

Глава 4. Силы трения.

Введение

Сухое (внешнее) трение – механическое сопротивление, возникающее в плоскости касания двух соприкасающихся тел при их относительном перемещении (в том числе микроскопическом). Сила сопротивления направлена противоположно относительному перемещению тел и называется силой трения.

Различают трение покоя, скольжения и качения. Если внешняя тангенциальная сила недостаточна для скольжения одного тела по поверхности другого, то возникающая при этом сила сопротивления движению называется **силой трения покоя** (или неполной силой внешнего трения). Сила трения покоя вызвана малыми (~ нескольких микрометров) частично обратимыми перемещениями в зоне контакта, величина которых зависит от приложенной силы и изменяется с увеличением последней от 0 до некоторого максимального значения, называемого максимальной силой трения покоя. Любое превышение внешней силы над максимальной силой трения покоя вызывает скольжение тела.

Если твердое тело скользит по поверхности, то между телом и поверхностью возникает **сила трения скольжения**.

Сила сопротивления движению является неконсервативной силой. Ее действие сопровождается выделением тепла, электризацией тел, разрушением.

Поскольку поверхности тел всегда имеют шероховатости, касание двух твердых тел происходит в дискретных областях, так называемых пятнах касания. Пятна касания – это элементарные площадки контакта, возникающие в результате упругих или пластических деформаций неровностей поверхности соприкасающихся тел. Размеры пятен касания колеблются в пределах от одного до нескольких десятков микрометров и зависят от свойств контактирующих тел и величины сил, прижимающих тела друг к другу. На пятнах касания возникают силы сцепления двух тел (адгезия, хим. связи, взаимная диффузия и др.), то есть образуются так называемые мостики.

При скольжении пятна касания мигрируют по поверхности, этот процесс сопровождается объемным деформированием приповерхностных слоев. Каждое пятно касания, т.н. фрикционная связь, существует лишь ограниченное время. Объем слоя, втянутого в деформацию тем больше, чем прочнее фрикционные связи.

Сила трения определяется двумя группами факторов, как зависящими от нормальной нагрузки, так и независящими от нее. В широком диапазоне параметров она подчиняется закону Амонтона – Кулона.

Закон Амонтона – Кулона – эмпирический закон, описывающий свойства сил сухого трения:

1) модуль силы сухого трения покоя может принимать значения от нуля до некоторого своего максимального значения: $0 \leq F_{\text{п}} \leq F_{\text{max}}$;

2) модуль силы сухого трения скольжения равен максимальному значению модуля силы сухого трения покоя: $F_{\text{ск}} = F_{\text{max}}$;

3) модуль силы сухого трения скольжения пропорционален модулю силы нормального давления:

$$F_{\text{ск}} = \mu N, \quad (4.1)$$

где μ – коэффициент (силы сухого) трения, не зависящий от силы нормального давления, а только от вещества и состояния поверхностей трущихся тел;

4) сила сухого трения скольжения направлена противоположно направлению скорости относительного движения тел $v_{\text{отн}}$:

$$F_{\text{ск}} \uparrow \downarrow v_{\text{отн}}.$$

Трение качения – разновидность сухого трения, возникающего при качении тел. Рассмотрим возникновение силы трения качения на примере шара или цилиндра, катящегося по горизонтальной поверхности. Причины силы трения качения – потери на упругий гистерезис, связанный с нагрузкой катящегося тела и материала основания, работа, затрачиваемая на передеформирование материала в результате формирования валика перед катящимся телом, преодоление мостиков сцепления.

Трение качения является результатом того, что деформация поверхности и шара (цилиндра), не является абсолютно упругой. Рассмотрим случай качения абсолютно твердого тела по деформируемой поверхности. Возникновение хотя и слабых остаточных деформаций приводит к тому, что реакция поверхности опоры несимметрична относительно вертикальной плоскости, проходящей через центр шара (точка С на рис. 4.1). В результате возникает момент сил реакции, замедляющий вращение, и

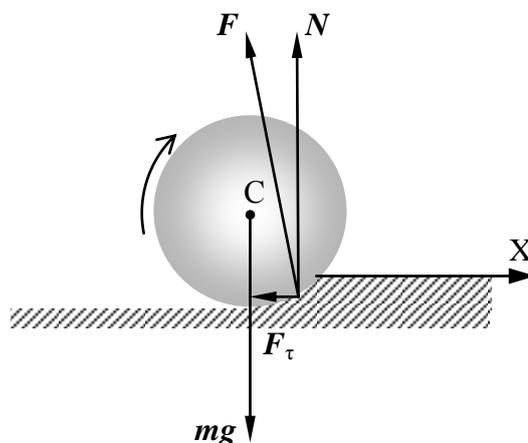


Рис. 4.1. Силы, действующие на катящийся шар при наличии неупругих деформаций

результатирующая горизонтальная сила F_τ , замедляющая поступательное движение цилиндра.

При качении по горизонтальной поверхности ускорение центра масс тела определяется только тангенциальной составляющей силы реакции опоры F_τ (рис. 4.1), и, следовательно, изменение кинетической энергии центра масс равно работе этой силы:

$$\Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -F_\tau\Delta x, \quad (4.2)$$

где m – масса шара (цилиндра), v и Δx – скорость и перемещение его центра масс.

Изменение кинетической энергии, связанной с вращением тела относительно оси, проходящей через центр масс, определяется работой двух сил:

$$\Delta\left(\frac{J_0\omega^2}{2}\right) = -Nk\Delta\varphi + F_\tau R\Delta\varphi. \quad (4.3)$$

Здесь J_0 – момент инерции шара (цилиндра) относительно указанной оси, ω – угловая скорость вращения, N – составляющая силы реакции опоры, перпендикулярная к недеформированной поверхности (сила нормальной реакции опоры), k – плечо этой силы относительно оси, проходящей через центр масс, R – радиус шара (цилиндра), $\Delta\varphi$ – угол его поворота. При записи уравнения (4.3) учтено, что при малых деформациях плечо тангенциальной составляющей силы реакции опоры примерно равно радиусу шара (цилиндра).

При качении тела без проскальзывания изменение координаты центра масс и угол поворота связаны уравнением кинематической связи:

$$\Delta x = R\Delta\varphi. \quad (4.4)$$

Полное изменение кинетической энергии катящегося шара (цилиндра) получаем при сложении уравнений (4.2) и (4.3). Учитывая кинематическую связь перемещения центра масс шара (цилиндра) и его угла поворота (4.4), получаем:

$$\Delta\left(\frac{mv^2}{2} + \frac{J_0\omega^2}{2}\right) = -Nk\Delta\varphi. \quad (4.5)$$

Как видим, изменение кинетической энергии катящегося без проскальзывания тела определяется только моментом силы нормальной реакции опоры, поэтому его принято называть моментом трения качения, а плечо этой силы k относительно оси, проходящей через центр масс – коэффициентом трения качения:

$$M_{\text{тк}} = kN. \quad (4.6)$$

Заметим, что коэффициент трения качения, в отличие от коэффициента трения скольжения, имеет размерность длины.

Для определения тангенциальной составляющей силы реакции опоры F_τ запишем уравнение вращательного движения шара (цилиндра)

относительно оси, проходящей через центр масс и второй закон Ньютона в проекции на горизонтальную ось X:

$$J_0 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -M_{mk} + RF_{\tau}, \quad (4.7)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -F_{\tau}. \quad (4.8)$$

Из системы уравнений (4.4), (4.7) и (4.8) получаем дифференциальное уравнение относительно угла поворота φ :

$$J_0 + mR^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -M_{\text{тк}} \quad (4.9)$$

и связь тангенциальной составляющей силы реакции опоры с моментом трения качения:

$$F_{\tau} = \frac{mR}{J_0 + mR^2} M_{\text{тк}}. \quad (4.10)$$

Вязкое (внутреннее) трение. Если движение происходит в присутствии смазки, то в зоне контакта нет скачка скорости при переходе от одного тела к другому. Нет скачка скорости и вблизи тела, если оно движется в вязкой (жидкой или газообразной) среде. Силы сопротивления, возникающие в этом случае, называются **силами вязкого (внутреннего) трения F_v** .

