

Введение

Изучение движения твердого тела проводится в предположении, что тело является **абсолютно твердым**, т.е. расстояние между двумя любыми точками тела не меняется.

В дальнейшем вместо термина «абсолютно твердое тело» будет использоваться термин «твердое тело».

Кинематика твердого тела. Любое движение твердого тела можно представить как суперпозицию поступательного и вращательного движений.

При **поступательном движении** прямая, проходящая через любые две точки тела, перемещается параллельно самой себе. В этом случае в каждый момент времени скорости всех точек тела одинаковы, поэтому достаточно знать характер движения лишь одной точки тела. Анализ такого движения сводится к анализу движения материальной точки.

При **вращательном движении** твердого тела вокруг неподвижной оси точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на этой оси, называемой **осью вращения**. При таком движении все точки твердого тела за малый промежуток времени dt поворачиваются вокруг оси на один и тот же угол $d\varphi$.

Если ввести в рассмотрение аксиальный вектор $d\varphi$, модуль которого равен углу поворота $d\varphi$, а направление определяется в соответствии с правилом правого винта и совпадает с осью вращения, то скорость изменения угла будет равна

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.1)$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}$ называется **угловой скоростью**.

Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ связана с линейной скоростью \mathbf{v}_i i -й точки тела соотношением

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i, \quad (2.2)$$

где \mathbf{r}_i — радиус-вектор.

Производная от $\boldsymbol{\omega}$ по времени называется **угловым ускорением**

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}. \quad (2.3)$$

Совместим начало поступательно движущейся системы координат с какой-либо точкой А твердого тела (точкой отсчета). Тогда в лабораторной системе отсчета скорость любой другой точки В тела представима в виде векторной суммы скорости

движения системы координат v_0 (скорость точки А) и относительной скорости v' точки В:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'. \quad (2.4)$$

В качестве точки отсчета может быть выбрана любая точка твердого тела или пространства (если положение этой точки относительно твердого тела не меняется со временем). Поскольку угол поворота $d\varphi$ за малый промежуток времени dt не зависит от выбора точки отсчета и одинаков для всех точек твердого тела, то с учетом (2.1.) и (2.2) выражение (2.4) может быть представлено в следующем виде:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (2.5)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость вращения твердого тела (не зависит от выбора точки отсчета), \mathbf{r} — радиус-вектор с началом в точке А. Скорость поступательного движения тела \mathbf{v}_0 зависит от выбора точки отсчета. В частности, точку А можно выбрать так, чтобы \mathbf{v}_0 была равна нулю.

Плоское движение твердого тела — движение, при котором траектории всех материальных точек тела лежат в параллельных плоскостях. В случае плоского движения твердого тела ось вращения, проходящая через точку А, является *мгновенной осью вращения*.

Мгновенная ось вращения твердого тела — ось, относительно которой поступательная скорость тела в данный момент времени равна нулю. Поэтому плоское движение твердого тела в каждый момент времени может быть представлено как вращательное движение относительно некоторой мгновенной оси.

Уравнение моментов. Момент инерции относительно неподвижной оси. Рассмотрим движение твердого тела как движение системы жестко связанных между собой точек. В лабораторной системе отсчета уравнение движения для i -й материальной точки массой m_i имеет вид:

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{f}_{ij}, \quad (2.6)$$

где \mathbf{F}_i — сумма всех внешних сил, действующих на i -ю материальную точку, \mathbf{f}_{ij} — сила, действующая на i -ю материальную точку со стороны j -й материальной точки, т.е. внутренняя сила.

Будем полагать, что силы взаимодействия являются центральными, то есть векторы \mathbf{f}_{ij} и $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ коллинеарны.

Умножим векторно обе части уравнения (2.6) на радиус-вектор \mathbf{r}_i :

$$m_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}. \quad (2.7)$$

Учтем, что $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{v}_i = \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$ (так как $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i$, то $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{v}_i = 0$). Суммируя по всем материальным точкам системы, получим

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}. \quad (2.8)$$

Величина $\mathbf{L} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ (\mathbf{p}_i — импульс i -й материальной точки) называется **моментом импульса** системы относительно некоторой неподвижной точки, выбранной за начало координат; $\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ — **момент внешних сил** относительно той же точки; величина $\sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}$ — суммарный момент всех

внутренних сил. Выражение для момента внутренних сил можно преобразовать к виду:

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ji}) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{f}_{ij}. \quad (2.9)$$

Поскольку в случае центральных сил $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{f}_{ij} = 0$, уравнение (2.8) (с учетом введенных выше обозначений) может быть записано в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}. \quad (2.10)$$

Это уравнение называется уравнением вращательного движения или **уравнением моментов**.

В частности, если ось вращения совпадает с осью координат Z , то

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z, \quad (2.11)$$

где L_z и M_z — соответственно проекции векторов \mathbf{L} и \mathbf{M} на ось Z .

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси Z с угловой скоростью ω скорость материальной точки m_i тела равна $v_i = \omega r_i$ где r_i — ее расстояние до оси Z . Проекция моментов импульса на ось Z для этих точек равны $L_{iz} = r_i m_i v_i = \omega m_i r_i^2$. Так как угловая скорость ω одинакова для всех точек твердого тела, то момент импульса всего тела относительно оси Z равен

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \omega \sum_i m_i r_i^2 = \omega J. \quad (2.12)$$

Величину

$$J = \sum_i m_i r_i^2 \quad (2.13)$$

называют **моментом инерции твердого тела относительно неподвижной оси**, который является мерой инертности тела при вращательном движении относительно этой оси.

Подставляя (2.12) в (2.11), получим **основное уравнение вращательного движения** тела вокруг неподвижной оси z :

$$\frac{d(\omega J)}{dt} = M_z. \quad (2.14)$$

Поскольку взаимное расположение точек в твердом теле со временем не меняется, то момент инерции является постоянной величиной. Поэтому уравнение (2.14) может быть представлено в следующем виде

$$J \frac{d\omega}{dt} = J \varepsilon = M_z. \quad (2.15)$$

Для вычисления момента инерции при непрерывном распределении массы по объему суммирование можно заменить интегрированием по всему объему тела, и тогда (2.13) приводится к следующему виду:

$$J = \int \rho^2 dm. \quad (2.16)$$

Пусть известен момент инерции тела J_0 относительно некоторой оси, проходящей через центр масс — точку с радиус-вектором $\mathbf{R} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{r}_i$ (m_i — масса элементарного объема тела,

\mathbf{r}_i — его радиус-вектор, m — масса тела). Тогда, в соответствии с *теоремой Гюйгенса–Штейнера*, момент инерции тела J относительно любой другой параллельной оси, находящейся на расстоянии a , равен

$$J = J_0 + ma^2. \quad (2.17)$$

Тензор инерции. Предположим, что твердое тело может вращаться вокруг некоторой неподвижной точки O . Совместим с этой точкой начало декартовой системы координат XYZ . Скорость произвольной i -й точки твердого тела массой m_i равна $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$, где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости вращения твердого тела, а \mathbf{r}_i — радиус-вектор. По определению, момент импульса этой материальной точки относительно точки O равен

$$\mathbf{L}_i \equiv m_i [\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i] = m_i [\mathbf{r}_i \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i]] = m_i [\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_i)^2 - \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})].$$

Перепишем выражение для \mathbf{L}_i в проекциях на оси системы координат XYZ с началом в точке O . Учитывая, что

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2, \text{ и } (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) = x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z,$$

получим

$$\begin{aligned} L_{ix} &= m_i [\omega_x (y_i^2 + z_i^2) - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z], \\ L_{iy} &= m_i [-x_i y_i \omega_x + \omega_y (x_i^2 + z_i^2) - y_i z_i \omega_z], \\ L_{iz} &= m_i [-x_i z_i \omega_x - y_i z_i \omega_y + \omega_z (x_i^2 + y_i^2)]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Момент импульса твердого тела равен сумме моментов импульсов всех элементарных объемов тела:

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i [\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_i)^2 - \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i \boldsymbol{\omega})]. \quad (2.19)$$

Учитывая (2.18), соотношение (2.19) можно переписать в проекциях на координатные оси:

$$\begin{aligned} L_x &= J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z, \\ L_y &= J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z, \\ L_z &= J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Совокупность девяти величин

$$\underbrace{J_{xx}, J_{xy}, J_{xz}, J_{yx}, J_{yy}, J_{yz}, J_{zx}, J_{zy}, J_{zz}}_{J_{ij}}$$

называется **тензором инерции**

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Проекции момента импульса на оси координат (2.20) удобно записать в матричном виде. В рассматриваемом случае начало декартовой системы координат совпадает с точкой О (центром вращения), поэтому из (2.18) и (2.20) получаем

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i (x_i y_i) & -\sum_i m_i (x_i z_i) \\ -\sum_i m_i (y_i x_i) & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i (y_i z_i) \\ -\sum_i m_i (z_i x_i) & -\sum_i m_i (z_i y_i) & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Отметим, что выражение (2.19) принимает точно такой же вид, если векторы \mathbf{L} , $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{r}_i проецировать на оси лабораторной системы координат XYZ. Отличие заключается в том, что в неподвижной лабораторной системе отсчета постоянно меняются координаты x_i , y_i , z_i каждого малого элемента тела, поэтому и компоненты тензора \hat{J} меняются со временем. В выбранной системе координат XYZ радиус-вектор \mathbf{r}_i — неизменная величина, а проекции угловой скорости ω_x , ω_y , ω_z меняются со временем.

Диагональные элементы тензора инерции J_{xx} , J_{yy} , J_{zz} называются **осевыми моментами инерции**. Недиагональные элементы J_{xy} , J_{yx} , J_{xz} , J_{zx} , J_{yz} , J_{zy} , называются **центробежными моментами инерции**.

Тензор инерции — симметричный, так как $J_{xy} = J_{yx}$, $J_{xz} = J_{zx}$, $J_{yz} = J_{zy}$. Симметричный тензор всегда можно привести к

диагональному виду соответствующим выбором системы координат (определяемой формой тела), относительно которой все недиагональные элементы будут равны нулю. В этом случае координатные оси называются **главными осями инерции**, а величины $J_x \equiv J_{xx}$, $J_y \equiv J_{yy}$, $J_z \equiv J_{zz}$, — **главными моментами инерции**. Оси, проходящие через центр масс тела, называют **центральными осями**, а оси, проходящие через центр масс и одновременно являющиеся главными, называют **главными центральными осями**.

Связь между моментом инерции и компонентами тензора инерции. Рассмотрим вращение твердого тела относительно некоторой неподвижной оси AA' . Представим радиус-вектор i -го элементарного объема массой dm в виде $\mathbf{r}_i = \mathbf{d}_i + \boldsymbol{\rho}_i$, где $\mathbf{d}_i \parallel \boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\rho}_i \perp \boldsymbol{\omega}$ (вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен вдоль оси в соответствии с правилом правого винта, рис. 2.1). Так как ось AA' неподвижна, то линейная скорость любой точки тела перпендикулярна этой оси и равна

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i.$$

Предположим, что в жестко связанной с телом системе координат XYZ ось AA' (рис. 2.1) лежит в плоскости XY , а тензор инерции имеет диагональный вид:

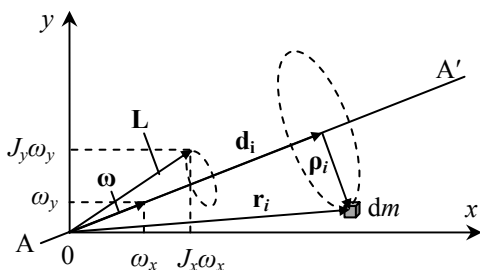


Рис. 2.1. Схематическое представление вращения тела вокруг закрепленной оси.

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}.$$

Вектор угловой скорости имеет компоненты $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_x, \omega_y, 0\}$.

В соответствии с (2.20) $L_x = J_x \omega_x$, $L_y = J_y \omega_y$, $L_z = 0$. Следовательно, в общем случае ($J_x \neq J_y$) направление вектора момента импульса, даже при вращении вокруг закрепленной оси, может не совпадать с направлением вектора угловой скорости. Поэтому при вращении тела вектор момента импульса меняет свое направление в пространстве: конец этого вектора описывает окружность с центром, лежащим на оси AA' . Вектор \mathbf{L} так же, как и радиус-вектор, удобно разложить на две составляющие — совпадающую с

вектором угловой скорости ω , и перпендикулярную к нему, т.е. $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{AA'} + \mathbf{L}_\perp$. В этом случае векторное уравнение моментов (2.10) можно разделить на два скалярных уравнения:

$$\frac{dL_{AA'}}{dt} = M_{AA'}, \quad (2.23)$$

$$\frac{dL_\perp}{dt} = M_\perp. \quad (2.24)$$

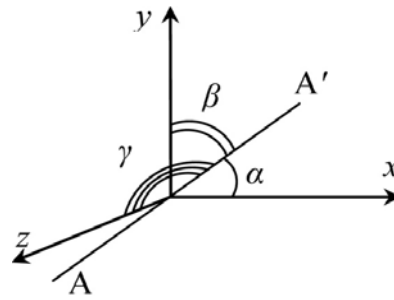


Рис. 2.2. Положение оси AA' относительно системы координат.

В уравнении (2.23) $M_{AA'}$ — проекция момента внешних сил на ось AA' (в том числе и сил трения в оси). Это уравнение полностью описывает вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси. В уравнении (2.24) M_\perp — перпендикулярная проекция суммарного момента внешних сил и сил упругости, действующих на тело со стороны оси. Наличие этого момента приводит к повороту вектора \mathbf{L} вокруг AA'.

Из уравнения (2.23), совпадающего с рассмотренным выше уравнением (2.11), следует основное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси (2.15).

Момент инерции J твердого тела относительно некоторой оси можно найти, если известны направление этой оси в пространстве и значения компонент тензора инерции.

Воспользуемся соотношением $L_{AA'} = \omega J$. С учетом (2.20) и соотношений $L_{AA'} = L_x \cos \alpha + L_y \cos \beta + L_z \cos \gamma$, $\omega_x = \omega \cos \alpha$, $\omega_y = \omega \cos \beta$, $\omega_z = \omega \cos \gamma$ (α, β, γ — углы, определяющие положение оси AA' относительно осей координат, см. рис. 2.2) получим:

$$J = J_{xx} \cos^2 \alpha + J_{yy} \cos^2 \beta + J_{zz} \cos^2 \gamma + 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta + 2J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma + 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma. \quad (2.25)$$

Уравнение (2.25) может быть использовано, в частности, для решения обратной задачи — определения компонент тензора инерции \hat{J} по известным значениям моментов инерции J относительно нескольких различных неподвижных осей.

Лабораторная работа 2.1

ИЗУЧЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ ЗАКРЕПЛЕННОЙ ОСИ

Цель работы

Экспериментальная проверка основного уравнения вращательного движения твердого тела вокруг закрепленной оси.

Идея эксперимента

Система тел с изменяемым моментом инерции может свободно вращаться вокруг закрепленной оси под действием момента внешней силы.

Теоретическое введение

Согласно основному уравнению вращательного движения твердого тела (2.15), в случае вращения вокруг закрепленной оси Z тела (системы тел) с моментом инерции J

$$J\varepsilon = M, \quad (2.1.1)$$

где $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ — угловое ускорение, M — момент внешних сил.

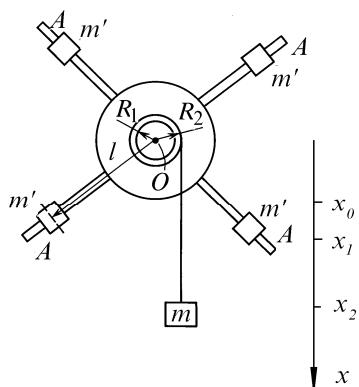


Рис. 2.1.1. Схематическое изображение маятника Обербека.

Для экспериментальной проверки этого соотношения в работе используется маятник Обербека (рис. 2.1.1). Он состоит из четырех стержней A и двух шкивов радиусом R_1 и R_2 , закрепленных на одной горизонтальной оси. На каждом из стержней находятся одинаковые грузы массой m' каждый, положение которых можно фиксировать на различных расстояниях от оси. Маятник может приводиться во вращение при помощи груза массой m , подвешенного за конец намотанной на тот или иной шкив нити.

Пренебрегая силами трения, а также считая нить невесомой и нерастяжимой, можем записать уравнение вращательного движения маятника:

$$J\varepsilon = RT, \quad (2.1.2)$$

уравнение поступательного движения груза на нити

$$ma = mg - T \quad (2.1.3)$$

и уравнение кинематической связи

$$a = \varepsilon R. \quad (2.1.4)$$

Здесь R — радиус шкива, T — сила натяжения нити, a — линейное ускорение груза массой m , g — ускорение свободного падения.

