такое эллипсоид инерции? Как с помощью эллипсоида инерции определить значение момента инерции тела относительно заданной оси?

Приложение 2.
ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ,
ИМЕЮЩИХ ПРОСТЕЙШУЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКУЮ
ФОРМУ

При определении момента инерции тела произвольной формы относительно некоторой оси его обычно представляют в виде совокупности малых элементов, находят момент инерции каждого элемента относительно выбранной оси и, затем, проводят суммирование (или интегрирование) по всему объему тела. Если форма тела является правильной геометрической фигурой, то процесс вычисления величины момента инерции значительно упрощается, а иногда могут быть использованы некоторые специальные способы, которые на отдельных примерах будут рассмотрены ниже.

Приложение 2.1. Определение момента инерции тонкого стержня, относительно оси, проходящей через его середину.

Пусть тонкий однородный стержень имеет длину l и массу m .

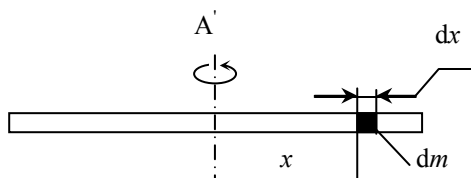


Рис. 2.29. Представление стержня, вращающегося вокруг оси, проходящей через его середину, в виде совокупности малых элементов dx .

Разделим его на малые элементы длиной dx (рис. 2.29), масса которых $dm = (m/l)dx$. Если выбранный элемент находится на расстоянии x от оси, то его момент инерции $dJ = x^2 dm$, т.е.

$$dJ = \frac{m}{l} x^2 dx.$$

Интегрируя последнее соотношение в пределах от 0 до $l/2$ и удваивая полученное выражение (для учета левой половины стержня), получим

$$J = 2 \int_0^{l/2} \frac{m}{l} x^2 dx = \frac{ml^2}{12}. \quad (\text{П2.1})$$

Это выражение может быть получено и другим способом, с помощью метода подобия. Будем считать, что рас-

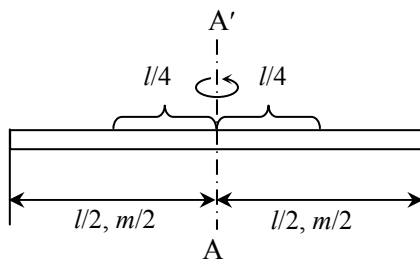


Рис. 2.30. К определению момента инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через его середину с помощью метода подобия.

смаатриваемый стержень состоит из двух половин (рис. 2.30). Каждая из них имеет массу $m/2$ и длину $l/2$. Выражение для момента инерции стержня должно включать его массу и длину, так как это единственные параметры, определяющие его инерционные свойства при вращении. Пусть

$$J = kml^2, \quad (\text{П2.2})$$

где k – неизвестный коэффициент.

Для каждой из половин стержня при вращении вокруг оси AA' можно найти момент инерции, используя (П2.2) и теорему Гюйгенса – Штейнера:

$$J_1 = k \frac{m}{2} \left(\frac{l}{2} \right)^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{l}{4} \right)^2. \quad (\text{П2.3})$$

Полный момент инерции стержня

$$J = 2J_1 = 2 \left(k \frac{m}{2} \left(\frac{l}{2} \right)^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{l}{4} \right)^2 \right). \quad (\text{П2.4})$$

Но этот же момент инерции, согласно (П2.3), равен kml^2 . Приравнявая (П2.4) и (П2.2), имеем

$$2k \frac{m}{2} \left(\frac{l}{2} \right)^2 + 2 \frac{m}{2} \left(\frac{l}{4} \right)^2 = kml^2 \quad (\text{П2.5})$$

или $\frac{k}{4} + \frac{1}{16} = k$ и, следовательно,

$$k = \frac{1}{12}, \quad (\text{П2.6})$$

т.е. $J = \frac{ml^2}{12}$, что совпадает с (П2.1)

Приложение 2.2. Моменты инерции прямоугольной пластины относительно главных центральных осей.

Для расчета моментов инерции прямоугольной пластинки со сторонами a и b и массой m выберем систему координат так, чтобы ее оси совпадали с главными центральными осями (рис. 2.31).

Для прямоугольной пластинки легко вычислить моменты инерции относительно осей x и y . Рассмотрим, например, расчет J_x .

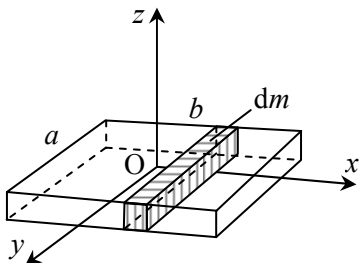


Рис. 2.31. Выбор системы координат и представление пластинки в виде совокупности тонких полосок.

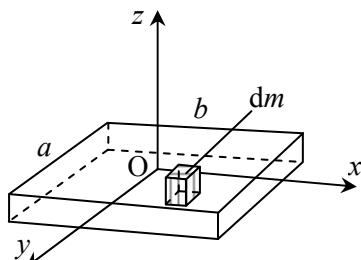


Рис. 2.32. Представление пластинки в виде набора малых элементов.

Пластинку можно представить как совокупность тонких полосок, для каждой из которых момент инерции вычисляется так же, как для тонкой палочки длины a . Момент инерции пластинки относительно оси x равен сумме моментов инерции этих полосок, т.е.

$$J_x = \sum J_{x_i} = \sum \frac{1}{12} (dm) a^2 = \frac{ma^2}{12}. \quad (\text{П2.7})$$

Аналогично вычисляется момент инерции пластинки относительно оси y

$$J_y = \frac{mb^2}{12}. \quad (\text{П2.8})$$

Для вычисления момента инерции пластинки относительно оси z воспользуемся следующим приемом. Рассмотрим малый элемент массы δm (рис. 2.32). Его момент инерции δJ_z относительно оси z равен

$$\delta J_z = \delta m (x^2 + y^2), \quad (\text{П2.9})$$

т.е. можно записать, что

$$\delta J_z = \delta m x^2 + \delta m y^2 = \delta J_x + \delta J_y, \quad (\text{П2.10})$$

где δJ_x , δJ_y – моменты инерции этого малого элемента относительно осей x и y .

Это же соотношение справедливо не только для отдельного элемента, но и для любого плоского тела в целом. В

этом легко убедиться, представляя плоское тело как совокупность отдельных малых элементов (рис. 2.32) и производя суммирование по всем этим элементам.

Таким образом, используя (П2.7), (П2.8) и (П2.10), получим

$$J_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2). \quad (\text{П2.11})$$

Приложение 2.3. Момент инерции треугольной пластины относительно главной центральной оси, перпендикулярной его плоскости.

Определим момент инерции треугольной пластины с помощью метода подобия. Этот метод используется обычно в тех случаях, когда изначально ясен общий вид формулы, определяющей момент инерции. В частности, если тело является

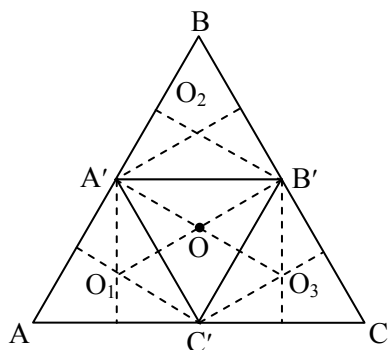


Рис. 2.33. Схематичное представление применения принципа подобия для определения момента инерции тела, имеющего форму равностороннего треугольника

правильной фигурой, например, квадратом, равносторонним треугольником, то в конечном выражении для момента инерции относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости фигуры, войдет масса тела и квадрат его характерного размера. Действительно – это единственные параметры, которые могут характеризовать инерционные свойства тела при его вращении вокруг выбранной оси. Таким

образом, можно записать

$$J = kma^2, \quad (\text{П2.12})$$

где J – момент инерции тела, m – его масса, a – характерный размер (сторона квадрата или треугольника), k – неизвестный коэффициент, который определяется формой тела.

Для пластины, имеющей вид правильного треугольника $A'B'C'$ (рис. 2.33), момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости пластины и проходящей через точку

О, может быть выражен формулой (П2.12).

Проведем геометрическое построение (рис. 2.33) и рассмотрим треугольную пластину ABC со стороной $2a$. Очевидно, что ее масса будет равна $4m$, а формула для момента инерции будет иметь вид

$$J_1 = k(4m)(2a)^2 = 16kma^2. \quad (\text{П2.13})$$

Пластина ABC состоит из четырех одинаковых треугольников со стороной a каждая. В этом случае момент инерции треугольника ABC можно представить в виде суммы моментов инерции четырех треугольных пластин. Для вычисления этих моментов инерции воспользуемся тем, что центр масс треугольника находится в точке пересечения его медиан. Обозначим через d расстояние от центров $\triangle AA'C'$, $\triangle A'BB'$, $\triangle B'CC'$ до точки O – центра масс пластины ABC. Используя теорему Гюйгенса–Штейнера, получаем

$$\begin{aligned} J_1 &= (J_{AA'C'} + md^2) + (J_{A'BB'} + md^2) + (J_{C'B'C} + md^2) + J_{A'B'C'} = \\ &= 4kma^2 + 3md^2. \end{aligned} \quad (\text{П2.14})$$

Учитывая, что $d = a/\sqrt{3}$, и сравнивая (П2.14) с (П2.13), находим, что

$$4kma^2 + 3m \frac{a^2}{3} = 16kma^2, \quad (\text{П2.15})$$

откуда следует

$$k = \frac{1}{12}. \quad (\text{П2.16})$$

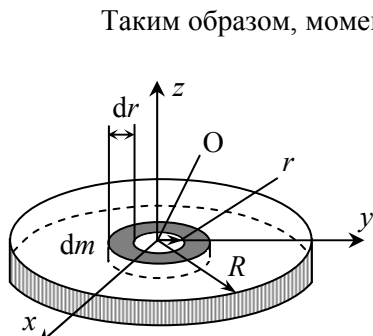


Рис. 2.34. Выбор системы координат и представление диска в виде наборов тонких колец.

Таким образом, момент инерции плоского тела, имеющего форму равностороннего треугольника, относительно оси, проходящей через центр масс (точку O) перпендикулярно его плоскости, равен

$$J = \frac{ma^2}{12}. \quad (\text{П2.17})$$

Приложение 2.4. Моменты инерции тонкого диска относительно его главных центральных осей.

Для расчета моментов инерции тонкого диска массы m и радиуса R выберем систему координат так, чтобы ее оси совпадали с главными центральными осями (рис. 2.34). Определим момент инерции тонкого однородного диска относительно оси z , перпендикулярной к плоскости диска. Рассмотрим бесконечно тонкое кольцо с внутренним радиусом r и наружным $r + dr$.

Площадь такого кольца $ds = 2\pi r dr$, а его масса $dm = \frac{m ds}{S} = 2m \frac{r dr}{R^2}$,

где $S = \pi R^2$ – площадь всего диска. Момент инерции тонкого кольца найдется по формуле $dJ = dm r^2$. Момент инерции всего диска определяется интегралом

$$J_z = \int r^2 dm = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{mR^2}{2}. \quad (\text{П2.18})$$

Для определения J_x воспользуемся симметрией диска ($J_x = J_y$) и утверждением (2.141), полученным при расчете момента инерции прямоугольной пластины. При этом из (2.141) получаем

$$J_z = 2J_x, \quad (\text{П2.19})$$

откуда

$$J_x = J_y = \frac{mR^2}{4}. \quad (\text{П2.20})$$

Приложение 2.5. Моменты инерции цилиндра относительно его главных центральных осей. Выберем оси системы координат, совпадающие с главными центральными осями так, как показано на рис. 2.35. Определим момент инерции цилиндра относительно оси z . Цилиндр представляет собой набор тонких дисков с массами dm и моментами инерции $dJ_z = \frac{1}{2} dm R^2$.

Момент инерции цилиндра равен сумме моментов инерций dJ_z тонких дисков

$$J_z = \sum dJ_z = \frac{1}{2} m R^2, \quad (\text{П2.21})$$

где R – радиус цилиндра, m – его масса.

Пусть теперь ось вращения проходит через центр масс цилиндра перпендикулярно его продольной оси (рис. 2.35) и совпадает с осью координат x . Представим цилиндр как совокупность тонких дисков толщины dz и массы $dm = (m/l) dz$ (l –

длина цилиндра). Момент инерции тонкого диска dJ'_x относительно оси Ox в соответствии с (2.151) и теоремой Гюйгенса–Штейнера равен

$$dJ'_x = \frac{1}{4} dmR^2 + dmz^2, \quad (\text{П2.22})$$

где z – расстояние от диска до центра цилиндра.

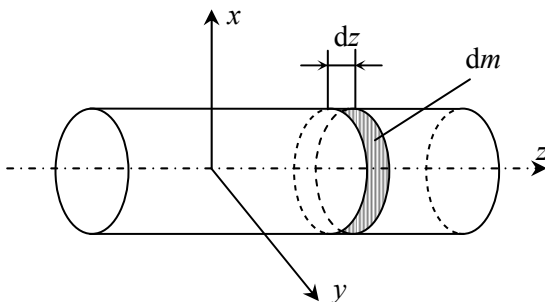


Рис. 2.35. Выбор системы координат и представление цилиндра в виде набора тонких дисков.

Момент инерции всего цилиндра найдем после интегрирования по z (по всей длине цилиндра):

$$J_x = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} z^2 \frac{m}{l} dz + \frac{mR^2}{4}, \quad (\text{П2.23})$$

откуда получаем

$$J_x = \frac{ml^2}{12} + \frac{mR^2}{4}. \quad (\text{П2.24})$$

Приложение 2.6. Момент инерции цилиндра с центральным отверстием относительно его продольной оси.

Однородный цилиндр массой m с внешним радиусом R_2 и внутренним радиусом R_1 (рис. 2.36) можно рассматривать как сплошной цилиндр радиусом R_2 , массой m_2 , из которого вырезано отверстие – цилиндр радиусом R_1 , массой m_1 .

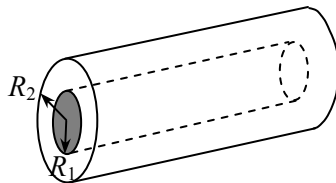


Рис. 2.36. Схематическое представление цилиндра с центральным отверстием.

Очевидно, что $J = J_2 - J_1 = \frac{1}{2}(m_2 R_2^2 - m_1 R_1^2)$ и, так как $m = m_2 - m_1$ и

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\pi R_1^2}{\pi R_2^2}, \text{ то}$$

$$J = \frac{1}{2} m (R_2^2 + R_1^2). \quad (\text{П2.25})$$

Приложение 2.7. Момент инерции шара.

Сплошной шар массой m и радиусом R можно рассматривать как совокупность бесконечно тонких сферических слоев с массами δm , радиусом r , толщиной dr (рис. 2.37).

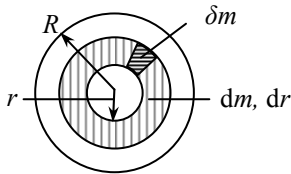


Рис. 2.37. Схематическое представление шара как совокупности сферических слоев.

Рассмотрим малый элемент сферического слоя δm с координатами x, y, z . Его моменты инерции относительно осей x, y, z , проходящих через центр слоя — $\delta J_x, \delta J_y, \delta J_z$, равны

$$\delta J_x = \delta m (y^2 + z^2), \quad \delta J_y = \delta m (x^2 + z^2), \\ \delta J_z = \delta m (x^2 + y^2)$$

Таким образом, можно записать

$$\delta J_x + \delta J_y + \delta J_z = 2\delta m (x^2 + y^2 + z^2). \quad (\text{П2.26})$$

Так как для элементов сферического слоя $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, то

$$\delta J_x + \delta J_y + \delta J_z = 2\delta m r^2.$$

После интегрирования по всему объему слоя получим

$$dJ_x + dJ_y + dJ_z = 2dm r^2. \quad (\text{П2.27})$$

Так как, в силу симметрии для сферического слоя $dJ_x = dJ_y = dJ_z = dJ$, а $dm = m \frac{dV}{V} = m \frac{4\pi r^2 dr}{(4/3)\pi R^3}$, то

$$dJ = \frac{2}{3} dm r^2 = 2m \frac{r^4 dr}{R^3}.$$

Интегрируя по всему объему шара, получаем

$$J = \int dJ = \int_0^R 2m \frac{r^4}{R^3} dr.$$

Окончательно (после интегрирования) получим, что момент инерции шара относительно оси, проходящей через его центр равен

$$J = \frac{2}{5} mR^2. \quad (\text{П2.28})$$

Приложение 2.8. Моменты инерции параллелепипеда со сторонами a , b и c относительно его главных осей.

Выберем оси системы координат (x, y, z) совпадающими с главными центральными осями. Начало системы координат совпадает с центром параллелепипеда.

Для определения момента инерции относительно оси Ox представим параллелепипед как совокупность тонких прямоугольных пластинок (рис. 2.38) массой $dm = (m/c)dy$ и толщиной dy . Момент инерции dJ'_x каждой такой пластинки относительно оси Ox в соответствии с (П2.7) и теоремой Гюйгенса–Штейнера равен

$$dJ'_x = \frac{1}{2} dm b^2 + dmy^2. \quad (\text{П2.29})$$

Момент инерции всего параллелепипеда получим, интегрируя по всему объему

$$J_x = \int_{-c/2}^{c/2} \frac{1}{12} b^2 \frac{m}{c} dy + \int_{-c/2}^{c/2} \frac{m}{c} y^2 dy = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2). \quad (\text{П2.30})$$

Аналогично вычисляются моменты инерции относительно осей y и x :

$$J_y = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2), \quad (\text{П2.31})$$

$$J_z = \frac{1}{12} m(a^2 + c^2). \quad (\text{П2.32})$$

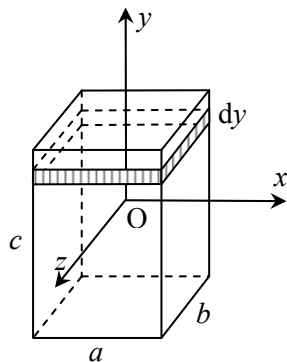


Рис. 2.38. Выбор системы координат и представление параллелепипеда в виде тонких прямоугольных пластинок.

Приложение 2.9. Моменты инерции равнобедренной треугольной призмы относительно ее главных осей.

Рассмотрим предварительно моменты инерции тонкой равнобедренной треугольной пластины HPQ (рис. 2.39) массы m_1 относительно ее главных осей.

Центр пластины лежит на пересечении медиан, причем

$$OG = \frac{1}{3} QG = \frac{1}{3} h \quad (h - \text{высота}$$

треугольника). Главные центральные оси O_1O_1' и O_2O_2' такой пластины расположены так, как показано на рис. 2.39 (ось O_3O_3' проходит через точку O перпендикулярно плоскости пластины).

Для удобства интегрирования введем систему координат x', y', z' с началом в точке Q , так что Qz' перпендикулярна плоскости пластины, а оси Ox' и Oy' лежат в плоскости пластины и ось Ox' перпендикулярна высоте треугольника. Представим пластину как набор тонких полосок

толщиной dy , с массами dm и длинами $l(y)$, причем $l(y) = \frac{a}{h} y$ (a – основание треугольника)

$$dm = \frac{m_1}{ha/2} l(y) dy = \frac{m_1}{ha/2} \frac{a}{h} y dy = \frac{2m_1}{h^2} y dy. \quad (\text{П2.33})$$

Момент инерции dJ_y каждой такой полоски относительно оси O_2O_2' (совпадающей с осью y') равен (см. П2.1)

$$dJ_y = \frac{1}{12} l^2(y) dm = \frac{2m_1}{12h^2} y \left(\frac{a}{h} y \right)^2 dy = \frac{1}{6} \frac{m_1 a^2}{h^4} y^3 dy. \quad (\text{П2.34})$$

Полный момент инерции пластины J_2 относительно оси O_2O_2' получаем после интегрирования:

$$J_2 = \int_0^h \frac{1}{6} \frac{m_1 a^2}{h^4} y^3 dy = \frac{m_1 a^2}{24}. \quad (\text{П2.35})$$

Момент инерции dJ'_x каждой полоски относительно оси x' равен

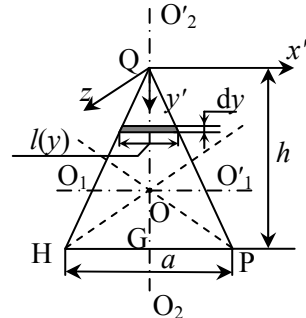


Рис. 2.39. Выбор системы координат и представление пластины в виде тонких полосок.

$$dJ'_x = dm y^2 = \frac{2m_1}{h^2} y^3 dy. \quad (\text{П2.36})$$

Для всей пластины

$$J'_x = \int_0^h \frac{2m_1}{h^2} y^3 dy = \frac{m_1 h^2}{2}. \quad (\text{П2.37})$$

Момент инерции J_1 относительно главной оси $O_1O'_1$ связан с J'_x с помощью соотношения (теорема Гюйгенса–Штейнера)

$$J'_x = J_1 + m_1 \left(\frac{2}{3} h \right)^2, \quad (\text{П2.38})$$

откуда получаем

$$J_1 = J'_x - m_1 \left(\frac{2}{3} h \right)^2 = \frac{1}{18} m_1 h^2. \quad (\text{П2.39})$$

Для определения момента инерции пластины относительно оси $O_3O'_3$, перпендикулярной плоскости пластины, воспользуемся соотношением (П2.10), верным для плоских тел

$$J_3 = J_1 + J_2 \quad (\text{П2.40})$$

т. е.

$$J_3 = \frac{m_1 a^2}{24} + \frac{m_1 h^2}{18} = \frac{m_1}{6} \left(\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right). \quad (\text{П2.41})$$

Очевидно, что для пластины в форме плоского равностороннего треугольника, когда $h = a \frac{\sqrt{3}}{2}$, выражение (П2.41)

совпадает с (П2.17), полученным более простым способом.

При определении моментов инерции равнобедренной призмы толщины b и массы m представим ее как набор тонких треугольных пластин с массами $dm_1 = (m/b)dz$. Систему координат выберем так, чтобы оси x , y , z совпадали с главными центральными осями призмы (см. рис. 2.40). Момент инерции призмы относительно оси Oz равен сумме моментов инерции отдельных пластин:

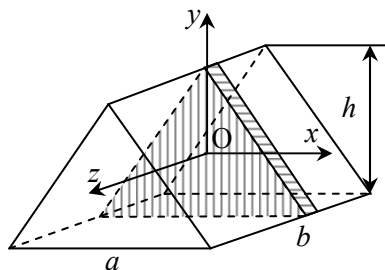


Рис. 2.40. Выбор системы координат и представление равнобедренной призмы в виде тонких треугольных пластин.

$$J_z = \frac{m_1}{6} \left(\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right). \quad (\text{П2.42})$$

Получим теперь выражение для J_x и J_y . Момент инерции отдельной пластины J'_1 относительно оси Ox в соответствии с (П2.39) и теоремой Гюйгенса – Штейнера равен

$$\begin{aligned} dJ'_1 &= dJ_1 + dm_1 z^2 = \frac{1}{18} dm_1 h^2 + dm_1 z^2 = \\ &= \frac{1}{18} \frac{m}{b} h^2 dz + \frac{m}{b} z^2 dz. \end{aligned} \quad (\text{П2.43})$$

Интегрируя по всей высоте призмы, получаем момент инерции J_x относительно Ox :

$$J_x = \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{1}{18} \frac{m}{b} h^2 + \frac{m}{b} z^2 \right) dz = \frac{1}{18} m h^2 + \frac{1}{12} m b^2. \quad (\text{П2.44})$$

Для оси Oy имеем

$$dJ'_2 = \frac{1}{24} m_1 a^2 + m_1 z^2 = \frac{1}{24} \frac{m}{b} a^2 dz + \frac{m}{b} z^2 dz, \quad (\text{П2.45})$$

откуда

$$J_y = \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{1}{24} \frac{m}{b} a^2 + \frac{m}{b} z^2 \right) dz = \frac{1}{24} m a^2 + \frac{1}{12} m b^2. \quad (\text{П2.46})$$

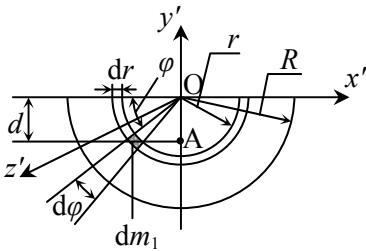


Рис. 2.41. Выбор системы координат для определения момента инерции полудиска.

Приложение 2.10. Моменты инерции полудиска относительно его главных центральных осей.

Определим предварительно моменты инерции для тонкой полукруглой пластины, имеющей массу m_1 (рис. 2.41).