При малой величине скорости v движения тела относительно среды

$$F_v = -\eta v, \quad (4.11)$$

где η – коэффициент вязкого (внутреннего) трения.

Сила вязкого трения покоя равна нулю: $F_{vп} = 0$.

Сила вязкого трения, действующая на тело, направлена противоположно скорости этого тела относительно среды.

4.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА СИЛЫ СУХОГО ТРЕНИЯ

Цель работы

Целью работы является изучение основных закономерностей сухого трения.

Идея эксперимента

Идея эксперимента состоит в определении коэффициента силы сухого трения из анализа направления перемещения тела при взаимодействии с движущейся шероховатой рейшиной.

Теоретическое введение

Рассмотрим особенности движения бруска, лежащего на горизонтальном столе, если его перемещение происходит под действием движущейся вдоль оси X рейшины (рис. 4.2). Найдем связь коэффициента трения μ между бруском и линейкой с углом между вектором скорости бруска и перпендикуляром к линейке.

1. Движение бруска без проскальзывания относительно рейшины.

При движении бруска по поверхности столика в горизонтальной

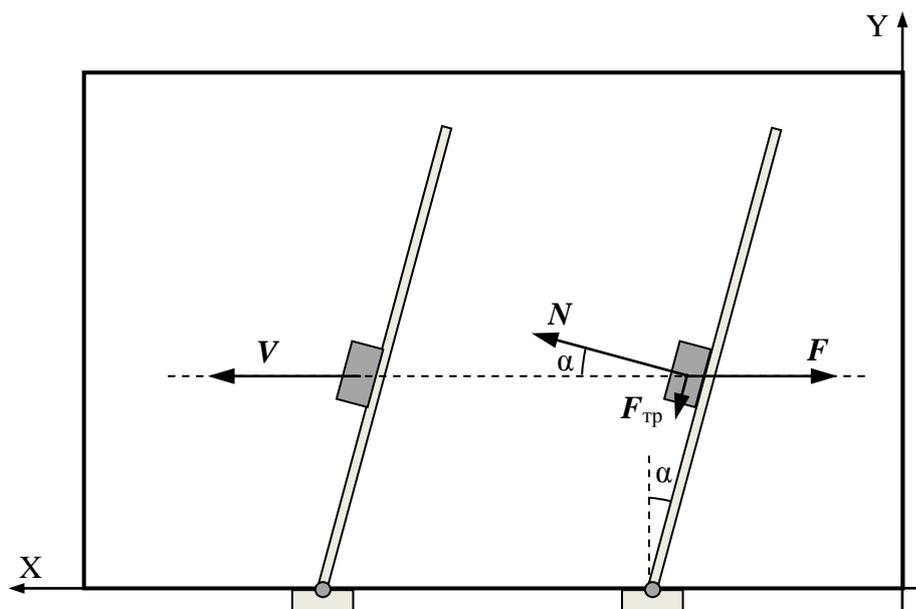


Рис. 4.2. Силы, действующие на брусок при движении без проскальзывания относительно рейшины

плоскости на него действуют силы нормальной реакции N и трения $F_{\text{тр}}$ со стороны линейки, а также сила трения скольжения F со стороны горизонтальной поверхности, направленная противоположно скорости бруска V (см. рис. 4.2).

Вертикальные силы – сила тяжести и сила нормальной реакции столика на рисунке не указаны. Выберем инерциальную лабораторную систему отсчета, связанную со столиком. Направим оси X и Y декартовой системы координат параллельно сторонам поверхности столика так, как показано на рис. 4.2. Если брусок движется без проскальзывания относительно рейсшины, его скорость и ускорение совпадают со скоростью и ускорением рейсшины. В этом случае сила трения скольжения F , действующая на брусок со стороны бумаги, лежащей на горизонтальной поверхности столика, направлена вдоль оси X (рис. 4.2).

Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси X и Y выбранной системы координат:

$$ma = N \cos \alpha - F + F_{\text{тр}} \sin \alpha, \quad (4.12)$$

$$0 = N \sin \alpha - F_{\text{тр}} \cos \alpha. \quad (4.13)$$

В соответствии с законом Амонтона – Кулона модуль силы трения покоя удовлетворяет неравенству:

$$F_{\text{тр}} \leq \mu N. \quad (4.14)$$

Как видим (в соответствии с (4.13)), отношение модуля силы трения $F_{\text{тр}}$ к модулю силы нормальной реакции рейсшины N не зависит от ускорения бруска при отсутствии его проскальзывания относительно рейсшины и определяется только углом между вектором скорости (ускорения) бруска и нормалью к линейке рейсшины. Решая совместно уравнение (4.13) и неравенство (4.14), получаем:

$$\mu \geq \text{tg } \alpha. \quad (4.15)$$

В случае достижения силой трения покоя максимального значения тангенс угла $\alpha = \alpha_0$ равен значению коэффициента трения между бруском и линейкой:

$$\mu = \text{tg } \alpha_0. \quad (4.16)$$

2. Движение бруска с проскальзыванием относительно рейсшины.

В случае движения бруска с проскальзыванием относительно рейсшины направление его скорости V не совпадает с направлением скорости рейсшины – осью X (см. рис. 4.3).

Рассмотрим случай движения бруска с постоянным по направлению ускорением. На рис. 4.3 обозначен угол β между направлением скорости (ускорения) бруска и нормалью к линейке рейсшины. В рассматриваемом случае угол β не изменяется в процессе движения. Выберем лабораторную систему отсчета, связанную со столиком, ось X' декартовой

системы координат которой направлена вдоль направления движения бруска, а ось Y' – перпендикулярно этому направлению (см. рис. 4.3).

Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси X' и Y' выбранной системы координат:

$$ma = N \cos \beta - F + F_{\text{тр}} \sin \beta, \quad (4.17)$$

$$0 = N \sin \beta - F_{\text{тр}} \cos \beta. \quad (4.18)$$

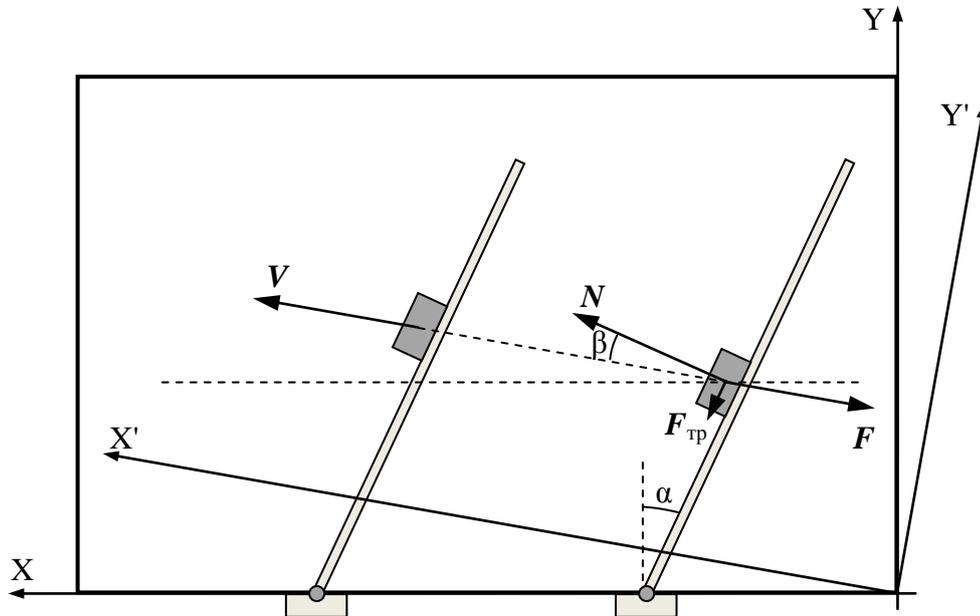


Рис. 4.3. Силы, действующие на брусок при движении с проскальзыванием относительно рейшины