Из системы уравнений (2.1.2)–(2.1.4) следует, что ускорение груза массой m постоянно и равно

$$a = \frac{mR^2}{J + mR^2} g. \quad (2.1.5)$$

Основное уравнение вращательного движения (2.1.2) записано без учета момента сил трения $M_{\text{тр}}$ в оси маятника. Поэтому для проверки выполнения соотношения (2.1.1) необходимо убедиться, что $M_{\text{тр}}$ можно не учитывать, если суммарный момент сил трения $M_{\text{тр}}$ много меньше момента силы натяжения нити M , который равен:

$$M = RT = Rm(g - a) = mgR \frac{J}{J + mR^2}.$$

С учетом неравенства $mR^2 \ll J$ можно записать, что $M \approx mgR$.

Оценим момент сил трения в оси маятника, полагая, что он не изменяется во время движения. При опускании груза m с отметки x_0 на полную длину нити до отметки x_2 и при последующем подъеме до отметки x_1 изменение потенциальной энергии груза в поле сил тяжести ΔW будет равно работе сил трения $A_{\text{тр}}$ в оси маятника.

Изменение потенциальной энергии ΔW груза равно разности энергии на уровнях x_1 и x_0 :

$$\Delta W = mgx_1 - mgx_0 = mg(x_1 - x_0). \quad (2.1.6)$$

Работа сил трения в оси маятника равна

$$A_{\text{тр}} = M_{\text{тр}} \cdot \Phi, \quad (2.1.7)$$

где Φ — полный угол поворота маятника Обербека.

С учетом (2.1.6) и (2.1.7) имеем:

$$mg(x_1 - x_0) = M_{\text{тр}}\Phi. \quad (2.1.8)$$

Полный угол поворота маятника Обербека находим из соотношения:

$$R\Phi = (x_2 - x_0) + (x_2 - x_1). \quad (2.1.9)$$

С учетом (2.1.9) формулу (2.1.8) можно переписать в следующем виде:

$$M_{\text{тр}} = mgR \frac{x_1 - x_0}{2x_2 - (x_0 + x_1)}. \quad (2.1.10)$$

Таким образом, использование основного уравнения вращательного движения (2.1.1) для расчетов корректно при выполнении следующего условия

$$\frac{M_{\text{тр}}}{mgR} = \frac{x_1 - x_0}{2x_2 - (x_0 + x_1)} \ll 1. \quad (2.1.11)$$

Экспериментальная установка

Установка для изучения вращательного движения (рис. 2.1.2) состоит из вертикальной *стойки* 1 с закрепленными на ней двумя подвижными *кронштейнами* 2 и 3, на которых крепятся оптические датчики положения. Кроме того, на стойке закреплены два неподвижных *кронштейна* 4 и 5.

На нижнем *кронштейне* 4 закреплен *вал* 6 с двумя шкивами радиусами R_1 и R_2 . На верхнем *кронштейне* 5 закреплен *блок* 7. Через блок перекинута нить, один конец которой намотан на двухступенчатый *вал* 6, а ко второму концу прикреплен *груз* 8. На двухступенчатом валу крепится *тело маятника* 9.

Кронштейны 2 и 3 с фотодатчиками могут крепиться на разной высоте. Расстояние между этими кронштейнами измеряется по шкале, нанесенной на вертикальную *стойку* 1. Время движения грузов определяют с помощью электронного *таймера* 10. Начало работы *таймера* 10 осуществляется нажатием кнопки «Пуск», остановка — кнопкой «Стоп». При подготовке к дальнейшим измерениям результаты предыдущих измерений убираются с табло таймера нажатием кнопки «Сброс».

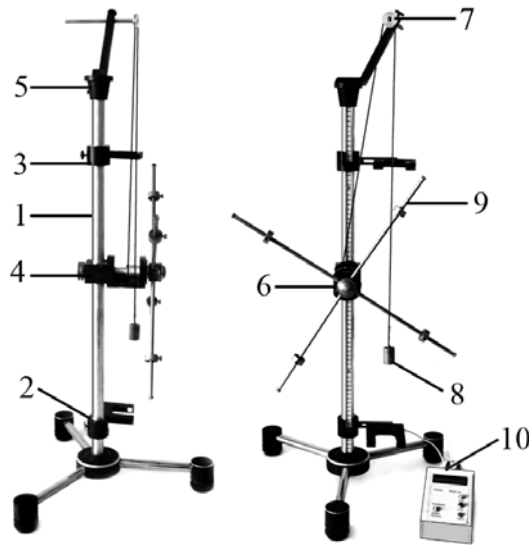


Рис. 2.1.2. Экспериментальная установка для изучения вращательного движения твердого тела.

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Проверка закона движения.

Как следует из (2.1.2) – (2.1.4), вращение маятника Обербека происходит с постоянным угловым ускорением ϵ . При этом груз m опускается (поднимается) с постоянным линейным ускорением a . Координата x груза, отпущенного без начальной скорости с отметки x_0 , меняется по закону (ось X системы координат направлена вниз, см. рис. 2.1.1)

$$x = x_0 + \frac{at^2}{2}. \quad (2.1.12)$$

Используя (2.1.12), определим время Δt пролета груза между двумя отметками, x_3 и x_4 :

$$t = \sqrt{\frac{2}{a}} \left(\sqrt{x_4 - x_0} - \sqrt{x_3 - x_0} \right). \quad (2.1.13)$$

Таким образом, при равнопеременном движении ($a = \text{const}$) и фиксированных положениях x_0 и x_4 зависимость времени t от

$\sqrt{x_3 - x_0}$ является линейной и изображается на графике прямой линией.

Измерения

1. Измерить штангенциркулем радиусы шкивов R_1 и R_2 , результаты записать в рабочую тетрадь.
2. Установить кронштейны с фотодатчиками на максимальном расстоянии друг от друга.
3. Зафиксировать грузы m' в среднем положении на равном расстоянии от оси, чтобы маятник находился в положении безразличного равновесия. Начальное положение x_0 груза массой $m = m_1^*$ всегда одно и то же, его необходимо записать в рабочий журнал. Нить наматывают на вал большего диаметра, виток к витку.
4. Отпустить груз и измерить время t пролета груза между фотодатчиками. Данные записать в табл. 2.1.1. Провести измерения времени t для нескольких положений x_3 верхнего датчика (рекомендуется менять x_3 с шагом 5 см). Для каждого положения датчика измерения времени проводят не менее $k = 3$ раз.
5. Для первых 5–7 опытов измерить значения x_1 — отметки, до которой поднимается груз при вращении маятника в одну сторону. Результаты занести в табл. 2.1.1.
6. Определить значение x_2 — отметки, до которой опускается груз при своем движении.

Таблица 2.1.1

Экспериментальные данные

k	x_3 , м	x_1 , м	$\sqrt{x_3 - x_0}$, м	t_i , с	\bar{t}_i , с	$S_{\bar{t}_i}$, с	\bar{x}_1 , м	a , $\frac{м}{с^2}$	S_a , $\frac{м}{с^2}$
1									
2									
3									
1									
2									
3									
...									

*) Масса груза m_1 указана на установке.

Обработка результатов

1. По экспериментальным данным для каждого положения верхнего фотодатчика x_3 вычислить среднее значение величины t_i по формуле

$$\bar{t}_i = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k t_i,$$

где k — число измерений при каждом фиксированном положении датчика x_3 .

2. Вычислить погрешность измерения (выборочное стандартное отклонение) \bar{t}_i

$$S_{\bar{t}_i} = \sqrt{\frac{1}{k(k-1)} \sum_{i=1}^k (t_i - \bar{t}_i)^2}.$$

Результаты пп. 1 и 2 записать в табл. 2.1.1.

3. В процессе измерений меняется величина x_3 , и при этом изменяется время t . Следовательно, измерения являются совместными, и для обработки результатов следует применить метод наименьших квадратов в рамках линейной модели $y = Az + B$ ($y = t$, $z = \sqrt{x_3 - x_0}$). По результатам расчета методом наименьших квадратов определить значения A и погрешности S_A и построить зависимость t от $\sqrt{x_3 - x_0}$.

4. Согласно (2.1.13), коэффициент A равен $\sqrt{2/a}$. Вычислить значение ускорения a и погрешность по формуле для косвенных измерений:

$$S_a = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial A}\right)^2} \cdot S_A.$$

Результаты записать в табл. 2.1.1.

5. Как следует из формулы (2.1.5), момент инерции маятника равен

$$J = mR^2 \left(\frac{g}{a} - 1 \right).$$

Вычислить J и погрешность по формуле для косвенных измерений (считая, что g определено без погрешностей и равно $9,82 \text{ м/с}^2$):

$$S_J = \sqrt{\left(\frac{\partial J}{\partial m}\right)^2 \cdot S_m^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial R}\right)^2 \cdot S_R^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial a}\right)^2 \cdot S_a^2}.$$

Результаты записать в табл. 2.1.2.

Таблица 2.1.2

Вычисленные значения

J , кг·м ²	S_J , кг·м ²	$\xi = \frac{x_1 - x_0}{2x_2 - (x_0 + x_1)}$	$M_{тр}$, Н·м	$S_{M_{тр}}$, Н·м

6. Вычислить среднее значение \bar{x}_1 . Определить величину

$$\xi = \frac{x_1 - x_0}{2x_2 - (x_0 + x_1)}.$$

Результат записать в табл. 2.1.2. Убедиться, что $\xi \ll 1$, т. е. выполняется неравенство (2.1.11).

7. По формуле (2.1.10) вычислить момент сил трения $M_{тр}$ и погрешность $S_{M_{тр}}$ по формуле для косвенных измерений. Результаты записать в табл. 2.1.2.

Упражнение 2. Проверка независимости момента инерции маятника от момента внешних сил.

В данном упражнении экспериментально проверяется независимость инерционных свойств маятника (момента инерции) от момента внешних сил.

Согласно уравнению (2.1.1),

$$\frac{M_1}{\varepsilon_1} = \frac{M_2}{\varepsilon_2} = J. \quad (2.1.14)$$

Из уравнений (2.1.5) и (2.1.13) следует, что:

$$J = mR^2 \left(\frac{gt^2}{2(\sqrt{x_4 - x_0} - \sqrt{x_3 - x_0})^2} - 1 \right). \quad (2.1.15)$$

В формулу (2.1.15) входят величины, определяемые экспериментально.

Измерения

1. Установить максимальное расстояние между кронштейнами с фотодатчиками. Записать в табл. 2.1.3 координаты фотодатчиков (x_3, x_4) и значение x_0 .

2. Установить грузы m' в среднее положение, на равном расстоянии от оси, чтобы маятник находился в положении безразличного равновесия.

3. К концу нити, намотанной на шкив радиусом R_1 , прикрепить груз массой m и измерить время прохождения грузом расстояния между двумя фотодатчиками t . Измерение повторить $k = 3$ раза, результаты записать в табл. 2.1.3.

4. перебросив нить на другой шкив (радиусом R_2), измерить время t (3 раза). Результаты записать в табл. 2.1.3.

5. Аналогично провести измерения (пп. 3, 4) с грузом массой $m = m_2^*$. Результаты измерений занести в таблицу 2.1.3.

Таблица 2.1.3

Экспериментальные данные

$R_i, m_i,$ мм, г	k	$t_i,$ с	$\bar{t},$ с	$S_{\bar{t}},$ с	$x_0,$ м	$x_3,$ м	$x_4,$ м	$J_i,$ кг·м ²	$S_{J_i},$ кг·м ²						
R_1, m_1	1														
	2														
	3														
R_2, m_1	1														
	2														
	3														
R_1, m_2	1														
	2														
	3														
R_2, m_2	1														
	2														
	3														

Обработка результатов

1. По экспериментальным данным вычислить средние значения величин \bar{t} и погрешности для четырех различных опытов. Результаты вычислений записать в табл. 2.1.3.

* Масса m_2 указана на установке.

2. По формуле (2.1.15) рассчитать значения момента инерции $J_1 \div J_4$.

3. Провести оценку погрешностей полученных результатов. Так как значения J_i получены как результаты косвенных измерений, то стандартное отклонение функции нескольких независимых переменных следует находить по формуле для косвенных измерений.

4. Проанализировать полученный результат. Для этого отметить значения моментов инерции $J_1 \div J_4$ (с учетом их погрешностей) на числовых осях (рис. 2.1.3). Если соответствующие интервалы перекрываются, то можно говорить о выполнении соотношения (2.1.14), т.е. о *независимости инерционных свойств маятника от момента внешних сил*.

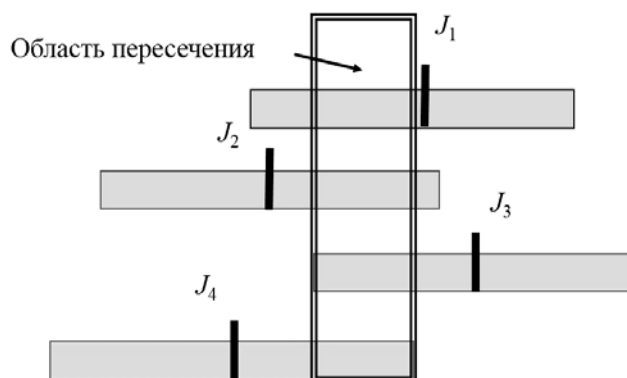


Рис. 2.1.3. Сравнение моментов инерции между собой для четырех опытов.

Упражнение 3. Проверка выполнения теоремы Гюйгенса–Штейнера.

Пусть J'_0 — суммарный момент инерции четырех грузов с массами m' относительно осей, проходящих через их центры масс. При удалении центров грузов от оси вращения на расстояние $l = l_1$ (см. рис. 2.1.1), момент инерции J'_1 , согласно теореме Гюйгенса–Штейнера, равен

$$J'_1 = J'_0 + 4m'l_1^2. \quad (2.1.16)$$

Если J_0 — момент инерции маятника без грузов, то полный момент инерции маятника равен

$$J_1 = J_0 + J'_0 + 4m'l_1^2. \quad (2.1.17)$$

Если удаление центров масс грузов от оси равно l_2 , то

$$J_2 = J_0 + J'_0 + 4m'l_2^2. \quad (2.1.18)$$

С учетом уравнений (2.1.15) и (2.1.17) квадрат времени прохождения груза между двумя отметками x_3 и x_4 равен

$$t^2 = \frac{2(\sqrt{x_4 - x_0} - \sqrt{x_3 - x_0})^2}{g} \left(1 + \frac{J_0 + J'_0}{mR^2} + \frac{4m'l^2}{mR^2} \right). \quad (2.1.19)$$

Таким образом, при выполнении теоремы Гюйгенса – Штейнера t^2 и l^2 должны быть связаны линейно. В данном упражнении исследуется эта зависимость.

Измерения

1. К свободному концу нити, намотанной на шкив большого радиуса R_2 , прикрепить груз наибольшей массы. Фотодатчики оставить в том же положении, что и в *упр. 2*.

2. Установить грузы m на минимальном расстоянии l от оси (соответствующее минимальному значению момента инерции маятника). Измерить расстояние от центров грузов до оси и записать его значение в табл. 2.1.4.

Таблица 2.1.4

Экспериментальные данные

$l, \text{ см}$	k	$t, \text{ с}$	$\bar{t}, \text{ с}$	$S_{\bar{t}}, \text{ с}$	$(\bar{t})^2, \text{ с}^2$	$S_{(\bar{t})^2}, \text{ с}^2$	$l^2, \text{ см}^2$	$S_{l^2}, \text{ см}^2$
	1							
	2							
	3							
	1							
	2							
	3							
...								

3. Отпустить груз m_1 и измерить время t прохождения груза между фотодатчиками. Измерения провести 3 раза. Результаты записать в табл. 2.1.4.

4. Отодвигая грузы m' от оси каждый раз на 3 см, измерить время t трижды. Результаты измерений и соответствующие

расстояния l от оси маятника до центров грузов записать в табл. 2.1.4.

Обработка результатов

1. Для каждого из положений грузов m' вычислить среднее арифметическое значение \bar{t} времени прохождения груза m между оптическими датчиками

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^k t_i}{k}.$$

2. Для каждого из положений грузов m' вычислить случайную погрешность $S_{\bar{t}}$ среднего арифметического по формуле:

$$S_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum (t_i - \bar{t})^2}{k(k-1)}}.$$

3. Определить погрешность измерения l . Результаты вычислений пп. 1 - 3 записать в табл. 2.1.4.

4. Вычислить значения $(\bar{t})^2$, l^2 и $S_{(\bar{t})^2}$, S_{l^2} . Результаты записать в табл. 2.1.4.