Найдем положение центра масс (точки А) этого тела, т. е. расстояние d . По определению центра масс имеем

$$d = \frac{1}{m_1} \int r \sin \varphi dm = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = \frac{4R}{3\pi}. \quad (\text{П2.47})$$

Выберем декартову систему координат x' , y' , z' с центром в точке O (рис. 2.41). Проводя прямое интегрирование так же, как для диска, и учитывая, что $J'_x = J'_y$, получаем

$$J'_x = \frac{1}{4} m_1 R^2, \quad (\text{П2.48})$$

$$J'_y = \frac{1}{4} m_1 R^2. \quad (\text{П2.49})$$

$$J'_z = \frac{1}{2} m_1 R^2. \quad (\text{П2.50})$$

Моменты инерции, относительно главных центральных осей получаем, используя теорему Гюйгенса – Штейнера:

$$J_{1x} = J'_x - m_1 d^2 = m_1 R^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \right), \quad (\text{П2.51})$$

$$J_{1y} = J'_y = \frac{1}{4} m_1 R^2, \quad (\text{П2.52})$$

$$J_{1z} = J_x + J_y = m_1 R^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right). \quad (\text{П2.53})$$

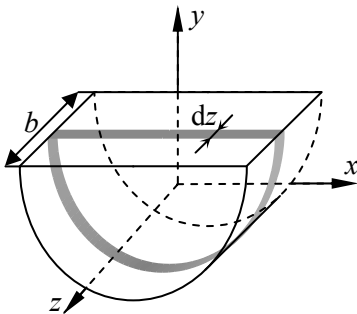


Рис. 2.42. Выбор системы координат и представление полудиска толщины b в виде тонких полукруглых пластин.

При рассмотрении моментов инерции полудиска массы m , радиуса R и толщины b представим его в виде набора тонких пластин так, как показано на рис. 2.42.

Систему координат выберем так, чтобы ее центр совпадал с центром масс полудиска, а направление осей координат – с направлением соответствующих главных центральных осей.

Моменты инерции dJ_x , dJ_y , dJ_z тонких пластин с массами $dm_1 = (m/b)dz$, относительно осей Ox , Oy и Oz получаем на основании (П2.51) – (П2.53) и теоремы Гюйгенса – Штейнера:

$$dJ_x = dm_1 R^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \right) + dm_1 z^2. \quad (\text{П2.54})$$

$$dJ_y = \frac{1}{4} dm_1 R^2 + dm_1 z^2, \quad (\text{П2.55})$$

$$dJ_z = dm_1 R^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right), \quad (\text{П2.56})$$

где z – расстояние пластины от центра масс полудиска.

Выражения для моментов инерции полудиска получаем

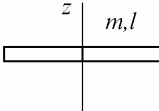
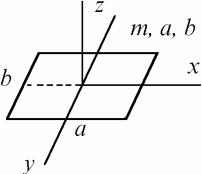
после интегрирования по всему объему:

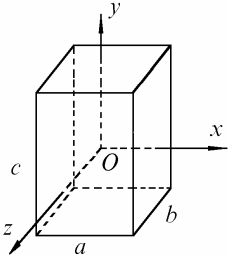
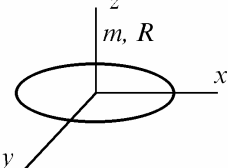
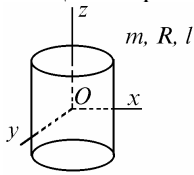
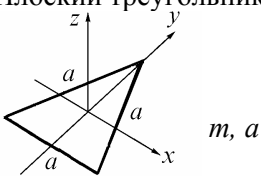
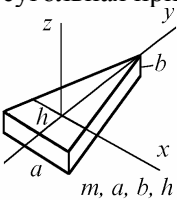
$$\begin{aligned} J_x &= mR^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \right) + \int_{-b/2}^{b/2} \frac{m}{b} z^2 dz = \\ &= mR^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \right) + \frac{1}{12} mb^2, \end{aligned} \quad (\text{П2.57})$$

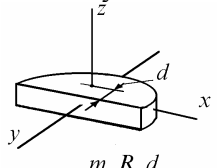
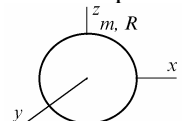
$$J_y = \frac{1}{4} mR^2 + \int_{-b/2}^{b/2} 2 \frac{m}{b} z^2 dz = \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{12} mb^2, \quad (\text{П2.58})$$

$$J_z = mR^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right). \quad (\text{П2.59})$$

Приложение 2.11. Моменты инерции тел, рассмотренных в приложениях (относительно осей, указанных на рисунках).

Форма тела	Моменты инерции
<p>Тонкий однородный стержень</p> 	$J_z = \frac{ml^2}{12}$
<p>Тонкая прямоугольная пластинка</p> 	$J_x = \frac{mb^2}{12}$ $J_y = \frac{ma^2}{12}$ $J_z = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}$
<p>Прямоугольный параллелепипед</p>	$J_x = \frac{m(b^2 + c^2)}{12}$

Форма тела	Моменты инерции
	$J_y = \frac{m(a^2 + c^2)}{12}$ $J_z = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}$
<p>Тонкий диск</p> 	$J_x = \frac{1}{4} mR^2$ $J_y = \frac{1}{4} mR^2$ $J_z = \frac{1}{2} mR^2$
<p>Цилиндр</p> 	$J_x = \frac{ml^2}{12} + \frac{mR^2}{4}$ $J_y = \frac{ml^2}{12} + \frac{mR^2}{4}$ $J_z = \frac{1}{2} mR^2$
<p>Плоский треугольник</p> 	$J_x = \frac{ma^2}{24}$ $J_y = \frac{ma^2}{24}$ $J_z = \frac{ma^2}{12}$
<p>Треугольная призма</p> 	$J_x = \frac{mh^2}{18} + \frac{mb^2}{12}$ $J_y = \frac{ma^2}{24} + \frac{mb^2}{12}$ $J_z = \frac{ma^2}{24} + \frac{mh^2}{18}$


Форма тела	Моменты инерции
<p data-bbox="257 199 380 231">Полудиск</p>  <p data-bbox="291 383 369 406">m, R, d</p>	$J_x = mR^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \right) + \frac{1}{12} mb^2$ $J_y = \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{12} mb^2$ $J_z = mR^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right)$
<p data-bbox="291 454 347 486">Шар</p>  <p data-bbox="302 494 358 518">m, R</p>	$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} mR^2$

Литература к главе 2

1. А. Н. Матвеев. Механика и теория относительности. – М. Изд. дом «Оникс 21 век», 2003. – 432 с.
2. В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев. Механика. – М.: Изд. центр «Академия», 2004. – 480 с.
3. С. П. Стрелков. Механика. – СПб.: «Лань», 2005. – 560 с.
4. Д. В. Сивухин. Общий курс физики. В пяти томах. Т. 1. Механика. – М.: ФИЗМАТЛИТ / МФТИ, 2005. – 559 с.
5. В. С. Русаков, А. И. Слепков, Е. А. Никанорова, Н. И. Чистякова. Механика. Методика решения задач. Учебное пособие. М.: Физический факультет МГУ, 2010. – 368 с.
6. Митин И. В., Русаков В. С. Анализ и обработка экспериментальных данных. Учебно-методическое пособие для студентов младших курсов. – М.: МГУ. 2002.-44с.
7. Петкевич В.В. Теоретическая механика. М.: Наука, 1981.- 496с.
8. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. М.: МГУ. 1974. – 570с.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

3

- 
- Измерение скорости пули с помощью баллистического маятника
 - Крутильный баллистический маятник
 - Изучение движения маятника Максвелла
 - Измерение реактивной силы
 - Проверка закона сохранения момента количества движения

Введение

В классической механике все три закона сохранения – закон сохранения импульса, закон сохранения момента импульса, закон сохранения механической энергии являются теоремами, которые доказываются на основе трех законов Ньютона. Рассмотрим каждый из этих законов.

Для определенности введем понятия *изолированной* и *замкнутой* систем тел.

Замкнутой системой тел называется такая система тел, для которой сумма всех внешних сил равна нулю.

Изолированной системой тел называется такая система тел, на которую вообще не действуют внешние силы.

Закон сохранения импульса. Рассмотрим систему взаимодействующих между собой материальных точек с массами m_i . В силу третьего закона Ньютона для сил взаимодействия двух материальных точек с номерами i и j можно записать $F_{ij} = -F_{ji}$. Пусть на систему действуют внешние силы. Тогда для материальной точки с номером i уравнение движения будет иметь вид

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = F_i + \sum F_{ij}. \quad (3.1)$$

Просуммируем эти уравнения по i и учтем, что $F_{ij} = -F_{ji}$. В результате получим

$$\sum m_i \frac{dv_i}{dt} = \sum F_i. \quad (3.2)$$

В том случае, когда система тел является замкнутой $\sum F_i = 0$

$$\sum m_i \frac{dv_i}{dt} = 0$$

или

$$\sum m_i v_i = \text{const}, \quad (3.3)$$

соотношение (3.3) выражает **закон сохранения импульса** системы материальных точек:

суммарный импульс замкнутой системы тел сохраняется неизменным.

Закон сохранения момента импульса. Обозначим момент импульса системы материальных точек относительно некоторой точки O через L , радиус-вектор i -й материальной точки r_i .

Аналогично тому, как это было сделано выше возьмем за ос-

нову уравнение движения произвольной материальной точки (3.1)

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{F}_i + \sum \mathbf{F}_{ij}. \quad (3.4)$$

Умножим левую и правую части векторно на \mathbf{r}_i и просуммируем по i . Учítывая, что

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = 0,$$

получим

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i. \quad (3.5)$$

Воспользуемся равенством

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{v}_i + \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}. \quad (3.6)$$

Первый член правой части (3.6) равен нулю, так как $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i$.

Следовательно,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{v}}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M},$$

где

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i. \quad (3.7)$$

\mathbf{M} – момент внешних сил относительно точки O

В результате получаем закон изменения момента импульса

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}. \quad (3.8)$$

В том случае, когда момент внешних сил равен нулю,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$$

или

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \text{const}. \quad (3.9)$$

Таким образом, получили *закон сохранения момента импульса: Суммарный момент импульса системы тел относительно некоторой точки пространства сохраняется неизменным, если суммарный момент всех внешних сил относительно этой же точки равен нулю.*

Рассмотрим случай, в котором система материальных точек вращается вокруг закрепленной оси, например совпадающей с

осью z : $\boldsymbol{\omega} = \{0, 0, \omega\}$. В этом случае можно записать:

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)) = \sum m_i r_i^2 \boldsymbol{\omega}, \quad (3.10)$$

т.е.

$$\mathbf{L} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \quad (3.11)$$

где $J = \sum m_i r_i^2$ – момент инерции системы материальных точек.

Закон сохранения механической энергии. Если на материальную точку, имеющую массу m , в каждой точке пространства действует сила; которая может быть представлена в виде градиента от некоторой функции $U(x, y, z)$

$$\mathbf{F} = -\text{grad}U, \quad (3.12)$$

то наряду с кинетической энергией $mv^2/2$ можно ввести потенциальную энергию U , при этом будет сохраняться полная энергия $E = mv^2/2 + U$. Для доказательства этого утверждения рассмотрим уравнение движения этой материальной точки (второй закон Ньютона).

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\text{grad}U(r). \quad (3.13)$$

Умножим левую и правую части уравнения (3.13) на $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ и проинтегрируем. Учитывая, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \ddot{\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{v}} \mathbf{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) dt = \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \quad (3.14)$$

и

$$\int_{r_1}^{r_2} \text{grad}U d\mathbf{r} = \int_{U(r_1)}^{U(r_2)} dU = U(r_2) - U(r_1), \quad (3.15)$$

получим:

$$\frac{mv_2^2}{2} + U(r_2) = \frac{mv_1^2}{2} + U(r_1). \quad (3.16)$$

Соотношение (3.16) выражает закон сохранения механической энергии для рассматриваемого случая. Условием потенциальности поля сил, т.е. условием выполнения (3.12), является обращение в ноль работы по замкнутому пути. Сама потенциальная функция $U(r)$ определяется полем сил с точностью до константы. Эта константа может быть определена, если задать значение U в некоторой точке поля.

Простейшим примером потенциального поля является поле

сил тяжести вблизи поверхности Земли. В этом случае во всех достаточно близких точках сила тяжести, действующая на данное тело, имеет одно и то же значение и направление, которое принимается за вертикаль. Если определить ось OZ по вертикали вверх, то в качестве потенциальной функции можно взять:

$$U(z) = mgz. \quad (3.17)$$

В этом случае получим:

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = -mg. \quad (3.18)$$

Заменить твердое тело материальной точкой можно лишь в случае поступательного движения. Если тело вращается вокруг оси, проходящей через тело, или расположенной вблизи тела, то отдельные элементы тела при этом будут иметь различные скорости и различные перемещения.

В качестве примера подобной ситуации рассмотрим твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. Начало координат выберем на оси вращения тела. Ось OY направим вдоль оси вращения, радиус-вектор i -го элемента обозначим через r_i , при этом $r_i = d_i + \rho_i$, где d_i – вектор параллельный оси, а ρ_i – перпендикулярен оси. Будем предполагать, что на i – элемент этого тела помимо силы тяжести, равной $\Delta m_i g$ ($g = \{0, 0, -g\}$) действует сила F_i , направленная по прямой, соединяющей эту точку с осью. Кроме того, предположим, что между i -м и j -м элементами действует сила взаимодействия F_{ij} , причем $F_{ij} = -F_{ji}$ и $F_{ij} \uparrow \uparrow (r_i - r_j)$, т.е. сила взаимодействия (внутренняя сила). Рассмотрим уравнение движения i – го элемента

$$\Delta m_i \dot{v}_i = \Delta m_i g + F_i + \sum_j F_{ij}. \quad (3.19)$$

Умножим левую и правую части на $dr_i = v_i dt$. При этом получим $\dot{v}_i v_i dt = d(v_i^2/2)$, $g dr_i = -g dz_i$, $F_i dr_i = 0$, так как $F_i \perp dr_i$. После суммирования по всем элементам появятся пары

$$F_{ij} dr_i + F_{ji} dr_j = F_{ij} (\omega \times (r_i - r_j)) = \omega ((r_i - r_j) \times F_{ij}) = 0.$$

Таким образом, после интегрирования по dr_i и суммирования отдельных уравнений (3.19) получим:

$$\sum \Delta m_i \frac{v_i^2}{2} + \sum \Delta m_i g z_i = const. \quad (3.20)$$

Выразим скорость v_i через вектор угловой скорости $\omega = (0, \omega, 0)$ и

радиус-вектор $\mathbf{r}_i : v_i = \omega \times r_i = \omega \times \rho_i$. Учитывая, что $\boldsymbol{\omega} \perp \boldsymbol{\rho}$, получим $v_i^2 = \omega_i \rho_i^2$. Таким образом,

$$\sum \Delta m_i \frac{v_i^2}{2} = \frac{1}{2} J \omega^2, \quad (3.21)$$

где $J = \sum \Delta m_i \rho_i^2$ представляет момент инерции тела относительно рассматриваемой оси.

Второй член (3.20) возможно преобразовать, вводя координаты центра масс

$$x_c = \frac{\sum \Delta m_i x_i}{\sum \Delta m_i}, y_c = \frac{\sum \Delta m_i y_i}{\sum \Delta m_i}, z_c = \frac{\sum \Delta m_i z_i}{\sum \Delta m_i}. \quad (3.22)$$

При этом получим закон сохранения механической энергии в виде

$$\frac{1}{2} J \omega^2 + mgz_c = const, \quad (m = \sum \Delta m_i). \quad (3.23)$$

В качестве другого примера рассмотрим упругую силу, возникающую при смещении x из положения равновесия ($z = const, y = const$)

$$F = -kx. \quad (3.24)$$

В качестве потенциальной энергии следует взять работу упругих сил с обратным знаком

$$U(x) = -\int_0^x F dx = k \frac{x^2}{2}. \quad (3.25)$$

Закон сохранения механической энергии в этом случае будет иметь вид

$$m \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2} kx^2 = const. \quad (3.26)$$

Лабораторная работа 3.1

ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ПОЛЕНТА ПУЛИ С ПОМОЩЬЮ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Цель работы

Использование законов сохранения импульса, момента импульса и механической энергии для решения практических задач механики.

Идея эксперимента

Использовании абсолютно неупругого удара пули и тела баллистического маятника для определения скорости пули.

Теоретическое введение

Принципиальная схема баллистического маятника показана на рис. 3.1. Будем предполагать, что движение пули и тела маятника происходит в одной (вертикальной) плоскости. Точкой O обозначена горизонтальная ось, вокруг которой происходит движение маятника. Точка C – центр масс тела маятника, имеющего цилиндрическую форму. Для простоты рассмотрения будем считать, что пуля застревает в теле маятника таким образом, что ее центр масс находится на прямой OC . Размерами пули будем пренебрегать. Существенной особенностью баллистического маятника является то, что время действия силы со стороны пули на маятник (время удара) мало по сравнению с периодом колебания маятника. Такие кратковременные силы, имеющие конечный импульс силы, называются ударными силами, а процесс взаимодействия пули и маятника – ударным процессом. Ударный характер взаимодействия приводит к тому, что к концу удара маятник, приобретя некоторую скорость,

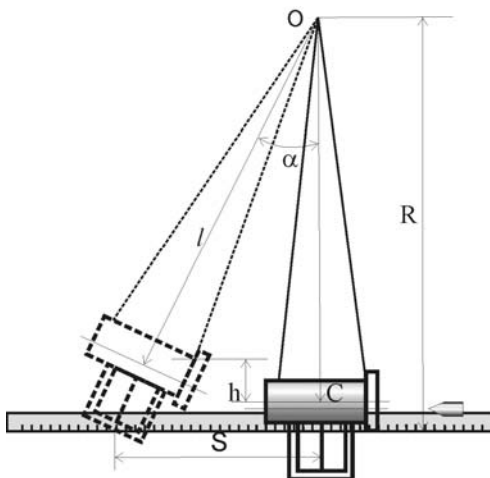


Рис. 3.1. Устройство баллистического маятника.

практически не успевает отклониться на какую-либо заметную величину.

При малых временах соударения ударные силы достигают больших значений, так как за малое время действия изменяют импульс тела на заметную величину. Если за время удара на нити не действуют такие большие ударные силы, то для анализа движения цилиндра сразу после удара достаточно учесть лишь силу, действующую со стороны пули. Движение цилиндра при этом можно будет представить, как вращение вокруг мгновенной оси. Но для того, чтобы не возникали ударные силы натяжения нити, необходимо, чтобы такое движение не приводило к изменению длины нитей. А это означает, что мгновенная ось должна совпадать с осью вращения маятника (точка O , рис. 3.1). Точку пересечения линии действия ударной силы с прямой OC в этом случае называют центром удара, а сам удар – центральным ударом.

В случае центрального удара натяжения нитей в процессе соударения меняются, так как возникают центростремительные ускорения элементов цилиндра. Однако эти изменения натяжений имеют конечные значения при стремлении времени удара к нулю, поэтому их в процессе соударения можно не учитывать. Если же удар не центральный, то возникают такие ударные натяжения, которые необходимо учитывать при соударении. При этом помимо основного движения возникают высокочастотные колебания, которые довольно быстро затухают.

Обозначим расстояние от точки O до центра масс C через l_C , а расстояние от точки O до центра удара – через l . Пуля пролетает вдоль оси цилиндра, попадает в его торец и застревает в пластине. Силу, действующую со стороны пули на цилиндр, обозначим через F , момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно вертикальной плоскости симметрии, – через J_0 , скорость центра масс цилиндра обозначим через v_C , а угловую скорость цилиндра – через Ω . Пусть удар начинается в момент $t = 0$ и заканчивается в момент $t = \tau$. Учитывая лишь ударную силу F , получим изменение импульса и момента импульса цилиндра относительно оси, проходящей через его центр масс.

$$Mv_C = \int_0^{\tau} F(t)dt, \quad (3.1.1)$$

$$J_0 \Omega = (l - l_C) \int_0^{\tau} F(t) dt . \quad (3.1.2)$$

В случае центрального удара мгновенная ось совпадает с осью вращения маятника, поэтому момент импульса сил натяжения нитей относительно этой оси равен нулю и, кроме того, выполняется следующая кинематическая связь

$$v_C = l_C \Omega . \quad (3.1.3)$$

Разделив соотношение (3.1.2) на (3.1.1) и, учитывая (3.1.3), получим

$$l - l_C = \frac{J_0}{M l_C} . \quad (3.1.4)$$

Соотношение (3.1.4) определяет положение центра удара. Он расположен на расстоянии l от оси O , т. е. несколько ниже центра масс C .

Рассмотрим изменение импульса пули в результате ее соударения с цилиндром. Обозначим силу, действующую со стороны цилиндра на пулю, через F' , а скорость пули сразу после удара через v' . Изменение импульса будет определяться импульсом силы

$$m v' - m v = \int_0^{\tau} F'(t) dt . \quad (3.1.5)$$

Учитывая третий закон Ньютона ($F' = -F$), а также соотношения (3.1.1) и (3.1.5) получим

$$m v = M v_C + m v' . \quad (3.1.6)$$

Поскольку удар является абсолютно неупругим, то $v' = v_C$. Соотношение (3.1.6) имеет вид закона сохранения импульса, к которому мы пришли, так как не учитывали действия всех сил, кроме сил F и F' .

В соответствии с теоремой Гюйгенса-Штейнера момент инерции цилиндра J относительно оси O равен

$$J = J_0 + M \cdot l_C^2 . \quad (3.1.7)$$

Используя соотношения (3.1.1), (3.1.2) и (3.1.7), легко показать, что

$$J = M \cdot l \cdot l_C . \quad (3.1.8)$$

Соотношению (3.1.6) можно придать вид закона сохранения момента импульса. Для этого умножим левую и правую его части на l , учтем кинематическую связь (3.1.3) для скорости цилиндра и

соответствующую кинематическую связь для скорости пули $v_C = l\Omega$:

$$\begin{aligned} mvl &= (Mv_C + mv')l = Mv_C l + mv_C l = (Ml_C l + ml^2)\Omega = \\ &= (J + ml^2)\Omega. \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Заметим, что если бы вместо нитей были жесткие тонкие невесомые стержни с осью в точке O , то соотношение (3.1.9) выполнялось бы и для нецентрального удара. Но в случае нецентрального удара возникали бы ударные силы, действующие на стержни и, в конечном счете, на ось. Соотношение (3.1.9), разделив его на l , можно также записать в следующем виде

$$mv = (Ml_C + ml)\Omega. \quad (3.1.10)$$

После завершения удара баллистический маятник будет совершать колебания. При этом максимальное отклонение от положения равновесия пусть будет определяться углом α . Если можно пренебречь потерями энергии за четверть периода, то потенциальная энергия маятника в момент остановки будет равна кинетической энергии маятника сразу после удара:

$$\frac{1}{2}(J + ml^2)\Omega^2 = Mh_C g + mhg, \quad (3.1.11)$$

где h_C равно изменению высоты центра масс цилиндра при отклонении маятника на угол α , то есть.

$$h_C = l_C(1 - \cos \alpha) = l_C 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (3.1.12)$$

Аналогичная формула получается для изменения высоты центра масс пули h .

Запишем уравнение движения маятника с пулей после отклонения его от положения равновесия после удара:

$$(J + ml^2)\ddot{\alpha} = -(Ml_C + ml)g\alpha. \quad (3.1.13)$$

Из (3.1.13) получим соотношение, связывающее циклическую частоту ω_0 гармонических колебаний баллистического маятника, а значит и период малых колебаний T с моментом инерции маятника с пулей $J + ml^2$ относительно оси O :

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{(Ml_C + ml)g}{J + ml^2}. \quad (3.1.14)$$

Выразим величину $J + ml^2$ из (3.1.14) через период T :

$$J + ml^2 = \frac{(Ml_C + ml)g}{4\pi^2} T^2. \quad (3.1.15)$$

Подставив полученное выражение в (3.1.11), с учетом (3.1.12) получим:

$$\frac{\Omega^2}{2} = \frac{(Ml_C + ml)g}{J + ml^2} 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{4\pi^2}{T^2} 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (3.1.16)$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} 2 \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (3.1.17)$$

При малых отклонениях $2 \sin \frac{\alpha}{2} \approx \alpha$ и (3.1.17) переходит в соотношение, связывающее амплитудные значения угловой скорости Ω и отклонения α .

Используя соотношения (3.1.10) и (3.1.17), получим выражение для скорости пули:

$$v = \frac{Ml_C + ml}{m} \Omega = \frac{Ml_C + ml}{m} \frac{2\pi}{T} 2 \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (3.1.18)$$

Если $J_0 \ll Ml_C^2$, т. е. размеры цилиндра малы по сравнению с длиной нити, то $J \approx Ml_C^2$. При этом различием между l_C и l в (3.1.14) можно пренебречь. Вместо (3.1.14) в таком случае получим

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{(Ml_C + ml)g}{J + ml^2} \approx \frac{(Ml_C + ml_C)g}{Ml_C^2 + ml_C^2} = \frac{g}{l_C}. \quad (3.1.19)$$

Из (3.1.18) с учетом (3.1.19), пренебрегая различием между l_C и l , получим

$$v = \frac{M + m}{m} \sqrt{l_C g} 2 \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (3.1.20)$$

Формула (3.1.20) является окончательной формулой, которая используется в данной работе для определения скорости пули.