В соответствии с законом Амонтона – Кулона модуль силы трения скольжения определяется выражением:

$$F_{\text{тр}} = \mu N. \quad (4.19)$$

Из уравнения (4.18) получаем:

$$F_{\text{тр}} = N \operatorname{tg} \beta. \quad (4.20)$$

Подставляя (4.20) в закон Амонтона – Кулона (4.19), находим искомое выражение для коэффициента трения скольжения:

$$\mu = \operatorname{tg} \beta. \quad (4.21)$$

Заметим, что при движении бруска с изменяющимся по направлению ускорением полученное выражение (4.21) для коэффициента трения становится несправедливым. При выполнении работы необходимо убедиться в том, что движение бруска происходит вдоль прямой.

Экспериментальная установка

Экспериментальная установка (см. рис. 4.4) состоит из *столика 1*, с закрепленным (с помощью *зажима 3*) на его поверхности *листом бумаги 2*, *рейшины 4* и набора *брусков 5*, изготовленных из различных

материалов. По горизонтальной поверхности столика может двигаться рейсшина, угол наклона которой α (рис. 4.2) легко изменять с помощью

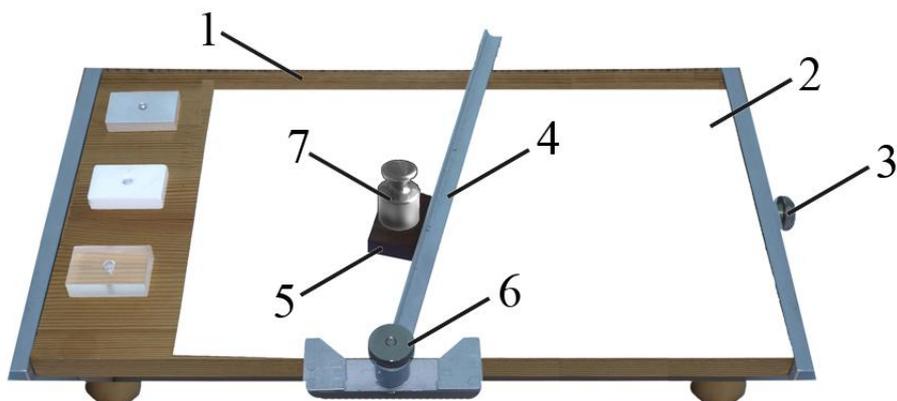


Рис.4.4 Экспериментальная установка

винта 6. Вплотную к линейке рейсшины помещают один из брусков, и начинают перемещать рейсшину так, что ее скорость направлена вдоль одной из сторон поверхности столика. При этом, в зависимости от угла наклона линейки рейсшины, брусок может двигаться либо со скоростью рейсшины, оставаясь неподвижным относительно нее, либо двигаться с проскальзыванием относительно линейки. Вес бруска можно изменять с помощью дополнительного *груза 7*.

Проведение эксперимента

На горизонтальной поверхности столика с помощью специального зажима закрепляют чистый лист бумаги для того, чтобы в дальнейшем можно было отмечать перемещение бруска относительно столика и линейки рейсшины. Рейсшину устанавливают на столике, максимально сдвинув вправо. Вплотную к линейке рейсшины, как показано на рис. 4.4, на столик кладут один из брусков. Прижимая упор рейсшины к столику, передвигают рейсшину вдоль столика так, чтобы брусок скользил по бумаге, подталкиваемый линейкой. В процессе движения три раза отмечают карандашом положение центра бруска, останавливая его. Необходимо при этом придерживать брусок рукой, чтобы карандаш не изменял его положение. Если отмеченные точки лежат на одной прямой, то полученная прямая используется для дальнейшей обработки. Если точки не лежат на одной прямой, повторяют эксперимент, стараясь осуществлять движение бруска максимально равномерно. Заметим, что отмечать можно не только положение центра бруска, но и любого его угла.

Упражнение 1. Определение коэффициента трения из значения максимальной силы трения покоя

В первом упражнении следует определить коэффициент трения между поверхностью линейки и поверхностями брусков, сделанных из различных материалов, определяя угол α_0 , при котором происходит переход от движения бруска по бумаге без проскальзывания вдоль линейки рейсшины к движению с проскальзыванием вдоль линейки.

На столике закрепляют лист чистой бумаги и проводят прямую линию, параллельную ребру столика (оси X на рис. 4.2). Сдвигают рейшину по столику вправо. Вплотную к линейке на бумагу кладут один из брусков, как показано на рис. 4.4. Угол α между линейкой и осью Y (рис. 4.2) вначале должен быть достаточно мал, чтобы при перемещении рейшины не было проскальзывания бруска относительно линейки. Изменяя угол α , находят его значение $\alpha = \alpha_0$, при котором начинается скольжение бруска вдоль линейки рейсшины. Для определения $\operatorname{tg} \alpha_0$ рекомендуется построить прямоугольный треугольник (с катетами a и b), причем длину катета b , прилежащего к углу α_0 , рекомендуется выбрать равной $b = 20$ см. Затем измерить линейкой длину другого катета a и занести значение в таблицу 4.1.

Таблица 4.1.

$\alpha = \alpha_0$		b	σ_b	a_1	a_2	a_3	\bar{a}	σ_a	$\mu = \frac{a}{b}$	σ_μ
Брусок № 1	С грузом									
	Без груза									
Брусок № 2	С грузом									
	Без груза									

Эксперимент повторить не менее трех раз.

Аналогичные измерения проводят, изменив вес бруска. С этой целью на брусок устанавливается дополнительный перегрузок. Результаты измерений заносят в таблицу 4.1.

Обработка результатов

1. Вычислить среднее значение катета \bar{a} , противолежащего к углу α_0 :

$$\bar{a} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n . \quad (4.22)$$

2. В качестве оценки случайной погрешности прямо измеренной величины a принимается выборочное стандартное отклонение среднего арифметического:

$$S_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{n=1}^N (a_n - \bar{a})^2} . \quad (4.23)$$

Поскольку катет b измерялся однократно, то $S_b = 0$.

3. Рассчитать коэффициент трения:

$$\mu = \frac{\bar{a}}{b} . \quad (4.24)$$

4. Выборочное стандартное отклонение S_{μ} случайных ошибок для коэффициента трения определяется выражением:

$$S_{\mu} = \sqrt{\left(\frac{\partial \mu}{\partial a}\right)_{\bar{a}, \bar{b}}^2 S_{\bar{a}}^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial b}\right)_{\bar{a}, \bar{b}}^2 S_b^2} . \quad (4.25)$$

5. Стандартное отклонение систематических ошибок рассчитывается по формуле:

$$\sigma_{\text{сист}\mu} = \sqrt{\left(\frac{\partial \mu}{\partial a}\right)_{\bar{a}, \bar{b}}^2 \sigma_{\text{сист}a}^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial b}\right)_{\bar{a}, \bar{b}}^2 \sigma_{\text{сист}b}^2} . \quad (4.26)$$

6. В предположении о независимости случайных и систематических погрешностей для величины стандартного отклонения суммарной погрешности справедлива формула:

$$\sigma_{\mu} = \sqrt{S_{\mu}^2 + \sigma_{\text{сист}\mu}^2} . \quad (4.27)$$

Значение коэффициента трения μ и оценки погрешностей измерений заносят в таблицу 4.1.