5. С помощью метода наименьших квадратов (МНК) обработать экспериментальную зависимость t^2 от l^2 и построить график $t^2(l^2)$. Если эта зависимость близка к линейной типа $y = Ax + B$ ($y = t^2$, $x = l^2$, $B = J_0$), то это свидетельствует о выполнении теоремы Гюйгенса–Штейнера.

Основные итоги работы

В результате работы осуществляется экспериментальная проверка основного уравнения вращательного движения — уравнения моментов. Также проверяются соотношения (2.1.14) и линейная зависимость квадрата времени прохождения груза между метками от l^2 (2.1.19).

Контрольные вопросы

1. Что такое абсолютно твердое тело? Сколько степеней свободы имеет абсолютно твердое тело? Сколько независимых скалярных уравнений необходимо для описания движения твердого тела?

2. Как направлен вектор угловой скорости?
3. Что такое момент силы относительно некоторой точки? Что такое момент силы относительно оси?
4. Что такое момент импульса тела, системы тел?
5. Что такое момент инерции тела относительно оси?
6. Теорема Гюйгенса – Штейнера.
7. Записать уравнение моментов относительно неподвижной оси.

Лабораторная работа 2.2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ ПРОСТОЙ ФОРМЫ И ПРОВЕРКА ТЕОРЕМЫ ГЮЙГЕНСА – ШТЕЙНЕРА МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Цель работы

Экспериментальная проверка теоремы Гюйгенса–Штейнера и определение моментов инерции тел простой формы.

Идея эксперимента

В эксперименте используется связь между периодом колебаний крутильного маятника и его моментом инерции. В качестве маятника выбрана круглая платформа, подвешенная в поле силы тяжести на трех длинных нитях (трифилярный подвес). Платформа может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси. На платформу помещают тела различной формы, измеряют периоды колебаний маятника и определяют значения моментов инерции этих тел. Теорема Гюйгенса–Штейнера проверяется по соответствию экспериментальной и теоретической зависимости моментов инерции грузов от их расстояния до центра платформы.

Теоретическое введение

Теорема Гюйгенса–Штейнера. Если момент инерции тела массой m относительно некоторой оси вращения, проходящей через его центр масс, равен J_0 , то относительно любой другой оси, находящейся на расстоянии a от первой и параллельной ей, момент инерции тела равен

$$J = J_0 + ma^2. \quad (2.2.1)$$

В данной работе с целью проверки теоремы Гюйгенса–Штейнера исследуются крутильные колебания твердого тела на трифилярном подвесе.

Трифилярный подвес представляет собой круглую платформу радиусом R , подвешенную на трех симметрично расположенных нитях одинаковой длины, закрепленных у ее краев (рис. 2.2.1). Наверху эти нити также симметрично прикреплены к диску несколько меньшего размера (радиусом r). Платформа может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси OO' ,

перпендикулярной к плоскости платформы и проходящей через ее центр. Такое движение плат-формы приводит к изменению положения ее центра масс по высоте.

В поле силы тяжести потенциальная энергия плат-формы массой m на высоте h равна

$$W_p = mgh, \quad (2.2.2)$$

где g — ускорение свободно-го падения. Соотношение (2.2.2) записано с учетом нормировки потенциальной энергии: $W_p(h=0)=0$. Кинетическая энергия вращательного движения равна

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2}, \quad (2.2.3)$$

где J — момент инерции платформы относительно оси OO' , ω — угловая скорость вращения платформы.

Если пренебречь работой сил трения со стороны воздуха, то механическая энергия сохраняется, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial t}(E_k + W_p) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{J\omega^2}{2} + mgh\right) = 0. \quad (2.2.4)$$

Пусть l — длина нитей подвеса, R — расстояние от центра платформы до точек ее крепления, r — радиус верхнего диска (рис. 2.2.1). Тогда

$$h = OO_1 = BC - BC_1 = \frac{(BC)^2 - (BC_1)^2}{BC + BC_1}. \quad (2.2.5)$$

Так как

$$(BC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2 = l^2 - (R - r)^2, \quad (2.2.6)$$

то при максимальном отклонении платформы от положения равновесия

$$(BC_1)^2 = (A_1B)^2 - (A_1C_1)^2 = l^2 - (R^2 + r^2 - 2rR \cos \alpha), \quad (2.2.7)$$

а высота подъема h и угол поворота α связаны соотношением:

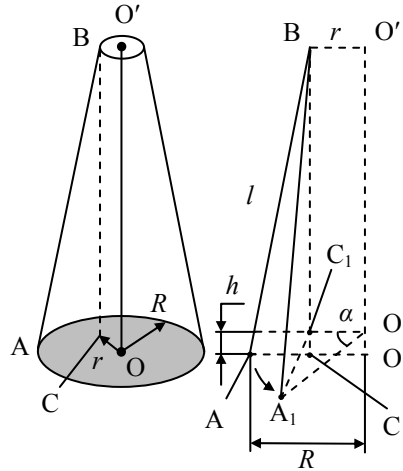


Рис. 2.2.1. Схематическое изображение трифилярного подвеса.

$$h = \frac{2rR(1 - \cos \alpha)}{BC + BC_1} = \frac{4rR \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{BC + BC_1}. \quad (2.2.8)$$

В приближении малых углов ($\sin \alpha \approx \alpha$), и при $R \ll l$ $BC + BC_1 \approx 2l$, поэтому

$$h = \frac{rR\alpha^2}{2l}. \quad (2.2.9)$$

При этом (2.2.4) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{J\omega^2}{2} + mg \frac{rR\alpha^2}{2l} \right) = 0. \quad (2.2.10)$$

Поскольку по определению

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}, \quad (2.2.11)$$

то (2.2.10) можно представить в виде:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{mgrR}{Jl} \alpha = 0, \quad (2.2.12)$$

или

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \omega_0^2 \alpha = 0. \quad (2.2.13)$$

Решение уравнения собственных (свободных) гармонических колебаний (2.2.13) может быть записано в виде:

$$\alpha = \alpha_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \alpha_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right), \quad (2.2.14)$$

где α — угловое смещение платформы, α_0 — его максимальное значение (амплитуда углового смещения), T — период колебаний, φ_0 — начальная фаза. Из формул (2.2.12) и (2.2.14) следует, что

$$J = \frac{mgrR}{4\pi^2 l} T^2. \quad (2.2.15)$$

Формула (2.2.15) позволяет экспериментально определять момент инерции пустой платформы или платформы с грузом на ней, так как все величины в правой части формулы могут быть измерены непосредственно. Следует, однако, помнить, что m — это масса платформы с грузом на ней.

Формулу (2.2.15) используют для определения моментов инерции тел простой формы и для экспериментальной проверки теоремы Гюйгенса–Штейнера.

Экспериментальная установка

Общий вид установки показан на рис. 2.2.2. Отношение радиуса *платформы* 1 к длине нитей подвеса составляет $R/l \leq 0,05$, что соответствует приближению, которое использовалось при выводе формулы (2.2.15).

Тела 2 необходимо устанавливать на *платформу* 1 строго симметрично, чтобы избежать ее перекаса. Для облегчения определения положения грузов и более точной их установки на верхней поверхности платформы нанесены концентрические окружности с шагом 5 мм.

Начальное отклонение от положения равновесия, необходимое для запуска крутильных колебаний, сообщается платформе путем поворота верхнего *диска* 3 вокруг его оси с помощью шнура, связанного с *рычагом* 4 и закрепленного на верхнем диске. При таком возбуждении почти полностью отсутствуют другие типы колебаний, наличие которых затрудняет измерения. При этом амплитуда крутильных колебаний платформы не должна превышать 10° .

Система измерения времени включает в себя электронный *таймер* 5 с *фотодатчиком* 6, закрепленным на подставке. При проведении измерений датчик устанавливается в удобное положение. Начало работы *таймера* 5 осуществляется нажатием кнопки «Пуск», остановка — кнопкой «Стоп». При подготовке к новым измерениям результаты предыдущих убираются с табло таймера нажатием кнопки «Сброс».

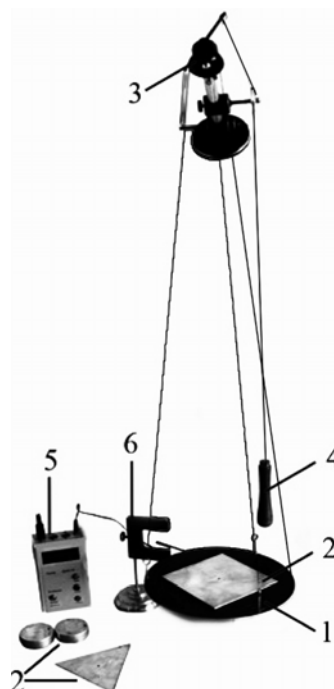


Рис. 2.2.2. Экспериментальная установка.

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Проверка теоремы Гюйгенса–Штейнера.

Справедливость теоремы Гюйгенса–Штейнера доказывается экспериментальной проверкой выполнения соотношения (2.2.1).

Измерения

Для проверки теоремы Гюйгенса–Штейнера выбирают два одинаковых тела (в данной работе они имеют цилиндрическую форму). Перед каждым измерением следует остановить колебания платформы.

1. Произвести взвешивание грузов m , результаты записать в табл. 2.2.1.

2. Установить грузы в центре платформы, положив их один на другой. Создать крутильные колебания платформы и измерить время t_n $n = 15$ колебаний. Эти измерения провести $k = 3$ раза. Данные записать в табл. 2.2.1.

Таблица 2.2.1

Экспериментальные данные

m , кг	k	t_n , с	\bar{t} , с	$S_{\bar{t}}$, с	a , м	S_a , м
...						

3. Расположить те же грузы симметрично относительно вертикальной оси платформы на минимальном расстоянии a_1 от оси. Трижды провести измерения времени t_n $n = 15$ колебаний.

4. Провести измерения t_n для нескольких положений грузов, перемещая их каждый раз на 1 см от центра к краю платформы. Для каждого a_i измерение t_n повторить 3 раза. Значения a и t_n записать в табл. 2.2.1.

Обработка результатов

1. Для каждой из конфигураций грузов вычислить среднее арифметическое значение \bar{t} времени $n = 15$ колебаний

7. С помощью метода наименьших квадратов (МНК) обработать зависимость J от a^2 и построить зависимость график $J(a^2)$. Если эта зависимость является линейной типа $y = Ax + B$ ($y = J$, $x = a^2$, $B = J_0$), то это подтверждает выполнение теоремы Гюйгенса – Штейнера. Определить коэффициент A и его погрешность по формулам МНК. Вычислить значение $m_{гр} = A/2$. Сравнить полученное значение с массами грузов $m_{гр}$, найденными при взвешивании. Совпадение этих величин (с учетом погрешностей) также подтверждает справедливость теоремы Гюйгенса–Штейнера.

Упражнение 2. Определение момента инерции тела методом колебаний.

Измерения

1. Измерить время t_n $n = 15$ полных колебаний пустой платформы $T_{пл}$. Измерения провести $k = 3$ раза. Полученные результаты записать в табл. 2.2.3.

Таблица 2.2.3

Экспериментальные данные

Тело	m , кг	k	t_n , с	\bar{t} , с	$S_{\bar{t}}$, с
Пустая платформа		1			
		2			
		3			
Платформа с квадратной пластиной		1			
		2			
		3			
Платформа с треугольной пластиной		1			
		2			
		3			

2. Платформу поочередно нагрузить исследуемыми телами таким образом, чтобы их центр масс совпадал с осью вращения платформы (совпадали отверстия в теле и на платформе). Масса m_i этих тел известна или может быть определена с помощью взвешивания. В качестве исследуемых тел выбирают пластины, имеющие форму квадрата и равностороннего треугольника. Измерить время t_n $n = 15$ колебаний всей системы. Для каждого тела провести измерения $k = 3$ раза. Результаты измерений записать в табл. 2.2.3.

Обработка результатов

1. Для каждого из тел вычислить среднее арифметическое значение \bar{t} времени $n = 15$ колебаний, случайную погрешность $S_{\bar{t}}$ среднего арифметического (по аналогии с п. 2 упр.1). Результаты записать в табл. 2.2.3.

2. Определить период колебаний \hat{T} и погрешность $S_{\hat{T}}$ (см. п. 5 упр. 1).

3. По формуле (2.2.15) определить значения $J_{\text{пл}}$, J_2 , J_3 и соответствующие им стандартные отклонения.

4. Вычислить моменты инерции квадратной ($J_{\text{кв}}$) и треугольной ($J_{\text{тр}}$) пластин по формулам:

$$J_{\text{кв}} = J_2 - J_{\text{пл}}, \quad J_{\text{тр}} = J_3 - J_{\text{пл}} \quad (2.2.16)$$

Найти стандартные отклонения этих величин. Результаты вычислений пп. 2 и 4 записать в табл. 2.2.4.

Таблица 2.2.4

Вычисленные значения \hat{T} , J и их погрешности

Тело	\hat{T} с	$S_{\hat{T}}$ с	J кг · м ²	S_J кг · м ²
Пустая платформа				
Квадратная пластина				
Треугольная пластина				

5. Сравнить значения $J_{\text{кв}}$ и $J_{\text{тр}}$, полученные экспериментально и рассчитанные теоретически (см. Приложение 2) по формулам:
для квадрата

$$J_{\text{кв}} = \frac{1}{6} ma^2 \quad (2.2.17)$$

для равностороннего треугольника

$$J_{\text{тр}} = \frac{1}{12} ma^2, \quad (2.2.18)$$

где m — масса пластины, a — сторона геометрической фигуры.

Основные итоги работы

В результате выполнения работы должно быть проверено выполнение теоремы Гюйгенса–Штейнера и проведено сравнение экспериментально найденного значения момента инерции для тела заданной формы с соответствующим значением, рассчитанным теоретически.

Контрольные вопросы

1. Что такое момент инерции тела относительно неподвижной оси?
2. Что такое главные оси инерции? Центральные оси? Привести примеры.
3. Сформулируйте теорему Гюйгенса – Штейнера.
4. Выведите формулы для главных центральных моментов инерции следующих тел: тонкая палочка, тонкий диск, тонкие прямоугольная и треугольная пластины, цилиндр, шар, параллелепед.

Лабораторная работа 2.3**ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ ПРОСТОЙ ФОРМЫ****Цель работы**

Экспериментальное определение моментов инерции тел простой формы.

Идея эксперимента

Идея эксперимента состоит в использовании связи между периодом колебаний крутильного маятника и его моментом инерции. Исследуемое тело является составной частью крутильного маятника. По найденному в эксперименте периоду колебаний маятника и коэффициенту жесткости пружины определяются моменты инерции исследуемых тел.

Теоретическое введение

Уравнение вращательного движения имеет вид:

$$\frac{dL}{dt} = M, \quad (2.3.1)$$

где L — момент импульса твердого тела; M — момент внешних сил.

В свою очередь, момент импульса относительно одной из главных осей вращения абсолютно твердого тела связан с осевым моментом инерции J и угловой скоростью ω соотношением

$$L = J\omega. \quad (2.3.2)$$

С учетом (2.3.2) соотношение (2.3.1) можно переписать в следующем виде:

$$M = J \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad (2.3.3)$$

где φ — угол поворота тела вокруг оси.

Если тело закреплено на оси и совершает крутильные колебания под действием спиральной пружины (рис. 2.3.1), то в соответствии с законом Гука при отклонениях от положения равновесия вращающий момент со стороны упругой пружины равен

$$M = -D\varphi, \quad (2.3.4)$$

где D — жесткость пружины.

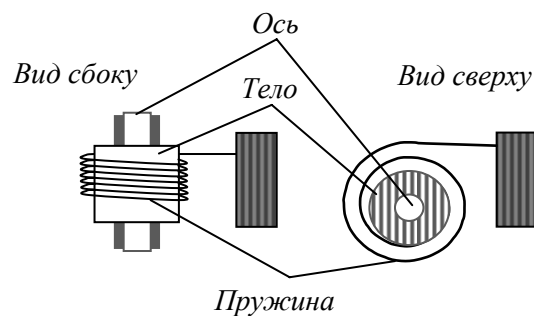


Рис. 2.3.1. Схематическое представление крутильного маятника.