Экспериментальная установка

Установка для определения скорости пули состоит из *баллистического маятника 1, шкалы 2* для отсчета отклонений маятника, *пружинной пушки 3, набора пуль 4* (рис. 3.2). Баллистический маятник представляет собой цилиндр, частично заполненный пластилином и подвешенный в горизонтальном положении на длинных и *легких нитях 5* (рис. 3.2). Масса цилиндра с пластилином равна M . В маятник в горизонтальном направлении стреляют из

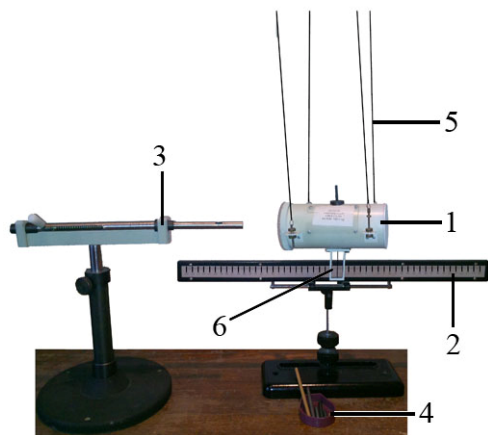


Рис. 3.2. Экспериментальная установка.

пружиной пушки 3 пулей, имеющей массу t и скорость v . Пуля входит в цилиндр и сообщает маятнику некоторую скорость, в результате чего маятник отклоняется в процессе колебания на некоторый угол, который может быть измерен.

Шкалу 2, предназначенную для определения отклонения маятника, устанавливают параллельно отсчетной рамке 6 маятника на расстоянии примерно 5-6 мм от нее. Угол

отклонения маятника α определяется по смещению S нити отсчетной рамки в горизонтальном направлении (рис. 3.1), исходя из условия

$$\alpha = \arctg\left(\frac{S}{R}\right), \quad (3.1.21)$$

где R – расстояние от оси маятника до горизонтальной линии шкалы, вдоль которой измеряется смещение нити рамки. При малых углах можно считать, что $\alpha = S/R$.

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Определение скорости пули.

Прежде всего, необходимо убедиться в том, что ось цилиндра в положении равновесия горизонтальна, а вертикальная плоскость, проходящая через ось цилиндра, является плоскостью симметрии. Если эти условия не выполнены, то необходимо подрегулировать длину нитей.

Для того чтобы подготовить пистолет к выстрелу, отводят затвор в крайнее положение. Вставляют пулю в дуло пистолета и задвигают ее шомполом до конца. Убедившись в том, что пуля, вылетевшая из пистолета, может попасть лишь в маятник, производят выстрел. Для этого курок отводят вертикально вниз. Отклонения маятника определяют по шкале.

Измерения

1. Производят взвешивание пуль. Результаты заносят в табл. 3.1.

2. Производят выстрелы последовательно с каждой из пяти пуль. Результаты отсчета отклонений маятника записывают в таблицу. Для каждой пули производит не менее пяти выстрелов и соответственно этому не менее пяти отсчетов отклонения маятника.

Таблица 3.1.

Экспериментальные данные

№ пули	№ эксперимента	S	$\langle S \rangle, \sigma_S$	α, σ_α	v, σ_v
1, $m=$	1				
	2				
	3				
	...				
.....					

Обработка результатов

1. Провести вычисление средних значений отклонений маятника $\langle S \rangle$

$$\langle S \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i . \quad (3.1.22)$$

2. Провести оценку выборочного стандартного отклонения среднего арифметического величины S :

$$S_S = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (S_i - \langle S \rangle)^2} . \quad (3.1.23)$$

С учетом систематических погрешностей (погрешность прибора, погрешность округления) величина стандартного отклонения суммарной погрешности величины S вычисляется следующим образом:

$$\sigma_S = \sqrt{S_S^2 + \sigma_{S \text{ сист.}}^2} . \quad (3.1.24)$$

3. По формуле (3.1.21) для каждой пули найти величину угла отклонения маятника α . Учитывая, что основной вклад в величину стандартного отклонения α обусловлен погрешностью в определении S , рассчитать стандартные отклонения величины α :

$$\sigma_{\alpha} = \sqrt{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial S}\right)_{<S>}^2} \cdot \sigma_S^2. \quad (25)$$

Полученные данные заносят в табл. 3.1.

4. По формуле (3.1.20) находят значение скорости каждой из пуль и рассчитывают стандартное отклонение по формуле:

$$\sigma_v = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)_{<\alpha>}^2} \cdot \sigma_{\alpha}^2. \quad (3.1.26)$$

Упражнение 2. Оценка потенциальной энергии сжатых пружин и исследование зависимости скорости пули от ее массы.

Формула (3.1.20), полученная для расчета скорости пули, не определяет явную зависимость скорости пули от ее массы, поскольку угол отклонения маятника также зависит от массы пули. Пуля приобретает скорость в результате выстрела из пистолета. При этом потенциальная энергия сжатых пружин переходит в кинетическую энергию пули, пружин и бойка. Если пренебречь потерями энергии в результате действия силы трения, то можно записать закон сохранения механической энергии:

$$\frac{k\Delta l^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \alpha \frac{Mv^2}{2}, \quad (3.1.27)$$

где M – масса пружин и бойка, α – коэффициент, определяемый способом крепления и характером движения пружин и бойка, $\alpha < 1$. Для однородной пружины, например, $\alpha = 1/3$. Преобразуем формулу (3.1.27) к следующему виду

$$\frac{1}{v^2} = \frac{m}{k\Delta l^2} + \alpha \frac{M}{k\Delta l^2}. \quad (3.1.28)$$

Как видно из (3.1.28), зависимость величины $\frac{1}{v^2}$ от массы пули m должна быть линейной. Причем тангенс угла наклона графика функции $f = \frac{1}{v^2}$ от m равен $a = \frac{1}{k\Delta l^2}$. Тогда потенциальная энергия пружин

$$E_{\text{пот}} = \frac{k\Delta l^2}{2} = \frac{1}{2a}. \quad (3.1.29)$$

В данном упражнении осуществляется обработка результатов эксперимента, полученных в упражнении 1.

1. Провести оценку величины $f = \frac{1}{\langle v \rangle^2}$ для каждой из пуль,

используя данные табл. 3.1.

2. Рассчитать стандартное отклонение величины f по формуле:

$$\sigma_f = \frac{2f}{\langle v \rangle} \cdot \sigma_v. \quad (3.1.30)$$

3. Методом наименьших квадратов определить a – тангенс угла наклона графика функции $f(m)$.

4. Оценить с помощью метода наименьших квадратов стандартное отклонение погрешности величины a .

5. Рассчитать величину потенциальной энергии пружин $E_{\text{пот}}$ по формуле (3.1.29) и оценить стандартное отклонение погрешности $E_{\text{пот}}$.

$$\sigma_v = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \right)_{\langle \alpha \rangle}^2} \cdot \sigma_\alpha^2$$

Основные итоги работы

В результате выполнения работы должны быть определены скорости пуль (не менее пяти) разной массы.

Контрольные вопросы.

1. Сформулируйте закон сохранения импульса.
2. Дайте определение момента импульса относительно точки.
3. Сформулируйте закон сохранения момента импульса.
4. Сформулируйте закон сохранения механической энергии.
5. Что такое центр удара.
6. Определите положение центра удара в предположении, что тело маятника представляет собой сплошной цилиндр, масса которого в 100 раз больше массы пули.

Лабораторная работа 3.2 **КРУТИЛЬНЫЙ БАЛЛИСТИЧЕСКИЙ МАЯТНИК**

Цель работы

Демонстрация эффективности использования законов сохранения механической энергии и момента импульса для решения практических задач механики.

Идея эксперимента

Использование свойств абсолютно неупругого удара пули и тела крутильного баллистического маятника для определения скорости пули.

Теоретическое введение

Принципиальная схема крутильного баллистического маятника показана на рис. 3.3. После попадания пули в маятник он начинает колебаться вокруг своей вертикальной оси. Если пренебречь моментом сил трения при движении маятника, то можно воспользоваться двумя законами сохранения.

На основании закона сохранения момента количества движения, считая удар абсолютно неупругим, можно записать уравнение, выражающее равенство моментов до удара и после:

$$mvl = (J_1 + ml^2)\omega, \quad (3.2.1)$$

где m – масса пули, v – ее скорость, l – расстояние от оси вращения маятника до точки удара пули, ω – угловая скорость маятника, J_1 – момент инерции маятника.

Закон сохранения механической энергии (после удара) дает

$$\frac{1}{2}(J_1 + ml^2)\omega^2 = \frac{1}{2}D\varphi^2, \quad (3.2.2)$$

где φ – наибольший угол поворота маятника, D – модуль кручения. Из этих уравнений получаем

$$v^2 = \frac{D\varphi^2}{m^2l^2}(J_1 + ml^2). \quad (3.2.3)$$

Так как момент инерции пули ml^2 во много раз меньше J_1 , то уравнение (3.2.3) может быть написано в виде:

$$v^2 = \frac{D\varphi^2}{m^2l^2}J_1. \quad (3.2.4)$$

Будем считать, что:

1) $\tau \ll T$, т.е. время воздействия пули на маятник во много раз меньше периода колебаний маятника (баллистический маятник);

2) $\sin \alpha \approx \alpha$, т.е. угол отклонения маятника мал – не более $5-6^\circ$.

При таких условиях уравнение движения баллистического маятника может быть записано в виде:

$$J_1 \ddot{\alpha} = -D\alpha,$$

где φ – угол поворота маятника, $\ddot{\alpha}$ – угловое ускорение. Решение этого уравнения приводит к выражению для периода колебаний:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{D}}. \quad (3.2.5)$$

Для исключения величины D можно поступить следующим образом. Изменим момент инерции маятника, изменив расстояние между грузами. Тогда

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{D}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_2}{D}}, \quad (3.2.6)$$

$$J_1 - J_2 = \Delta J, \quad (3.2.7)$$

где T_2 – период колебаний при новом значении момента инерции J_2 , ΔJ – разность моментов инерции.

Уравнения (3.2.6) дают

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{T_1^2}{T_2^2}. \quad (3.2.8)$$

Из уравнений (3.2.7) и (3.2.8) получаем

$$J_1 = \frac{T_1^2}{T_1^2 - T_2^2} \Delta J. \quad (3.2.9)$$

Уравнения (3.2.4), (3.2.5) и (3.2.9) дают

$$v = \frac{2\pi\varphi}{ml} \frac{T_1}{T_1^2 - T_2^2} \Delta J. \quad (3.2.10)$$

Величину можно ΔJ определить, пользуясь теоремой Гюйгенса—Штейнера. Из этой теоремы следует, что

$$J_1 = J_0 + 2MR_1^2, \quad (3.2.11)$$

$$J_2 = J_0 + 2MR_2^2, \quad (3.2.12)$$

где J_0 – момент инерции маятника, когда центры тяжести грузов совпадают с осью вращения маятника, J_1 – момент инерции, когда оба груза находятся на расстоянии R_1 от оси вращения, J_2 – момент инерции, когда оба груза находятся на расстоянии R_2 от оси вращения, M – масса одного груза.

Пусть $R_1 > R_2$, тогда из уравнений (3.2.11) и (3.2.12) получаем

$$\Delta J = 2M(R_1^2 - R_2^2). \quad (3.2.13)$$

Теперь уравнения (3.2.10) и (3.2.13) окончательно дают формулу для вычисления скорости пули:

$$v = \frac{4\pi\varphi M}{ml} \frac{T_1}{T_1^2 - T_2^2} (R_1^2 - R_2^2). \quad (3.2.14)$$

Экспериментальная установка

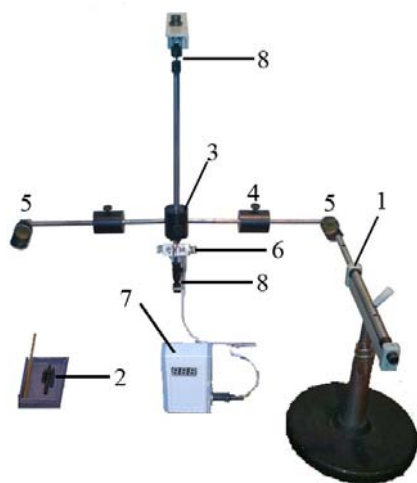


Рис. 3.3. Экспериментальная установка.

Установка состоит из крутильного маятника, *пружинного пистолета 1* и *набора пуль 2*. Крутильный маятник (рис. 3.3) собран из двух массивных металлических стержней, скрепленных *муфтой 3*.

По горизонтальным стержням могут перемещаться два металлических *цилиндра 4* (груза). Вблизи концов стержня в разных местах могут закрепляться *чашечки 5*, наполненные пластилином.

Для измерения угла поворота маятника на его вертикальном стержне укреплен *датчик поворота (датчик Холла) 6*, который соединен с *вольтметром 7*. Принцип работы датчика поворота описан ниже. Разность показаний вольтметра определяет угол поворота φ с помощью градуировочного графика. Маятник укреплен на кронштейне при помощи *провода 8*, деформация которой создает момент уп-

ругих сил. Массы металлических цилиндров (M) приведены на установке.

Пистолет представляет собой металлическую трубку-ствол, укрепленную на массивном основании. В закрытом конце этой трубки имеется пружина. Пружина сжимается, пуля загоняется в ствол. После освобождения пружины пуля выбрасывается.

Основной датчика угла является датчик Холла со встроенным усилителем SS495. Для работы этой микросхемы необходимо питание 5 В. В этом случае на выходе датчика оказывается напряжение, пропорциональное внешнему магнитному полю, смещенному на 2.5 В относительно нуля. То есть, при наличии нулевого внешнего магнитного поля микросхема выдает напряжение 2.5 В. Выход микросхемы соединен с входом АЦП.

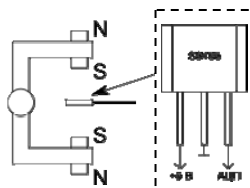


Рис. 3.4. Принципиальная схема датчика.

Для того чтобы, магнитное поле, проходящее через микросхему имело зависимость от угла поворота маятника, на нем закреплены два магнита одноименными полюсами друг к другу. В начальный момент расстояние от магнитов до микросхемы равны. Поэтому (в силу симметрии) магнитное поле в точке установки датчика равно нулю. При повороте маятника один из магнитов приближается к микросхеме, а другой – отдаляется. Таким образом, магнитное поле, пронизывающее датчик, становится отличным от нуля, а его направление зависит от направления поворота маятника.

Для регистрации максимального отклонения в вольтметре стоит система, запоминающая максимальное значение входного напряжения на несколько секунд. Эта система автоматически сбрасывает максимальное значение, поэтому не требует дополнительных органов управления. Алгоритм работы состоит в следующем. В начальный момент времени выходное значение совпадает с входным, а счетчик времени установлен в ΔT . После этого, если входное значение превышает выходное, выходное значение увеличивается до входного, а счетчик времени сбрасывается в начальное состояние ΔT . Если же входное напряжение не превышает выходное, то счетчик времени уменьшается на величину прошедшего времени. В случае, если счетчик времени обнулится, выходное

значение уменьшается до входного, а счетчик времени сбрасывается в начальное состояние ΔT .

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Измерение периодов колебания крутильного баллистического маятника при различных значениях его момента инерции.

Для определения скорости пули необходимо измерить периоды T_1 и T_2 колебаний маятника для двух положений цилиндров, соответствующих расстояниям R_1 и R_2 от оси вращения, расстояния l , а также отклонения φ , соответствующие максимальному значению угла отклонения.

При проведении эксперимента устанавливают правильное расположение маятника и пистолета так, чтобы:

1) ось ствола пистолета была перпендикулярна к оси горизонтального стержня маятника; ось ствола и ось стержня были в одной горизонтальной плоскости;

2) конец ствола пистолета был на расстоянии 2-3 см от поверхности пластилина в чашечке. Это достигается расположением пистолета, свободно перемещаемого по столу.

Измерения

1. Работу начинают с того, что оба цилиндра раздвигают вдоль стержня так, чтобы они касались колец. Измеряют величины R_1 и l (расстояние между осью маятника и серединой одной из чашечек с пластилином).

Результаты измерений необходимо занести в табл. 3.2.

2. После этого производят «выстрел», пистолет отодвигают в сторону и измеряют разность между начальным и конечным значением вольтметра. Далее с помощью градуировочного графика определяют отклонение φ и заносят данные в табл. 3.2.

3. Для измерения периода колебаний T_1 , не останавливая маятника, включают секундомер. Через десять полных колебаний (периодов) секундомер останавливают, определяют значение одного периода.

Таблица 3.2.

Экспериментальные данные

№ опыта i	R_1 σ_{R_1}	T_1	$\langle T_1 \rangle$ σ_{T_1}	φ_1	$\langle \varphi_1 \rangle$ σ_{φ_1}	R_2 σ_{R_2}	T_2	$\langle T_2 \rangle$ σ_{T_2}	φ_2	$\langle \varphi_2 \rangle$ σ_{φ_2}
1										
2										
3										
4										
5										
l, σ_l										
m, σ_m										

4. Уменьшив момент инерции маятника (придвинув цилиндры вплотную к муфте), измеряют R_2 – расстояние между осью вращения маятника и серединой одного из цилиндров.

5. Для измерения периода колебаний T_2 снова производят «выстрел». Определение величины периода T_2 производится так же, как и величины периода T_1 .

Все измерения проводятся не менее пяти раз.

6. Пункты 1-5 повторяют для трех пуль различной массы.

Обработка результатов

1. Провести вычисление средних значений $\langle T_j \rangle$ и $\langle \varphi_j \rangle$ ($j = 1, 2$) по формулам:

$$\langle T_j \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_{ij},$$

$$\langle \varphi_j \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi_{ij}.$$

Результаты вычислений занести в табл. 3.2.

2. Провести оценку ошибок измеренных величин. В качестве оценки случайной погрешности среднего значения принимается выборочное стандартное отклонение среднего арифметического:

$$S_{T_j} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (T_{ij} - \langle T_j \rangle)^2},$$

$$S_{\varphi_j} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (\varphi_{ij} - \langle \varphi_{ij} \rangle)^2}.$$

С учетом систематических погрешностей (погрешность прибора, погрешность округления и др.) величина стандартного отклонения суммарной погрешности физических величин T_j и φ_j вычисляется следующим образом:

$$\sigma_{T_j} = \sqrt{S_{T_j}^2 + \sigma_{T_j \text{ сист.}}^2},$$

$$\sigma_{\varphi_j} = \sqrt{S_{\varphi_j}^2 + \sigma_{\varphi_j \text{ сист.}}^2},$$

где S – выборочное стандартное отклонение среднего арифметического, $\sigma_{\text{сист.}}$ – оценка суммарной систематической погрешности.

Полученные оценки стандартных отклонений σ величин T_j и φ_j также заносятся в табл. 3.2.

Упражнение 2. Определение скорости пули.

В связи с тем, что для расчета скорости пули используются данные, полученные в *упражнении 1*, в данном упражнении осуществляется лишь обработка результатов эксперимента.

1. Определить скорости пули при двух различных положениях грузов на оси маятника, соответствующих различным значениям моментов инерции маятника, по формулам:

$$v_j = \frac{4\pi\varphi_j M}{ml} \frac{T_j}{T_1^2 - T_2^2} (R_1^2 - R_2^2).$$

Массы пули (m) и цилиндров (M) известны.

2. Провести оценку погрешности полученных результатов по формуле:

$$\sigma_{v_j} = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial v_j}{\partial \varphi_j} \right)_{\langle T_j, R_j \rangle} \cdot \sigma_{\langle \varphi_j \rangle}^2 + \left(\frac{\partial v_j}{\partial T_1} \right)_{\langle T_2, R_j, \varphi_j \rangle} \cdot \sigma_{\langle T_1 \rangle}^2 + \left(\frac{\partial v_j}{\partial T_2} \right)_{\langle T_1, R_j, \varphi_j \rangle} \cdot \sigma_{\langle T_2 \rangle}^2 + \left(\frac{\partial v_j}{\partial R_1} \right)_{\langle T_j, R_2, \varphi_j \rangle} \cdot \sigma_{\langle R_1 \rangle}^2 + \left(\frac{\partial v_j}{\partial R_2} \right)_{\langle T_j, R_1, \varphi_j \rangle} \cdot \sigma_{\langle R_2 \rangle}^2}.$$

3. Провести сравнение экспериментально определенных значений скорости пули при двух различных положениях грузов на оси маятника (скорость пули не должна зависеть от положения грузов на оси маятника).

4. Определить среднее значение скорости пули и провести оценку погрешности полученных результатов. Результаты вычислений занести в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Результаты обработки экспериментальных данных

m	(v_1, σ_{v_1})	(v_2, σ_{v_2})	$(\langle v \rangle, \sigma_v)$

В задаче необходимо определить скорости пуль трех различных масс.

Упражнение 3. Оценка времени соударения пули.

Аналогично *упражнению 2*, в данном упражнении осуществляется лишь обработка результатов эксперимента.

Условием, при котором маятник можно рассматривать как баллистический, является малость времени соударения пули по сравнению с периодом колебаний маятника. Для оценки времени соударения τ можно измерить штангенциркулем глубину h проникновения пули в пластилин и определить время τ , воспользовавшись соотношением:

$$\tau = \frac{h}{\bar{v}},$$

где для оценки можно взять $\bar{v} = v/2$. Сравнение τ с T_1 и T_2 дает возможность убедиться в том, что маятник является баллистическим (то есть, $\tau \ll T_1$ и T_2).

Основные итоги работы

В результате выполнения работы должны быть определены скорости пуль (не менее трех) разной массы.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте закон сохранения импульса.
2. Сформулируйте закон сохранения момента импульса.
3. Сформулируйте закон сохранения механической энергии.
4. Что такое центр удара?
5. Определите положение центра удара в предположении, что тело маятника представляет собой сплошной цилиндр, масса которого в 100 раз больше массы пули.

Лабораторная работа 3.3

ИЗУЧЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА МАКСВЕЛЛА

Цель работы

Изучение законов динамики вращательного движения твердых тел на примере маятника Максвелла и измерение момента инерции осесимметричного твердого тела.

Идея эксперимента

В эксперименте используется маятник Максвелла – устройство, состоящее из оси, подвешенной на двух нерастяжимых нитях, с симметрично закрепленным на ней диском. Маятник способен совершать колебательные движения вверх-вниз, и при этом все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости, т.е. маятник Максвелла совершает плоское движение.

Теоретическое введение

Маятник Максвелла (см. рис. 3.5) состоит из тонкого металлического стержня – оси AB с симметрично укрепленным на ней диском C . К концам стержня прикреплены крепкая капроновая нить, пропущенная через два отверстия в планке DE , которая укреплена на массивном штативе. На середине планки имеется винт, которым нить закрепляется в нужном положении после уравнивания длин отрезков нити AD и BE . Нити тщательно, виток к витку, наматываются на стержень (от его концов к диску). Положение оси и расстояния, которые она проходит при движении маятника, измеряются по шкале K . После освобождения маятника он начинает движение из верхнего положения под действием силы тяжести: поступательное – вниз и вращательное – вокруг своей оси симметрии. Вращение, продолжаясь по инерции в низшей точке, когда нити уже размотаны, приводит вновь к наматыванию нитей на стержень, а, следовательно, и к подъему маятника. Затем движение маятника вверх замедляется, он останавливается, снова начинается движение вниз и

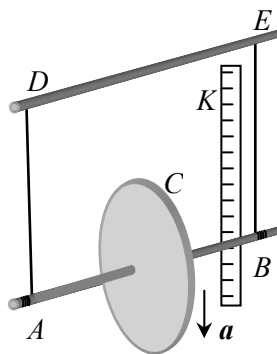


Рис. 3.5. Принципиальная схема маятника Максвелла.

т.д. Такой колебательный характер движения вверх-вниз напоминает движение маятника, и поэтому устройство называется маятником Максвелла.

Цикл движения маятника Максвелла может быть подразделен на три стадии, а именно: спуск, удар, поднятие вверх. Схематически графики изменения скорости и ускорения точек оси маятника при его движении имеют вид, изображенный на рис. 3.6 а, б.