Коэффициент трения определяют для всех брусков, входящих в комплект установки.

Упражнение 2. Определение коэффициента трения из значения силы трения скольжения

Во втором упражнении следует определить коэффициенты трения при скольжении брусков вдоль линейки.

На столике закрепляют чистый лист бумаги. Угол α между линейкой и осью Y (рис. 4.2) устанавливают несколько бóльшим, чем угол α_0 , определенный для различных брусков в первом упражнении. Убеждаются, что все бруски скользят вдоль линейки рейсшины при ее перемещении по столику. Вплотную к линейке рейсшины, предварительно сдвинутой по столику вправо, кладут один из брусков. Остро оточенным карандашом сквозь просверленное в бруске отверстие отмечают на бумаге первоначальное положение центра бруска. Медленно сдвигают рейсшину

влево по столику так, чтобы брусок двигался по бумаге прямолинейно. Чтобы убедиться в прямолинейности траектории, брусок в процессе движения два раза останавливают и, придерживая его рукой, отмечают положение центра бруска. Если отмеченные точки лежат на одной прямой, то полученная прямая используется для дальнейшей обработки. Если точки не лежат на одной прямой, повторяют эксперимент, стараясь осуществлять движение бруска максимально равномерно. После этого на бумаге строят угол β между перемещением центра бруска и нормалью к поверхности линейки (см. рис. 4.3) и определяют коэффициент трения $\mu = \operatorname{tg}\beta$, измеряя катеты соответствующего треугольника (аналогично упражнению 1). Результаты всех измерений заносят в таблицу 4.2.

Коэффициенты трения скольжения следует измерить при двух различных углах α , больших чем α_0 .

Таблица 4.2.

		b	σ_b	a_1	a_2	a_3	\bar{a}	σ_a	$\mu = \frac{a}{b}$	σ_μ
$\alpha = \alpha_1$										
Брусок № 1	С грузом									
	Без груза									
Брусок № 2	С грузом									
	Без груза									
$\alpha = \alpha_2$										
Брусок № 1	С грузом									
	Без груза									
Брусок № 2	С грузом									
	Без груза									

Аналогичные измерения проводят, изменив вес бруска. С этой целью на брусок устанавливается дополнительный перегрузок. Результаты измерений заносят в таблицу 4.2.

Обработка результатов

Далее следует вычислить среднее значение катета \bar{a} , значение коэффициента трения μ и оценки погрешностей измерений в соответствии с пп. 1 – 6 упражнения 1.

После проведения всех расчетов необходимо проанализировать полученные в первом и втором упражнениях результаты, сравнить их и сформулировать краткие выводы, записав их в тетради.

Контрольные вопросы

1. Что такое сила трения?
2. Какие силы трения вам известны?
3. Причины возникновения сил трения покоя и скольжения.
4. Зависит ли коэффициент трения скольжения от массы тела?
5. Зависит ли коэффициент трения скольжения от скорости тела?

4.2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ

Цель работы

Определение коэффициентов трения качения для различных пар материалов.

Идея эксперимента

В работе исследуются затухающие механические колебания. По уменьшению амплитуды колебаний за определенное число периодов определяются коэффициенты трения качения.

Теория

При качении цилиндра возникает трение качения, обусловленное тем, что деформация поверхности, по которой катится цилиндр, не является симметричной. Цилиндр как бы все время наезжает на горку. Трение качения характеризуется моментом трения качения (см. введение):

$$M_{\text{тк}} = kN, \quad (4.28)$$

где k – коэффициент трения качения, N – нормальная составляющая силы реакции опоры.

В данной работе для экспериментального определения коэффициента трения качения k используется маятник, схема которого представлена на рис. 4.5.

Цилиндр радиусом R находится на горизонтальной плите. Стержень C с закрепленной на верхнем конце стрелкой прикреплен к цилиндру сверху. Снизу к системе прикреплен груз G . При отклонении груза от положения равновесия система может совершать колебания. Колебания будут затухающими в первую очередь из-за противодействия момента трения качения. Движение цилиндра при этом является поступательно-вращательным. Коэффициент трения качения k можно определить по скорости затухания колебаний.

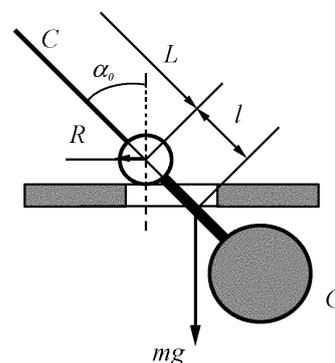


Рис. 4.5. Схема маятника

При рассмотрении процесса колебаний, воспользуемся законом изменения механической энергии. Пусть маятник в начальный момент

отклонили на угол α_0 от положения равновесия и отпустили. Через период (одно колебание) угол отклонения будет равен α_1 (см. рис. 4.6), а через n периодов – α_n соответственно. Максимальная за период потенциальная энергия маятника через n периодов становится равной

$$E_n = mgl(1 - \cos\alpha_n) = 2mgl\sin^2(\alpha_n/2), \quad (4.29)$$

где m – масса маятника, l – расстояние между центром тяжести маятника и осью цилиндра.

Уменьшение потенциальной энергии за первый период равно:

$$\Delta E = 2mgl \left(\sin^2\left(\frac{\alpha_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) \right). \quad (4.30)$$

При малых углах α выражение (4.30) преобразуется к виду:

$$\Delta E = \frac{mgl}{2} (\alpha_0^2 - \alpha_1^2). \quad (4.31)$$

Пренебрегая работой сил сопротивления воздуха и считая, что изменение энергии вызвано работой силы нормальной реакции опоры (смещенной в сторону движения при неупругих деформациях), можно записать:

$$\Delta A = M_{\text{тк}} \alpha = kN\alpha = kmg\alpha, \quad (4.32)$$

где ΔA – работа силы нормальной реакции опоры при повороте цилиндра на угол α .

За один полный период колебаний угол поворота составляет

$$\alpha = \alpha_0 + 2\alpha_{0,5} + \alpha_1, \quad (4.33)$$

где $\alpha_{0,5}$ – угол отклонения цилиндра после одного полупериода (рис. 4.6).

Считая, что в среднем

$$\alpha_{0,5} \approx \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}, \quad (4.34)$$

и используя соотношения (4.32) – (4.34), получаем выражение для работы

$$\Delta A_1 = 2kmg(\alpha_0 + \alpha_1). \quad (4.35)$$

Поскольку изменение механической энергии за период (4.31) равно работе силы нормальной реакции опоры (4.35) для коэффициента трения качения получаем следующее выражение:

$$k = \frac{l}{4}(\alpha_0 - \alpha_1). \quad (4.36)$$

Аналогичные соотношения можно получить для следующих периодов. Для полных n периодов имеем:

$$k = \frac{l}{4n}(\alpha_0 - \alpha_n). \quad (4.37)$$

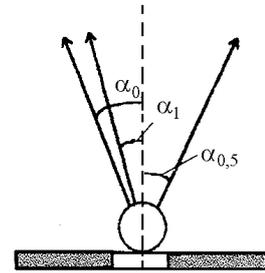


Рис. 4.6. Углы отклонения маятника от положения равновесия

Таким образом, определив начальный и конечный углы отклонения цилиндра, а также подсчитав число колебаний, можно оценить коэффициент трения качения k .

Экспериментальная установка

Схема установки представлена на рис. 4.7. На *столике 1* установлен маятник. Маятник состоит из *цилиндра 2*, сделанного из нержавеющей стали, *стрелки 3* и массивного *груза 4*. Начальное отклонение маятника производится вручную до *фиксатора 5*, положение которого можно менять. *Шкала 6* служит для измерения угла отклонения маятника с помощью стрелки. Положение *шкалы 6* можно регулировать, совмещая конец стрелки покоящегося маятника с нулем шкалы. Датчик, подсоединенный к *таймеру 8*, позволяет отсчитывать число полных колебаний маятника. Под *цилиндр 2* к *столику 1* могут крепиться *пластинки 7* из различных исследуемых материалов.