С учетом (2.3.3) и (2.3.4) можно записать уравнение движения тела в виде:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + D \varphi = 0, \quad (2.3.5)$$

или

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{D}{J} \varphi = 0. \quad (2.3.6)$$

Из (2.3.6) частота собственных колебаний крутильного маятника ω_0 равна

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}}, \quad (2.3.7)$$

Период колебаний T равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}. \quad (2.3.8)$$

Рассмотрим колебания крутильного маятника, в состав которого входят два одинаковых груза, закрепленных на стержне на одинаковых расстояниях a от оси вращения. В этом случае в соответствии с теоремой Гюйгенса–Штейнера момент инерции маятника равен

$$J = J_0 + J_c + 2m_{\text{гр}} a^2 + 2J_{\text{гр}}, \quad (2.3.9)$$

где J_0 — момент инерции той части маятника, на которой крепятся все остальные элементы кроме грузов; J_c — момент инерции стержня; $J_{\text{гр}}$ — момент инерции груза относительно его центра масс; $m_{\text{гр}}$ — масса груза. С учетом (2.3.9) имеем:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + J_c + 2m_{\text{гр}}a^2 + 2J_{\text{гр}}}{D}}, \quad (2.3.10)$$

т.е. квадрат периода колебаний линейно зависит от квадрата расстояния a :

$$T^2 = 4\pi^2 \left(\frac{J_0 + J_c + 2J_{\text{гр}}}{D} \right) + \frac{8\pi^2 m_{\text{гр}}}{D} a^2. \quad (2.3.11)$$

На рис. 2.3.2 схематично представлена зависимость T^2 от a^2 . Зная эту зависимость, можно легко определить коэффициент жесткости пружины D .

Если теперь вместо стержня с грузами в состав маятника включить тело с неизвестным моментом инерции J_x , то период колебаний такого маятника будет равен

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + J_x}{D}}, \quad (2.3.12)$$

откуда

$$J_x = \frac{T_1^2 D}{4\pi^2} - J_0. \quad (2.3.13)$$

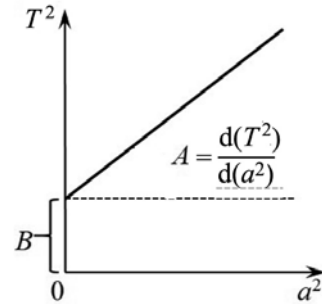


Рис. 2.3.2. Схематичное представление зависимости $T^2(a^2)$ для крутильного маятника.

Экспериментальная установка

Установка (рис. 2.3.3) состоит из крутильного маятника 1 на основании 2, рамки с фотоэлементами 3, цифрового счетчика 4 и набора образцов, для которых производят измерения моментов инерции. В наборе съемных образцов имеются стержень с цилиндрическими грузами, диск с отверстиями, расположенными на разном расстоянии от центра. На рис. 2.3.3 показан стержень с цилиндрическими грузами 5. Образцы крепятся на вертикальной оси маятника. Крутильный маятник может вращаться вокруг этой вертикальной оси. Пружина маятника изготовлена из упругой стальной проволоки.

Система измерения времени включает в себя фотодатчик 4 и электронный таймер 5. Запуск таймера осуществляется нажати-

ем кнопки «Пуск», остановка — кнопкой «Стоп». Перед началом новых измерений показания таймера обнуляются нажатием кнопки «Сброс».

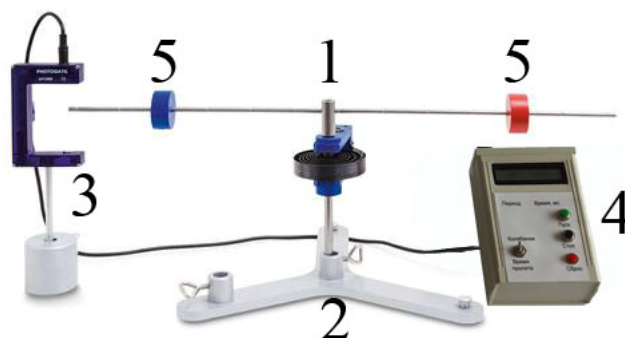


Рис. 2.3.3. Экспериментальная установка.

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Определение коэффициента жесткости пружины и момента инерции стержня.

На маятнике закрепляют стержень с грузами. Проводят измерения периода колебаний маятника для различных положений грузов. Строят график зависимости квадрата периода колебаний от квадрата расстояния $T^2(a^2)$.

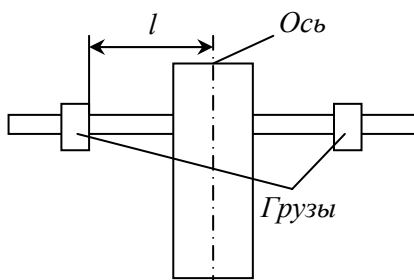


Рис. 2.3.4. Положение грузов на стержне крутильного маятника.

Измерения

1. Определить массу стержня m_c , массу груза $m_{гр}$, длину стержня l_c , радиус отверстия R_1 , внешний радиус R_2 и длину цилиндрических грузов $l_{гр}$, закрепленных на нем. Данные записать в табл. 2.3.1.

2. Закрепить на маятнике стержень с цилиндрическими грузами, расположив его симметрично относительно оси вращения (как показано на рис. 2.3.4).

Таблица 2.3.1

Экспериментальные данные

m_c , кг	$m_{гр}$, кг	l_c , м	R_1 , м	R_2 , м	$l_{гр}$, м

3. Установить грузы симметрично на стержне в положении, наиболее близком к оси. Записать расстояние от грузов до оси l (см. рис. 2.3.4) в табл. 2.3.2.

4. Измерить время t_n $n = 2$ или $n = 3$ колебания. Угловые амплитуды колебаний маятника должны быть $\sim 15^\circ$. Эти измерения провести $k = 3$ раза. Данные записать в табл. 2.3.2.

5. Провести измерения времени колебаний t_n для 6 положений грузов l (для каждого l измерения провести $k = 3$ раза), перемещая их каждый раз на 5 см к концам стержня. Результаты записать в табл. 2.3.2.

Таблица 2.3.2

Экспериментальные данные

l , м	a , м	k	t_n , с	\bar{t} , с	$S_{\bar{t}}$, с
...					

Обработка результатов

1. Для каждого из положений груза вычислить среднее арифметическое значение \bar{t} времени $n = 2$ или $n = 3$ колебания:

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^k t_i}{k}.$$

2. Для каждого из положений груза вычислить случайную погрешность $S_{\bar{t}}$ среднего арифметического по формуле:

$$S_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum (t_i - \bar{t})^2}{k(k-1)}}.$$

Результаты вычислений по пп. 1,2 записать в табл. 2.3.2.

3. Для каждого положения грузов определить значения a , a^2 и погрешность S_{a^2} .

4. Рассчитать суммарную погрешность $\sigma_{\pm\Sigma}$ по формуле

$$\sigma_{\pm\Sigma} = \sqrt{S_{\bar{t}}^2 + \sigma_t^2},$$

где σ_t – приборная погрешность таймера, равная 2% от результата измерения.

5. Определить период колебаний \hat{T} и погрешность $S_{\hat{T}}$ по формулам: $\hat{T} = \frac{\bar{t}}{n}$, $S_{\hat{T}} = \frac{\sigma_{\pm\Sigma}}{n}$.

Результаты пп. 3–5 записать в табл. 2.3.3.

Таблица 2.3.3

Вычисленные значения a^2 , \hat{T} , A , B и их погрешности

$a^2, \text{м}^2$	$S_{a^2}, \text{м}^2$	$\hat{T}, \text{с}$	$S_{\hat{T}}, \text{с}$	$A, S_A, \text{с}^2/\text{м}^2$	$B, S_B, \text{с}^2$

6. Построить график зависимости T^2 от a^2 и найти его линейную аппроксимацию методом наименьших квадратов. Определить коэффициенты A и B в формуле $T^2 = B + Aa^2$. Определить погрешности значений A и B . Результаты записать в табл. 2.3.3.

7. Из (2.3.11) следует, что коэффициент жесткости пружины равен

$$D = 4\pi^2 \frac{2m_{\text{гр}}}{A}.$$

Вычислить значение D .

8. Рассчитать стандартное отклонение S_D для коэффициента жесткости D по формуле для косвенных измерений (считая, что $\pi = 3,14159\dots$ без погрешностей)

$$S_D = \sqrt{\left(\frac{\partial D}{\partial m_{\text{гр}}}\right)^2 \cdot S_{m_{\text{гр}}}^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial A}\right)^2 \cdot S_A^2}.$$

Результаты в пп. 6, 7 записать в табл. 2.3.4.

Таблица 2.3.4

Определенные значения коэффициента жесткости пружины D и моменты инерции стержня и грузов

D , Н·м	S_D , Н·м	J_c , кг·м ²	S_{J_c} , кг·м ²	$J_{\text{гр}}$, кг·м ²	$S_{J_{\text{гр}}}$, кг·м ²	$J_c^{\text{эксп}}$, кг·м ²	$S_{J_c^{\text{эксп}}}$, кг·м ²

9. Определить моменты инерции стержня и грузов по формулам (см. **Приложение 2.1**):

$$J_c = \frac{1}{12} m_c l_c^2,$$

$$J_{\text{гр}} = \frac{1}{12} m_{\text{гр}} l_{\text{гр}}^2 + \frac{1}{4} m_{\text{гр}} (R_1^2 + R_2^2)$$

и соответствующие стандартные отклонения. Результаты записать в табл. 2.3.4.

10. В соответствии с (2.3.11) $B = 4\pi^2(J_0 + J_c + 2J_{\text{гр}})/D$. Пренебрегая моментом инерции маятника J_0 момент инерции стержня можно определить как:

$$J_c^{\text{эксп}} = \frac{BD}{4\pi^2} - 2J_{\text{гр}}.$$

Определить значение момента инерции стержня $J_c^{\text{эксп}}$ и его стандартное отклонение. Результаты вычислений записать в табл. 2.3.4.

11. Сравнить экспериментальные и теоретические значения моментов инерции стержня. С этой целью отметить значения $J_c^{\text{эксп}}$ и $J_c^{\text{теор}}$ (с учетом их погрешностей) на числовой оси (см. рис. 2.3.5). По степени перекрывания интервалов сделать вывод о точности

метода определения моментов инерции тел с помощью крутильного маятника.

Упражнение 2. Проверка теоремы Гюйгенса–Штейнера и определение момента инерции тонкого диска.

В этом упражнении проводится измерение момента инерции тонкого диска.

Измерения

1. Определить массу (путем взвешивания) и геометрические размеры диска (радиус R и толщина H). Оценить погрешности измерений. Результаты записать в табл. 2.3.5.

Таблица 2.3.5

Экспериментальные данные

Тело	m , кг	S_m , кг	R , м	S_R , м	H , м	S_H , м
Диск						

2. Закрепить диск по центру на оси маятника. Измерить время t_n $n = 2$ полных колебаний. Измерения проводят $k = 3$ раза. Полученные результаты записать в табл. 2.3.6.

Таблица 2.3.6

Экспериментальные данные

Расстояние от оси до центра, см	k	t_n , с	\bar{t} , с	$S_{\bar{t}}$, с	\hat{T} , с	$S_{\hat{T}}$, с
0						
4						
8						
10						
12						
14						

--	--	--	--	--	--	--

3. Аналогично провести измерения для диска, закрепив его на расстоянии 4, 8, 10, 12, 14 см от центра. Данные измерений записать в табл. 2.3.6.

Обработка результатов

1. Для каждого из тел вычислить среднее арифметическое значение \bar{t} времени $n = 2$ полных колебаний, случайную погрешность $S_{\bar{t}}$ среднего арифметического (см. пп. 1,2 упр.1). Результаты записать в табл. 2.3.6.

2. Определить период колебаний \hat{T} и погрешность $S_{\hat{T}}$ (как в п. 5 упр. 1). Результаты записать в табл. 2.3.6.

3. По формуле $J^{экс} = \frac{T_0^2 D}{4\pi^2}$ вычислить значение момента инерции диска, где T_0 период колебаний диска, когда он закреплен по центру. Вычислить стандартное отклонение и записать значение в табл. 2.3.7.

Таблица 2.3.7

Вычисленные значения J и их погрешности

Тело	$J^{экс}$, кг · м ²	$S_{J^{экс}}$, кг · м ²	$J^{теор}$, кг · м ²	$S_{J^{теор}}$, кг · м ²
Диск				

4. Рассчитать теоретическое значение момента инерции диска по формуле (см. Приложение 2.11):

$$J_{д}^{теор} = \frac{1}{2} m_{д} R_{д}^2 .$$

Вычислить стандартное отклонение и записать в табл. 2.3.7.

5. Сравнить экспериментальные и теоретические значения моментов инерции диска. С этой целью отметить значения $J_{экс}$ и $J_{теор}$ (с учетом их погрешностей) на числовой оси (см. рис. 2.3.5). По степени перекрытия интервалов сделать вывод о точности метода определения моментов инерции тел с помощью крутильного маятника.

6. Построить график зависимости T^2 от a^2 , где a – расстояние от оси вращения до оси, проходящей через центр масс. Убедитесь,

что график линейный, и как следствие выполняется теорема Гюйгенса–Штейнера.

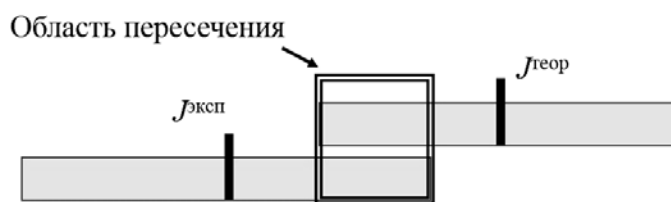


Рис. 2.3.5. Сравнение экспериментальных и теоретических значений моментов инерции.

Основные итоги работы

В процессе выполнения работы должны быть определены коэффициент жесткости пружины, моменты инерции стержня и диска и проведено сравнение последних двух значений со значениями, рассчитанными теоретически. Кроме того, должна быть проведена проверка выполнения теоремы Гюйгенса–Штейнера.

Контрольные вопросы

1. Что такое момент инерции тела?
2. Что такое главные оси инерции? Центральные оси? Приведите примеры.
3. Что такое момент инерции тела относительно неподвижной оси?
4. Выведите формулы для вычисления главных центральных моментов инерции следующих тел: тонкая палочка, тонкий диск, тонкие прямоугольная и треугольная пластины, цилиндр, шар, параллелепипед.
5. Сформулируйте теорему Гюйгенса–Штейнера.

Лабораторная работа 2.4**ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ КОЛЕСА****Цель работы**

Знакомство с методами определения момента инерции твердого тела.

Идея эксперимента

В работе используются два способа экспериментального определения момента инерции. Первый основан на использовании зависимости периода колебаний физического маятника от его момента инерции. Второй — на анализе инерционных свойств твердого тела, закрепленного на оси, при его вращательном движении. Кроме того, проводится прямой расчет момента инерции исследуемого тела известной геометрии.

Теоретическое введение

Для твердого тела, закрепленного на оси, уравнение вращательного движения имеет вид

$$J\varepsilon = M, \quad (2.4.1)$$

где J — момент инерции твердого тела относительно оси вращения, ε — его угловое ускорение, M — момент внешних сил, приложенных к телу.

Величина момента инерции относительно какой-либо оси определяется пространственным распределением массы тела. В частности, для тела, состоящего из конечного числа материальных точек m_i ,

$$J = \sum_i m_i \rho_i^2, \quad (2.4.2)$$

где ρ_i — их расстояния до оси вращения. Для сплошных тел суммирование заменяется интегрированием:

$$J = \int \rho^2 dm.$$

Для некоторых тел простой формы возможен прямой расчет момента инерции. При сложной форме тела и неравномерном распределении его плотности аналитический расчет величины момента инерции может оказаться достаточно сложной задачей.

В данной работе применяются два способа экспериментального определения момента инерции: с помощью анализа колебаний физического маятника, составной частью которого

является исследуемое тело, и с помощью изучения вращательного движения этого тела.

Определение момента инерции твердого тела на основе анализа его колебаний как физического маятника. Если закрепить исследуемое тело А на горизонтальной оси О, проходящей через центр масс (рис. 2.4.1), то момент сил тяжести будет равен нулю, и тело будет находиться в состоянии безразличного равновесия. Если теперь закрепить на исследуемом теле на некотором удалении L от оси малое тело В с известной массой m , то равновесие перестанет быть безразличным — при равновесии момент силы тяжести, действующий на тело В, будет равен нулю. Такую систему тел можно рассматривать как физический маятник.

Уравнение движения такого маятника имеет вид:

$$(J + J_B) \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgL \sin \varphi, \quad (2.4.3)$$

где J и J_B — моменты инерции твердого тела А и дополнительного грузика В относительно оси О, g — ускорение свободного падения, φ — угол отклонения

тела от положения равновесия, $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ —

угловое ускорение тела.

Если углы отклонения малы ($\varphi \leq 10^\circ$), то $\sin \varphi \approx \varphi$, и можно записать:

$$(J + J_B) \frac{d^2\varphi}{dt^2} + mgL\varphi = 0. \quad (2.4.4)$$

Уравнение (2.4.4) — это уравнения гармонических колебаний:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega_0^2 \varphi, \quad (2.4.5)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{mgL}{J + J_B}. \quad (2.4.6)$$

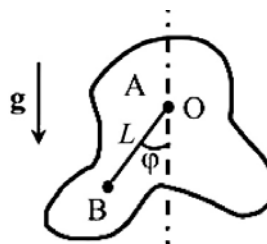


Рис. 2.4.1. Схематическое представление физического маятника.