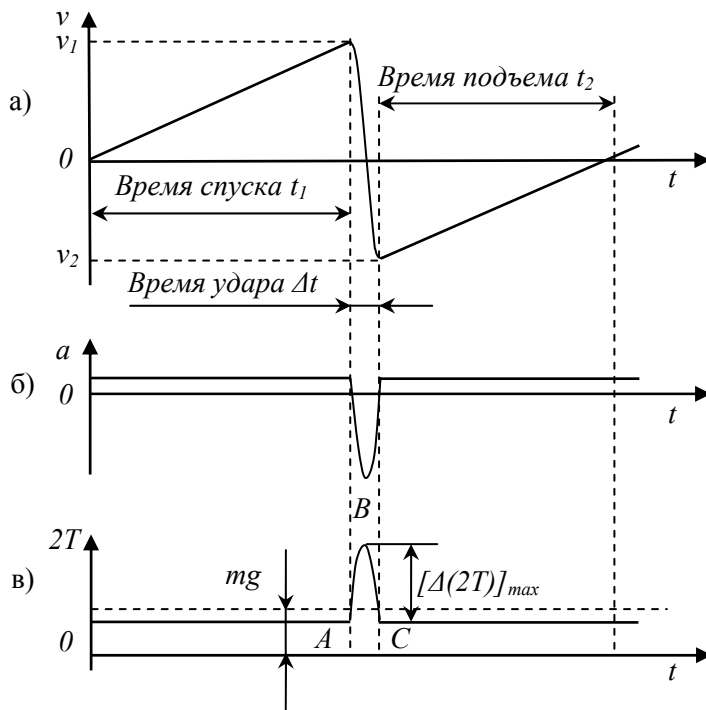


Рис. 3.6. Схематические зависимости скорости v (а) и ускорения a (б) точек оси маятника, а также силы натяжения нитей T (в) от времени движения маятника.

В соответствии с этим, силы, действующие на маятник, должны быть подразделены на силы длительного действия (при спуске и подъеме) и силы кратковременного действия (удар). В первом случае эти силы не изменяются во времени, во втором — они резко нарастают и убывают.

Отметим, что удар при опускании маятника отличается от удара, например, шарика о плиту. Кинетическая энергия падающего тела (шарика) на первой стадии удара исчезнет полностью, превращаясь в потенциальную энергию упругой деформации. При

ударе маятника этого нет, остается кинетическая энергия его вращения, которая гораздо больше, чем кинетическая энергия поступательного движения перед ударом.

Экспериментальное ознакомление с движением маятника Максвелла состоит в наблюдении плоского движения и удара. Получить полное аналитическое решение за весь цикл движения маятника не представляется возможным. В задаче стадии движения рассматриваются отдельно одна от другой, и используются предположения, которые упрощают рассмотрение вопроса. Естественно, это приводит к приближенным уравнениям, которые и применяются в экспериментальной части задачи.

Движение маятника Максвелла является примером плоского движения. Плоское движение любого твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости, может быть сведено к движению некоторой неизменяемой плоской фигуры в ее плоскости, складывающемся из поступательного движения какой-либо точки этой фигуры и вращения ее относительно этой точки. Если в кинематике это может быть любая точка тела, то и в динамике удобно пользоваться точкой, в которой находится центр масс тела. Это позволяет применять теорему о движении центра масс и уравнение моментов в его простейшем (обычном) виде.

Вначале проанализируем вопрос о расположении нитей при движении маятника. Поскольку движение происходит под действием силы тяжести и силы натяжения нитей, то устойчивое движение маятника (без раскачивания) возможно только, если нити находятся в вертикальной плоскости (рис. 3.7). При отклонении нитей от вертикальной плоскости у силы натяжения возникает горизонтальная составляющая, возвращающая маятник к положению, когда нити вертикальны, т.е. возникают колебания, период которых зависит от длины нитей. Это явление наблюдается во время подъема маятника, когда нити выходят из вертикальной плоскости (см. ниже). Перед отпусканием маятника в правильном исходном положении нити должны находиться в вертикальной плоскости, поэтому движение вниз происходит без колебаний (заметим, что при этом центр масс маятника находится не под точкой подвеса нитей!).

Итак, без учета силы сопротивления воздуха и отклонения нитей от вертикали при движении вверх (оно невелико), уравнения движения маятника Максвелла вниз и вверх одинаковы и имеют вид:

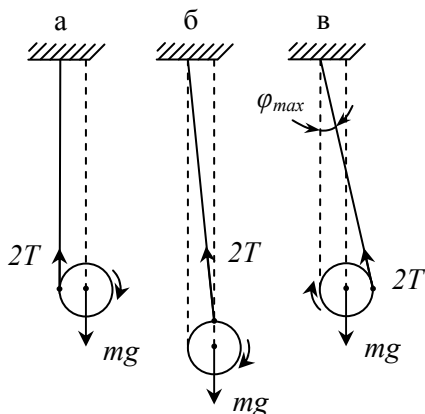


Рис. 3.7. Три последовательных положения оси маятника: в начале – (а), в середине – (б) и в конце – (в) удара.

начальные условия для них на разных стадиях различны. При опускании маятника начальная скорость его центра масс равна нулю, а при его подъеме она отлична от нуля. Решение системы уравнений (3.3.1) – (3.3.3):

$$a = \frac{g}{1 + J/mr^2}. \quad (3.3.4)$$

Поскольку момент инерции маятника можно представить в виде $J = KmR^2$, где R – радиус диска и безразмерный коэффициент $K \approx 1/2$, величина $J/mr^2 = K(R/r)^2$ (радиус диска R много больше радиуса стержня r) и ускорение маятника $a \ll g$, а сила натяжения нитей

$$2T = m(g - a) \quad (3.3.5)$$

близка к весу маятника mg . Так как при равноускоренном движении (I стадия)

$$a_1 = \frac{2h_1}{t_1^2}, \quad (3.3.6)$$

где t_1 – время опускания маятника, h_1 – расстояние, которое он проходит за это время, то для экспериментального определения момента инерции маятника из (3.3.4) и (6) получаем формулу:

$$J = mr^2(g/a - 1) = mr^2(gt_1^2/2h_1 - 1). \quad (3.3.7)$$

Для скорости опускания центра масс маятника непосредственно

$$ma = mg - 2T, \quad (3.3.1)$$

$$J\varepsilon = 2rT, \quad (3.3.2)$$

$$a = \varepsilon \cdot r, \quad (3.3.3)$$

где m – масса маятника, J – момент инерции маятника относительно его оси, r – радиус стержня маятника, T – сила натяжения одной нити, g – ускорение силы тяжести, a – ускорение поступательного движения центра масс маятника, ε – угловое ускорение маятника. Хотя эти уравнения применимы как к первой, так и к третьей стадии движения маятника, начальные условия для них на разных стадиях различны. При опускании маятника начальная скорость его центра масс равна нулю, а при его подъеме она отлична от нуля. Решение системы уравнений (3.3.1) – (3.3.3):

перед его ударом имеем

$$v_1 = at_1 = \frac{2h_1}{t_1}. \quad (3.3.8)$$

После удара при подъеме маятника вверх (III стадия) он движется равнозамедленно с ускорением a , направленным так же, как при его опускании вниз. Скорость движения центра масс маятника при подъеме определяется уравнением:

$$v = v_2 - at, \quad (3.3.9)$$

где v_2 – начальная скорость движения маятника вверх, t – время от начала этого движения. Появление этой скорости обусловлено продолжающимся по инерции вращением маятника в нижней точке его траектории. Наматывание при этом вращении нитей на стержень маятника и приводит к его подъему.

Если время подъема маятника до его остановки равно t_2 , то для величины начальной скорости имеем:

$$v_2 = at_2 = \frac{2h_2}{t_2}, \quad (3.3.10)$$

так как величина ускорения при подъеме маятника связана с расстоянием h_2 , которое проходит его ось до остановки, таким же соотношением, как и при спуске:

$$a_2 = \frac{2h_2}{t_2^2}. \quad (3.3.11)$$

Величины ускорений при спуске и подъеме должны быть одинаковы. Расстояние h_2 , которое проходит ось маятника при его подъеме, несколько меньше, чем при спуске (h_1). Разность этих высот характеризует убыль механической энергии маятника за один цикл его движения: $\Delta W = mg(h_1 - h_2)$. Убыль энергии связана, вообще говоря, как с неупругими процессами в нитях в момент удара, так и с потерями на трение при движении маятника. Поскольку сопротивление воздуха мало, можно считать, что энергия теряется в момент удара, и ее потеря равна убыли кинетической энергии маятника: $\Delta W_{\text{мех}} \approx \Delta W_{\text{уд}} = W_{\text{к1}} - W_{\text{к2}}$.

Кинетическая энергия маятника равна:

$$W_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Jv^2}{2r^2} = \frac{mv^2}{2} \left(1 + \frac{J}{mr^2}\right), \quad (3.3.12)$$

где $\omega = v/r$ – угловая скорость маятника. Поскольку $J/mr^2 \gg 1$, кинетическая энергия $mv^2/2$, связанная с поступательным движением, мала по сравнению с энергией вращательного движения $J\omega^2/2$. Это является главным отличительным признаком маятника Максвелла.

Характерной особенностью маятника Максвелла является малая потеря энергии при ударе: $\Delta W_{\text{уд}} \ll W_{\text{к}}$, т.е. близкий к единице коэффициент восстановления скорости $K_{\text{В}} = v_2/v_1$. Именно благодаря этому в данной системе можно наблюдать колебания, т.е. многократное повторение цикла движения вниз-вверх, а сама система называется «маятником».

Теперь рассмотрим удар в нижней точке движения маятника. Явление удара сопровождается, как уже упоминалось, резкими изменениями сил взаимодействия при очень малом времени этих изменений. Эти силы сначала нарастают, а затем убывают. Зависимость их от времени, как правило, неизвестна, и применение уравнений движения в явном виде становится невозможным.

В теории удара пользуются выражением для суммарного импульса силы:

$$S = \int_0^{\Delta t} F(t) dt = \Delta(mv) = m(v_2 - v_1), \quad (3.3.13)$$

где m – масса ударяющегося тела, v_2 и v_1 – его скорости до и после удара, $F(t)$ – сила, действующая на тело во время удара, Δt – длительность удара.

В нашем случае во время удара происходит резкое увеличение силы натяжения нитей $2T$. График изменения этой силы приведен на рис. 3.6 в. Поскольку скорость маятника при ударе меняет свое направление, изменение импульса – $m(v_2 + v_1)$ – происходит в результате воздействия на маятник импульса силы $F(t) = (2T)_{\text{II}} - mg$. Так как при движении маятника вниз и вверх (I и III стадии) сила натяжения нитей мало отличается от веса маятника: $(2T)_{\text{I,III}} \approx mg$ (ускорение $a_{\text{I,III}} \ll g$), можно считать, что $F(t) \approx (2T)_{\text{II}} - (2T)_{\text{I,III}} = \Delta(2T)$.

Таким образом, импульс силы, действующей на маятник при ударе равен:

$$S = m(v_2 + v_1) = F_{\text{cp}} \Delta t = \int_0^{\Delta t} 2T(t) dt, \quad (3.3.14)$$

т.е. определяется площадью, ограниченной кривой $ABCA$ на рис. 3.6 в. Поскольку при ударе угловая скорость маятника почти не изменяется (потери энергии малы), можно считать, что во время удара происходит вращение со средней угловой скоростью

$$\omega_{\text{cp}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{v_1 + v_2}{2r}, \quad (3.3.15)$$

и время удара равно

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega_{\text{cp}}} = \frac{2\pi r}{v_1 + v_2}. \quad (3.3.16)$$

Среднее значение силы, исходя из (3.3.14) и (3.3.16), равно:

$$F_{\text{cp}} = \frac{m(v_1 + v_2)}{\Delta t} = \frac{m(v_1 + v_2)^2}{2\pi r}. \quad (3.3.17)$$

Рассмотрим упрощенную картину движения маятника при ударе. Удар начинается в тот момент, когда нити полностью размотались со стержня, а отверстия, в которые они продеты, горизонтальны, и заканчивается через пол-оборота маятника, в момент начала нового наматывания нитей. Будем считать нити нерастяжимыми, т.е. пренебрежем дополнительным удлинением нитей при ударе δh , возникающим из-за роста сил натяжения. По сравнению с радиусом стержня маятника r :

$$\delta h \ll r. \quad (3.3.18)$$

При наших предположениях центр масс маятника во время удара совершает движение вниз-вверх по закону: $h_{\text{цм}} = h_0 - r \sin(\omega_{\text{cp}} t)$ (h_0 – вертикальная координата центра масс в начале удара, время отсчитывается от момента начала удара). Поэтому сила, действующая на маятник во время удара, равна:

$$F(t) = \Delta(2T) = ma(t) = m \frac{d^2 h_{\text{цм}}}{dt^2} = m \omega_{\text{cp}}^2 r \sin(\omega_{\text{cp}} t), \quad (3.3.19)$$

а ее максимальное значение:

$$[F(t)]_{\text{max}} = m \omega_{\text{cp}}^2 r = \frac{m(v_1 + v_2)^2}{4r} = \frac{\pi}{2} F_{\text{cp}}, \quad (3.3.20)$$

т.е. максимальное увеличение силы натяжения нитей во время удара в $\pi/2$ раз превышает среднее значение силы.

Заметим, что поскольку радиус r стержня маятника мал по

сравнению с длиной нити h , нити маятника за время удара лишь незначительно отклоняются от вертикальной плоскости: $\varphi_{\max} \leq 2r/h \ll 1$, и небольшая горизонтальная проекция силы натяжения $2T$ не успевает вызвать заметного смещения центра масс маятника по горизонтали за это время (см. рис. 3.7, где показаны три последовательных положения оси маятника: в начале – (а), в середине – (б) и в конце – (в) удара). Однако отклонение нитей от вертикальной плоскости, возникающее после удара, приводит к появлению небольшого раскачивания оси маятника во время его подъема (III стадия).

Экспериментальная установка

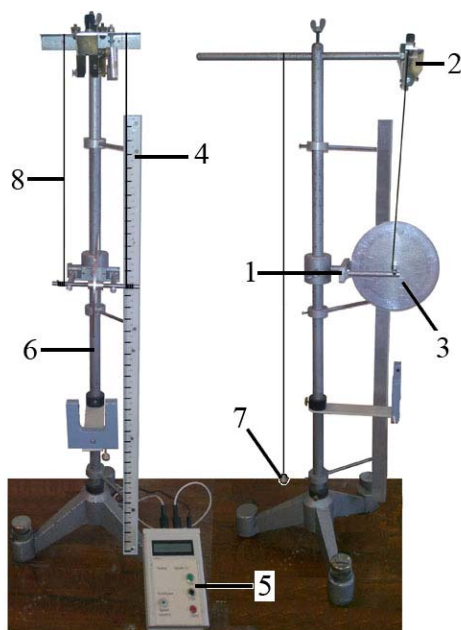


Рис. 3.8. Экспериментальная установка.

Схема установки приведена на рис. 3.8. Установка снабжена табличкой, на которой указаны размеры отдельных частей маятника и плотности материалов, из которых они изготовлены. На установке имеется *опорная вилка 1* и *стопорное устройство 2*, позволяющее освободить *диск маятника 3* без толчка в начале движения (см. рис. 3.8). Расстояния, которые проходит ось маятника при его движении вниз и вверх, измеряются по *шкале 4*. В нерабочем состоянии ось маятника должна лежать в выемках двух стержней опорной вилки, а диск должен быть зажат в стопоре.

ре.

Установка снабжена электронным *таймером 5* и секундомером для измерения временных интервалов. Для удобства измерения координат маятника в крайних положениях пользуются угольником.

Перед началом измерений установку необходимо отъюстировать. При тщательной юстировке сокращается время, необходимое для проведения измерений, и уменьшается разброс экспериментальных данных.

Пользуясь установочными винтами на основании *штатива* 6 и *отвесом* 7, стержень штатива устанавливают вертикально. Затем уравнивают длину *нитей* 8, добиваясь горизонтального положения оси маятника, когда он свободно висит в нижнем положении. При помощи угольника отмечают нижнее положение оси маятника по шкале. Опорную вилку устанавливают так, чтобы торцы ее стержней лежали в одной плоскости с нитями маятника. Затем тщательно, виток к витку навивают нити на ось, наблюдая за тем, чтобы сохранялось горизонтальное положение оси при натянутых нитях. Намотку производят до тех пор, пока ось маятника не окажется на уровне торцов стержней опорной вилки, слегка касаясь их; после этого верхний край диска маятника зажимается стопорным устройством. Верхнее положение оси также отмечается по шкале при помощи угольника. При аккуратно проведенной юстировке установки после нажатия на кнопку стопора маятник начинает движение вниз без раскачивания; после удара при движении вверх появляется небольшое раскачивание, о причине которого речь шла выше. При движении вниз и вверх ось маятника не должна перекашиваться; нити должны навиваться от отверстий, в которые они продеты, по направлению к диску. Если эти условия нарушаются, необходимо прекратить движение во избежание срыва с нитей и повреждения маятника, а затем повторить опыт.

По окончании измерений стержень маятника вновь укладывается в углубления на опорной вилке, а диск зажимается стопорным устройством.

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Определение величин ускорений и скоростей маятника Максвелла при его спуске и подъеме.

Измерения

1. Определить высоту h_1 , с которой маятник опускается до удара, и время t_1 спуска.

Высота h_1 определяется как разность верхнего и нижнего отсчетов по шкале, полученных при помощи угольника во время юс-

тировки. После установки правильного исходного положения маятника освобождают стопор, одновременно пуская таймер; момент удара фиксирует фотодатчик, и таймер определяет, таким образом, время опускания t_1 .

2. Определить высоту h_2 и время t_2 подъема маятника. Для этого в конце подъема маятника после удара, в момент остановки, зажимают пальцами диск и отмечают при натянутых нитях с помощью угольника верхнее положение стержня маятника по шкале; разность этого верхнего и нижнего отсчетов дает высоту h_2 , на которую поднимается маятник. Затем повторяют опыт, пуская секундомер в момент удара и останавливая его в конце подъема; таким образом, определяется время подъема t_2 .

Измерения величин t_1 , t_2 , h_1 и h_2 проводят не менее пяти раз. Результаты измерений заносятся в табл. 3.4.

Таблица 3.4

Экспериментальные данные

Номер опыта, i	h_1	$\langle h_1 \rangle, \sigma_{h_1}$	t_1	$\langle t_1 \rangle, \sigma_{t_1}$	h_2	$\langle h_2 \rangle, \sigma_{h_2}$	t_2	$\langle t_2 \rangle, \sigma_{t_2}$
1								
2								
3								
4								
5								

Все измерения требуют большого внимания и аккуратности. Необходимо следить за маятником, особенно при движении вверх, и оберегать его от механических повреждений. Если наматывание нитей будет происходить несимметрично или будет смещаться к концам стержня, маятник необходимо остановить, поскольку при срыве с нитей его стержень может согнуться и работать с таким маятником станет невозможно.

Обработка результатов

Величины $h_{1,2}$ и $t_{1,2}$ являются результатами прямых измерений, поэтому за оценку истинного значения измеряемой величины принимается выборочное среднее значение (среднее арифметическое по данной выборке). Выборка – число испытаний, в нашем случае $n = 5$.

1. Провести вычисление средних значений $\langle h_j \rangle$ и $\langle t_j \rangle$ ($j = 1, 2$) по формулам:

$$\langle h_j \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_{ij}, \quad (3.3.21)$$

$$\langle t_j \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_{ij}. \quad (3.3.22)$$

Результаты вычислений занести в табл. 3.4.

2. Провести оценку ошибок измеренных величин. В качестве оценки случайной погрешности среднего значения принимается выборочное стандартное отклонение среднего арифметического:

$$S_{h_j} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (h_{ij} - \langle h_{ij} \rangle)^2}, \quad (3.3.23)$$

$$S_{t_j} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (t_{ij} - \langle t_{ij} \rangle)^2}. \quad (3.3.24)$$

С учетом систематических погрешностей $\sigma_{\text{сист.}}$ (погрешность прибора, погрешность округления и др.) величина стандартного отклонения суммарной погрешности физических величин h_j и t_j вычисляется следующим образом:

$$\sigma_{h_j} = \sqrt{S_{h_j}^2 + \sigma_{h_j \text{ сист.}}^2}, \quad (3.3.25)$$

$$\sigma_{t_j} = \sqrt{S_{t_j}^2 + \sigma_{t_j \text{ сист.}}^2}, \quad (3.3.26)$$

где S – выборочное стандартное отклонение среднего арифметического – формулы (3.3.23), (3.3.24), $\sigma_{\text{сист.}}$ – оценка суммарной систематической погрешности.

Полученные оценки погрешностей σ средних значений t_1 , t_2 , h_1 и h_2 также заносятся в табл. 3.4.

3. Величины ускорений маятника при спуске a_1 и подъеме a_2 находят по формулам (3.3.6) и (3.3.11). Затем по формулам (3.3.8) и (10) определяют величины скоростей маятника до и после удара, v_1 и v_2 , и коэффициент восстановления скорости $K_B = v_2/v_1$.

4. Провести оценку ошибок полученных величин по формулам для косвенных измерений:

$$\sigma_{a_j} = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial a_j}{\partial h_j} \right)_{\langle t_j \rangle} \right)^2 \cdot \sigma_{\langle h_j \rangle}^2 + \left(\left(\frac{\partial a_j}{\partial t_j} \right)_{\langle h_j \rangle} \right)^2 \cdot \sigma_{\langle t_j \rangle}^2}, \quad (3.3.27)$$

$$\sigma_{v_j} = \sqrt{\left(\frac{\partial v_j}{\partial h_j}\right)_{\langle t_j \rangle}^2 \cdot \sigma_{\langle h_j \rangle}^2 + \left(\frac{\partial v_j}{\partial t_j}\right)_{\langle h_j \rangle}^2 \cdot \sigma_{\langle t_j \rangle}^2}, \quad (3.3.28)$$

$$\sigma_{K_B} = \sqrt{\left(\frac{\partial K_B}{\partial v_1}\right)_{\langle v_2 \rangle}^2 \cdot \sigma_{\langle v_1 \rangle}^2 + \left(\frac{\partial K_B}{\partial v_2}\right)_{\langle v_1 \rangle}^2 \cdot \sigma_{\langle v_2 \rangle}^2}. \quad (3.3.29)$$

В соответствии с формулой (3.3.4), значения ускорений при спуске и подъеме маятника должны быть одинаковыми. Проверить совпадение ускорений a_1 и a_2 в пределах ошибок измерений.

Упражнение 2. Определение момента инерции маятника Максвелла.

Измерения

1. Сделать чертеж устройства маятника. Поскольку разные части маятника сделаны из различного материала, то необходимо на чертеже отметить вид материала, из которого изготовлена данная часть маятника. Записать плотности материалов, из которых они изготовлены.

2. Определить все характерные размеры маятника и нанести их на чертеж.

Обработка результатов

1. С помощью формулы (3.3.7) провести вычисление момента инерции маятника J .

2. Провести оценку ошибок полученного результата по формуле:

$$\sigma_J = \sqrt{\left(\frac{\partial J}{\partial h_1}\right)_{\langle t_1 \rangle}^2 \cdot \sigma_{\langle h_1 \rangle}^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial t_1}\right)_{\langle h_1 \rangle}^2 \cdot \sigma_{\langle t_1 \rangle}^2}. \quad (3.3.30)$$

3. Используя данные о геометрических размерах маятника и плотностях материалов, из которых он изготовлен, рассчитать теоретическое значение момента инерции $J_{\text{теор}}$.

Теоретический момент инерции маятника Максвелла складывается из момента инерции стержня, диска и цилиндрических утолщений на стержне вблизи диска. Таким образом, суммарный момент инерции системы относительно продольной оси может

быть записан в виде:

$$J_{\text{теор}} = m_1 r^2 / 2 + m_2 R^2 / 2 + m_3 (r')^2 / 2, \quad (3.3.31)$$

где r – радиуса стержня; R – радиус диска; r' – радиус утолщений на стержне; m_1 , m_2 , m_3 – массы стержня, диска и утолщений на стержне, соответственно. Массы различных частей маятника вычисляются исходя из их геометрических размеров и плотностей материалов, из которых они изготовлены.

4. Провести оценку погрешности полученного результата расчета $J_{\text{теор}}$, используя известные формулы для оценки погрешностей в случае косвенных измерений.

5. Сравнить экспериментальное значение момента инерции и значение $J_{\text{теор}}$.

Упражнение 3. Уточнение уравнения кинематической связи.

Возможной причиной расхождения величины момента инерции маятника J , определенной по формуле (3.3.7) и $J_{\text{теор}}$, является ошибка в определении радиуса r (в формуле (3.3.7), величина r стоит в квадрате). Нити, на которых подвешен маятник, достаточно толстые (их диаметр $\sim 0,5$ мм), а стержень r маятника – тонкий (его диаметр ~ 7 мм), поэтому надо ввести поправку на толщину нитей. По смыслу величина r в уравнении кинематической связи (3.3.3) является коэффициентом пропорциональности между угловым и линейным перемещениями маятника.

Измерения

Поддерживая нити в натянутом состоянии, определить линейное перемещение оси маятника Δh (при помощи шкалы и угольника) при сматывании со стержня целого числа n витков нити. Для больших значений n (скажем, $n = 20$) угловое перемещение $\Delta \varphi = 2\pi n$ можно определить достаточно точно, наблюдая за перемещением карандашной метки, сделанной на краю диска маятника.