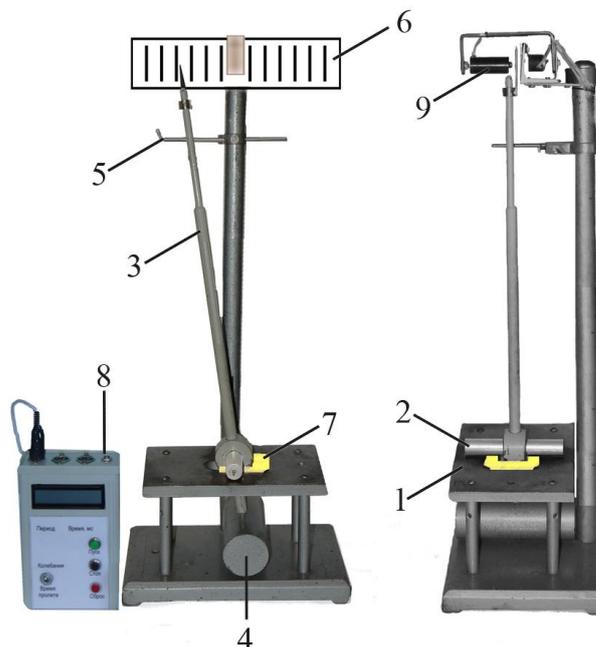


Рис. 4.7. Экспериментальная установка

В связи с тем, что цилиндр при качении движется вращательно-поступательно, необходимо уточнить связь угла поворота цилиндра α с показаниями стрелки маятника, отсчитываемыми по линейной *шкале 6*.

Смещение конца стрелки можно представить в виде суммы двух смещений: поступательного движения оси цилиндра a_1 и вращательной компоненты a_2 поворота конца стрелки относительно центра цилиндра (рис. 4.8).

Для суммарного отклонения x конца стрелки от нулевого деления получим

$$x = a_1 + a_2 = R\alpha + L \operatorname{tg} \alpha, \quad (4.38)$$

где R – радиус цилиндра, L – расстояние от оси цилиндра до шкалы (длина стрелки), α – угол поворота маятника.

При малых углах $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$, и можно считать, что

$$\alpha_0 = \frac{x_0}{L + R}, \quad \alpha_n = \frac{x_n}{L + R}, \quad (4.39)$$

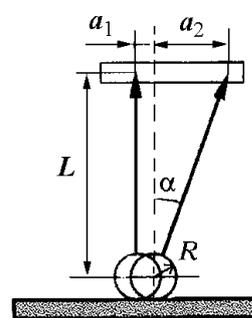


Рис. 4.8. Линейное и угловое смещение маятника от положения равновесия

где x_0 и x_n – начальная и конечная амплитуды отклонения стрелки по шкале S . Тогда расчетную формулу (4.37) для коэффициента трения качения можно окончательно представить в виде:

$$k = \frac{l}{4n} \frac{x_0 - x_n}{L + R}, \quad (4.40)$$

где n – число периодов колебаний маятника за время измерения.

Проведение эксперимента

Измерения

1. Измерьте линейкой длину телескопической части стрелки.
2. Штангенциркулем измерьте диаметр цилиндра и определите его радиус R (рис. 4.8).
3. Определите общую длину стрелки L как сумму длины телескопической части стрелки и радиуса цилиндра.
4. Установите маятник в такое положение, чтобы в равновесии конец стрелки находился напротив нуля шкалы.

Для вычисления коэффициента трения качения по формуле (4.40) необходимо измерить начальное отклонение стрелки маятника x_0 и его отклонение x_n после n полных периодов колебаний. Удобно задать следующие начальное и конечное значения амплитуд колебаний: $x_0 = 2,5$ см и $x_n = 1$ см. При проведении эксперимента число колебаний маятника n отчитывается автоматически с помощью электронного таймера 8 и фотодатчика 9 (рис. 4.7).

5. Для проведения измерений включите таймер в сеть 220 В. На нижнем табло таймера появятся цифры 00.

6. Отклоните маятник до соприкосновения стрелки с фиксатором. При этом конец стрелки должен находиться в положении $x_0 = 2,5$ см по шкале (положение фиксатора предварительно устанавливается).

7. После нажатия кнопки “СТАРТ” отпустите маятник. После этого таймер начинает отсчет колебаний. Двухзначное число на нижнем табло таймера показывает число полных колебаний n . Если количество колебаний превышает 100, количество сотен при дальнейшем отсчете отмечается вручную. При продолжении счета после числа 99 на табло появляется 00, и отчет продолжается в прежнем режиме.

8. При завершении измерений (амплитуда колебаний стрелки маятника стала равной $x_n = 1$ см), нажмите кнопку “СТОП”.

9. Данные запишите в таблицу 4.3. Для каждого материала составляется своя отдельная таблица.

Таблица 4.3.

Материал пластинки	Номер измерения	Число колебаний n_i	\bar{n}	S_n	k	S_k
	1					
	2					
	3					
	4					
	5					

Перед следующим измерением восстановите нулевое показание таймера нажатием кнопки “Сброс”.

Отсчет в каждой серии измерений произведите не менее пяти раз. Серии измерений проведите для пластинок из трех разных материалов, входящих в комплект установки.

Обработка результатов

1. По экспериментальным данным для каждой серии измерений определите среднее арифметическое значение \bar{n} числа колебаний n .

2. Определите среднеквадратичное отклонение $S_{\bar{n}}$ числа колебаний для каждой серии измерений (каждой пластинки):

$$S_{\bar{n}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (n_i - \bar{n})^2}. \quad (4.41)$$

3. С помощью формулы (8.9) определите величины коэффициентов трения качения k для трех пластин.

4. Пренебрегая вкладом погрешностей ΔL и ΔR , оцените погрешности полученных результатов по формуле:

$$\frac{S_k}{k} = \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2}. \quad (4.42)$$

Для расчетов примите погрешность разности отсчетов показаний стрелки по шкале $\Delta x = 1$ мм.

Запишите полученные результаты в таблицу.

ОСНОВНЫЕ ИТОГИ РАБОТЫ

В результате выполнения работы должны быть получены значения коэффициентов трения качения для различных пар материалов, рассчитаны погрешности, проведен анализ причин их возникновения.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Почему возникает эффект трения качения?
2. Дайте определение коэффициента трения качения.

3. В чем отличие трения качения от трения скольжения?
4. От чего зависит коэффициент трения качения?
5. Выведите расчетную формулу (4.40).
6. Цилиндр радиуса R находится на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения скольжения поверхностей – μ , коэффициент трения качения – k . Во сколько раз отличается сила F_1 , необходимая для того, чтобы цилиндр начал движение, от силы F_2 , необходимой для начала проскальзывания? Силы приложены к центру цилиндра горизонтально.

4.3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФИЦИЕНТОВ СИЛ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ И ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ

Цель работы

Целью работы является экспериментальное определение коэффициентов сил вязкого трения и трения качения при затухающих колебаниях.

Идея эксперимента

Идея эксперимента состоит в измерении изменения амплитуды колебаний маятника при наличии затухания, обусловленного вязким трением о воздух и трением качения при соприкосновении маятника с наклонной поверхностью.

Теория

В работе рассматриваются колебания легкого металлического шарика, подвешенного на тонкой нерастяжимой нити. Маятник может двигаться либо в вертикальной плоскости (тогда колебания затухают из-за сопротивления воздуха), либо, опираясь на наклонную плоскость (в этом случае затухание определяется в основном трением качения).