Уравнение (2.4.5) описывает собственные (свободные) гармонические колебания, а его решение имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0), \quad (2.4.7)$$

где $\omega_0 = 2\pi/T$ — собственная круговая частота, T — период колебаний, φ_0 — амплитуда колебаний, θ_0 — начальная фаза колебаний.

Поскольку размеры тела В во много раз меньше расстояния L до оси, то момент инерции дополнительного грузика можно считать равным

$$J_B = mL^2. \quad (2.4.8)$$

С учетом (2.4.8), из (2.4.6) получаем

$$J = mL \left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - L \right). \quad (2.4.9)$$

Таким образом, для определения момента инерции твердого тела можно закрепить его на оси, проходящей через центр масс, установить на нем добавочное малое тело с известной массой, измерить период колебаний и, зная расстояние L , по формуле (2.4.9) определить неизвестный момент инерции.

Отметим, что при выводе соотношения (2.4.9) не учитывалось влияние момента сил трения $M_{тр}$ в оси. Если момент $M_{тр}$ мал, то колебания будут затухать медленно, а их частота будет мало отличаться от ω_0 .

Определение момента инерции твердого тела на основе анализа его равноускоренного вращательного движения. Рассмотрим, как и в предыдущем случае, тело А, закрепленное на оси О, проходящей через его центр масс (рис. 2.4.2). Пусть соосно с телом закреплен цилиндр С радиусом r , на который наматывается нить с прикрепленным к ней грузом В.

Под действием силы тяжести груз будет опускаться, приводя исследуемое тело А во вращение. Уравнение движения груза В,

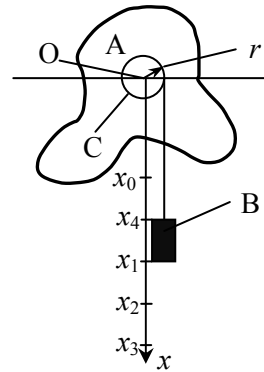


Рис. 2.4.2. Схематическое представление твердого тела, закрепленного на оси и вращающегося под действием груза В.

уравнение вращательного движения тела A и уравнение кинематической связи имеют вид

$$ma = mg - T, \quad (2.4.10)$$

$$J\varepsilon = Tr - M_{\text{тр}}, \quad (2.4.11)$$

$$a = \varepsilon r, \quad (2.4.12)$$

где m — масса груза B , J — момент инерции исследуемого тела вместе с цилиндром C , g — ускорение свободного падения, T — сила натяжения нити, r — радиус цилиндра, на который намотана нить, $M_{\text{тр}}$ — момент сил трения, a — ускорение тела B .

Из уравнений (2.4.10) – (2.4.12) получаем:

$$J = mr^2 \left(\frac{g}{a} - 1 \right) - \frac{M_{\text{тр}} r}{a}. \quad (2.4.13)$$

Таким образом, если известно ускорение груза B и момент сил трения в оси, то по формуле (2.4.13) можно определить момент инерции исследуемого тела.

Предположим, что груз начинает опускаться из положения $x_0=0$, а время прохождения им расстояния между двумя точками x_1 и x_2 равно Δt . Так как движение груза на участке $x_1 - x_2$ равноускоренное, то

$$x_1 = x_0 + \frac{at_1^2}{2}, \quad (2.4.14)$$

$$x_2 = x_0 + \frac{a(t_1 + \Delta t)^2}{2}, \quad (2.4.15)$$

где t_1 — время прохождения участка $x_1 - x_0$, Δt — время прохождения участка $x_2 - x_1$.

Из (2.4.14) и (2.4.15) следует, что

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2}{a}} (\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0}), \quad (2.4.16)$$

откуда находим

$$a = 2 \frac{(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2}{(\Delta t)^2}. \quad (2.4.17)$$

Таким образом, для определения a нужны данные о x_0 , x_1 , x_2 и времени Δt прохождения грузом расстояния между точками с координатами x_1 и x_2 .

Рассмотрим, как можно оценить момент сил трения.

При опускании груза с отметки x_0 на полную длину нити (до отметки x_3) его потенциальная энергия в поле силы тяжести переходит в кинетическую и в некоторое количество тепловой энергии, равное по величине работе сил трения:

$$mg(x_3 - x_0) = E_k + \Phi M_{\text{тр}}, \quad (2.4.18)$$

где Φ — полный угол поворота тела, E_k — кинетическая энергия системы в нижней точке. Предполагается, что момент силы трения при движении остается постоянным, т.е. не зависит от скорости.

После того как груз опустится на полную длину нити до отметки x_3 , тело А будет продолжать вращаться, и нить начнет наматываться на цилиндр. В результате груз поднимется до отметки x_4 . Очевидно, что

$$E_k = mg(x_3 - x_4) + \Phi_1 M_{\text{тр}}, \quad (2.4.19)$$

где Φ_1 — полный угол поворота тела при подъеме груза.

Учитывая, что $x_3 - x_0 = r\Phi$ и $x_3 - x_4 = r\Phi_1$, для оценки момента силы трения получаем соотношение

$$M_{\text{тр}} = mgr \frac{x_4 - x_0}{2x_3 - x_0 - x_4}. \quad (2.4.20)$$

Экспериментальная установка

Основной частью установки является сплошное *колесо 1* (рис. 2.4.3), которое может вращаться вокруг горизонтальной оси. К цилиндру, расположенному на оси колеса, с помощью нити прикреплен *груз 2*. Помещая груз в *устройство 3*, получаем физический маятник, который может колебаться около положения равновесия. Угол отклонения может быть определен по угломерной *шкале 4*. В том случае, когда груз освобожден (при этом устройство для его крепления снимается с колеса), под действием силы тяжести он начинает опускаться, приводя колесо во вращение. Установка снабжена системами регистрации периода колебаний колеса и времени опускания груза.

Для регистрации периода колебаний с обратной стороны колеса имеются два симметрично расположенных, легких, одинаковых по массе тела. На одном из тел закреплен стержень, являющийся составной частью системы измерения периода колебаний. В исходном положении система зафиксирована с помощью фрикционной муфты, управляемой электромагнитом.

При выключении электромагнита фрикционная муфта освобождает колесо, и оно начинает движение (колебательное или вращательное). Время колебаний колеса определяется с помощью электронного таймера 5. Время перемещения груза при вращательном движении колеса определяется с помощью того же таймера 5, включение и выключение которого в этом случае осуществляется оптическими датчиками 6. Эти датчики крепятся на кронштейнах и могут фиксироваться на различных высотах. Положение датчиков определяется с помощью линейки (рис. 2.4.3).

В режиме измерения периодов колебаний запуск таймера осуществляется нажатием кнопки «Пуск», остановка — кнопкой «Стоп». При измерении времени опускания груза нажимают на кнопку «Пуск», на индикаторе электронного таймера высвечивается время прохождения грузом расстояния между двумя датчиками положения. Переключение таймера в тот или иной режим работы осуществляется тумблером «Колеб.–Вращ.». При подготовке к новым измерениям показания табло обнуляются нажатием кнопки «Сброс».

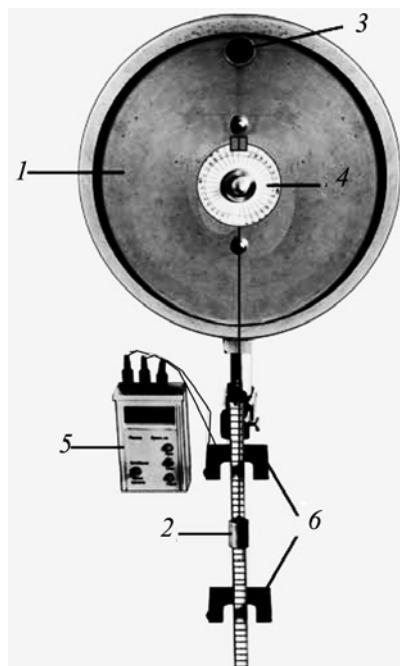


Рис. 2.4.3. Экспериментальная установка для определения момента инерции колеса.

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Определение момента инерции колеса методом колебаний.

Измерения

1. На краю колеса имеется устройство 3 для крепления груза. Колесо выводят из положения равновесия на угол, не превышающий 10° . С помощью таймера определяют время t_n $n=10$ полных колебаний. Измерение проводят $k=3$ раза, результаты записывают в табл. 2.4.1.

2. После этого не менее трех раз измеряют расстояние L от оси вращения до центра масс груза (то есть расстояние от оси вращения до центра винта крепления груза на колесе). Результаты записать в табл. 2.4.1.

3. Взвесить устройство для крепления груза и сам груз. Значения масс этих тел m_k и $m_{гр}$ и погрешности записать в табл. 2.4.1.

Таблица 2.4.1

Экспериментальные данные

k	$t_n,$ с	$\bar{t},$ с	$S_{\bar{t}},$ с	$L,$ м	$\bar{L},$	$S_{\bar{L}},$	$m_k,$ кг	$S_{m_k},$ кг	$m_{гр},$ кг	$S_{m_{гр}},$ кг

Обработка результатов

1. Вычислить среднее арифметическое значение \bar{t} :

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^k t_i}{k}.$$

2. Вычислить случайную погрешность $S_{\bar{t}}$ среднего арифметического по формуле:

$$S_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum (t_i - \bar{t})^2}{k(k-1)}}.$$

Результаты пп. 1, 2 записать в табл. 2.4.1.

3. Из экспериментальных данных вычислить средние значения расстояния \bar{L} от оси до груза.

4. Определить выборочное стандартное отклонение для L . Результаты пп. 3, 4 записать в табл. 2.4.1.

5. Рассчитать суммарную погрешность по формуле

$$\sigma_{\Sigma} = \sqrt{S_{\bar{t}}^2 + \sigma_t^2},$$

где σ_t – приборная погрешность таймера, равная 2% от результата измерения.

6. Определить период колебаний \hat{T} и погрешность S_T по формулам:

$$\hat{T} = \frac{\bar{t}}{n}, \quad S_{\hat{T}} = \frac{\sigma_{t\Sigma}}{n}.$$

Результаты записать в табл. 2.4.2.

Таблица 2.4.2

Вычисленные значения \hat{T} , J и их погрешности

\hat{T} , с	$S_{\hat{T}}$, с	J , кг·м ²	S_J , кг·м ²

7. По формуле (2.4.9), в которой $m = m_k + m_{гр}$, определить момент инерции колеса J .

8. Оценить погрешности для J , используя следующую формулу для расчета погрешностей косвенных измерений:

$$S_J(L, T, m, g) = \sqrt{\left(\frac{\partial J}{\partial L} S_L\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial T} S_T\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial m} S_m\right)^2}, \quad (2.4.21)$$

где значение S_m дано в описании используемых весов (считая, что g определено без погрешностей и равно 9,82 м/с²). Результаты записать в табл. 2.4.2.

Упражнение 2. Определение момента инерции колеса методом вращения.

Измерения

1. Снять с колеса устройство для крепления груза.
2. Установить оптические датчики в положения, соответствующие отметкам x_1 и x_2 (в дальнейшем положение нижнего датчика не меняется).
3. Измерить трижды время t прохождения груза между отметками x_1 и x_2 . При этом зафиксировать отметку x_0 , с которой опускается груз (при последующих измерениях это значение x_0 не меняется). Измерить также координату x_3 точки, до которой опускается груз при полном разматывании нити, и координату x_4 точки, до которой поднимается груз при дальнейшем наматывании нити на цилиндр, пока колесо продолжает вращаться. В дальнейшем значения x_3 и x_4 считаем определенными без погрешностей. Результаты пп.2, 3 записать в табл. 2.4.3.
4. Провести измерения t не менее 5 раз для фиксированных значений x_0 , x_2 и разных x_1 (сдвигая оптический датчик на 3 см вверх), каждый раз записывая данные в табл. 2.4.3.

5. Несколько раз измерить радиус r цилиндра, на который наматывается нить.

Таблица 2.4.3

Экспериментальные данные

x_1 , м	t , с	\bar{t} , с	$S_{\bar{t}}$, с	x_2 , м	x_0 , м	x_3 , м	x_4 , м	\bar{r} , мм	S_r , мм
...									

Обработка результатов

1. Вычислить среднее значение радиуса цилиндра \bar{r} и стандартное отклонение этой величины.

2. По формулам (2.4.17) и (2.4.20) определить ускорения a_n и моменты сил трения $M_{\text{тр}}$ для каждого значения x_1 . Результаты измерений, сделанных в пп. 1, 2, записать в табл. 2.4.4.

3. Поскольку a_n и $M_{\text{тр}}$ определяются для различных значений x_1 , то полученные значения ускорений и моментов сил трения можно считать независимыми. Рассматривая эти значения как результаты совместных измерений, найти методом наименьших квадратов оценку ускорения груза \bar{a} и момента сил трения $\bar{M}_{\text{тр}}$ по формулам

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{a_i}{S_{a_i}}}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{S_{a_i}}}, \quad \bar{M}_{\text{тр}} = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{(M_{\text{тр}})_i}{S_{(M_{\text{тр}})_i}}}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{S_{(M_{\text{тр}})_i}}};$$

а выборочное отклонение этих величин — по формулам

$$S_{\bar{a}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^k \frac{1}{S_{a_i}}}}, \quad S_{\bar{M}_{\text{тр}}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^k \frac{1}{S_{\bar{M}_{\text{тр}}}}}}$$

Результаты записать в табл. 2.4.4.

Таблица 2.4.4

Вычисленные значения параметров колеса

\bar{r} ,	$S_{\bar{r}}$,	x_1 ,	a_i ,	$M_{\text{тр}}$,	\bar{a} ,	$S_{\bar{a}}$,	$\bar{M}_{\text{тр}}$,	$S_{\bar{M}_{\text{тр}}}$,	J ,	S_J ,
мм	мм	м	$\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	Н·м	$\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	$\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	Н·м	Н·м	кг·м ²	кг·м ²

4. По формуле (2.4.13) вычислить момент инерции колеса J . Определить его выборочное отклонение S_J . Результаты записать в табл. 2.4.4.

Упражнение 3. Прямой расчет момента инерции колеса

Используемое в установке колесо можно рассматривать как совокупность тел простой формы (рис. 2.4.4): диска радиусом R_1 и толщиной l_1 ; обода диска толщиной l_2 с внешним и внутренним радиусами R_2 и R_1 ; двух малых тел C_1 и C_2 , расположенных на расстоянии R_3 от оси; цилиндра радиусом R_4 и толщиной l_3 .

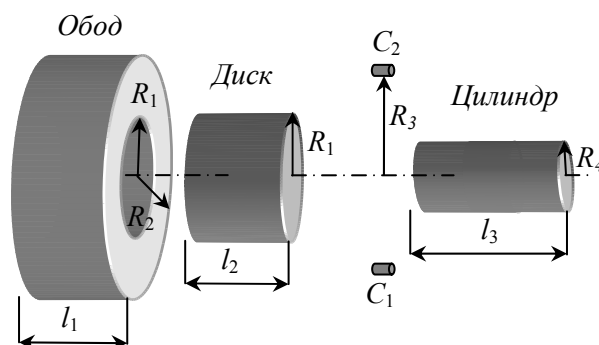


Рис. 2.4.4. Схематическое представление колеса в виде совокупности тел простой формы.

Для всех этих тел момент инерции можно рассчитать по известным формулам.

Момент инерции диска массой m_d относительно оси равен (см. **Приложение 2.4**)

$$J_d = \frac{1}{2} m_d R_1^2, \quad (2.4.22)$$

а для обода массой $m_{об}$ (см. **Приложение 2.5**) —

$$J_{об} = \frac{1}{2} m_{об} (R_1^2 + R_2^2). \quad (2.4.23)$$

Учитывая, что диск, обод и цилиндр сделаны из одного материала с плотностью ρ , для момента инерции колеса получаем:

$$J = \frac{1}{2} \pi \rho l_1 R_1^4 + \frac{1}{2} \pi \rho l_2 (R_2^4 - R_1^4) + \frac{1}{2} \pi \rho l_3 R_4^4 + m_C R_3^2, \quad (2.4.24)$$

где m_C — суммарная масса тел C_1 и C_2 .

Измерения

1. С помощью штангенциркуля и линейки определяют геометрические размеры составных частей колеса по 3 - 5 раз. Результаты измерений заносят в табл. 2.4.5.