Обработка результатов

Вычислить величину r как отношение линейного и углового перемещений по формуле: $r = \Delta h / \Delta \varphi$.

Полученное значение r надо сравнить с радиусом стержня и затем уточнить величину J , подставляя новое значение r в формулу

(3.3.7).

Упражнение 4. Определение времени удара и максимального увеличения силы натяжения нитей.

Аналогично упражнению 2, в данном упражнении осуществляется лишь обработка результатов.

1. По формулам (3.3.16) и (3.3.20) рассчитать время удара Δt и максимальное увеличение силы натяжения нитей во время удара $[\Delta(2T)]_{\max}$.

2. Провести оценку погрешности полученных результатов по формулам:

$$\sigma_{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta t}{\partial v_1}\right)_{\langle v_2 \rangle}^2 \cdot \sigma_{\langle v_1 \rangle}^2 + \left(\frac{\partial \Delta t}{\partial v_2}\right)_{\langle v_1 \rangle}^2 \cdot \sigma_{\langle v_2 \rangle}^2}, \quad (3.3.32)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{[\Delta(2T)_{\max}]} &= \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial [\Delta(2T)_{\max}]}{\partial v_1}\right)_{\langle v_2 \rangle}^2 \cdot \sigma_{\langle v_1 \rangle}^2 + \left(\frac{\partial [\Delta(2T)_{\max}]}{\partial v_2}\right)_{\langle v_1 \rangle}^2 \cdot \sigma_{\langle v_2 \rangle}^2}. \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

3. Провести сравнение максимального прироста силы натяжения $[\Delta(2T)]_{\max}$ с весом маятника mg .

В завершение работы, рассчитанные в упражнениях 1–4 значения всех физических величин: ускорения, скорости, коэффициента восстановления скорости, момента инерции, времени удара и максимального увеличения силы натяжения нитей, а также оценки ошибок их определения необходимо представить в виде таблицы (см. табл. 3.5).

Таблица 3.5

Результаты обработки экспериментальных данных

(a_1, σ_{a1})		(a_2, σ_{a2})	
(v_1, σ_{v1})		(v_2, σ_{v2})	
(J, σ_j)		$J_{\text{теор.}}$	
$K_B = v_2/v_1, \sigma_K$			
$(\Delta t, \sigma_{\Delta t})$			

$([\Delta(2T)]_{\max}, \sigma)$	
---------------------------------	--

Основные итоги работы

В результате выполнения работы должны быть определены значения скоростей и ускорений маятника Максвелла на двух различных стадиях его движения (спуск и подъем). Кроме того, должен быть вычислен момент инерции маятника, экспериментально и теоретически, и проведено сравнение полученных результатов.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение плоского движения.
2. Что такое центр масс системы? Сформулируйте теорему о движении центра масс.
3. Что является главным отличительным признаком маятника Максвелла?
4. Как изменяется кинетическая энергия системы в момент удара?
5. Получите формулу для вычисления теоретического значения момента инерции маятника Максвелла.
6. Сформулируйте закон изменения импульса.
7. Сформулируйте закон изменения механической энергии.

Лабораторная работа 3.4 **ИЗМЕРЕНИЕ РЕАКТИВНОЙ СИЛЫ**

Цель работы

Измерение реактивной силы струи воды.

Идея эксперимента

В эксперименте используется маятник, представляющий собой металлический стержень, который может колебаться в вертикальной плоскости, опираясь на призму. Нижняя часть маятника – полая трубка, к которой подводится вода и вытекает из патрубка у нижнего конца маятника. Возникающая при этом реактивная сила струи отклоняет маятник от положения равновесия. По углу отклонения маятника определяется величина реактивной силы.

Теоретическое введение

Реактивное движение, т.е. движение под действием реактивной силы, возникает, когда от тела в процессе его движения отделяется и движется с некоторой скоростью какая-то его часть. Пусть некоторая система выбрасывает часть своей массы, а выброшенная часть изменяет при этом свой импульс, тогда на систему действует реактивная сила, равная изменению импульса выброшенной части за единицу времени:

$$\Phi = -\mu(V - V_s),$$

где Φ – реактивная сила, μ – масса, выбрасываемая в единицу времени, V – скорость выбрасываемых частиц, V_s – скорость системы.

Аналогичная ситуация возникает при захвате системой массы извне. Поэтому масса системы может и не изменяться. Реактивная сила при этом возникает за счет разности скоростей захватываемых и выбрасываемых частиц вещества.

В данной задаче измеряется реактивная сила струи воды с помощью маятника, способного совершать колебания в вертикальной плоскости. Вода втекает в маятник, движется по трубке маятника и вытекает через патрубок по трем взаимно перпендикулярным направлениям, поэтому реактивная сила в направлении, противоположном скорости вытекающей воды, будет равна

$$\Phi = \mu \cdot v, \tag{3.4.1}$$

где μ – масса вытекающей за единицу времени воды, v – скорость вытекающей воды. Реактивная сила, возникающая за счет вытекающей воды, компенсируется реакцией опоры. Кроме реактивной силы Φ на маятник будет действовать сила тяжести маятника Mg (с водой, но без цилиндра D) и сила тяжести mg цилиндра (см. рис. 3.9).

Пусть расстояния точек приложения сил Φ , Mg , mg от оси вращения маятника соответственно будут L , a , b . Уравнение моментов сил относительно оси вращения маятника может быть написано в виде:

$$\Phi L + mgb \sin \alpha = Mga \sin \alpha, \quad (3.4.2)$$

где α – угол отклонения маятника от вертикали.

Преобразуем это выражение:

$$1 + \frac{mgb \sin \alpha}{\Phi L} = \frac{Mga \sin \alpha}{\Phi L}, \quad (3.4.3)$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} = -\frac{mg}{\Phi L} b + \frac{Mga}{\Phi L}. \quad (3.4.4)$$

Таким образом, мы получили линейную зависимость величины обратного синуса $\frac{1}{\sin \alpha}$ угла отклонения маятника при различных положениях цилиндра от значения смещения b цилиндра относительно оси вращения маятника. В коэффициент пропорциональности, равный $\frac{mg}{\Phi L}$, входит величина реактивной силы Φ . Следовательно, проводя независимые измерения величин $\frac{1}{\sin \alpha}$ и b , можно определить искомую величину реактивной силы Φ .

С другой стороны, правую часть соотношения (3.4.1) – величину μv – можно определить независимым от Φ способом. Сравнение полученных величин будет являться проверкой соотношения (3.4.1).

Пусть средняя (по сечению S патрубка) скорость истечения воды равна v . Для массы воды, вытекающей за единицу времени, пренебрегая сжатием струи, можем написать

$$\mu = S\rho v, \quad (3.4.5)$$

где ρ – плотность воды.

Для величины реактивной силы получим

$$\mu v = S \rho v^2. \quad (3.4.6)$$

Масса выбрасываемой в единицу времени воды может быть определена по объему Q воды, вытекающей за время t :

$$S \rho v = \frac{Q}{t} \rho. \quad (3.4.7)$$

Из уравнений (3.4.6) и (3.4.7) получим

$$\mu v = \frac{\rho}{S} \left(\frac{Q}{t} \right)^2. \quad (3.4.8)$$

Преобразуем последнее уравнение к виду:

$$Q^2 = \frac{\mu v S}{\rho} t^2. \quad (3.4.9)$$

Как видим, величина квадрата объема вытекающей воды связана с величиной квадрата времени через коэффициент пропорциональности $\frac{\mu v S}{\rho}$, в который входит искомая величина μv . Следовательно, проводя измерения объема и времени вытекания воды, зная плотность воды и сечение патрубка, можно оценить величину μv .

Экспериментальная установка

Внешний вид экспериментальной установки приведен на рис. 3.9. Основная ее часть – металлический маятник AB . Он может колебаться в вертикальной плоскости, опираясь на призму в точке C . Нижняя часть маятника – полая трубка, имеющая на конце A патрубок, внутреннее сечение которого равно S . Верхняя часть представляет собой сплошной стержень, по которому может перемещаться и закрепляться на нем цилиндр D массой m . Вблизи точки C трубка имеет отросток, ось которого параллельна лезвию призмы и который соединен с мягким резиновым шлангом. По шлангу подается вода, которая вытекает из патрубка, образуя струю. Появляющаяся при этом реактивная сила отклоняет маятник от вертикального положения. При постоянном потоке воды угол отклонения стержня постоянен.

Постоянство потока обеспечивается тем, что вода в маятник поступает по трубке 2 из специального сосуда M . Поступающая из водопровода по трубке 1 вода наполняет этот сосуд до постоянного уровня, излишек воды сливается в раковину по трубке 3. На трубке 2 имеется пружинный зажим K , при помощи которого можно пере-

крывать ток воды в маятник. Вода, вытекающая из маятника, течет по желобу E и собирается в мерный сосуд G .

Принадлежности: 1) установка, 2) секундомер, 3) мерный сосуд.

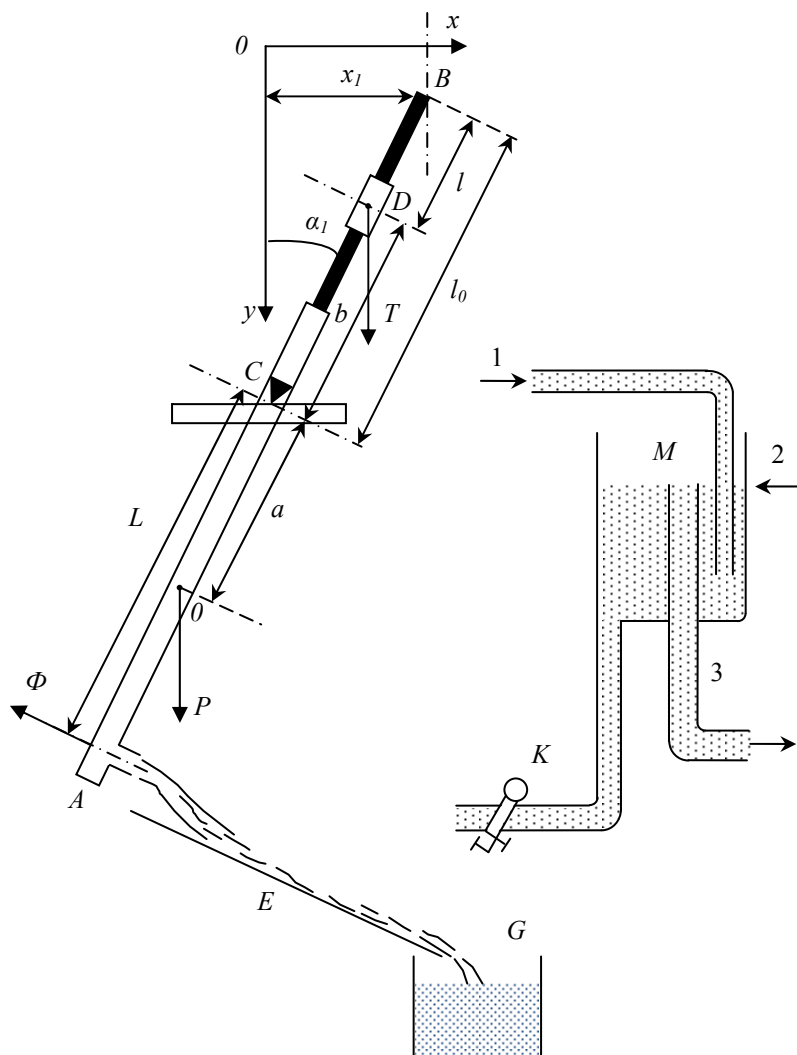


Рис. 3. 10. Экспериментальная установка для определения реактивной силы струи воды.

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Измерение реактивной силы струи по углу отклонения маятника при различных положениях цилиндра.

Измерения

1. Значения величин L , l_0 и m , необходимые для вычисления реактивной силы Φ , приведены на установке. Последовательность измерений следующая. Цилиндр D закрепляют в одном из его положений, маятник устанавливают так, чтобы он мог свободно колебаться. При вертикальном положении маятника по миллиметровой шкале отсчитывают расстояние l (см. рис. 3.9). Медленно открывают кран водопровода и при установившемся отклонении положения маятника по миллиметровой шкале отсчитывают расстояние x .

2. Пружинным зажимом (не закрывая кран водопровода) прекращают доступ воды в маятник. Цилиндр D закрепляют в другом положении и вновь, повторяя те же операции, производят измерения, открыв доступ воды в маятник. Не следует помещать цилиндр D слишком близко к оси вращения маятника, это уменьшает точность измерения величины x . Не рекомендуется закреплять его и далеко от этой оси, так как в этом случае маятник при отклонении может опираться гранью своей призмы на подставку.

3. Результаты измерений заносят в табл. 3.6.

Обработка результатов

1. Значения b_i определяются как разность величин $b_i = l_0 - l_i$, а значение $\sin \alpha_i = \frac{x_i}{l_0}$.

Таблица 3.6

Экспериментальные данные

№ опыта	l_i, σ	b_i, σ	x_i, σ	$\sin \alpha_i, \sigma$	$\frac{1}{\sin \alpha_i}, \sigma$	$\frac{mg}{\Phi L}, \sigma$	Φ, σ
1							
2							
3							
4							
5							

6							
---	--	--	--	--	--	--	--

2. Изобразить график зависимости величины $\frac{1}{\sin \alpha_i}$ от величины b_i . С помощью метода наименьших квадратов, используя формулу (3.4.4), провести обработку результатов совместных измерений и вычислить коэффициент пропорциональности $k_1 \equiv \frac{mg}{\Phi L}$ с оценкой ошибок. Затем, зная массу цилиндра m и длину маятника L , оценить величину реактивной силы Φ и стандартное отклонение этой величины по формулам:

$$\Phi = \frac{mg}{Lk_1}, \quad (3.4.10)$$

$$\sigma_\Phi = \sqrt{\left(\frac{\Phi}{m} \sigma_m\right)^2 + \left(\frac{\Phi}{L} \sigma_L\right)^2 + \left(\frac{\Phi}{k_1} \sigma_{k_1}\right)^2}. \quad (3.4.11)$$

Результаты вычислений занести в табл. 3.6.

Упражнение 2. Измерение реактивной силы струи по объему Q вытекающей за время t воды.

Измерения

1. Для определения реактивной силы, выражаемой правой частью соотношения (3.4.1), собирают вытекающую воду в мерный сосуд. Результаты измерений объема Q_i вытекающей за время t_i воды заносят в табл. 3.7.

Обработка результатов

1. Изобразить график зависимости величин Q_i^2 от t_i^2 . Используя формулу (3.4.9), с помощью метода наименьших квадратов провести обработку результатов совместных измерений и вычислить коэффициент пропорциональности $k_2 \equiv \frac{\mu v S}{\rho}$ с оценкой ошибок.

Таблица 3.7

Экспериментальные данные

№ опыта	(Q_i, σ)	(t_i, σ)	(Q_i^2, σ)	(t_i^2, σ)	$(\frac{\mu S}{\rho}, \sigma)$	$(\mu\nu, \sigma)$
1						
2						
3						
4						
5						

Далее, зная плотность воды ρ и площадь поперечного сечения патрубка S , оценить величину $(\mu\nu)$ и стандартное отклонение этой величины по формулам:

$$\mu\nu = \frac{k_2 \rho}{S}, \quad (3.4.12)$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \sqrt{\left(\frac{\mu\nu}{\rho} \sigma_\rho\right)^2 + \left(\frac{\mu\nu}{S} \sigma_S\right)^2 + \left(\frac{\mu\nu}{k_2} \sigma_{k_2}\right)^2}. \quad (3.4.13)$$

Результаты вычислений занести в табл. 3.7.

Необходимые для вычислений величины S и ρ приведены на установке.

По результатам *упражнений 1 и 2* необходимо провести сравнение величин Φ и $\mu\nu$, т.е. проверить соотношение (3.4.1).

Основные итоги работы

В результате выполнения работы должна быть определена реактивная сила струи воды Φ и проведена проверка соотношения $\Phi = \mu\nu$.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение реактивной силы.
2. Получите уравнение Мещерского.
3. Получите формулу Циолковского.

Лабораторная работа 3.5

ПРОВЕРКА ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Цель работы

Проверка закона сохранения момента количества движения (импульса).

Идея эксперимента

В эксперименте используется система тел, у которой в процессе движения может меняться конфигурация и, следовательно, ее момент инерции.

Теоретическое введение

Закон сохранения момента количества движения (импульса) для системы тел является следствием 2 и 3-го законов Ньютона в инерциальной системе отсчета. Для системы тел, способной вращаться вокруг некоторой закрепленной оси он заключается в том, что *суммарный момент импульса системы тел относительно некоторой оси сохраняется неизменным, если суммарный момент всех внешних сил относительно этой же оси равен нулю.*

В частности, для абсолютно твердого тела:

$$J\omega = \text{const},$$

где J – момент инерции системы тел, ω – угловая скорость вращения.

Рассмотрим движение системы тел, у которой в процессе движения может меняться момент инерции. Примером такой механической системы служит колонка с горизонтальным стержнем, по которому могут свободно перемещаться два цилиндра (рис. 3.10). Эта колонка может вращаться вокруг своей оси. Для осуществления такого вращения на нее наматывается нить, переброшенная через дополнительный блок. На конце нити подвешен груз массы m . В исходном состоянии эта нить намотана на колонку, груз находится в верхнем положении, а цилиндры удерживаются на минимальном расстоянии от оси. Для определенности выберем ось Ox системы координат так, как показано на рис. 3.10, совместив ее начало с положением груза в верхней точке. Все время движения рассматриваемой механической системы с меняющимся моментом инерции может быть разбито на три стадии. На первой стадии система, имея наименьший момент инерции, начинает вращаться с

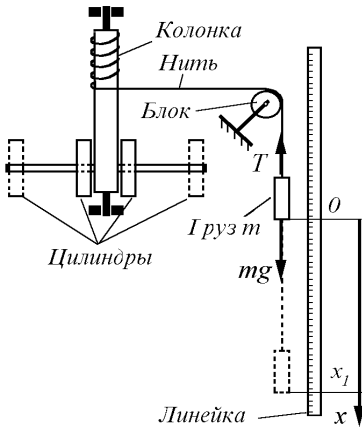


Рис. 3.10. Схематическое представление механической системы с меняющимся моментом инерции.

ускорением под действием момента силы натяжения нити, на которой подвешен груз m . На второй стадии, когда груз полностью опускается (до координаты x_1), цилиндры освобождаются и меняют свое положение (на рис. 3.10 новое положение отмечено штриховыми линиями). Момент инерции системы тел в этой стадии быстро увеличивается и становится наибольшим, а угловая скорость вращения уменьшается. В третьей стадии система, имея наибольший

момент инерции, вращается замедленно и останавливается. При этом груз m поднимется до координаты x_2 . Изменение угловой скорости вращения системы со временем может быть изображено примерно так, как показано на рис. 3.11. Возрастающая ветвь от нуля до точки A отвечает первой стадии. Убывающая ветвь, от точки B до точки C , отвечает третьей стадии. За незначительное время τ в интервале (t_A, t_B) , угловая скорость быстро уменьшается. Участок кривой AB соответствует второй стадии, стадии увеличения момента инерции системы. В связи с тем, что время τ мало, то момент силы натяжения нити за это время не успевает заметно изменить момент количества движения колонки. Применяя к этой стадии закон сохранения момента количества движения, получим

$$J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2 \quad (3.5.1)$$

или

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad (3.5.2)$$

где J_1 и J_2 – соответственно наименьший и наибольший моменты инерции системы, ω_1 – наибольшая угловая скорость на первой стадии движения, ω_2 – наибольшая угловая скорость в третьей стадии движения.

Выразим величины, входящие в уравнения (3.5.1) и (3.5.2), через другие параметры системы с изменяющимся значением мо-

мента инерции. Для определения угловых скоростей вращения колонки ω_1 и ω_2 воспользуемся законом изменения механической энергии. Заметим, что в выбранной нами системе отсчета, нулевой уровень потенциальной энергии соответствует точке O . При опускании груза (при этом цилиндры находятся около колонки) имеем:

$$\frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{m v_1^2}{2} - mgx_1 = A_1, \quad (3.5.3)$$

где g – ускорение свободного падения; x_1 – координата груза в нижней точке; A_1 – работа сил трения при опускании груза, $A_1 < 0$; v_1 – скорость груза в нижней точке, равная $v_1 = \omega_1 r$ (r – радиус колонки); $\frac{1}{2} J_1 \omega_1^2$ – кинетическая энергия вращения колонки в момент t_A (рис.3.11).

Из уравнения (3.5.3) при $m v_1^2 \ll J_1 \omega_1^2$ получаем:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2(mgx_1 + A_1)}{J_1}}. \quad (3.5.4)$$

После полного разматывания нити цилиндры переходят в крайние положения. Момент инерции колонки увеличивается и становится равным J_2 , угловая скорость вращения уменьшается и становится равной ω_2 . При разлете цилиндров, во время их удара о крайние упоры часть механической энергии системы тел переходит в тепло, поэтому кинетическая энергия вращения $\frac{1}{2} J_2 \omega_2^2$ (в момент времени t_B) меньше, чем энергия $\frac{1}{2} J_1 \omega_1^2$. Закон изменения энергии на участке BC (см. рис. 3.11) запишем в виде:

$$-mgx_2 - \left[\frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 - mgx_1 \right] = A_2, \quad (3.5.5)$$

где A_2 – работа сил трения при подъеме груза, $A_2 < 0$.

Из последнего уравнения получим:

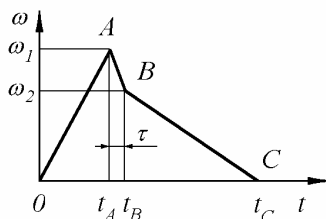


Рис. 3.11. Зависимость угловой скорости колонки от времени.

$$\omega_2 = \sqrt{2 \frac{mg(x_1 - x_2) - A_2}{J_2}}. \quad (3.5.6)$$

Определение моментов инерции для двух конфигураций системы может быть осуществлено двумя способами. В первом фиксируют цилиндры в одном из положений и анализируют движение тел системы при опускании груза m . При движении с неизменным наименьшим моментом инерции J_1 (цилиндры расположены вблизи оси колонки) имеем уравнение движения груза m :

$$m \frac{dv}{dt} = mg - T. \quad (3.5.7)$$

Уравнение вращательного движения колонки:

$$J_1 \frac{d\omega}{dt} = Tr - M_{\text{тр}}. \quad (3.5.8)$$

Уравнение кинематической связи:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot r, \quad (3.5.9)$$

где $\frac{dv}{dt}$ – ускорение груза на нити, T – сила натяжения нити, $\frac{d\omega}{dt}$ – угловое ускорение системы, $M_{\text{тр}}$ – момент сил трения.

Из уравнений (3.5.7), (3.5.8) и (3.5.9) имеем:

$$(J_1 + mr^2) \frac{dv}{dt} = mgr^2 - M_{\text{тр}}r.$$

Предполагая, что $M_{\text{тр}} \ll mgr$ и $mr^2 \ll J_1$, получаем:

$$J_1 \frac{dv}{dt} = mgr^2.$$

В связи с тем, что движение груза равноускоренное:

$$\frac{dv}{dt} = 2 \frac{x_1}{t_1^2},$$

где t_1 – время опускания груза в том случае, когда момент инерции колонки неизменен и равен J_1 . Из двух последних уравнений получим:

$$J_1 = \frac{mgr^2 t_1^2}{2x_1}. \quad (3.5.10)$$

Аналогично при опускании груза, когда система имеет наибольший момент инерции, имеем:

$$J_2 = \frac{mgr^2 t_2^2}{2x_1}, \quad (3.5.11)$$

где t_2 – время опускания груза на полную длину нити до отметки x_1 .

Используя формулы (3.5.4), (3.5.6), (3.5.10) и (3.5.11) можно проверить соотношение (3.5.1). При проверке закона сохранения момента количества движения с использованием соотношения (3.5.2) отношение моментов инерции J_1/J_2 можно найти, определяя периоды колебаний крутильного маятника, образованного колонкой с навитой нитью и двумя пружинками с суммарным коэффициентом жесткости k (рис. 3.12).

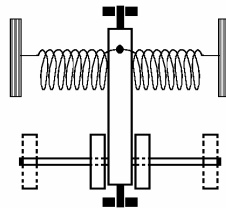


Рис. 3.12. Устройство крутильного маятника.