I. Рассмотрим вначале колебания маятника в вертикальной плоскости (см.рис. 4.9). Шарик движется под действием трех сил: силы тяжести mg , силы натяжения нити T и силы вязкого трения о воздух:

$$F_{\text{тр}} = -\beta v. \quad (4.43)$$

Здесь β – коэффициент вязкого трения, $v = \dot{\alpha}l$ – скорость центра масс шарика, $\dot{\alpha}$ – угловая скорость вращения вокруг оси, проходящей через точку подвеса, l – расстояние от центра шарика до точки подвеса.

Уравнение моментов для маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса перпендикулярно плоскости колебаний, имеет вид:

$$J\ddot{\alpha} = -mgl \sin \alpha - \beta l^2 \dot{\alpha}, \quad (4.44)$$

где J – момент инерции шарика относительно указанной оси.

Поскольку шарик подвешен на нити, длина которой существенно превышает его линейные размеры, то

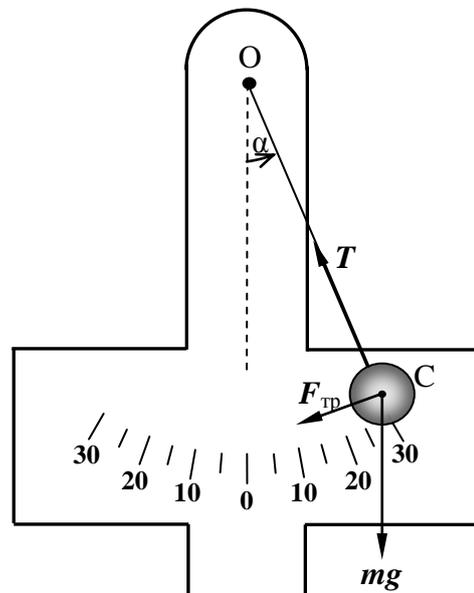


Рис. 4.9. Силы, действующие на шарик при колебаниях в вертикальной плоскости

при расчете момента инерции относительно указанной оси его можно считать материальной точкой:

$$J = ml^2. \quad (4.45)$$

Учитывая, что при малых колебаниях $\sin \alpha \approx \alpha$, преобразуем уравнение (4.44) к виду:

$$\ddot{\alpha} + 2\delta\dot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0. \quad (4.46)$$

При записи уравнения (4.46) введены обозначения:

$$\delta = \frac{\beta}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (4.47)$$

Нетрудно убедиться подстановкой, что решением уравнения (4.46) является функция

$$\alpha(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (4.48)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – частота затухающих колебаний, A_0 – амплитуда колебаний в начальный момент времени $t=0$, φ_0 – начальная фаза колебаний, определяющаяся начальными условиями.

При затухающих колебаниях амплитуда убывает во времени по экспоненциальному закону:

$$A(t) = A_0 \exp(-\delta t). \quad (4.49)$$

Измеряя изменение амплитуды колебаний за время t , можно рассчитать (в соответствии с (4.47), (4.49)) коэффициент вязкого трения шарика о воздух:

$$\beta = \frac{2m}{t} \ln \frac{A_0}{A}. \quad (4.50)$$

II. В случае, когда колебания маятника сопровождаются качением по наклонной поверхности, движение шарика можно представить как суперпозицию колебательного движения центра масс относительно оси, проходящей через точку подвеса O перпендикулярно плоскости колебаний, и вращения вокруг оси OC , проходящей через центр масс шарика C и лежащей в плоскости колебаний маятника (рис. 4.11). При качении шарика по наклонной поверхности возникают неупругие деформации. Следовательно, сила реакции поверхности F , приложенная к шарикау оказывается смещенной в сторону движения центра масс (рис. 4.10).

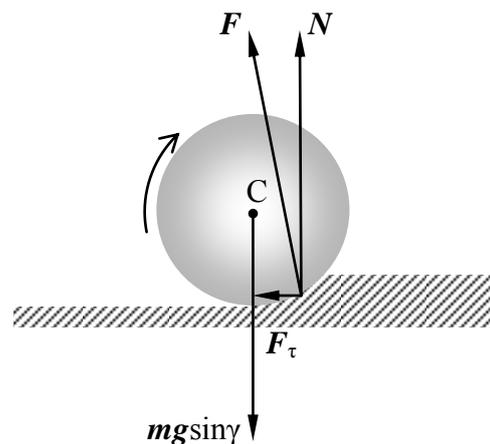


Рис. 4.10. Силы, действующие на шарик в плоскости, перпендикулярной плоскости колебаний

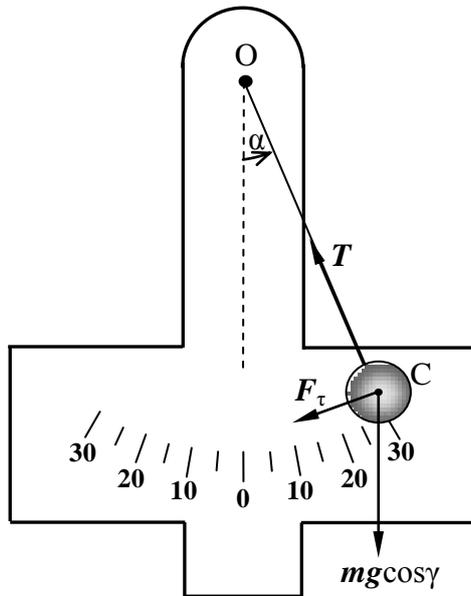


Рис. 4.11. Силы, действующие на шарик в плоскости колебаний маятника

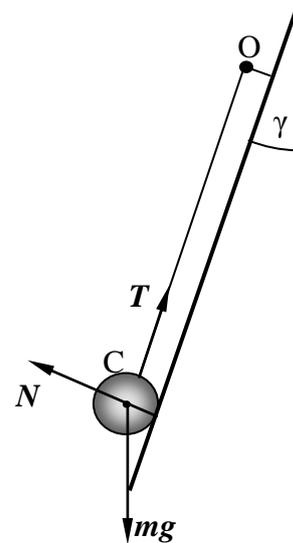


Рис. 4.12. Силы, действующие на шарик в вертикальной плоскости

Основное уравнение вращательного движения запишем аналогично уравнению (4.44), в которое вместо силы вязкого трения входит тангенциальная составляющая силы реакции опоры F_τ при качении шарика по наклонной поверхности (см. рис. 4.11). Силой вязкого трения о воздух в этом случае можно пренебречь, поскольку (как будет показано в эксперименте) она существенно меньше F_τ . Если наклонная плоскость составляет угол γ с вертикалью, то проекция силы тяжести на плоскость колебаний равна $mg \cos \gamma$. Уравнение моментов для шарика относительно оси, проходящей через точку подвеса, имеет вид:

$$ml^2 \ddot{\alpha} = -mg \cos \gamma l \sin \alpha - F_\tau l. \quad (4.51)$$

Запишем также второй закон Ньютона для центра масс шарика в проекции на направление, перпендикулярное плоскости колебаний:

$$0 = N - mg \sin \gamma. \quad (4.52)$$

Поворот шарика вокруг оси OC при качении без проскальзывания будем описывать углом φ . Уравнение моментов для шарика относительно указанной оси запишем в виде:

$$J_0 \ddot{\varphi} = F_\tau r - Nk, \quad (4.53)$$

где r – радиус шарика, $J_0 = \frac{2}{5} mr^2$ – момент инерции шарика относительно оси, проходящей через его центр масс, k – плечо силы нормальной реакции опоры относительно оси OC . В соответствии с определением, k является коэффициентом трения качения (см. Введение к главе 4). При записи уравнения (4.53) учтено, что плечо тангенциальной составляющей силы реакции опоры F_τ не сильно отличается от радиуса шарика при малых остаточных деформациях.