Таблица 2.4.5

Результаты измерений

n	l	2	3	4	5
$R_{1n}, \text{м}$					
$\bar{R}_1, \text{м}$					
$S_{\bar{R}_1}, \text{м}$					
$R_{2n}, \text{м}$					
$\bar{R}_2, \text{м}$					
$S_{\bar{R}_2}, \text{м}$					
$R_{3n}, \text{м}$					
$\bar{R}_3, \text{м}$					
$S_{\bar{R}_3}, \text{м}$					
$R_{4n}, \text{м}$					
$\bar{R}_4, \text{м}$					
$S_{\bar{R}_4}, \text{м}$					
$l_{1n}, \text{м}$					

n	1	2	3	4	5
$\bar{l}_1, \text{м}$					
$S_{\bar{l}_1}, \text{м}$					
$l_{2n}, \text{м}$					
$\bar{l}_2, \text{м}$					
$S_{\bar{l}_2}, \text{м}$					
$l_{3n}, \text{м}$					
$\bar{l}_3, \text{м}$					
$S_{\bar{l}_3}, \text{м}$					

Обработка результатов

1. Определить средние арифметические значения $R_1, R_2, R_3, l_1, l_2, l_3$.
2. Вычислить выборочные стандартные отклонения для этих величин. Результаты пп. 1, 2 записать в табл. 2.4.5.
3. По формуле (2.4.24) рассчитать значение момента инерции колеса и определить его соответствующую погрешность.
4. Рассчитанное значение момента инерции колеса сравнивают со значениями, полученными экспериментально в упр. 1 и 2.

Основные итоги работы

Экспериментально определяется значение момента инерции колеса двумя способами. Результаты сравниваются с моментом инерции, рассчитанным по формуле (2.4.24).

Контрольные вопросы

1. Что такое главные оси инерции? Центральные оси? Привести примеры.
2. Что такое момент инерции тела относительно закрепленной оси?
3. Вывести формулы для расчета главных центральных моментов инерции следующих тел: тонкая палочка, тонкий диск, тонкие прямоугольная и треугольная пластины, цилиндр, шар, параллелепипед?
4. Сформулируйте теорему Гюйгенса–Штейнера.
5. Уравнение движения для колебательного и вращательного режима. Отличие их друг от друга. Отличие их решений.

Лабораторная работа 2.5

ИЗУЧЕНИЕ ТЕНЗОРА ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Цель работы

Знакомство с понятием «тензор инерции». Определение компонент тензора инерции цилиндра и параллелепипеда из измерений периода колебаний и углового ускорения при вращении исследуемого тела.

Идея эксперимента

Приводя исследуемое тело в то или иное движение, измерить либо период колебаний, либо угловое ускорение при вращении. По соответствующим формулам оценить момент инерции. Реализуется возможность приведения тела во вращательное движение вокруг различных центральных осей.

Теоретическое введение

Рассмотрим твердое тело, которое вращается относительно некоторой неподвижной точки O . Существует связь между моментом импульса \mathbf{L} твердого тела и угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{L} = \hat{J}\boldsymbol{\omega}, \quad (2.5.1)$$

где \hat{J} — тензор инерции, определяемый формулой (2.22).

При вращении твердого тела относительно некоторой неподвижной оси AA' , проходящей через точку O , проекция момента импульса на эту ось равна (см. рис. 2.5.1)

$$L_{AA'} \equiv \left(\sum_i \Delta m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \right)_{AA'} = \sum_i \Delta m_i \rho_i^2 \omega = J_{AA'} \omega, \quad (2.5.2)$$

где ρ_i — расстояние от i -го элемента массы Δm_i до оси AA' , а величина $J = \sum_i \Delta m_i \rho_i^2$ — момент инерции тела относительно оси AA' .

Значение момента инерции J твердого тела относительно оси, имеющей произвольное направление, связано с компонентами тензора инерции соотношением (2.25).

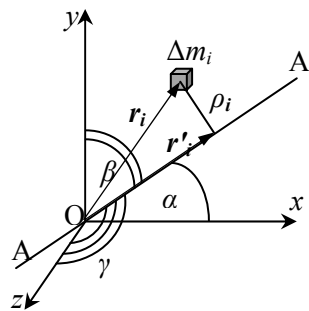


Рис. 2.5.1. Схематическое представление вращения тела вокруг закрепленной оси.

В дальнейшем будем использовать систему координат, оси которой совпадают с главными осями инерции. В этом случае тензор инерции имеет диагональный вид, а соотношение (2.25) приводится к виду:

$$J_{AA'} = J_{xx} \cos^2 \alpha + J_{yy} \cos^2 \beta + J_{zz} \cos^2 \gamma. \quad (2.5.3)$$

Экспериментальная установка

Одна статическая стойка и *стойка 1* (положение которой может регулироваться) смонтированы на основании (рис. 2.5.2). В стойках находятся подшипники, в которые вставлены держатели, которые фиксируют исследуемое *тело 2*. Исследуемое *тело 2* имеет специальные углубления, в которые вставляются держатели. Таким образом, тело может вращаться вокруг выбранной оси. Положение *стойки 1* фиксируется при помощи *рычага 3*.

Исследуемое тело может приводиться как в колебательное движение, так и во вращательное. В случае колебательного движения определяют период колебаний рамки с исследуемым телом. Для этого на цилиндре закрепляется кольцо со *стержнем 4* (рис. 2.5.2) при помощи *винта 5*. На *стержне 4* закреплен дополнительный *груз 6*.

Установка снабжена системой измерения колебаний, включающей в себя *таймер 7* и фотоэлектрический *датчик 8*. Для определения

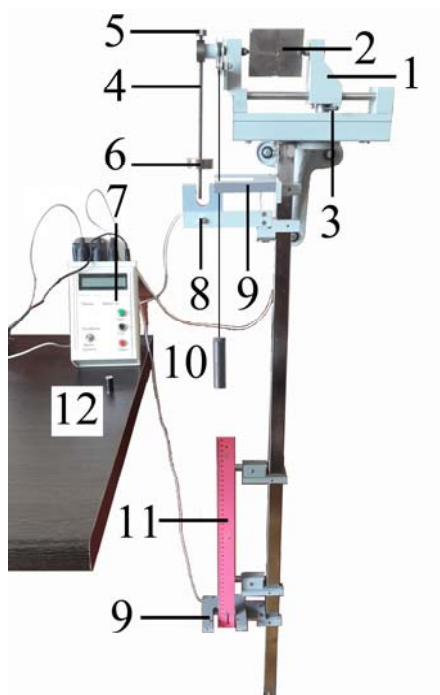


Рис. 2.5.2. Экспериментальная установка для определения тензора.

момента инерции установки без исследуемого тела 2 имеется небольшой цилиндр 12.

В случае вращательного движения необходимо ослабить винт 5 и снять стержень 4 с закрепленным на нем грузом 6. Вращение исследуемого тела 2 в этом случае происходит при опускании груза 10 (рис. 2.5.2), висящего на нити, намотанной на шкив. Масса груза и радиус шкива указаны на установке. Установка снабжена системой автоматического отчета времени, включающей в себя два фотоэлектрических датчика 9 и таймер 7 для определения времени перемещения груза. Расстояние на который поднимается груз 10 определяется по линейке 11, укрепленной на установке.

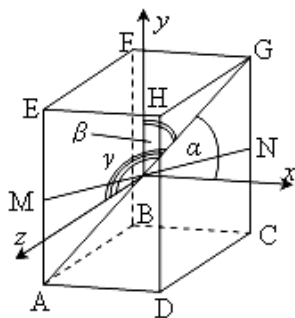


Рис. 2.5.4. Схематическое представление параллелепипеда.

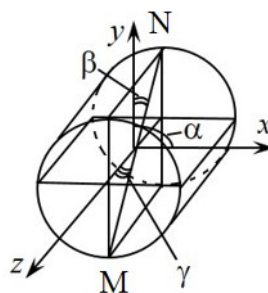


Рис. 2.5.5. Схематическое представление цилиндра.

В работе определяются компоненты тензора инерции металлических тел, имеющих форму параллелепипеда (рис. 2.5.4) и цилиндра (рис. 2.5.5).

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Изучение тензора инерции в режиме вращательного движения рамки.

Тело правильной формы закрепляется при помощи держателей между двумя стойками и может приводиться во вращение вокруг некоторой оси под действием момента

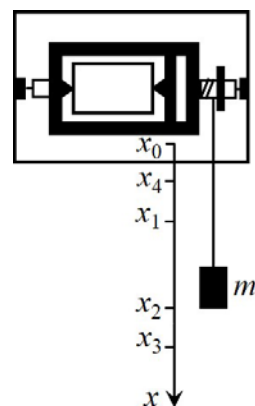


Рис. 2.5.6. Схема установки для определения тензора инерции динамическим методом.

внешних сил. Момент внешних сил создается с помощью нити, намотанной на шкив, к концу которой подвешен груз массой m (рис. 2.5.6). В качестве исследуемого тела используется параллелепипед.

Если груз начал движение от отметки x_0 , затем прошел отметку x_1 со скоростью v_1 , а через время Δt после этого — отметку x_2 со скоростью v_2 , то можно записать:

$$mg(x_1 - x_2) = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) + \frac{1}{2}J'(\omega_2^2 - \omega_1^2) + M_{\text{тр}}\Delta\varphi, \quad (2.5.4)$$

где $mg(x_2 - x_1)$ — изменение потенциальной энергии груза в поле силы тяжести, $\frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$ — изменение кинетической энергии

его поступательного движения, $\frac{1}{2}J'(\omega_2^2 - \omega_1^2)$ — изменение

кинетической энергии вращающейся рамки с телом; $M_{\text{тр}}\Delta\varphi$ — работа сил трения в оси рамки, m — масса груза, подвешенного на нити; $J' = J + J_0$; J и J_0 — моменты инерции тела и рамки, ω_1, ω_2 — угловые скорости вращения рамки для положений груза в точках $x = x_1$ и $x = x_2$ соответственно, g — ускорение свободного падения,

$M_{\text{тр}}$ — момент сил трения, $\Delta\varphi = \frac{x_2 - x_1}{r}$ — угол, на который

повернется рамка при прохождении груза между отметками x_1 и x_2 , r — радиус шкива. Учитывая, что $v = \omega r$, $v_2 = \sqrt{2a(x_2 - x_0)}$,

$x_2 = x_1 + v_1 t + \frac{at^2}{2}$, где a — ускорение груза, t — время прохождения грузом расстояния $x_2 - x_1$, получаем:

$$\begin{aligned} J' &= \frac{mg - M_{\text{тр}}/r}{a} r^2 - mr^2 = \\ &= r^2 \left(\frac{(mg - M_{\text{тр}}/r)t^2}{2(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2} - m \right). \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

Момент инерции рамки без тела равен:

$$J_0 = r^2 \left(\frac{(mg - M_{\text{тр}}/r)t_0^2}{2(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2} - m \right), \quad (2.5.6)$$

где t_0 — время прохождения грузом расстояния $x_2 - x_1$. Из двух последних уравнений для момента инерции тела относительно оси вращения получаем:

$$J = J' - J_0 = r^2 \frac{mg - M_{\text{тр}} / r}{2(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2} (t^2 - t_0^2). \quad (2.5.7)$$

Пользуясь этой формулой, можно определять моменты инерции тела относительно произвольных осей. Это можно сделать, в частности, для главных центральных осей, совпадающих с выбранными осями координат (J_x , J_y , J_z), а также для осей, совпадающих с одной из диагоналей параллелепипеда, например AG (J_{AG}) или MN (J_{MN}) (см. рис. 2.5.4), выразив момент инерции через времена опускания груза t_x , t_y , t_z , t_{AG} , t_{MN} .

Входящий в (2.5.7) момент сил трения можно оценить следующим образом. Если отпустить груз на отметке x_0 , то он после опускания до нижней точки x_3 поднимется затем до отметки x_4 . Разность значений потенциальной энергии груза в точках x_4 и x_0 и будет равна работе сил трения, т. е.

$$mg(x_4 - x_0) = \frac{M_{\text{тр}}}{r}(x_3 - x_0) + \frac{M_{\text{тр}}}{r}(x_3 - x_4), \quad (2.5.8)$$

где $\frac{M_{\text{тр}}}{r}(x_3 - x_0)$ — работа сил трения при движении груза вниз от верхней точки до полного разматывания нити, $\frac{M_{\text{тр}}}{r}(x_3 - x_4)$ — работа сил трения при подъеме груза. Из (2.5.8) следует, что

$$\frac{M_{\text{тр}}}{r} = mg \frac{x_4 - x_0}{2x_3 - x_0 - x_4}. \quad (2.5.9)$$

Пусть размер параллелепипеда по оси Ox равен a , по оси Oy — b , по оси Oz — c . Квадраты направляющих косинусов для его диагонали AG соответственно равны

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad \cos^2 \beta = \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \\ \cos^2 \gamma &= \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

3. Измерить время t_0 прохождения грузом m (рис. 2.5.6). отрезка $x_2 - x_1$ в случае рамки без груза. Для этого нить, имеющую на конце груз, аккуратно, виток к витку, полностью наматывают на шкив. Освобождают груз. Измерения проводят не менее трех раз. Результаты записать в табл. 2.5.2.

4. Закрепить в рамке параллелепипед в разных положениях и измерить времена $t_x, t_y, t_z, t_{AG}, t_{MN}$ не менее трех раз. Одновременно для каждого опыта измеряют значения x_4 (верхнюю отметку подъема груза). Результаты записать в табл. 2.5.3.

Таблица 2.5.2

Экспериментальные данные

Параметры исследуемой системы	n	$(t_0)_i$, с	$\bar{t}_0, S_{\bar{t}_0}$, с	x_4 , М	$\langle x_4 \rangle$, М	M_{TP}/r , Н	$S_{M_{TP}/r}$, Н
$x_1 =$,	1						
$x_2 =$,	2						
$x_3 =$,	3						
$m =$							

Таблица 2.5.3

Экспериментальные данные

n	t_x	$\bar{t}_x, S_{\bar{t}_x}$, с	t_y	$\bar{t}_y, S_{\bar{t}_y}$, с	t_z	$\bar{t}_z, S_{\bar{t}_z}$, с	t_{AG}	$\bar{t}_{AG}, S_{\bar{t}_{AG}}$, с	t_{MN}	$\bar{t}_{MN}, S_{\bar{t}_{MN}}$, с
1										
2										
3										

Обработка результатов

1. Найти средние арифметические значения величин a, b, c, r и их выборочные стандартные отклонения. Данные записать в табл. 2.5.1.

2. Вычислить средние арифметические значения и выборочные стандартные отклонения для t_0 и x_4 .

3. По формуле (2.5.9) определить величину M_{TP}/r и ее погрешность. Данные пп. 2,3 записать в табл. 2.5.2.

4. Вычислить средние арифметические значения $t_x, t_y, t_z, t_{AG}, t_{MN}$ и соответствующие погрешности. Результаты записать в табл. 2.5.3.

5. По формуле (2.5.7) рассчитать значения величин J_x , J_z , J_{MN} и погрешности их определения. Данные записать в табл. 2.5.4.

Таблица 2.5.4

Вычисленные значения

J_x , кг·м ²	S_{J_x} , кг·м ²	J_z , кг·м ²	S_{J_z} , кг·м ²	J_{MN} , кг·м ²	$S_{J_{MN}}$, кг·м ²	$J_{MN}^{\text{теор}}$, кг·м ²	$S_{J_{MN}^{\text{теор}}}$, кг·м ²

6. Так как ось MN лежит в плоскости xz , то соотношение (2.5.3) для J_{MN} принимает вид $J_{MN} = J_x \cos^2 \alpha + J_z \cos^2 \gamma$, где

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Подставляя в (2.5.3) определенные в п.5 значения J_x и J_z , вычислить теоретическое значение $J_{MN}^{\text{теор}}$ и погрешность $S_{J_{MN}^{\text{теор}}}$.

Результаты записать в табл. 2.5.4. Сравнить $J_{MN}^{\text{теор}}$ с вычисленным из экспериментальных данных J_{MN} (с учетом погрешностей).

7. Вычислить правую часть (2.5.11) $A = \frac{a^2 t_x^2 + b^2 t_y^2 + c^2 t_z^2}{a^2 + b^2 + c^2}$,

используя определенные экспериментально геометрические размеры a , b , c и времена t_x , t_y , t_z , t_{AG} опускания груза при различных ориентациях тела в рамке. Рассчитать погрешность величины A по формуле для косвенных измерений.

8. Вычислить t_{AG}^2 (t_{AG} использовать из табл. 2.5.3) и погрешность определения этой величины. Сравнивая A и t_{AG}^2 убедиться в выполнении (в пределах погрешности измерений) соотношения (2.5.11), а следовательно, и уравнения (2.5.3).

Упражнение 2. Изучение тензора инерции методом колебаний.