Периоды колебаний такого маятника легко получить, записав уравнение колебаний. Для моментов инерции J_1 и J_2 периоды колебаний равны, соответственно

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_1}{2kr^2}} \quad \text{и} \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J_2}{2kr^2}}. \quad (3.5.12)$$

Как видим,

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{T_1^2}{T_2^2}. \quad (3.5.13)$$

Экспериментальная установка

Схема установки дана на рис. 3.13. Колонка 1 с закрепленной на ней стержнем 2 может вращаться в подшипниках вокруг вертикальной оси. По штанге могут скользить два цилиндра 3 одинаковой массы. По колонке может перемещаться кольцо с пластинкой 4. Если подвесить пластинку в верхнем положении на фиксаторе, то нитями, пропущенными через отверстия в диске 5, цилиндры 3 фиксируются в положении, наиболее близком к оси. Фиксатор 6 изготовлен в виде стерженька, вставленного в отверстие в колонке. На один конец стерженька надевается пластинка 4, к другому концу прикреплена переброшенная через блок нить с грузом 7 массы m на конце. Нить навивают виток к витку на колонку, охватывая закрепленную на фиксаторе пластинку. Опускаясь, груз приводит колонку во вращение. В момент, когда груз останавливается,

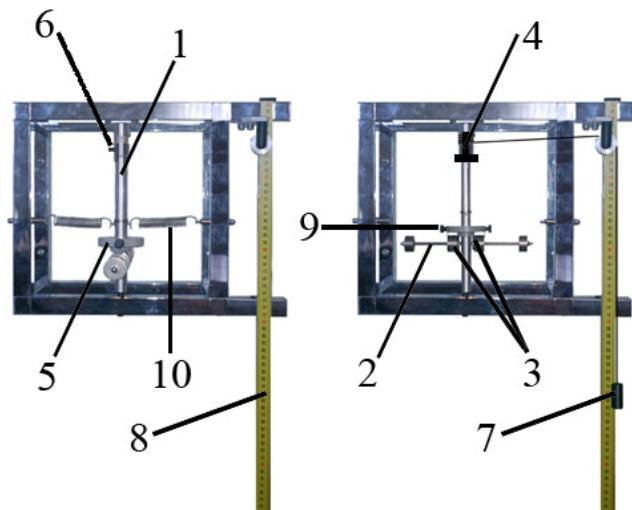


Рис. 3.13. Экспериментальная установка.

он смещает *стерженек 6*, *кольцо 4* падает на *диск 5* и *цилиндры 3* освобождаются. Малая сила трения покоя между *цилиндрами 3* и *штангой 2* не может удерживать цилиндры в одном положении, и они очень быстро (мгновенно) соскальзывают к концам штанги. Это увеличивает момент инерции системы и уменьшает, в соответствии с законом сохранения момента количества движения, ее угловую скорость. После этого нить начинает наматываться на *колонку 1*, *груз 7* поднимается вверх, не доходя, однако, до своего первоначального положения – из-за потерь энергии. Эти потери вызваны превращением механической энергии в тепловую при неупругом ударе цилиндров об упоры, наличием сил трения при движении системы и др. По *шкале 8* измеряются расстояния, проходимые грузом при его опускании и подъеме.

На *диске 5* имеются специальные *крепления 9*. Ими можно закрепить, не пользуясь кольцом с нитями, цилиндры у поверхности колонки. Систему также можно превратить в крутильный маятник. Для этого используются две *пружины 10*. Один конец пружины закрепляется на колонке, другой конец пружины закрепляется в неподвижной раме. Поворот колонки на небольшой угол приводит к изменению деформаций пружин, в результате чего возникает момент сил, пропорциональный углу отклонения. Необходимо только

следить за тем, чтобы пружины не провисали, т.е. при всех углах отклонения были бы в натянутом состоянии.

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Определение моментов инерции J_1 и J_2 и величин работ сил трения при опускании и подъеме груза.

Моменты инерции J_1 и J_2 определяются по формулам (3.5.10) и (3.5.11) после экспериментального определения времен опускания груза t_1 и t_2 .

Величины работ A_1 и A_2 определяются экспериментально, исходя из закона сохранения энергии.

Определение величины работы A_1 . Пусть груз при неизменном моменте инерции J_1 (при этом цилиндры находятся около колонки) опускается до отметки x_1 и поднимается до x_3 . Энергия, равная разности потенциальных энергий груза, равна работе сил трения за все время движения системы. Для величины работы при опускании груза (A_1) и при подъеме (A_3) имеем:

$$A_1 = -\alpha_1 x_1 mg, \quad (3.5.14)$$

$$A_3 = -\alpha_1 (x_1 - x_3) mg, \quad (3.5.15)$$

где α_1 – неизвестный коэффициент, характеризующий потерю механической энергии при движении колонки с моментом инерции J_1 .

Значение величины α_1 – может быть получено, исходя из закона сохранения энергии:

$$A = A_1 + A_3 = -\alpha_1 \cdot (2x_1 - x_3) mg = -x_3 mg.$$

Отсюда получим:

$$\alpha_1 = \frac{x_3}{2x_1 - x_3}. \quad (3.5.16)$$

Определение величины работы A_2 . Аналогично при опускании груза с неизменным моментом инерции J_2 (при этом цилиндры находятся в крайних положениях) до отметки x_1 и подъеме до x_4 имеем:

$$A = -\alpha_2 (2x_1 - x_4) mg = -x_4 mg, \quad (3.5.17)$$

т.е.

$$\alpha_2 = \frac{x_4}{2x_1 - x_4}. \quad (3.5.18)$$

Таким образом, можно считать, что при вращении колонки с моментом инерции J_1 работа сил трения будет пропорциональна

пройденному грузом пути и коэффициенту α_1 , с моментом инерции J_2 – пропорциональна пройденному пути и коэффициенту α_2 . В связи с этим, при подъеме груза от нижней точки (координата x_1) до отметки x_2 работа сил трения A_2 равна:

$$A_2 = \alpha_2(x_1 - x_2)mg. \quad (3.5.19)$$

Измерения

1. Провести измерение x_1 . Величина x_1 , то есть расстояние, проходимое грузом при полном разматывании нити определяется по шкале, когда находится в нижнем положении. Величину x_1 вносят в табл. 3.8.

Таблица 3.8.

Экспериментальные данные

	Номер опыта, i				
	1	2	3	4	5
(x_1, σ_{x_1})					
t_1					
$(\langle t_1 \rangle, \sigma_{t_1})$					
x_3					
$(\langle x_3 \rangle, \sigma_{x_3})$					
t_2					
$(\langle t_2 \rangle, \sigma_{t_2})$					
x_4					
$(\langle x_4 \rangle, \sigma_{x_4})$					
x_2					
$(\langle x_2 \rangle, \sigma_{x_2})$					

2. Провести измерения t_1 и x_3 . При измерениях, цилиндры закрепляют у колонки. Навивают нить на колонку, подводя груз к нулю шкалы, останавливают его колебания. Колонку освобождают, измеряют время опускания t_1 до нижней точки и координату x_3 , до которой поднимется груз.

3. Аналогично п.2 провести измерения t_2 и x_4 . Цилиндры в этом случае располагают в крайних, наиболее удаленных от оси положениях.

4. Провести измерения величины x_2 , т.е. координаты, до которой поднимется груз после изменения момента инерции системы. Для этого поступают следующим образом. Приблизив цилиндры к колонке, надевают пластинку кольца на конец стерженька *фиксатора*. Навивают виток к витку нить, соединенную с грузом, на колонку с пластинкой до тех пор, пока груз не будет на нулевой отметке шкалы. Останавливают возможные колебания груза. Освобождают колонку. После полного разматывания нити цилиндры освобождаются и переходят в положения, наиболее удаленные от оси. Отмечают положение груза на шкале x_2 , когда он, начав подниматься, вновь остановится.

Все измерения проводят 3–5 раз. Результаты заносятся в табл. 3.8.

Обработка результатов

1. По экспериментальным данным рассчитываются средние значения величин x_j (где $j = 2-4$) с использованием формулы:

$$\langle x_j \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{ij},$$

где N – число измерений. Аналогичные вычисления делаются для t_1 и t_2 .

2. Вычислить выборочное стандартное отклонение случайных ошибок:

$$S_{x_j} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_{ij} - \langle x_j \rangle)^2}{N(N-1)}}.$$

С учетом систематических погрешностей (погрешность прибора, погрешность округления и др.) величина стандартного отклонения суммарной погрешности физических величин x_j вычисляется следующим образом:

$$\sigma_{x_j} = \sqrt{S_{x_j}^2 + \sigma_{x_j \text{ сист.}}^2},$$

где S – выборочное стандартное отклонение среднего арифметического, $\sigma_{\text{сист.}}$ – оценка суммарной систематической погрешности.

Результаты вычислений занести в табл. 3.8.

3. С помощью формул (3.5.16) и (3.5.18) вычисляют значения α_1 и α_2 .

4. Произвести оценку погрешностей полученных значений α_1 и α_2 . В связи с тем, что измеряемая величина является косвенно измеряемой, то стандартное отклонение для функции нескольких независимых переменных находится через соответствующие стандартные отклонения средних значений по формуле:

$$\sigma_{\alpha_1}(x_1, x_3) = \sqrt{\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \sigma_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_3} \sigma_{x_3}\right)^2}$$

или

$$\sigma_{\alpha_1}(x_1, x_3) = \sqrt{\left(\frac{2x_3}{(2x_1 - x_3)^2} \sigma_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{2x_1}{(2x_1 - x_3)^2} \sigma_{x_3}\right)^2}.$$

Аналогично для α_2 получаем:

$$\sigma_{\alpha_2}(x_1, x_4) = \sqrt{\left(\frac{2x_4}{(2x_1 - x_4)^2} \sigma_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{2x_1}{(2x_1 - x_4)^2} \sigma_{x_4}\right)^2}.$$

Результаты вычислений α_1 , σ_{α_1} и α_2 , σ_{α_2} вносятся в табл. 3.9.

Таблица 3.9

Результаты обработки экспериментальных данных

$\alpha_1, \sigma_{\alpha_1}$	$\alpha_2, \sigma_{\alpha_2}$	A_1, σ_{A_1}	A_2, σ_{A_2}	J_1, σ_{J_1}	J_2, σ_{J_2}

5. С помощью формул (3.5.14) и (3.5.19) определить величины работ A_1 и A_2 .

6. Провести оценку ошибок σ_{A_1} и σ_{A_2} , используя методику, применяемую для определения погрешностей σ_{α_1} и σ_{α_2} (см. п.4). Результаты вычислений A_1 , σ_{A_1} и A_2 , σ_{A_2} заносятся в табл. 3.9.

7. По формулам (3.5.10), (3.5.11) найти J_1 и J_2 .

8. Провести оценку ошибок σ_{J_1} и σ_{J_2} аналогично тому, как это делалось для σ_{α_1} и σ_{α_2} (в п.4). Результаты вычислений заносятся в табл. 3.9.

Упражнение 2. Определение отношения моментов инерции для двух конфигураций системы тел.

Измерения

1. Определить периоды колебаний крутильного маятника T_1 и T_2 для двух положений цилиндров. Для чего отсоединив нить с грузом и, используя две пружины, создают колебательную систему (см. описание установки). Измеряют время n полных периодов колебаний ($n=10-20$): $t = nT_1$ и $t = nT_2$. Результаты измерений заносят в табл. 3.10.

Таблица 3.10

Экспериментальные данные

Номер опыта, i	t_1	$\langle t_1 \rangle, \sigma_{t_1}$	$\langle T_1 \rangle, \sigma_{T_1}$	t_2	$\langle t_2 \rangle, \sigma_{t_2}$	$\langle T_2 \rangle, \sigma_{T_2}$
1						
2						
3						
4						
5						

Обработка результатов

1. Вычислить средние арифметические значения величин t_1 и t_2 .

2. Найти выборочные стандартные отклонения σ_{t_1} и σ_{t_2} величин $\langle t_1 \rangle$ и $\langle t_2 \rangle$.

3. Вычислить средние значения и их стандартные отклонения для периодов T_1 и T_2 :

$$\langle T_{1,2} \rangle = \frac{t_{1,2}}{n}, \quad \sigma_{T_{1,2}} = \frac{\sigma_{t_{1,2}}}{n}.$$

Результаты вычислений занести в табл. 3.10.

4. Определить отношение периодов T_1/T_2 и стандартное отклонение σ_{T_1/T_2} ошибки этого отклонения. Результаты вычислений заносятся в табл. 3.11.

5. Определить величину $(T_1/T_2)^2$ и стандартное отклонение $\sigma_{(T_1/T_2)^2}$ ошибки вычисления этой величины. Результаты вычислений внести в табл. 3.11.

Таблица 3.11

Результаты обработки экспериментальных данных

$T_1/T_2, \sigma_{T_1/T_2}$	$(T_1/T_2)^2, \sigma_{(T_1/T_2)^2}$

Упражнение 3. Определение моментов количества движения механической системы для двух положений цилиндров. Проверка закона сохранения момента количества движения.

В связи с тем, что для расчета моментов количества движения используются данные, полученные в *упражнении 1* и *упражнении 2*, в данном упражнении осуществляется лишь обработка результатов.

1. С помощью формул (3.5.4) и (3.5.6) вычислить значения ω_1 и ω_2 , используя значения x_1 (табл. 3.8), A_1, A_2, J_1 и J_2 (табл. 3.9).

2. Произвести оценку погрешностей полученных результатов по известным уже формулам для косвенных измерений. Результаты вычислений заносятся в табл. 3.12.

Таблица 3.12

Результаты обработки экспериментальных данных

$\omega_1, \sigma_{\omega_1}$	$\omega_2, \sigma_{\omega_2}$	$\omega_1 J_1, \sigma_{\omega_1 J_1}$	$\omega_2 J_2, \sigma_{\omega_2 J_2}$	$\omega_2 / \omega_1, \sigma_{(\omega_2 / \omega_1)}$

3. Вычислить моменты количества движения при двух положениях цилиндров $\omega_1 J_1$ и $\omega_2 J_2$. Провести оценку ошибок определения моментов количества движения. Результаты вычислений внести в табл. 3.12.

4. Вычислить отношение ω_2 / ω_1 . Провести оценку ошибок этой величины. Результаты вычислений внести в табл. 3.12.

5. Провести сравнение экспериментально определенных значений моментов количества движения системы тел при двух различных ее конфигурациях. Для чего на оси значений ωJ (см. рис. 3.14) отметить значения $\omega_1 J_1$ и $\omega_2 J_2$, а также стандартные от-

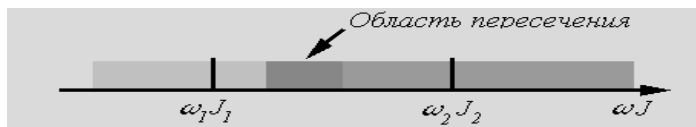


Рис. 3.14. Графическое представление результатов вычисления моментов

клонения их ошибок $\sigma_{(\omega_1 J_1)}$ и $\sigma_{(\omega_2 J_2)}$ (см. рис. 3.14). На рис. 3.14 области $\omega_1 J_1 \pm \sigma_{(\omega_1 J_1)}$ и $\omega_2 J_2 \pm \sigma_{(\omega_2 J_2)}$ имеют различную штриховку. Пересечение этих областей указывает на *выполнимость закона сохранения момента количества движения*.

6. Выполнимость закона сохранения момента количества движения согласно (3.5.2) и (3.5.14) также следует из равенства отношений ω_2 / ω_1 и $(T_1 / T_2)^2$. Поэтому необходимо провести сравнение экспериментально определенных значений этих отношений. Для чего на оси численных значений (см. рис. 3.15) отметить значения ω_2 / ω_1 и $(T_1 / T_2)^2$, а также стандартные отклонения их ошибок (см. рис. 3.15). Пересечение этих областей указывает на *выполнимость закона сохранения момента количества движения*.

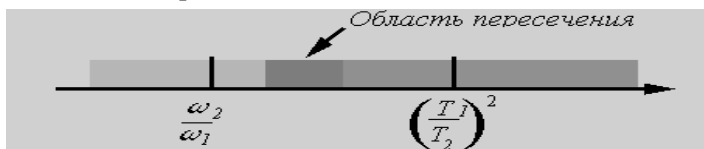


Рис.3.15. Схематическое представление выполнимости закона сохранения моментов количества движения для системы тел, исследуемых в работе.

Основные итоги работы

В результате выполнения работы должны быть определены значения моментов количества движения системы тел для двух ее конфигураций, а также осуществлена экспериментальная проверка выполнения закона сохранения момента количества движения.

Контрольные вопросы

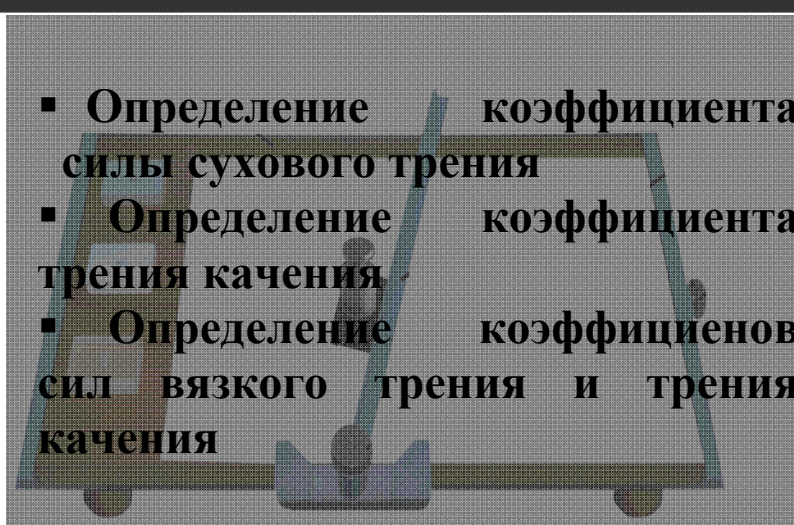
1. Сформулируйте закон сохранения импульса.
2. Сформулируйте закон сохранения момента импульса.
3. Сформулируйте закон сохранения механической энергии.
4. Сформулируйте определение момента инерции твердого тела.
5. Сформулируйте теорему Гюйгенса-Штейнера.
6. Чем обусловлены потери энергии при опускании и подъеме груза?

Литература к главе 3

1. А. Н. Матвеев. Механика и теория относительности. – М. Изд. дом «Оникс 21 век», 2003. – 432 с. Гл. 1, 2.
2. В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев. Механика. – М.: Изд. центр «Академия», 2004. – 480 с. Лекции 1 – 3.
3. С. П. Стрелков. Механика. – СПб.: «Лань», 2005. – 560 с. Гл. 1, 2.
4. Д. В. Сивухин. Общий курс физики. В пяти томах. Т. 1. Механика. – М.: ФИЗМАТЛИТ / МФТИ, 2005. – 559 с. Гл. 1, 2.
5. В. С. Русаков, А. И. Слепков, Е. А. Никанорова, Н. И. Чистякова. Механика. Методика решения задач. Учебное пособие. М.: Физический факультет МГУ, 2010. – 368 с. Гл. 1, 2.
6. Митин И. В., Русаков В. С. Анализ и обработка экспериментальных данных. Учебно-методическое пособие для студентов младших курсов. – М.: МГУ. 2002, гл. V.

СИЛЫ ТРЕНИЯ

4

- Определение коэффициента силы сухового трения
 - Определение коэффициента трения качения
 - Определение коэффициентов сил вязкого трения и трения качения
- 

Введение

Сухое (внешнее) трение – механическое сопротивление, возникающее в плоскости касания двух соприкасающихся тел при их относительном перемещении (в том числе микроскопическом). Сила сопротивления направлена противоположно относительному перемещению тел и называется силой трения.

Различают трение покоя, скольжения и качения. Если внешняя тангенциальная сила недостаточна для скольжения одного тела по поверхности другого, то возникающая при этом сила сопротивления движению называется **силой трения покоя** (или неполной силой внешнего трения). Сила трения покоя вызвана малыми (нескольких микрометров) частично обратимыми перемещениями в зоне контакта, величина которых зависит от приложенной силы и изменяется с увеличением последней от 0 до некоторого максимального значения, называемого максимальной силой трения покоя. Любое превышение внешней силы над максимальной силой трения покоя вызывает скольжение тела.

Если твердое тело скользит по поверхности, то между телом и поверхностью возникает **сила трения скольжения**.

Сила сопротивления движению является неконсервативной силой. Ее действие сопровождается выделением тепла, электризацией тел, разрушением.

Поскольку поверхности тел всегда имеют шероховатости, касание двух твердых тел происходит в дискретных областях, так называемых пятнах касания. Пятна касания – это элементарные площадки контакта, возникающие в результате упругих или пластических деформаций неровностей поверхности соприкасающихся тел. Размеры пятен касания колеблются в пределах от одного до нескольких десятков микрометров и зависят от свойств контактирующих тел и величины сил, прижимающих тела друг к другу. На пятнах касания возникают силы сцепления двух тел (адгезия, хим. связи, взаимная диффузия и др.), то есть образуются так называемые мостики.

При скольжении пятна касания мигрируют по поверхности, этот процесс сопровождается объемным деформированием приповерхностных слоев. Каждое пятно касания, т.н. фрикционная связь, существует лишь ограниченное время. Объем слоя, втянутого в деформацию тем больше, чем прочнее фрикционные связи.

Сила трения определяется двумя группами факторов, как зависящими от нормальной нагрузки, так и независящими от нее. В

широком диапазоне параметров она подчиняется закону Амонтона – Кулона.

Закон Амонтона – Кулона – эмпирический закон, описывающий свойства сил сухого трения:

1) модуль силы сухого трения покоя может принимать значения от нуля до некоторого своего максимального значения:

$$0 \leq F_{\text{п}} \leq F_{\text{max}} ;$$

2) модуль силы сухого трения скольжения равен максимальному значению модуля силы сухого трения покоя: $F_{\text{ск}} = F_{\text{max}} ;$

3) модуль силы сухого трения скольжения пропорционален модулю силы нормального давления:

$$F_{\text{ск}} = \mu N , \quad (4.1)$$

где μ – коэффициент (силы сухого) трения, не зависящий от силы нормального давления, а только от вещества и состояния поверхностей трущихся тел;

4) сила сухого трения скольжения направлена противоположно направлению скорости относительного движения тел $\mathbf{v}_{\text{отн}}$:

$$\mathbf{F}_{\text{ск}} \uparrow \downarrow \mathbf{v}_{\text{отн}} .$$

Трение качения – разновидность сухого трения, возникающего при качении тел. Рассмотрим возникновение силы трения качения на примере шара или цилиндра, катящегося по горизонтальной поверхности. Причины силы трения качения – потери на упругий гистерезис, связанный с нагрузкой катящегося тела и материала основания, работа, затрачиваемая на передеформирование материала в результате формирования валика перед катящимся телом, преодоление мостиков сцепления.

Трение качения является результатом того, что деформация поверхности и шара (цилиндра), не является абсолютно упругой. Рассмотрим случай качения абсолютно твердого тела по деформируемой поверхности. Возникновение хотя и слабых остаточных деформаций приводит к тому, что реакция поверхности опоры несимметрична относительно вертикальной плоскости, проходящей через центр шара (точка С на рис. 4.1). В результате возникает момент сил реакции, замедляющий вращение, и результирующая горизонтальная сила F_r , замедляющая поступательное движение цилиндра.

При качении по горизонтальной поверхности ускорение центра масс тела определяется только тангенциальной составляющей

силы реакции опоры F_τ (рис. 4.1), и, следовательно, изменение кинетической энергии центра масс равно работе этой силы:

$$\Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -F_\tau \Delta x, \quad (4.2)$$

где m – масса шара (цилиндра), v и Δx – скорость и перемещение его центра масс.

Изменение кинетической энергии, связанной с вращением тела относительно оси, проходящей через центр масс, определяется работой двух сил:

$$\Delta\left(\frac{J_0 \omega^2}{2}\right) = -Nk\Delta\varphi + F_\tau R \Delta\varphi. \quad (4.3)$$

Здесь J_0 – момент инерции шара (цилиндра) относительно указанной оси, ω – угловая скорость вращения, N – составляющая силы реакции опоры, перпендикулярная к недеформированной поверхности (сила нормальной реакции опоры), k – плечо этой силы относительно оси, проходящей через центр масс, R – радиус шара (цилиндра), $\Delta\varphi$ – угол его поворота. При записи уравнения (4.3) учтено, что при малых деформациях плечо тангенциальной составляющей силы реакции опоры примерно равно радиусу шара (цилиндра).

При качении тела без проскальзывания изменение координаты центра масс и угол поворота связаны уравнением кинематической связи:

$$\Delta x = R\Delta\varphi. \quad (4.4)$$

Полное изменение кинетической энергии катящегося шара (цилиндра) получаем при сложении уравнений (4.2) и (4.3). Учитывая кинематическую связь перемещения центра масс шара (цилиндра) и его угла поворота (4.4), получаем:

$$\Delta\left(\frac{mv^2}{2} + \frac{J_0 \omega^2}{2}\right) = -Nk\Delta\varphi. \quad (4.5)$$

Как видим, изменение кинетической энергии катящегося без проскальзывания тела определяется только моментом силы нор-

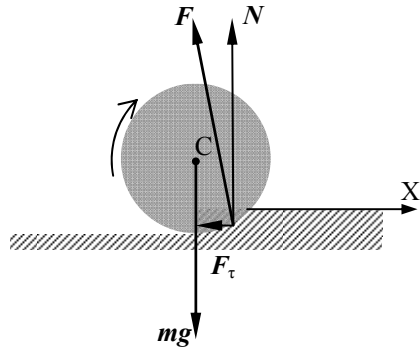


Рис. 4.1. Силы, действующие на катящийся цилиндр при наличии неупругих деформаций.