При движении шарика без проскальзывания скорость точки его соприкосновения с наклонной поверхностью равна нулю и, в силу принципа суперпозиции движений, складывается из скорости центра масс $v_0 = \dot{\alpha}l$ и скорости вращения вокруг оси, проходящей через центр масс $v_{вр} = \dot{\varphi}r$. Следовательно, уравнения кинематической связи в отсутствие проскальзывания имеют вид:

$$\dot{\alpha}l = \dot{\varphi}r, \quad \ddot{\alpha}l = \ddot{\varphi}r. \quad (4.54)$$

Исключая из системы уравнений (4.51) – (4.54) величины N , $F_{т}$, α , и учитывая малость углов ($\sin \alpha \approx \alpha$, $\sin \varphi \approx \varphi$), получаем дифференциальное уравнение относительно угла φ :

$$\frac{7}{5}mr^2\ddot{\varphi} = -\frac{r^2}{l}mg \cos \gamma \varphi \pm M_{тк}, \quad (4.55)$$

где $M_{тк} = kmg \sin \gamma$ – момент сил трения качения, в качестве которого выступает момент смещенной силы нормальной реакции опоры при неупругих деформациях.

В правой части уравнения (4.55) знак момента силы нормальной реакции опоры (момента трения качения) меняет знак дважды за период одновременно с изменением направления скорости центра масс шара, при этом модуль момента сил трения качения остается неизменным.

Уравнение (4.55) является уравнением колебаний шарика, на который в процессе движения кроме момента силы, возвращающего в положение равновесия и линейно зависящего от угла отклонения, действует постоянный по модулю момент сил трения качения. Постоянная сила (момент сил), как известно, не изменяет частоты колебаний, а только смещает положение равновесия. Уравнение (4.55) аналогично уравнению колебаний при наличии силы трения скольжения. В этом случае затухание колебаний возникает за счет изменения положения равновесия, то есть начальное смещение маятника от положения равновесия к началу следующего полупериода (определяющее амплитуду колебаний на полпериода) становится меньше, чем в предыдущем.

На рис. 4.13, представлена временная зависимость углового смещения шарика от положения равновесия $\varphi(t)$ при наличии момента сил трения качения. В начальный момент времени $t=0$ маятник был максимально отклонен от положения равновесия, смещенного на $\Delta\varphi$ относительно нуля. Сплошной кривой изображен график $\varphi(t)$ в течение первой половины периода. В момент времени $t = \frac{T}{2}$ направление скорости шарика изменяет знак, а, следовательно, изменяется и знак момента сил трения качения, что приводит к смещению положения равновесия на $-\Delta\varphi$. Штрихпунктирная кривая на рис. 4.13 изображает график $\varphi(t)$ в течение второй половины периода.

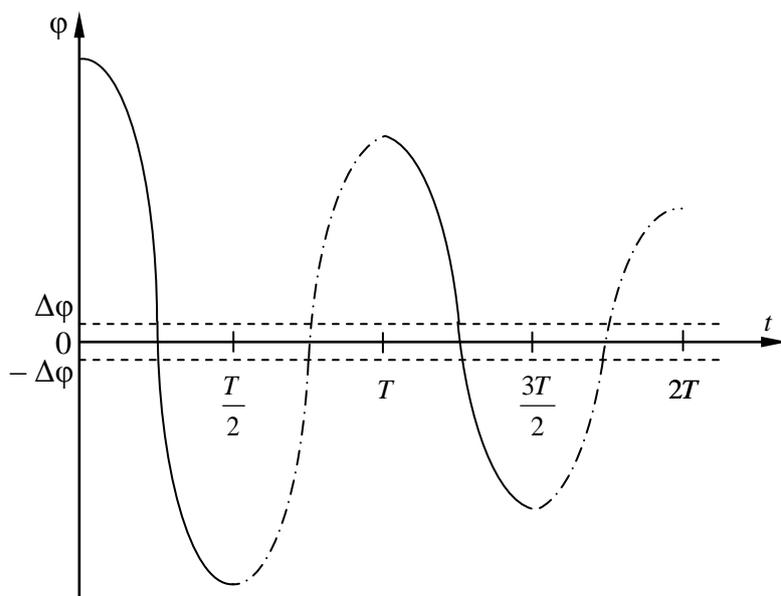


Рис. 4.13. Временная зависимость углового смещения шарика

Уравнение (4.55) можно записать в виде:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 (\varphi \pm \Delta\varphi) = 0. \quad (4.56)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\omega = \sqrt{\frac{5g \cos \gamma}{7l}}, \quad (4.57)$$

$$\Delta\varphi = \frac{kl}{r^2} \operatorname{tg} \gamma. \quad (4.58)$$

Величина $\Delta\varphi$ определяет смещение положения равновесия дважды за период, при этом за период колебаний амплитуда уменьшается на $4\Delta\varphi$ (см. рис. 4.13). Используя уравнение кинематической связи (4.54), получаем выражение для изменения угловой амплитуды колебаний маятника за период:

$$\Delta\alpha = \frac{4k}{r} \operatorname{tg} \gamma. \quad (4.59)$$

Измеряя изменение угловой амплитуды $\Delta\alpha_n$ или амплитуды линейного смещения центра масс за n периодов Δx_n , можно рассчитать коэффициент трения качения по формуле:

$$k = \frac{\Delta\alpha_n r}{4n} \operatorname{ctg} \gamma = \frac{\Delta x_n r}{4nl} \operatorname{ctg} \gamma. \quad (4.60)$$

Экспериментальная установка

Экспериментальная установка состоит из металлического шарика 1,

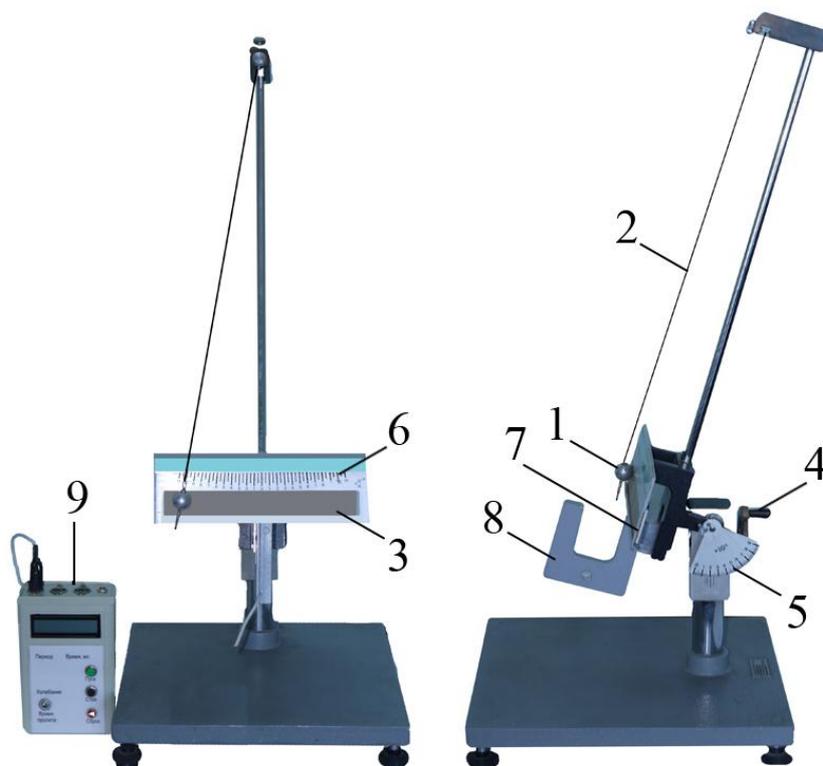


Рис.4.14. Экспериментальная установка.

подвешенного на тонкой легкой нити 2 и опирающегося на наклонную поверхность 3 (рис. 4.14). Угол наклона плоскости γ легко изменять с помощью винта 4, установленного справа или сзади на установке. Значение угла γ определяется по шкале 5. Нить подвеса шарика параллельна наклонной плоскости и проходит через его центр (точка С на рис. 4.11 и 4.12).