Рассмотрим малые колебания физического маятника, представляющего собой систему из: стержня с дополнительным грузом и исследуемым телом, в качестве которого выбран параллелепипед (рис. 2.5.4), или цилиндр (рис. 2.5.5). Колебания происходят вокруг оси, проходящей через центр масс исследуемого тела. Действие

моментов сил тяжести, приложенных к стержню и добавочному грузу, закрепленному на нем, приводит к возникновению колебаний всей системы. В этом случае основное уравнение вращательного движения имеет вид

$$J' \frac{d^2\varphi}{dt^2} = mgl\varphi + \frac{1}{2} m_0 gl_0 \varphi, \quad (2.5.12)$$

где φ — угол отклонения тела от положения равновесия, m — масса груза, l — расстояние от центра масс груза до оси вращения, m_0 , l_0 — масса и длина стержня, на котором закреплен дополнительный груз, $J' = J + J_0$ — момент инерции физического маятника (J — момент инерции исследуемого тела, J_0 — момент инерции установки со стержнем и дополнительным грузом).

Уравнение (2.5.12) приводится к виду:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (2.5.13)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{mgl + \frac{1}{2} m_0 gl_0}{J'},$$

и описывает гармонические колебания.

Так как $\omega_0 = 2\pi/T$, то

$$J' = \frac{\left(mgl + \frac{1}{2} m_0 gl_0\right) T^2}{4\pi^2}. \quad (2.5.14)$$

Определив период T_0 колебаний установки без исследуемого тела, можно найти момент инерции J_0 маятника без тела.

Для момента инерции исследуемого тела относительно фиксированной оси вращения получаем: $J = J' - J_0$, или

$$J = \frac{\left(mgl + \frac{1}{2} m_0 gl_0\right) (T^2 - T_0^2)}{4\pi^2}. \quad (2.5.15)$$

По этой формуле можно определять моменты инерции тела относительно различных осей, проходящих через центр масс тела.

В частности, для параллелепипеда можно определить J_x , J_y , J_z для осей, совпадающих с главными центральными осями (рис. 2.5.4), а также момент инерции относительно оси, совпа-

дающей с одной из диагоналей параллелепипеда (например AG), выразив J_x, J_y, J_z, J_{AG} в соответствии с (2.5.15) через периоды колебаний T_x, T_y, T_z, T_{AG} и период колебаний установки без тела T_0 .

В соответствии с (2.5.3) момент инерции тела относительно оси AG равен:

$$J_{AG} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma,$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\left(mgl + \frac{1}{2}m_0gl_0\right)\left(T_{AG}^2 - T_0^2\right)}{4\pi^2} &= \frac{\left(mgl + \frac{1}{2}m_0gl_0\right)\left(T_x^2 - T_0^2\right)}{4\pi^2} \cos^2 \alpha + \\ &\frac{\left(mgl + \frac{1}{2}m_0gl_0\right)\left(T_y^2 - T_0^2\right)}{4\pi^2} \cos^2 \beta + \frac{\left(mgl + \frac{1}{2}m_0gl_0\right)\left(T_z^2 - T_0^2\right)}{4\pi^2} \cos^2 \gamma. \end{aligned}$$

Учитывая, что сумма квадратов направляющих косинусов равна единице, получаем:

$$T_{AG}^2 = T_x^2 \cos^2 \alpha + T_y^2 \cos^2 \beta + T_z^2 \cos^2 \gamma,$$

или

$$T_{AG}^2 = \frac{a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (2.5.16)$$

Это соотношение может быть проверено экспериментально.

Величины J_y, J_z, J_{MN} можно найти, определяя периоды колебаний цилиндра T_y, T_z и T_{MN} относительно осей Oy, Oz и MN соответственно.

Определим период колебания цилиндра относительно оси MN (рис. 2.5.5). Квадраты направляющих косинусов для этой оси равны

$$\cos^2 \alpha = 0, \quad \cos^2 \beta = \frac{4R^2}{4R^2 + d^2}, \quad \cos^2 \gamma = \frac{d^2}{4R^2 + d^2}, \quad (2.5.17)$$

где R — радиус цилиндра, d — его длина.

Момент инерции цилиндра относительно оси MN можно выразить через компоненты тензора инерции J_y, J_z , записанного в главных осях (см. 2.5.3):

$$J_{MN} = J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma, \quad (2.5.18)$$

и следовательно,

$$T_{MN}^2 = \frac{4R^2T_y^2 + d^2T_z^2}{4R^2 + d^2}. \quad (2.5.19)$$



Отметим, что уравнение (2.5.12) было записано без учета сил трения в оси маятника. Это обстоятельство, однако, практически не сказывается на значении J , так как силы трения слабо влияют на период колебаний физического маятника.

Измерения

1. Измерить радиус R и длину d цилиндра, ребра параллелепипеда a, b, c . Измерения каждой величины рекомендуется проводить не менее трех раз в различных сечениях тела. Данные записать в табл. 2.5.5.

Таблица 2.5.5

Размеры и погрешности их измерения для цилиндра и параллелепипеда

Тело	k	R , см	\bar{R} $S_{\bar{R}}$, см	d , см	\bar{d} , $S_{\bar{d}}$, см	a , см	\bar{a} , $S_{\bar{a}}$, см	b , см	\bar{b} , $S_{\bar{b}}$, см	c , см	\bar{c} , $S_{\bar{c}}$, см
	1										
	2										
	3										
	1										
	2										
	3										

2. Измерить массу груза m , массу m_0 и длину l_0 стержня. Измерения провести не менее трех раз. Результаты записать в табл. 2.5.6.

3. Дополнительный груз закрепляют в крайнем нижнем положении на стержне 7. Закрепляют цилиндр, измеряют время t_n для $n = 3-5$ колебаний цилиндра относительно осей y, z, MN . Измерения провести $k = 3$ раза. Результаты записать в табл. 2.5.7.

Таблица 2.5.6

Экспериментальные данные

k	m_i , г	\bar{m} , г	$S_{\bar{m}}$, г	$(m_0)_i$, г	\bar{m}_0 , г	$S_{\bar{m}_0}$, г	l_0 , см	\bar{l}_0 , см	$S_{\bar{l}_0}$, см
1									
2									
3									

Таблица 2.5.7

Характеристики колебательного движения цилиндра

k	t_{n0} , с	\bar{t}_0 , с	$S_{\bar{t}_0}$, с	t_{ny} , с	\bar{t}_y , с	$S_{\bar{t}_y}$, с	t_{nz} , с	\bar{t}_z , с	$S_{\bar{t}_z}$, с	t_{nMN} , с	\bar{t}_{MN} , с	$S_{\bar{t}_{MN}}$, с
1												
2												
3												

4. Измерить время t_{n0} 3 – 5 колебаний установки без тела. Для этого необходимо вместо исследуемого тела закрепить маленький цилиндр. Измерения проводят не менее трех раз. Данные записать в табл. 2.5.7.

5. Закрепить параллелепипед в разных положениях и измерить время t_n , $n = 3 - 5$ колебаний маятника. Для каждого положения тела проводят не менее трех измерений. Значения t_n записать в табл. 2.5.8.

Таблица 2.5.8

Характеристики колебательного движения параллелепипеда

k	t_{nx} , с	\bar{t}_x , с	$S_{\bar{t}_x}$, с	t_{ny} , с	\bar{t}_y , с	$S_{\bar{t}_y}$, с	t_{nz} , с	\bar{t}_z , с	$S_{\bar{t}_z}$, с	t_{nAG} , с	\bar{t}_{AG} , с	$S_{\bar{t}_{AG}}$, с
1												
2												
3												

Обработка результатов

1. Определить средние значения и стандартные отклонения для размеров цилиндра и параллелепипеда. Результаты записать в табл. 2.5.6.

2. Вычислить среднее арифметическое значение \bar{t} времени n колебаний цилиндра t_z , t_y , t_{MN} и установки без тела t_0 по формуле:

$$\bar{t}_j = \frac{\sum_{i=1}^k t_i}{k},$$

где $j = z, y, MN$ и 0 .

3. Для каждой оси цилиндра вычислить случайную погрешность $S_{\bar{t}_j}$ среднего арифметического по формуле:

$$S_{\bar{t}_j} = \sqrt{\frac{\sum (t_i - \bar{t}_j)^2}{k(k-1)}},$$

где $j = z, y, MN$ и 0 .

Результаты пп. 2, 3 записать в табл. 2.5.7.

4. Рассчитать суммарную погрешность по формуле:

$$\sigma_{t\Sigma} = \sqrt{S_{\bar{t}_j}^2 + \sigma_t^2},$$

где σ_t – приборная погрешность таймера, равная 2% от результата измерения.

5. Определить периоды \hat{T}_j колебаний цилиндра относительно различных осей, установки без тела и погрешности $S_{\hat{T}_j}$ по формулам:

$$\hat{T}_j = \frac{\bar{t}}{n}, \quad S_{\hat{T}_j} = \frac{\sigma_{t\Sigma}}{n}.$$

где $j = z, y, MN$ и 0 .

Результаты записать в табл. 2.5.9.

Таблица 2.5.9

Средние значения периодов колебаний цилиндра относительно различных осей и установки без тела и их погрешности

\hat{T}_0 ,	$S_{\hat{T}_0}$,	\hat{T}_y ,	$S_{\hat{T}_y}$,	\hat{T}_z ,	$S_{\hat{T}_z}$,	\hat{T}_{MN} ,	$S_{\hat{T}_{MN}}$,
с	с	с	с	с	с	с	с

6. По формуле (2.5.15) вычислить значения моментов инерции J_z, J_y, J_{MN} для цилиндра и погрешности этих величин по формуле для косвенных измерений. Результаты записать в табл. 2.5.10.

7. Вычислить J_z, J_y для цилиндра по теоретическим формулам П2.21 и П2.24 (см. Приложение 2).

Таблица 2.5.10

Значения моментов инерции для цилиндра и их погрешности

$J_x,$ кг · м ²	$S_{J_x},$ кг · м ²	$J_y,$ кг · м ²	$S_{J_y},$ кг · м ²	$J_{MN},$ кг · м ²	$S_{J_{MN}},$ кг · м ²	$J_{MN}^{\text{теор}},$ кг · м ²	$S_{J_{MN}^{\text{теор}}},$ кг · м ²

8. Подставляя в (2.5.18) определенные в п.6 значения J_z, J_y для цилиндра, вычислить момент инерции $J_{MN}^{\text{теор}}$ и погрешность $S_{J_{MN}^{\text{теор}}}$ по формуле для косвенных измерений. Сравнить $J_{MN}^{\text{теор}}$ с экспериментальным J_{MN} , определенным в п.6 (с учетом погрешностей).

9. Вычислить среднее арифметическое значение \bar{t} времени n колебаний параллелепипеда t_x, t_y, t_z, t_{AG} и погрешности $S_{\bar{t}}$ среднего арифметического (аналогично пп. 2,3). Результат записать в табл. 2.5.8.

10. Определить периоды колебаний параллелепипеда относительно различных осей \hat{T}_j и погрешности $S_{\hat{T}_j}$ (аналогично п. 5). Результат записать в табл. 2.5.11.

Таблица 2.5.11

Средние значения периодов колебаний параллелепипеда относительно различных осей и их погрешности

$\hat{T}_x,$ с	$S_{\hat{T}_x},$ с	$\hat{T}_y,$ с	$S_{\hat{T}_y},$ с	$\hat{T}_z,$ с	$S_{\hat{T}_z},$ с	$\hat{T}_{AG},$ с	$S_{\hat{T}_{AG}},$ с

10. Вычислить правую часть (2.5.16) $A = \frac{a^2 \hat{T}_x^2 + b^2 \hat{T}_y^2 + c^2 \hat{T}_z^2}{a^2 + b^2 + c^2},$

используя определенные экспериментально геометрические размеры и периоды колебаний маятника для различных способов крепления параллелепипеда. Рассчитать погрешность величины A по формуле для косвенных измерений.

11. Вычислить \hat{T}_{AG}^2 (\hat{T}_{AG} использовать из табл. 2.5.3) и погрешность определения этой величины. Сравнивая A и \hat{T}_{AG}^2 , выяснить, насколько хорошо выполняется соотношение (2.5.16).

Основные итоги работы

В результате работы проверяется выполнение соотношений (2.5.11) или (2.5.16) для параллелепипеда и (2.5.16) или (2.5.19) для цилиндра и сравниваются экспериментальное и вычисленное значения момента инерции тела относительно оси AG (для параллелепипеда) и оси MN (для цилиндра).

Контрольные вопросы

1. Уравнение моментов, смысл входящих в него величин.
2. Как связаны моменты импульса и угловая скорость? Что такое тензор инерции?
3. Компоненты тензора инерции для простейших систем.
4. Что такое главные оси? Что такое центральные оси? Приведите примеры.
5. Как направлены векторы угловой скорости и момента количества движения при вращении тела вокруг закрепленной оси:
 - а) если ось вращения совпадает с одной из главных осей;
 - б) если ось вращения не совпадает ни с одной из главных осей?
6. Как связаны компоненты тензора инерции и момент инерции относительно фиксированной оси.

Лабораторная работа 2.6

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕНЗОРА ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Цель работы

Измерение компонент тензора инерции твердого тела.

Идея эксперимента

Определение момента инерции тела относительно определенной оси методом крутильных колебаний.

Теоретическое введение

Колебания маятника, представляющего собой рамку с исследуемым телом, закрепленную на вертикальной проволоке (рис. 2.6.1), возникают под действием момента сил упругости. Период таких колебаний равен

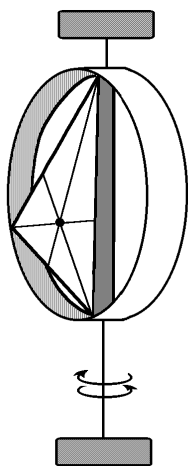


Рис. 2.6.1. Схематическое представление крутильного маятника.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J'}{D}}, \quad (2.6.1)$$

где D — коэффициент упругости подвеса, J' — момент инерции рамки с исследуемым телом.

Из соотношения (2.6.1) следует, что момент инерции J' равен

$$J' = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 D. \quad (2.6.2)$$

Момент инерции рамки —

$$J_0 = \left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2 D, \quad (2.6.3)$$

где T_0 — период колебаний рамки.

В силу аддитивности J момент инерции исследуемого тела относительно неподвижной оси вращения равен

$$J = J' - J_0. \quad (2.6.4)$$

Меняя положение тела относительно рамки, можно определять моменты инерции относительно различных осей.

Используемая в работе установка удобна для определения моментов инерции “плоских тел” — т.е. тел, толщина которых значительно меньше их продольных размеров. При этом одну из

осей системы координат, связанную с телом (например ось Oz) удобно направить перпендикулярно плоскости тела. Оси Ox и Oy находятся в плоскости тела, начало координат совпадает с центром масс тела и находится на оси вращения (рис. 2.6.2). В этом случае один из направляющих косинусов ($\cos\gamma$) равен нулю, и вместо (2.25) получим:

$$J = J_{xx} \cos^2 \alpha + J_{yy} \cos^2 \beta + 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta, \quad (2.6.5)$$

где J — момент инерции данного тела относительно оси, проходящей через его центр масс.

При повороте системы координат (осей Ox и Oy) момент инерции J не меняется, но каждой ориентации осей соответствуют свои значения компонент тензора инерции J_{xx} , J_{yy} и $J_{xy} = J_{yx}$.

При определенном выборе системы координат $J_{xy} = J_{yx} = 0$ (когда направления осей Ox' и Oy' совпадают с главными осями инерции тела), и вместо (2.6.5) имеем:

$$J = J'_x \cos^2 \alpha' + J'_y \cos^2 \beta'. \quad (2.6.6)$$

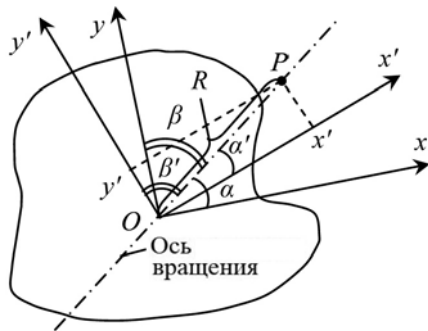


Рис. 2.6.2. Схематическое представление твердого тела и систем координат xOy , $x'Oy'$. Ось вращения OP и системы координат лежат в плоскости чертежа.

В последнем соотношении $\cos\alpha'$ и $\cos\beta'$ — направляющие косинусы выбранной ранее оси вращения в новых осях координат Ox' и Oy' ; J'_x и J'_y — компоненты тензора инерции в системе координат, оси которой совпадают с главными осями инерции.