мальной реакции опоры, поэтому его принято называть моментом трения качения, а плечо этой силы k относительно оси, проходящей через центр масс – коэффициентом трения качения:

$$M_{\text{тк}} = kN. \quad (4.6)$$

Заметим, что коэффициент трения качения, в отличие от коэффициента трения скольжения, имеет размерность длины.

Для определения тангенциальной составляющей силы реакции опоры F_{τ} запишем уравнение вращательного движения шара (цилиндра) относительно оси, проходящей через центр масс и второй закон Ньютона в проекции на горизонтальную ось X:

$$J_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -M_{\text{тк}} + RF_{\tau}, \quad (4.7)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -F_{\tau}. \quad (4.8)$$

Из системы уравнений (4.4), (4.7) и (4.8) получаем дифференциальное уравнение относительно угла поворота φ :

$$(J_0 + mR^2) \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -M_{\text{тк}} \quad (4.9)$$

и связь тангенциальной составляющей силы реакции опоры с моментом трения качения:

$$F_{\tau} = \left(\frac{mR}{J_0 + mR^2} \right) M_{\text{тк}}. \quad (4.10)$$

Вязкое (внутреннее) трение. Если движение происходит в присутствии смазки, то в зоне контакта нет скачка скорости при переходе от одного тела к другому. Нет скачка скорости и вблизи тела, если оно движется в вязкой (жидкой или газообразной) среде. Силы сопротивления, возникающие в этом случае, называются **силами вязкого (внутреннего) трения** $F_{\text{в}}$.

При малой величине скорости v движения тела относительно среды

$$F_{\text{в}} = -\eta v, \quad (4.11)$$

где η – коэффициент вязкого (внутреннего) трения.

Сила вязкого трения покоя равна нулю: $F_{\text{вп}} = 0$.

Сила вязкого трения, действующая на тело, направлена противоположно скорости этого тела относительно среды.

Лабораторная работа 4.1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА СИЛЫ СУХОГО ТРЕНИЯ

Цель работы

Целью работы является изучение основных закономерностей сухого трения.

Идея эксперимента

Идея эксперимента состоит в определении коэффициента силы сухого трения из анализа направления перемещения тела при взаимодействии с движущейся шероховатой рейсиной.

Теоретическое введение

Рассмотрим особенности движения бруска, лежащего на горизонтальном столе, если его перемещение происходит под действием движущейся вдоль оси X рейсины (рис. 4.2). Найдем связь коэффициента трения μ между бруском и линейкой с углом между вектором скорости бруска и перпендикуляром к линейке.

Движение бруска без проскальзывания относительно рейсины. При движении бруска по поверхности столика в горизонтальной плоскости на него действуют силы нормальной реак-

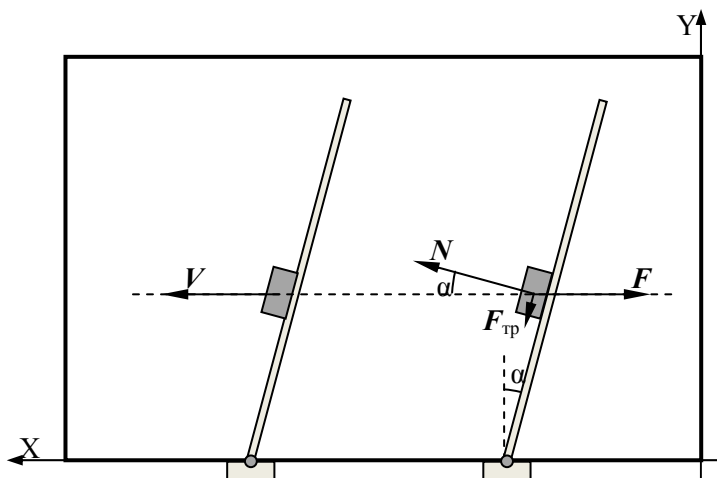


Рис. 4.2. Силы, действующие на брусок при движении без проскальзывания относительно рейсины.

ции N и трения $F_{\text{тр}}$ со стороны линейки, а также сила трения скольжения F со стороны горизонтальной поверхности, направленная противоположно скорости бруска V (см. рис. 4.2).

Вертикальные силы – сила тяжести и сила нормальной реакции столика на рисунке не указаны. Выберем инерциальную лабораторную систему отсчета, связанную со столиком. Направим оси X и Y декартовой системы координат параллельно сторонам поверхности столика так, как показано на рис. 4.2. Если брусок движется без проскальзывания относительно рейсшины, его скорость и ускорение совпадают со скоростью и ускорением рейсшины. В этом случае сила трения скольжения F , действующая на брусок со стороны бумаги, лежащей на горизонтальной поверхности столика, направлена вдоль оси X (рис. 4.2).

Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси X и Y выбранной системы координат:

$$ma = N \cos \alpha - F + F_{\text{тр}} \sin \alpha, \quad (4.1.1)$$

$$0 = N \sin \alpha - F_{\text{тр}} \cos \alpha. \quad (4.1.2)$$

В соответствии с законом Амонтона – Кулона модуль силы трения покоя удовлетворяет неравенству:

$$F_{\text{тр}} \leq \mu N. \quad (4.1.3)$$

Как видим (в соответствии с (4.1.3)), отношение модуля силы трения $F_{\text{тр}}$ к модулю силы нормальной реакции рейсшины N не зависит от ускорения бруска при отсутствии его проскальзывания относительно рейсшины и определяется только углом между вектором скорости (ускорения) бруска и нормалью к линейке рейсшины. Решая совместно уравнение (4.1.2) и неравенство (4.1.3), получаем:

$$\mu \geq \operatorname{tg} \alpha. \quad (4.1.4)$$

В случае достижения силой трения покоя максимального значения тангенс угла $\alpha = \alpha_0$ равен значению коэффициента трения между бруском и линейкой:

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha_0. \quad (4.1.5)$$

Движение бруска с проскальзыванием относительно рейсшины. В случае движения бруска с проскальзыванием относительно рейсшины направление его скорости V не совпадает с направлением скорости рейсшины – осью X (см. рис. 4.3).

Рассмотрим случай движения бруска с постоянным по направлению ускорением. На рис. 4.3 обозначен угол β между направлением скорости (ускорения) бруска и нормалью к линейке рейшины. В рассматриваемом случае угол β не изменяется в процессе движения. Выберем лабораторную систему отсчета, связанную со столиком, ось X' декартовой системы координат которой направлена вдоль направления движения бруска, а ось Y' – перпендикулярно этому направлению (см. рис. 4.3).

Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси X' и Y' выбранной системы координат:

$$ma = N \cos \beta - F + F_{\text{тр}} \sin \beta, \quad (4.1.6)$$

$$0 = N \sin \beta - F_{\text{тр}} \cos \beta. \quad (4.1.7)$$

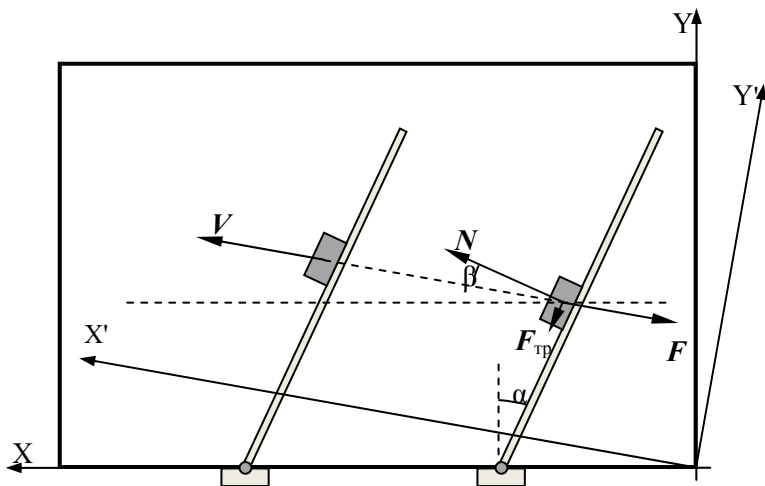


Рис. 4.3. Силы, действующие на брусок при движении с проскальзыванием относительно рейшины.

В соответствии с законом Амонтона – Кулона модуль силы трения скольжения определяется выражением:

$$F_{\text{тр}} = \mu N. \quad (4.1.8)$$

Из уравнения (4.1.7) получаем:

$$F_{\text{тр}} = N \operatorname{tg} \beta. \quad (4.1.9)$$

Подставляя (4.1.9) в закон Амонтона – Кулона (4.1.8), находим искомое выражение для коэффициента трения скольжения:

$$\mu = \operatorname{tg} \beta. \quad (4.1.10)$$

Заметим, что при движении бруска с изменяющимся по направлению ускорением полученное выражение (4.1.10) для коэффициента трения становится несправедливым. При выполнении работы необходимо убедиться в том, что движение бруска происходит вдоль прямой.

Экспериментальная установка

Экспериментальная установка (см. рис. 4.4) состоит из *столика 1*, с закрепленным (с помощью *зажима 3*) на его поверхности *листом бумаги 2*, *рейсшины 4* и набора *брусков 5*, изготовленных

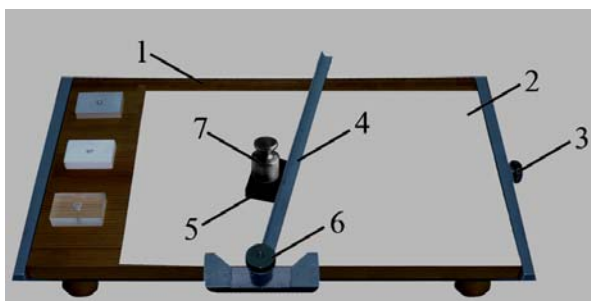


Рис.4.4. Экспериментальная установка.

из различных материалов. По горизонтальной поверхности столика может двигаться рейсшина, угол наклона которой α (рис. 4.2) легко изменять с помощью *винта 6*. Вплотную к линейке рейсшины помещают один из брусков, и начинают перемещать рейсшину так, что ее скорость направлена вдоль одной из сторон поверхности столика. При этом, в зависимости от угла наклона линейки рейсшины, брусок может двигаться либо со скоростью рейсшины, оставаясь неподвижным относительно нее, либо двигаться с проскальзыванием относительно линейки. Вес бруска можно изменять с помощью дополнительного *груза 7*.

Проведение эксперимента

На горизонтальной поверхности столика с помощью специального зажима закрепляют чистый лист бумаги для того, чтобы в дальнейшем можно было отмечать перемещение бруска относительно столика и линейки рейсшины. Рейсшину устанавливают на столике, максимально сдвинув вправо. Вплотную к линейке рейсшины, как показано на рис. 4.4, на столик кладут один из брусков.

Прижимая упор рейсшины к столику, передвигают рейсшину вдоль столика так, чтобы брусок скользил по бумаге, подталкиваемый линейкой. В процессе движения три раза отмечают карандашом положение центра бруска, останавливая его. Необходимо при этом придерживать брусок рукой, чтобы карандаш не изменял его положение. Если отмеченные точки лежат на одной прямой, то полученная прямая используется для дальнейшей обработки. Если точки не лежат на одной прямой, повторяют эксперимент, стараясь осуществлять движение бруска максимально равномерно. Заметим, что отмечать можно не только положение центра бруска, но и любого его угла.

Упражнение 1. Определение коэффициента трения из значения максимальной силы трения покоя.

Измерение

В первом упражнении следует определить коэффициент трения между поверхностью линейки и поверхностями брусков, сделанных из различных материалов, определяя угол α_0 , при котором происходит переход от движения бруска по бумаге без проскальзывания вдоль линейки рейсшины к движению с проскальзыванием вдоль линейки.

На столике закрепляют лист чистой бумаги и проводят прямую линию, параллельную ребру столика (оси X на рис. 4.2). Сдвигают рейсшину по столику вправо. Вплотную к линейке на бумагу кладут один из брусков, как показано на рис. 4.4. Угол α между линейкой и осью Y (рис. 4.2) вначале должен быть достаточно мал, чтобы при перемещении рейсшины не было проскальзывания бруска относительно линейки. Изменяя угол α , находят его значение $\alpha = \alpha_0$, при котором начинается скольжение бруска вдоль линейки рейсшины. Для определения $\operatorname{tg} \alpha_0$ рекомендуется построить прямоугольный треугольник (с катетами a и b), причем длину катета b , прилежащего к углу α_0 , рекомендуется выбрать равной $b = 20$ см. Затем измерить линейкой длину другого катета a и занести значение в табл.4.1.

Таблица 4.1.

Экспериментальные данные

$\alpha = \alpha_0$		b	σ_b	a_1	a_2	a_3	\bar{a}	σ_a	$\mu=a/b$	σ_μ
Брусок № 1	С грузом									
	Без груза									
Брусок № 2	С грузом									
	Без груза									

Эксперимент повторить не менее трех раз.

Аналогичные измерения проводят, изменив вес бруска. С этой целью на брусок устанавливается дополнительный перегрузок. Результаты измерений заносят в таблицу 4.1.

Обработка результатов

1. Вычислить среднее значение катета \bar{a} , противолежащего к углу α_0 :

$$\bar{a} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n . \quad (4.1.11)$$

2. В качестве оценки случайной погрешности прямо измеренной величины a принимается выборочное стандартное отклонение среднего арифметического:

$$S_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{n=1}^N (a_n - \bar{a})^2} . \quad (4.1.12)$$

Поскольку катет b измерялся однократно, то $S_b = 0$.

3. Рассчитать коэффициент трения:

$$\mu = \frac{\bar{a}}{b} . \quad (4.1.13)$$

4. Выборочное стандартное отклонение S_μ случайных ошибок для коэффициента трения определяется выражением:

$$S_{\mu} = \sqrt{\left(\frac{\partial \mu}{\partial a}\right)_{\bar{a}, \bar{b}}^2 S_{\bar{a}}^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial b}\right)_{\bar{a}, \bar{b}}^2 S_{\bar{b}}^2}. \quad (4.1.14)$$

5. Стандартное отклонение систематических ошибок рассчитывается по формуле:

$$\sigma_{\text{сист}\mu} = \sqrt{\left(\frac{\partial \mu}{\partial a}\right)_{\bar{a}, \bar{b}}^2 \sigma_{\text{сист}a}^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial b}\right)_{\bar{a}, \bar{b}}^2 \sigma_{\text{сист}b}^2}. \quad (4.1.15)$$

6. В предположении о независимости случайных и систематических погрешностей для величины стандартного отклонения суммарной погрешности справедлива формула:

$$\sigma_{\mu} = \sqrt{S_{\mu}^2 + \sigma_{\text{сист}\mu}^2}. \quad (4.1.16)$$

Значение коэффициента трения μ и оценки погрешностей измерений заносят в табл. 4.1.

Коэффициент трения определяют для всех брусков, входящих в комплект установки.

Упражнение 2. Определение коэффициента трения и значения силы трения скольжения.

Измерения

Во втором упражнении следует определить коэффициенты трения при скольжении брусков вдоль линейки.

На столике закрепляют чистый лист бумаги. Угол α между линейкой и осью Y (рис. 4.2) устанавливают несколько бóльшим, чем угол α_0 , определенный для различных брусков в первом упражнении. Убеждаются, что все бруски скользят вдоль линейки рейшины при ее перемещении по столику. Вплотную к линейке рейшины, предварительно сдвинутой по столику вправо, кладут один из брусков. Остро оточенным карандашом сквозь просверленное в бруске отверстие отмечают на бумаге первоначальное положение центра бруска. Медленно сдвигают рейшину влево по столику так, чтобы брусок двигался по бумаге прямолинейно. Чтобы убедиться в прямолинейности траектории, брусок в процессе движения два раза останавливают и, придерживая его рукой, отмечают положение центра бруска. Если отмеченные точки лежат на одной прямой, то полученная прямая используется для дальнейшей обработки. Если точки не лежат на одной прямой, повторяют экс-

Коэффициенты трения скольжения следует измерить при двух различных углах α , больших чем α_0 .

Аналогичные измерения проводят, изменив вес бруска. С этой целью на брусок устанавливается дополнительный перегрузок. Результаты измерений заносят в табл.4.2.

Обработка результатов

Далее следует вычислить среднее значение катета \bar{a} , значение коэффициента трения μ и оценки погрешностей измерений в соответствии с пп. 1 – 6 упражнения 1.

После проведения всех расчетов необходимо проанализировать полученные в первом и втором упражнениях результаты, сравнить их и сформулировать краткие выводы, записав их в тетради.

Основные итоги работы

В результате выполнения работы должны быть определены коэффициенты трения двух материалов двумя способами из значений максимальной силы трения покоя и значения силы трения скольжения.

Контрольные вопросы

1. Что такое сила трения?
2. Какие силы трения вам известны?
3. Причины возникновения сил трения покоя и скольжения.
4. Зависит ли коэффициент трения скольжения от массы тела?
5. Зависит ли коэффициент трения скольжения от скорости тела?

Лабораторная работа № 4.2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ

Цель работы

Определение коэффициентов трения качения для различных пар материалов.

Идея эксперимента

В работе исследуются затухающие механические колебания. По уменьшению амплитуды колебаний за определенное число периодов определяются коэффициенты трения качения.

Теоретическое введение

При качении цилиндра возникает трение качения, обусловленное тем, что деформация поверхности, по которой катится цилиндр, не является симметричной. Цилиндр как бы все время наезжает на горку. Трение качения характеризуется моментом трения качения (см. **Введение**):

$$M_{\text{тк}} = kN, \quad (4.2.1)$$

где k – коэффициент трения качения, N – нормальная составляющая силы реакции опоры.

В данной работе для экспериментального определения коэффициента трения качения k используется маятник, схема которого представлена на рис. 4.5.

Цилиндр радиусом R находится на горизонтальной плите. Стержень C с закрепленной на верхнем конце стрелкой прикреплен к цилиндру сверху. Снизу к системе прикреплен груз G . При отклонении груза от положения равновесия система может совершать колебания. Колебания будут затухающими в первую очередь из-за противодействия момента трения качения. Движение цилиндра при этом является поступательно-вращательным. Коэффициент трения качения k можно определить по скорости затухания колебаний.

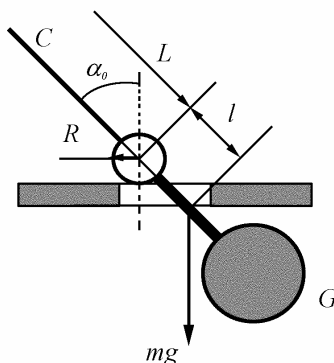


Рис. 4.5. Схема маятника.

При рассмотрении процесса колебаний, воспользуемся законом изменения механической энергии. Пусть маятник в начальный момент отклонили на угол α_0 от положения равновесия и отпустили. Через период (одно колебание) угол отклонения будет равен α_1 (см. рис. 4.6), а через n периодов – α_n соответственно. Максимальная за период потенциальная энергия маятника через n периодов становится равной

$$E_n = mgl(1 - \cos \alpha_n) = 2mgl \sin^2(\alpha_n / 2), \quad (4.2.2)$$

где m – масса маятника, l – расстояние между центром тяжести маятника и осью цилиндра.

Уменьшение потенциальной энергии за первый период равно:

$$\Delta E = 2mgl \left(\sin^2 \left(\frac{\alpha_0}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\alpha_1}{2} \right) \right). \quad (4.2.3)$$

При малых углах α выражение (4.2.3) преобразуется к виду:

$$\Delta E = \frac{mgl}{2} (\alpha_0^2 - \alpha_1^2). \quad (4.2.4)$$

Пренебрегая работой сил сопротивления воздуха и считая, что изменение энергии вызвано работой силы нормальной реакции опоры (смещенной в сторону движения при неупругих деформациях), можно записать:

$$\Delta A = M_{\text{тк}} \alpha = kN\alpha = kmg\alpha, \quad (4.2.5)$$

где ΔA – работа силы нормальной реакции опоры при повороте цилиндра на угол α .

За один полный период колебаний угол поворота составляет

$$\alpha = \alpha_0 + 2\alpha_{0,5} + \alpha_1, \quad (4.2.6)$$

где $\alpha_{0,5}$ – угол отклонения цилиндра после одного полупериода (рис. 4.6).

Считая, что в среднем

$$\alpha_{0,5} \approx \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}, \quad (4.2.7)$$

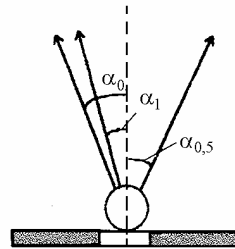


Рис. 4.6. Углы отклонения маятника от положения равновесия.

и используя соотношения (4.2.5) – (4.2.7), получаем выражение для работы силы нормальной реакции опоры за период:

$$\Delta A_1 = 2kmg(\alpha_0 + \alpha_1). \quad (4.2.8)$$

Поскольку изменение механической энергии за период (4.2.4) равно работе силы нормальной реакции опоры (4.2.8) для коэффициента трения качения получаем следующее выражение:

$$k = \frac{l}{4}(\alpha_0 - \alpha_1). \quad (4.2.9)$$

Аналогичные соотношения можно получить для следующих периодов. Для полных n периодов имеем:

$$k = \frac{l}{4n}(\alpha_0 - \alpha_n). \quad (4.2.10)$$

Таким образом, определив начальный и конечный углы отклонения цилиндра, а также подсчитав число колебаний, можно оценить коэффициент трения качения k .

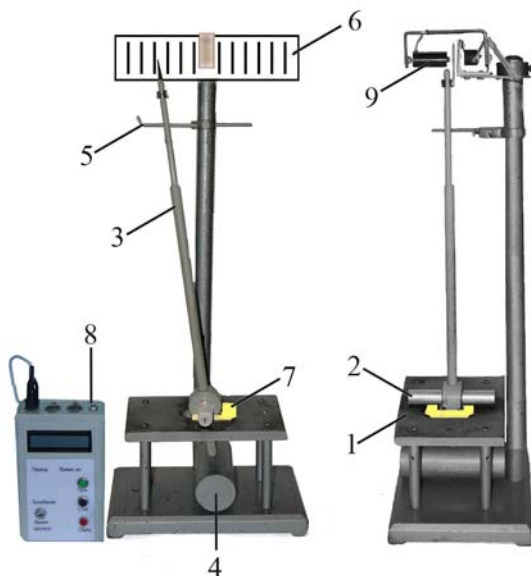


Рис. 4.7. Экспериментальная установка.

Экспериментальная установка

Схема установки представлена на рис. 4.7. На *столике 1* установлен маятник. Маятник состоит из *цилиндра 2*, сделанного из нержавеющей стали, стержня с закрепленной на его верхнем конце *стрелкой 3* и массивного *груза 4*. Начальное отклонение маятника производится вручную до *фиксатора 5*, положение которого можно менять. *Шкала 6* служит для измерения угла отклонения маятника с помощью стрелки. Положение *шкалы 6* можно регулировать, совмещая конец стрелки покоящегося маятника с нулем шкалы. Датчик, подсоединенный к *таймеру 8*, позволяет отсчитывать число полных колебаний маятника. Под *цилиндр 2* к *столику 1* могут крепиться *пластинки 7* из различных исследуемых материалов.

В связи с тем, что цилиндр при качении движется вращательно-поступательно, необходимо уточнить связь угла поворота цилиндра α с показаниями стрелки маятника, отсчитываемыми по линейной *шкале 6*.

Смещение конца стрелки можно представить в виде суммы двух смещений: поступательного движения оси цилиндра a_1 и вращательной компоненты a_2 поворота конца стрелки относительно центра цилиндра (рис. 4.8).

Для суммарного отклонения x конца стрелки от нулевого деления получим

$$x = a_1 + a_2 = R\alpha + L\text{tg}\alpha, \quad (4.2.11)$$

где R – радиус цилиндра, L – расстояние от оси цилиндра до шкалы (длина стрелки), α – угол поворота маятника.

При малых углах $\text{tg}\alpha \approx \alpha$, и можно считать, что

$$\alpha_0 = \frac{x_0}{L+R}, \quad \alpha_n = \frac{x_n}{L+R}, \quad (4.2.12)$$

где x_0 и x_n – начальная и конечная амплитуды отклонения стрелки по шкале S . Тогда расчетную формулу (4.2.10) для коэффициента трения качения можно окончательно представить в виде:

$$k = \frac{l}{4n} \frac{x_0 - x_n}{L+R}, \quad (4.2.13)$$

где n – число периодов колебаний маятника за время измерения.

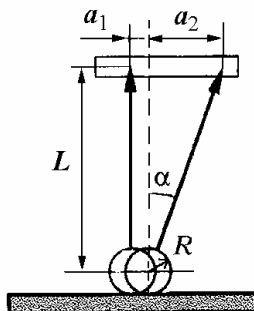


Рис. 4.8. Линейное и угловое смещение маятника от положения равновесия.