При отклонении шарика от положения равновесия или сообщения ему начальной скорости шарик совершает затухающие колебания, причем со стороны наклонной поверхности на него действует сила трения. По наклонной поверхности шарик при этом может катиться как с проскальзыванием, так и без проскальзывания.

В работе измеряется изменение угла отклонения нити маятника от положения равновесия α по шкале 6 (рис. 4.14) и, исходя из полученных значений угла, рассчитываются коэффициенты вязкого трения шарика о воздух и трения качения шарика о наклонную поверхность. На наклонной поверхности имеется паз, в который можно вставлять пластины 7 из различных материалов: стекла, металла, резины, для которых проводятся измерения коэффициентов сил трения качения. При измерении коэффициента вязкого трения плоскость, по которой катится шарик маятника, устанавливается вертикально ($\gamma=0$). В этом случае нет

соприкосновения шарика с поверхностью, и затухание колебаний вызвано только сопротивлением воздуха. Время колебаний измеряется *таймером 9* (рис. 4.14) включение и выключение которого осуществляется при прохождении маятником «*световых ворот*» 8.

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Определение коэффициента вязкого трения

В первом упражнении следует определить коэффициент вязкого трения шарика о воздух при колебаниях маятника в вертикальной плоскости. Для этого поворачивают винт, устанавливая значение угла $\gamma = 0$. Если после установки вертикального положения шарик при колебаниях касается плоскости, необходимо выдвинуть пластину, для которой во втором упражнении производится измерение коэффициента трения качения.

Затем отклоняют маятник на небольшой угол, при этом начальное линейное смещение центра масс должно составлять 1,5 – 2 см. С помощью таймера измеряют время, за которое амплитуда колебаний уменьшится на 1 см. Линейные размеры маятника и масса шарика указаны на установке. Измерения следует повторить не менее трех раз и занести значения амплитуд колебаний маятника и время колебаний в таблицу 4.4.

Если сразу после запуска системы наблюдаются высокочастотные колебания в виде дрожания шарика, то следует возбуждать колебания с амплитудой несколько большей, чем выбранная для расчета. При этом включение таймера произвести в тот момент, когда амплитуда станет равной заданной для расчета. К этому моменту времени высокочастотные колебания должны полностью затухнуть.

После проведения измерений следует рассчитать по формуле (4.50) коэффициент вязкого трения и оценить погрешности эксперимента, используя для расчетов формулы, приведенные после описания упражнений в разделе «Оценка погрешностей эксперимента».

Таблица 4.4

№	A_0	σ_{A0}	A	\bar{A}	σ_A	t	\bar{t}	σ_t	β	σ_β
1										
2										
3										

Упражнение 2. Определение коэффициента трения качения

Во втором упражнении следует определить коэффициенты сил трения качения для различных пластин, входящих в комплект установки.

В паз вставляют одну из пластин – металлическую, стеклянную или резиновую. Угол отклонения плоскости пластины от вертикали

устанавливается равным $\gamma = 10^\circ$ с помощью винта, находящегося справа или сзади на установке.

Для покоящегося шарика положение нити маятника должно соответствовать нулевому значению на шкале отсчета угла отклонения маятника. Если угол не равен нулю, то необходимо соответствующим образом сместить шкалу.

При выполнении второго упражнения следует обращать внимание на правильный выбор начального отклонения маятника при заданном угле наклона – шарик должен катиться по пластине без проскальзывания (в первую очередь это относится к наивысшим точкам траектории шарика).

Далее измеряют с помощью таймера число n периодов колебаний маятника, за которые амплитуда колебаний уменьшится на $\Delta\alpha_n$. Измерения следует повторить не менее трех раз и занести значения измеренных величин в таблицу 4.5. Радиус шарика определяют с помощью штангенциркуля или используют значение, указанное на установке. С помощью формулы (4.60) следует рассчитать коэффициент трения качения и оценить погрешности эксперимента, используя для расчетов формулы, приведенные после описания упражнений в разделе «Оценка погрешностей эксперимента».

Таблица 4.5

Пластина № 1									
№	n	\bar{n}	σ_n	$\Delta\alpha_n$	$\sigma_{\Delta\alpha}$	γ	σ_γ	k	σ_k
1									
2									
3									

Далее устанавливают угол наклона плоскости пластины, равным $\gamma = 20^\circ$ и повторяют измерения.

Затем следует заменить пластину на другую, входящую в комплект установки, и провести измерение коэффициента трения качения для двух углов наклона плоскости пластины.

После проведения всех расчетов необходимо проанализировать полученные в первом и втором упражнениях результаты, сравнить полученные значения коэффициентов трения с табличными значениями, сформулировать краткие выводы и записать их в тетради.

Оценка погрешностей эксперимента. Основные формулы.

Измеряемые в данной задаче физические величины – коэффициенты вязкого трения и трения качения, являются функциями нескольких прямо измеряемых величин. Погрешность для коэффициентов трения следует оценивать по формулам для косвенных измерений.

Выборочное стандартное отклонение S_k случайных ошибок для коэффициента трения определяется выражением:

$$S_k = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial a}\right)_{\bar{a}, \bar{b}}^2 S_a^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial b}\right)_{\bar{a}, \bar{b}}^2 S_b^2}, \quad (4.61)$$

где k – коэффициент трения (вязкого трения или трения качения), a и b – прямо измеренные величины (время, амплитуда колебаний, число периодов колебаний и т.д.)

В качестве оценки случайной погрешности прямо измеренной величины a принимается выборочное стандартное отклонение среднего арифметического:

$$\bar{a} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n, \quad (4.62)$$

$$S_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{n=1}^N (a_n - \bar{a})^2}. \quad (4.63)$$

Если величина a или b измеряется однократно, то случайная погрешность принимается равной нулю.

Стандартное отклонение систематических ошибок рассчитывается по формуле:

$$\sigma_{\text{сист}k} = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial a}\right)_{\bar{a}, \bar{b}}^2 \sigma_{\text{сист}a}^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial b}\right)_{\bar{a}, \bar{b}}^2 \sigma_{\text{сист}b}^2}. \quad (4.64)$$

В предположении о независимости случайных и систематических погрешностей для величины стандартного отклонения суммарной погрешности справедлива формула:

$$\sigma_k = \sqrt{S_k^2 + \sigma_{\text{сист}k}^2}. \quad (4.65)$$

Контрольные вопросы

1. Что такое сила трения?
2. Какие силы трения вам известны?
3. Причины возникновения сил трения покоя и скольжения.
4. Причины возникновения трения качения.
5. Чему равна сила вязкого трения?
6. Чему равен коэффициент трения качения?

Литература

1. А. Н. Матвеев. Механика и теория относительности. – М. Изд. дом «Оникс 21 век», 2003. Гл. 12.
2. В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев. Механика. – М.: Физматлит, 2011. Лекция 3.
3. С. П. Стрелков. Механика. – СПб.: «Лань», 2005. Гл. 5, 8.
4. Д. В. Сивухин. Общий курс физики. В пяти томах. Т. 1. Механика. – М.: ФИЗМАТЛИТ / МФТИ, 2005.
5. С. Э. Хайкин. Физические основы механики. – СПб.: «Лань», 2008. Гл. 7.
6. В. С. Русаков, А. И. Слепков, Е. А. Никанорова, Н. И. Чистякова. Механика. Методика решения задач. Учебное пособие. М.: Физический факультет МГУ, 2010. Гл. 2, 7, 8.
7. Митин И. В., Русаков В. С. Анализ и обработка экспериментальных данных. Учебно-методическое пособие для студентов младших курсов. – М.: МГУ. 2002.