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Определение коэффициентов трения качения для различных материалов.

Измерения

1. Измерьте линейкой длину телескопической части стрелки.
2. Штангенциркулем измерьте диаметр цилиндра и определите его радиус R (рис. 4.8).
3. Определите общую длину стрелки L как сумму длины телескопической части стрелки и радиуса цилиндра.
4. Установите маятник в такое положение, чтобы в равновесии конец стрелки находился напротив нуля шкалы.

Для вычисления коэффициента трения качения по формуле (4.40) необходимо измерить начальное отклонение стрелки маятника x_0 и его отклонение x_n после n полных периодов колебаний. Удобно задать следующие начальное и конечное значения амплитуд колебаний: $x_0 = 2,5$ см и $x_n = 1$ см. При проведении эксперимента число колебаний маятника n отчитывается автоматически с помощью электронного таймера 8 и фотодатчика 9 (рис. 4.7).

5. Отклоните маятник до соприкосновения стрелки 3 с фиксатором 5. При этом конец стрелки должен находиться в положении $x_0 = 2,5$ см по шкале (положение фиксатора предварительно устанавливается).

6. После нажатия кнопки “СТАРТ” отпустите маятник. После этого таймер начинает отсчет колебаний.

7. При завершении измерений (амплитуда колебаний стрелки маятника стала равной $x_n = 1$ см), нажмите кнопку “СТОП”.

8. Данные запишите в табл. 4.3. Для каждого материала составляется своя отдельная таблица.

Таблица 4.3.

Экспериментальные данные

Материал пластинки	Номер измерения	Число колебаний n_i	\bar{n}	S_n	k	S_k
	1					
	2					
	3					
	4					
	5					

Перед следующим измерением восстановите нулевое показание таймера нажатием кнопки “Сброс”.

Отсчет в каждой серии измерений произведите не менее пяти раз. Серии измерений проведите для пластинок из трех разных материалов, входящих в комплект установки.

Обработка результатов

По экспериментальным данным для каждой серии измерений определите среднее арифметическое значение \bar{n} числа колебаний n .

Определите среднеквадратичное отклонение $S_{\bar{n}}$ числа колебаний для каждой серии измерений (каждой пластинки):

$$S_{\bar{n}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (n_i - \bar{n})^2} . \quad (4.2.14)$$

С помощью формулы (4.2.13) определите величины коэффициентов трения качения k для трех пластин.

Пренебрегая вкладом погрешностей ΔL и ΔR , оцените погрешности полученных результатов по формуле:

$$\frac{S_k}{k} = \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2} . \quad (4.2.13)$$

Для расчетов примите погрешность разности отсчетов показаний стрелки по шкале $\Delta x = 1$ мм .

Запишите полученные результаты в табл.4.3

Основные итоги работы

В результате выполнения работы должны быть получены значения коэффициентов трения качения для различных пар материалов, рассчитаны погрешности, проведен анализ причин их возникновения.

Контрольные вопросы

1. Почему возникает эффект трения качения?
2. Дайте определение коэффициента трения качения.
3. В чем отличие трения качения от трения скольжения?
4. От чего зависит коэффициент трения качения?
5. Выведите расчетную формулу (4.40).

6. Цилиндр радиуса R находится на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения скольжения поверхностей – μ , коэффициент трения качения – k . Во сколько раз отличается сила F_1 , необходимая для того, чтобы цилиндр начал движение, от силы F_2 , необходимой для начала проскальзывания? Силы приложены к центру цилиндра горизонтально.

Лабораторная работа 4.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФИЦИЕНТОВ СИЛ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ И ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ

Цель работы

Целью работы является экспериментальное определение коэффициентов сил вязкого трения и трения качения при затухающих колебаниях.

Идея эксперимента

Идея эксперимента состоит в измерении изменения амплитуды колебаний маятника при наличии затухания, обусловленного вязким трением о воздух и трением качения при соприкосновении маятника с наклонной поверхностью.

Теоретическое введение

В работе рассматриваются колебания легкого металлического шарика, подвешенного на тонкой нерастяжимой нити. Маятник может двигаться либо в вертикальной плоскости (тогда колебания затухают из-за сопротивления воздуха), либо, опираясь на наклонную плоскость (в этом случае затухание определяется в основном трением качения).

Рассмотрим вначале колебания маятника в вертикальной плоскости (см. рис. 4.9). Шарик движется под действием трех сил: силы тяжести mg , силы натяжения нити T и силы вязкого трения о воздух:

$$F_{\text{тр}} = -\beta v. \quad (4.3.1)$$

Здесь β – коэффициент вязкого трения, $v = \dot{\alpha}l$ – скорость центра масс шарика, $\dot{\alpha}$ – угловая скорость вращения вокруг оси, проходящей через точку подвеса, l – расстояние от центра шарика до точки подвеса.

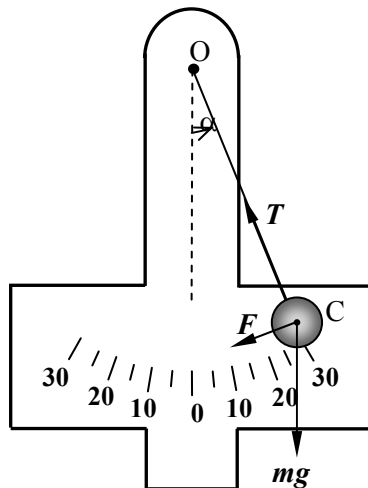


Рис. 4.9. Силы, действующие на шарик при колебаниях в вертикальной плоскости.

Уравнение моментов для маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса перпендикулярно плоскости колебаний, имеет вид:

$$J\ddot{\alpha} = -mgl \sin \alpha - \beta l^2 \dot{\alpha}, \quad (4.3.2)$$

где J – момент инерции шарика относительно указанной оси, m – его масса.

Поскольку шарик подвешен на нити, длина которой существенно превышает его линейные размеры, то при расчете момента инерции относительно указанной оси его можно считать материальной точкой:

$$J = ml^2. \quad (4.3.3)$$

Учитывая, что при малых колебаниях $\sin \alpha \approx \alpha$, преобразуем уравнение (4.3.2) к виду:

$$\ddot{\alpha} + 2\delta\dot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0. \quad (4.3.4)$$

При записи уравнения (4.3.4) введены обозначения:

$$\delta = \frac{\beta}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (4.3.5)$$

Нетрудно убедиться подстановкой, что решением уравнения (4.3.4) является функция

$$\alpha(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (4.3.6)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – частота затухающих колебаний, A_0 – амплитуда колебаний в начальный момент времени $t=0$, φ_0 – начальная фаза колебаний, определяющаяся начальными условиями.

При затухающих колебаниях амплитуда убывает во времени по экспоненциальному закону:

$$A(t) = A_0 \exp(-\delta t). \quad (4.3.7)$$

Измеряя изменение амплитуды колебаний за время t , можно рассчитать (в соответствии с (4.3.5), (4.3.7)) коэффициент вязкого трения шарика о воздух:

$$\beta = \frac{2m}{t} \ln \frac{A_0}{A}. \quad (4.3.8)$$

В случае, когда колебания маятника сопровождаются качением по наклонной поверхности, движение шарика можно представить как суперпозицию колебательного движения центра масс относительно оси, проходящей через точку подвеса O перпендикулярно плоскости колебаний, и вращения вокруг оси OC , проходящей через центр масс шарика C и лежащей в плоскости колебаний

маятника (рис. 4.9). При качении шарика по наклонной поверхности под действием силы тяжести $mg \cos \gamma$ возникают неупругие деформации. Следовательно, сила реакции поверхности F , приложенная к шарiku оказывается смещенной в сторону движения центра масс (рис. 4.10).

Основное уравнение вращательного движения запишем аналогично уравнению (4.3.2), в которое вместо силы вязкого трения входит тангенциальная составляющая силы реакции опоры $F_{\tau} = mg \cos \gamma$ при качении шарика по наклонной поверхности (см. рис. 4.11). Силой вязкого трения о воздух в этом случае можно пренебречь, поскольку (как будет показано в эксперименте) она существенно меньше F_{τ} . Если наклонная плоскость составляет угол γ с вертикалью, то проекция силы тяжести на плоскость колебаний равна $mg \cos \gamma$. Уравнение моментов для шарика относительно оси, проходящей через точку подвеса, имеет вид:

$$ml^2 \ddot{\alpha} = -mg \cos \gamma l \sin \alpha - F_{\tau} l. \quad (4.3.9)$$

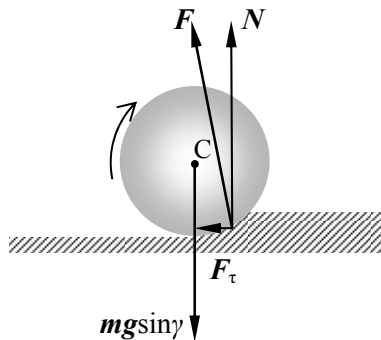


Рис. 4.10. Силы, действующие на шарик в плоскости, перпендикулярной плоскости колебаний маятника.

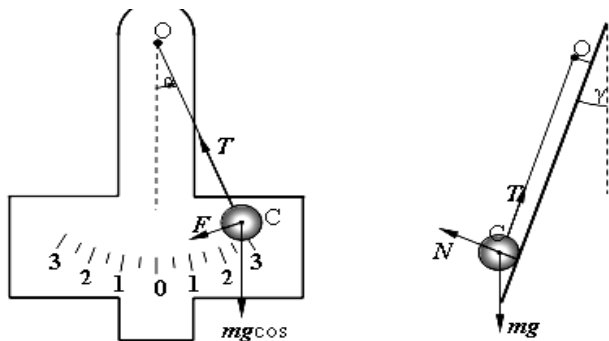


Рис. 4.11. Силы, действующие на шарик в плоскости колебаний маятника (слева) и в вертикальной плоскости (справа).

Запишем также второй закон Ньютона для центра масс шарика в проекции на направление, перпендикулярное плоскости колебаний:

$$0 = N - mg \sin \gamma. \quad (4.3.10)$$

Поворот шарика вокруг оси ОС при качении без проскальзывания будем описывать углом φ . Уравнение моментов для шарика относительно указанной оси запишем в виде:

$$J_0 \ddot{\varphi} = F_\tau r - Nk, \quad (4.3.11)$$

где r – радиус шарика, $J_0 = \frac{2}{5} mr^2$ – момент инерции шарика относительно оси, проходящей через его центр масс, k – плечо силы нормальной реакции опоры относительно оси ОС. В соответствии с определением, k является коэффициентом трения качения (см. Введение к главе 4). При записи уравнения (4.3.11) учтено, что плечо тангенциальной составляющей силы реакции опоры F_τ не сильно отличается от радиуса шарика при малых остаточных деформациях.

При движении шарика без проскальзывания скорость точки его соприкосновения с наклонной поверхностью равна нулю и, в силу принципа суперпозиции движений, складывается из скорости центра масс $v_0 = \dot{\alpha}l$ и скорости вращения вокруг оси, проходящей через центр масс $v_{\text{вр}} = \dot{\varphi}r$. Следовательно, уравнения кинематической связи в отсутствие проскальзывания имеют вид:

$$\dot{\alpha}l = \dot{\varphi}r, \quad \ddot{\alpha}l = \ddot{\varphi}r. \quad (4.3.12)$$

Исключая из системы уравнений (4.3.9) – (4.3.12) величины N , F_τ , α , и учитывая малость углов ($\sin \alpha \approx \alpha$, $\sin \varphi \approx \varphi$), получаем дифференциальное уравнение относительно угла φ :

$$\frac{7}{5} mr^2 \ddot{\varphi} = -\frac{r^2}{l} mg \cos \gamma \varphi \pm M_{\text{тк}}, \quad (4.3.13)$$

где $M_{\text{тк}} = kmg \sin \gamma$ – момент сил трения качения, в качестве которого выступает момент смещенной силы нормальной реакции опоры при неупругих деформациях.

В правой части уравнения (4.3.13) знак момента силы нормальной реакции опоры (момента трения качения) меняет знак дважды за период одновременно с изменением направления скорости центра масс шара, при этом модуль момента силы трения качения остается неизменным.

Уравнение (4.3.13) является уравнением колебаний шарика, на который в процессе движения кроме момента силы, возвращающего в положение равновесия и линейно зависящего от угла отклонения, действует постоянный по модулю момент сил трения качения. Постоянная сила (момент сил), как известно, не изменяет частоты колебаний, а только смещает положение равновесия. Уравнение (4.3.13) аналогично уравнению колебаний при наличии силы трения скольжения. В этом случае затухание колебаний возникает за счет изменения положения равновесия, то есть начальное смещение маятника от положения равновесия к началу следующего полупериода (определяющее амплитуду колебаний на полпериода) становится меньше, чем в предыдущем.

На рис. 4.13, представлена временная зависимость углового смещения шарика от положения равновесия $\varphi(t)$ при наличии момента сил трения качения. В начальный момент времени $t=0$ маятник был максимально отклонен от положения равновесия, смещенного на $\Delta\varphi$ относительно нуля. Сплошной кривой изображен график $\varphi(t)$ в течение первой половины периода. В момент времени $t = \frac{T}{2}$ направление скорости шарика изменяет знак, а, следовательно, изменяется и знак момента сил трения качения, что приводит к смещению положения равновесия на $-\Delta\varphi$. Штрихпунктирная кривая на рис. 4.13 изображает график $\varphi(t)$ в течение второй половины периода.

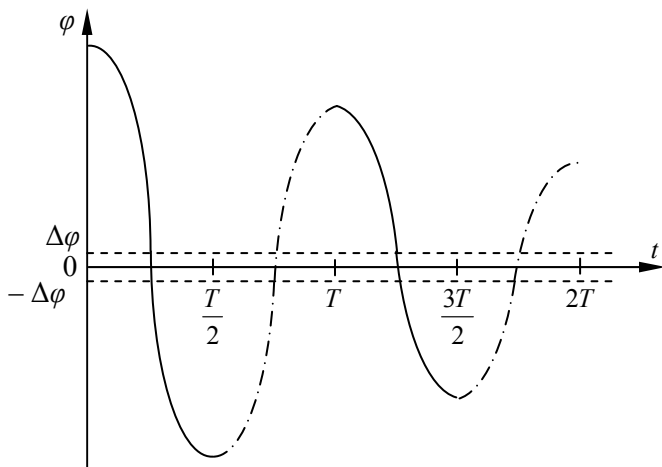


Рис. 4.13. Временная зависимость углового смещения шарика.

Уравнение (4.55) можно записать в виде:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 (\varphi \pm \Delta\varphi) = 0. \quad (4.3.14)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\omega = \sqrt{\frac{5g \cos \gamma}{7l}}, \quad (4.3.15)$$

$$\Delta\varphi = \frac{kl}{r^2} \operatorname{tg} \gamma. \quad (4.3.16)$$

Величина $\Delta\varphi$ определяет смещение положение равновесия дважды за период, при этом за период колебаний амплитуда уменьшается на $4\Delta\varphi$ (см. рис. 4.13). Используя уравнение кинематической связи (4.3.12), получаем выражение для изменения угловой амплитуды колебаний маятника за период:

$$\Delta\alpha = \frac{4k}{r} \operatorname{tg} \gamma. \quad (4.3.17)$$

Измеряя изменение угловой амплитуды $\Delta\alpha_n$ или амплитуды линейного смещения центра масс за n периодов Δx_n , можно рассчитать коэффициент трения качения по формуле:

$$k = \frac{\Delta\alpha_n r}{4n} \operatorname{ctg} \gamma = \frac{\Delta x_n r}{4nl} \operatorname{ctg} \gamma. \quad (4.3.18)$$

Экспериментальная установка

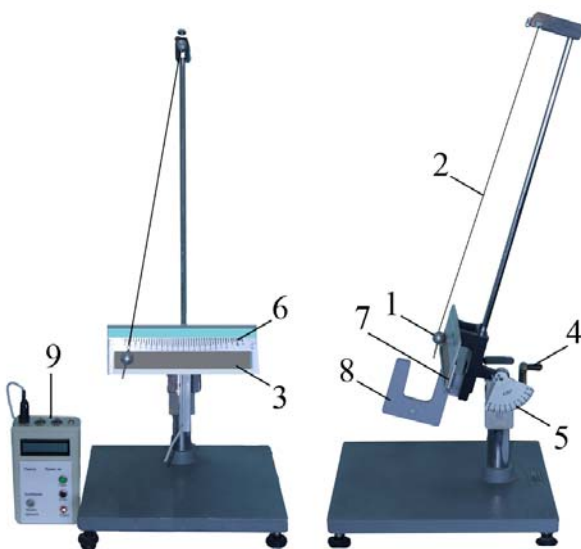


Рис.4.14. Экспериментальная установка.

Экспериментальная установка состоит из металлического шарика 1, подвешенного на тонкой легкой нити 2 и опирающегося на наклонную поверхность 3 (рис. 4.14). Угол наклона плоскости γ легко изменять с помощью винта 4, установленного справа или сзади на установке. Значение угла γ определяется по шкале 5. Нить подвеса шарика параллельна наклонной плоскости и проходит через его центр (точка С на рис. 4.11 и 4.12).

При отклонении шарика от положения равновесия или сообщения ему начальной скорости шарик совершает затухающие колебания, причем со стороны наклонной поверхности на него действует сила трения. По наклонной поверхности шарик при этом может катиться как с проскальзыванием, так и без проскальзывания.

В работе измеряется изменение угла отклонения нити маятника от положения равновесия α по шкале 6 (рис. 4.14) и, исходя из полученных значений угла, рассчитываются коэффициенты вязкого трения шарика о воздух и трения качения шарика о наклонную поверхность. На наклонной поверхности имеется паз, в который можно вставлять пластины 7 из различных материалов: стекла, металла, резины, для которых проводятся измерения коэффициентов сил трения качения. При измерении коэффициента вязкого трения плоскость, по которой катится шарик маятника, устанавливается вертикально ($\gamma=0$). В этом случае нет соприкосновения шарика с поверхностью, и затухание колебаний вызвано только сопротивлением воздуха. Время колебаний измеряется таймером 9 (рис. 4.14) включение и выключение которого осуществляется при прохождении маятником «световых ворот» 8.

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Определение коэффициента вязкого трения.

Измерения

В первом упражнении следует определить коэффициент вязкого трения шарика о воздух при колебаниях маятника в вертикальной плоскости. Для этого поворачивают винт, устанавливая значение угла $\gamma = 0$. Если после установки вертикального положения шарик при колебаниях касается плоскости, необходимо вы-

двинуть пластину, для которой во втором упражнении производится измерение коэффициента трения качения.

Затем отклоняют маятник на небольшой угол, при этом начальное линейное смещение центра масс A_0 должно составлять 1,5 – 2 см. С помощью таймера измеряют время t , за которое амплитуда колебаний уменьшится до A (на 1 см.) Линейные размеры маятника и масса шарика указаны на установке. Измерения следует повторить не менее трех раз и занести значения амплитуд колебаний маятника и время колебаний в табл. 4.4.

Если сразу после запуска системы наблюдаются высокочастотные колебания в виде дрожания шарика, то следует возбуждать колебания с амплитудой несколько большей, чем выбранная для расчета. При этом включение таймера произвести в тот момент, когда амплитуда станет равной заданной для расчета. К этому моменту времени высокочастотные колебания должны полностью затухнуть.

Обработка результатов

После проведения измерений следует рассчитать по формуле (4.3.8) коэффициент вязкого трения и оценить погрешности эксперимента, используя для расчетов формулы, приведенные после описания упражнений в разделе «Оценка погрешностей эксперимента».

Таблица 4.4

Экспериментальные данные

№	A_0	σ_{A_0}	A	\bar{A}	σ_A	t	\bar{t}	σ_t	β	σ_β
1										
2										
3										

Упражнение 2. Определение коэффициента трения качения.

Во втором упражнении следует определить коэффициенты сил трения качения для различных пластин, входящих в комплект установки.

Измерение

В паз вставляют одну из пластин – металлическую, стеклянную или резиновую. Угол отклонения плоскости пластины от вер-

тикали устанавливается равным $\gamma = 10^\circ$ с помощью винта, находящегося справа или сзади на установке.

Для покоящегося шарика положение нити маятника должно соответствовать нулевому значению на шкале отсчета угла отклонения маятника. Если угол не равен нулю, то необходимо соответствующим образом сместить шкалу.

При выполнении второго упражнения следует обращать внимание на правильный выбор начального отклонения маятника при заданном угле наклона – шарик должен катиться по пластине без проскальзывания (в первую очередь это относится к наивысшим точкам траектории шарика).

Далее измеряют с помощью таймера число n периодов колебаний маятника, за которые амплитуда колебаний уменьшится на $\Delta\alpha_n$. Измерения следует повторить не менее трех раз и занести значения измеренных величин в табл. 4.5. Радиус шарика определяют с помощью штангенциркуля или используют значение, указанное на установке.

Обработка результатов

С помощью формулы (4.3.18) следует рассчитать коэффициент трения качения и оценить погрешности эксперимента, используя для расчетов формулы, приведенные после описания упражнений в разделе «Оценка погрешностей эксперимента».

Таблица 4.5

Экспериментальные данные

Пластина № 1									
№	n	\bar{n}	σ_n	$\Delta\alpha_n$	$\sigma_{\Delta\alpha}$	γ	σ_γ	k	σ_k
1									
2									
3									

Далее устанавливают угол наклона плоскости пластины, равным $\gamma = 20^\circ$ и повторяют измерения.

Затем следует заменить пластину на другую, входящую в комплект установки, и провести измерение коэффициента трения качения для двух углов наклона плоскости пластины.

Результаты измерений внести в табл. 4.5.

После проведения всех расчетов необходимо проанализировать полученные в первом и втором упражнениях результаты, сравнить полученные значения коэффициентов трения с таблич-

ными значениями, сформулировать краткие выводы и записать их в тетради.

Оценка погрешностей эксперимента. Основные формулы.

Измеряемые в данной задаче физические величины – коэффициенты вязкого трения и трения качения, являются функциями нескольких прямо измеряемых величин. Погрешность для коэффициентов трения следует оценивать по формулам для косвенных измерений.

Выборочное стандартное отклонение S_k случайных ошибок для коэффициента трения определяется выражением:

$$S_k = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial a}\right)_{\bar{a}, \bar{b}}^2 S_a^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial b}\right)_{\bar{a}, \bar{b}}^2 S_b^2}, \quad (4.3.19)$$

где k – коэффициент трения (вязкого трения или трения качения), a и b – прямо измеренные величины (время, амплитуда колебаний, число периодов колебаний и т.д.)

В качестве оценки случайной погрешности прямо измеренной величины a принимается выборочное стандартное отклонение среднего арифметического:

$$\bar{a} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n, \quad (4.3.20)$$

$$S_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{n=1}^N (a_n - \bar{a})^2}. \quad (4.3.21)$$

Если величина a или b измеряется однократно, то случайная погрешность принимается равной нулю.

Стандартное отклонение систематических ошибок рассчитывается по формуле:

$$\sigma_{\text{сист}k} = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial a}\right)_{\bar{a}, \bar{b}}^2 \sigma_{\text{сист}a}^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial b}\right)_{\bar{a}, \bar{b}}^2 \sigma_{\text{сист}b}^2}. \quad (4.3.22)$$

В предположении о независимости случайных и систематических погрешностей для величины стандартного отклонения суммарной погрешности справедлива формула:

$$\sigma_k = \sqrt{S_k^2 + \sigma_{\text{сист}k}^2}. \quad (4.3.23)$$

Основные итоги работы

В результате выполнения работы должны быть определены коэффициенты вязкого трения и трения качения для двух материалов.

Контрольные вопросы

1. Что такое сила трения?
2. Какие силы трения вам известны?
3. Причины возникновения сил трения покоя и скольжения.
4. Причины возникновения трения качения.
5. Чему равна сила вязкого трения?
6. Чему равен коэффициент трения качения?

Литература к главе 4

1. А. Н. Матвеев. Механика и теория относительности. – М. Изд. дом «Оникс 21 век», 2003. Гл. 12.
2. В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев. Механика. – М.: Физматлит, 2011. Лекция 3.
3. С. П. Стрелков. Механика. – СПб.: «Лань», 2005. Гл. 5, 8.
4. Д. В. Сивухин. Общий курс физики. В пяти томах. Т. 1. Механика. – М.: ФИЗМАТЛИТ / МФТИ, 2005.
5. С. Э. Хайкин. Физические основы механики. – СПб.: «Лань», 2008. Гл. 7.
6. В. С. Русаков, А. И. Слепков, Е. А. Никанорова, Н. И. Чистякова. Механика. Методика решения задач. Учебное пособие. М.: Физический факультет МГУ, 2010. Гл. 2, 7, 8.
7. Митин И. В., Русаков В. С. Анализ и обработка экспериментальных данных. Учебно-методическое пособие для студентов младших курсов. – М.: МГУ. 2002.