Выберем на оси вращения некоторую точку P , находящуюся на расстоянии R от начала координат и имеющую координаты x' и y' . Пусть величина R численно равна $\frac{1}{\sqrt{J}}$. При этом $\cos\alpha' = x'$

$/R$; $\cos\beta' = y'/R$. Подставив эти величины в (2.6.6), получим:

$$J = J'_x \frac{x'^2}{R^2} + J'_y \frac{y'^2}{R^2},$$

или

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1, \quad (2.6.7)$$

где $a^2 = \frac{JR^2}{J'_x}$, $b^2 = \frac{JR^2}{J'_y}$, a и b — постоянные величины.

Уравнение (2.6.8) является каноническим уравнением эллипса в координатах x' и y' , полуоси которого равны соответственно $a = \frac{1}{\sqrt{J'_x}}$ и $b = \frac{1}{\sqrt{J'_y}}$, поскольку $JR^2 = \frac{J}{(\sqrt{J})^2} = 1$.

Эллипс (2.6.7) является сечением эллипсоида инерции плоскостью $x'y'$. Эллипсоидом инерции называется поверхность, характеризующая значения моментов инерции твердого тела относительно множества возможных осей вращения, проходящих через одну точку (в данном случае через центр масс тела). При этом для каждого направления вдоль оси l откладываются отрезки длиной $1/\sqrt{J_l}$, где J_l — момент инерции тела относительно оси l . Концы этих отрезков образуют поверхность, называемую *эллипсоидом инерции* (трехмерное уравнение эллипсоида инерции может быть получено из (2.25)).

Пусть исследуемое тело имеет форму, показанную на рис. 2.6.3. Точка O — центр масс тела. Оси $Ox \perp Oy$ выбраны произвольно. Тело закреплено в рамке крутильного маятника так, что точка O лежит на оси вращения, а положение тела характеризуется углом α (или $\beta = \pi/2 - \alpha$).

Если тело закреплено в рамке так, как показано на рис. 2.6.4 *a*, то $\alpha = 0$ и $\beta = \pi/2$. Из (2.6.7) получаем

$$J = J_1 = J_{xx}. \quad (2.6.8)$$

При закреплении тела так, как показано на рис. 2.6.4 *б*, $\alpha = \pi/2$ и $\beta = 0$. Следовательно, из (2.6.5)

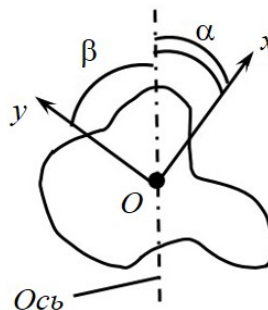


Рис. 2.6.3. Форма и положение тела относительно оси вращения.

$$J = J_2 = J_{yy}. \quad (2.6.9)$$

При повороте тела на угол α_0 (рис. 2.6.4 в) и $(-\alpha_0)$ (рис. 2.6.4 г) относительно оси вращения получаем соответственно

$$J = J_3 = J_{xx} \cos^2 \alpha_0 + J_{yy} \sin^2 \alpha_0 + J_{xy} \sin 2\alpha_0, \quad (2.6.10)$$

$$J = J_4 = J_{xx} \cos^2 \alpha_0 + J_{yy} \sin^2 \alpha_0 - J_{xy} \sin 2\alpha_0. \quad (2.6.11)$$

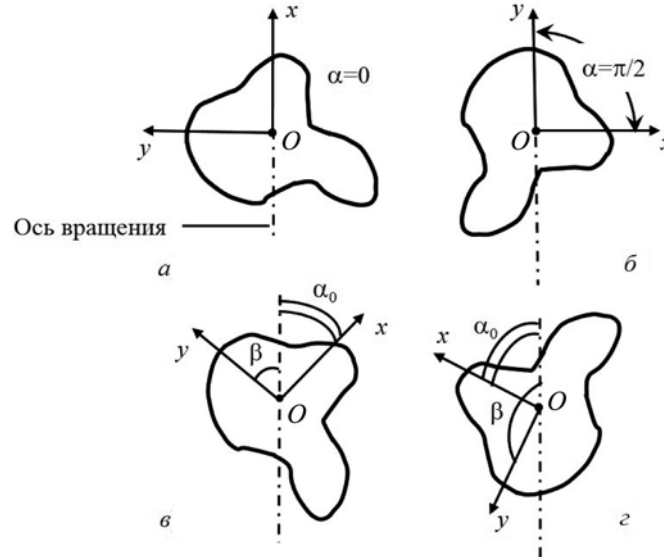


Рис. 2.6.4. Положения тела относительно оси вращения.

Из (2.6.10) и (2.6.11) следует, что

$$J_3 - J_4 = 2J_{xy} \sin 2\alpha_0, \text{ или } J_{xy} = \frac{J_3 - J_4}{2 \sin 2\alpha_0}. \quad (2.6.12)$$

Из (2.6.5) следует, что при $\alpha = \alpha_0 + \pi/2$

$$J = J_5 = J_{xx} \sin^2 \alpha_0 + J_{yy} \cos^2 \alpha_0 - J_{xy} \sin 2\alpha_0. \quad (2.6.13)$$

Суммируя (2.6.10) и (2.6.13), получаем

$$J_3 + J_5 = J_1 + J_2.$$

Экспериментальное определение величин J_1 , J_2 , J_3 и J_4 дает возможность найти четыре отличные от нуля компоненты тензора инерции плоского тела (J_{xx} , J_{yy} , $J_{xy} = J_{yx}$) для заданной системы координат. Если оси координат Ox и Oy совпадают с главными осями

инерции тела, то $J_{xy} = J_{yx} = 0$. Выполнение соотношения (2.6.14) может служить критерием корректности проведенного эксперимента.

Экспериментальная установка

Экспериментальная установка показана на рис. 2.6.5. Она состоит из стойки и рамки 1, закрепленной на упругом подвесе 2. Исследуемые тела 3 поочередно закрепляются в рамке с помощью винта 4.

Конструкция крепления рамки на подвесе такова, что рамка может поворачиваться вокруг горизонтальной оси и фиксироваться в различных положениях. Шаг поворота, при котором фиксируется положение рамки, равен 15° . Поворот рамки осуществляется при помощи ручки 5. В работе изучаются тензоры инерции нескольких «плоских» тел 3 разной формы: малых по толщине параллелепипеда, треугольной призмы, полудиска, а также тел, конфигурация которых может меняться в процессе эксперимента. Система координат, относительно которой определяется момент инерции тела, жестко связана с телом, а следовательно, и с рамкой. На рамке имеется шкала, позволяющая определять углы между осью вращения и осями системы координат, связанной с телом.

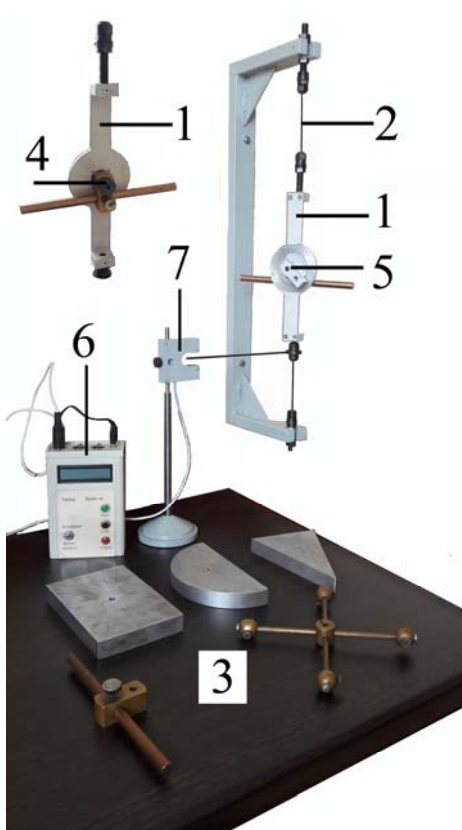


Рис. 2.6.5. Экспериментальная установка для изучения тензора инерции твердого тела.

Установка снабжена системой автоматического отсчета времени и числа периодов (*таймер 6* и *датчик 7*).

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Определение коэффициента упругости подвеса и момента инерции пустой рамки.

Определение упругости подвеса осуществляется по результатам изучения колебаний длинного металлического стержня, закрепленного перпендикулярно оси вращения с помощью специального приспособления в рамке.

Измерения

1. Измерить длину L и массу m стержня не менее трех раз. Результаты записать в табл. 2.6.1.

Таблица 2.6.1

Длина, масса, момент инерции стержня и их погрешности

k	L , см	\bar{L} , см	$S_{\bar{L}}$, см	m , г	\bar{m} , г	$S_{\bar{m}}$, г	$J_{\text{ст}}^{\text{теор}}$, кг·м ²	$S_{J_{\text{ст}}^{\text{теор}}}$, кг·м ²
1								
2								
3								

2. Отклонить рамку на небольшой угол и отпустить. Измерить время t_n $n = 10$ колебаний рамки. Измерения провести $k = 3$ раза.

3. Закрепить стержень в рамке симметрично относительно центра масс. Измерить время t_n $n = 10$ колебаний рамки со стержнем. Измерения провести $k = 3$ раза. Данные пп. 3, 2 записать в табл. 2.6.2.

Таблица 2.6.2

Экспериментальные данные

Колебания рамки					Колебания рамки со стержнем						
k	t_n , с	\bar{t} , с	$S_{\bar{t}}$, с	\hat{T}_0 , с	$S_{\hat{T}_0}$, с	k	t_n , с	\bar{t} , с	$S_{\bar{t}}$, с	\hat{T}_1 , с	$S_{\hat{T}_1}$, с
1						1					
2						2					
3						3					

Обработка результатов

1. Вычислить средние значения \bar{L} , \bar{m} и погрешности $S_{\bar{L}}$, $S_{\bar{m}}$.
2. Рассчитать момент инерции стержня (теоретическое значение) по формуле (см. Приложение 2.1):

$$J_{\text{ст}}^{\text{теор}} = \frac{\bar{m}(\bar{L})^2}{12}.$$

3. Определить погрешность $S_{J_{\text{ст}}^{\text{теор}}}$. Результаты вычислений в пп. 1 и 2 записать в табл. 2.6.1.

4. Найти среднее арифметическое значение \bar{t} времени $n = 10$ колебаний для рамки и для рамки со стержнем

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^k t_i}{k}.$$

5. Вычислить случайную погрешность $S_{\bar{t}}$ среднего арифметического по формуле:

$$S_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum (t_i - \bar{t})^2}{k(k-1)}}.$$

Результаты, полученные пп. 4, 5, записать в табл. 2.6.2.

6. Рассчитать суммарную погрешность по формуле

$$\sigma_{t\Sigma} = \sqrt{S_{\bar{t}}^2 + \sigma_t^2},$$

где σ_t – приборная погрешность таймера, равная 2% от результата измерения.

7. Определить периоды колебаний рамки \hat{T}_0 , рамки со стержнем \hat{T}_1 и погрешности $S_{\hat{T}_0}$, $S_{\hat{T}_1}$ по формулам:

$$\hat{T} = \frac{\bar{t}}{n}, \quad S_{\hat{T}} = \frac{\sigma_{t\Sigma}}{n}.$$

Результаты записать в табл. 2.6.2.

8. Поскольку период колебаний крутильного маятника связан с моментом инерции соотношением (2.6.1), для разности квадратов периодов имеем:

$$T_1^2 - T_0^2 = 4\pi^2 \frac{J_{\text{ст}}^{\text{теор}}}{D},$$

Отсюда следует, что

$$D = \frac{4\pi^2 J_{\text{ст}}^{\text{теор}}}{T_1^2 - T_0^2}.$$

Используя последнее соотношение, определить коэффициент упругости подвеса D .

9. Рассчитать стандартное отклонение S_D для коэффициента упругости по формуле для косвенных измерений (считая, что $\pi = 3,14$ без погрешностей). Результаты, полученные в пп. 8, 9, записать в табл. 2.6.3.

Таблица 2.6.3

Вычисленные значения D , J_0 и их погрешности

D ,	S_D ,	J_0 ,	S_{J_0} ,
Н·м	Н·м	кг·м ²	кг·м ²

10. Вычислить по формуле (2.6.3) момент инерции рамки J_0 и погрешность S_{J_0} по формуле для косвенных измерений. Результаты записать в табл. 2.6.3.

Упражнение 2. Определение сечения эллипсоида инерции.*Измерения*

1. Для выполнения этого упражнения необходимо по указанию преподавателя измерить размеры одного из тел: ребра параллелепипеда (1), стороны треугольной призмы (2), радиус полудиска (3). Данные занести в табл. 2.6.4.

2. Благодаря конструкции рамки все тела закрепляются в ней таким образом, что центр масс находится на оси вращения. Закрепив в рамке выбранное тело, измеряют время t_n $n = 10$ колебаний. Проводят $k = 3$ измерения. Поворачивают рамку вокруг горизонтальной оси на угол 15° и вновь измеряют время t_n . Снова поворачивают рамку на такой же угол и проводят измерения t_n . Так поступают до поворота рамки на 180° . Результаты каждого измерения записать в табл. 2.6.4.

Обработка результатов

1. Аналогично пп. 4–7 упр. 1 для каждого значения α найти \bar{t} , $S_{\bar{t}}$, \hat{T} , $S_{\hat{T}}$.

2. Используя полученные в *упр. 1* значения D и J_0 , по формулам (2.6.2), (2.6.4) определить моменты инерции J исследуемого тела для различных значений α . Вычислить погрешности S_J .

3. Для каждого значения α вычислить $R = \sqrt{1/J}$ и погрешность S_R (по формуле для косвенного измерения), считая, что $J(180^\circ + \alpha) = J(\alpha)$. Результаты пп. 1–3 записать в табл. 2.6.4.

Таблица 2.6.4

Экспериментальные данные

Форма и размеры исследуемого тела (номер тела):										
k	α_i , град	t_n , с	\bar{t} , с	$S_{\bar{t}}$, с	\hat{T}_α , с	$S_{\hat{T}_0}$, с	J_α , кг·м ²	S_{J_α} , кг·м ²	$\sqrt{1/J_\alpha}$, м ⁻¹ ·кг ^{-1/2}	$S_{\sqrt{1/J_\alpha}}$, м ⁻¹ ·кг ^{-1/2}
1										
2										
3										
1										
2										
3										
...										

4. Построить в полярных координатах (R, α) сечение эллипсоида инерции. На этом же графике необходимо изобразить контур исследуемого тела.

5. Определить положения рамки, соответствующие максимальному и минимальному значениям момента инерции. Соединив точки, соответствующие максимальным и минимальным значениям J , изобразить главные центральные оси инерции изучаемого тела.

6. Используя известные формулы (см. **Приложение 2**), рассчитать моменты инерции тела относительно всех трех главных центральных осей и сравнить полученные значения с экспериментальными. При этом теоретическое значение J_z сравнивается с суммой значений J_x и J_y , полученной экспериментально, поскольку для плоских тел (см. **Приложение 2**) $J_z = J_x + J_y$.

Упражнение 3. Определение компонент тензора инерции.

Для выполнения этого упражнения используется то же тело, что и в *упр. 2*. На поверхности всех тел, входящих в комплект установки, нанесены прямые, проходящие через точку, соответствующую положению их центра масс, и повернутые друг относительно друга на 15° . Каждая из этих прямых может быть выбрана за ось Ox системы координат, связанной с телом. Вначале любую из этих прямых принимают за направление Ox .

Измерения

1. Выбрать за ось одну из прямых, нанесенных на теле, установить тело так, чтобы выбранная линия совпадала с осью вращения. Отклонить рамку на небольшой угол и отпустить ее. Измерить время t_n $n = 10$ колебаний. Провести $k = 3$ измерения. Повернуть рамку относительно оси так, чтобы линия была перпендикулярна оси, и вновь измерить время t_n . Повернуть рамку на угол $\alpha_0 = 30^\circ$ и измерить время t_n . Снова повернуть рамку, но уже на угол $(-\alpha_0)$, и измерить t_n . Результаты каждого измерения записать в табл. 2.6.5.

2. Приняв за ось Ox другую прямую, нанесенную на поверхности тела, повторить все измерения п. 1. Полученные результаты занести в таблицу типа 2.6.5.

Таблица 2.6.5

Экспериментальные данные

Формы и размеры тела (номер тела):									
	n	t_n	\bar{t}	$S_{\bar{t}}$	\hat{T}	$S_{\hat{T}}$	J_{is}	$S_{J_{is}}$	
	С	с	с	с	с	с	кг · м ²	кг · м ²	
Первая система координат									
Ось Ox оси вращения	1								$J_{xx} =$
	2								
	3								
Ось Ox \perp оси вращения	1								$J_{yy} =$
	2								
	3								
Ось Ox составляет угол	1								$J_{xy} =$
	2								

$+\alpha_0$ с осью вращения	3							
Ось Ox составляет угол $-\alpha_0$ с осью вращения	1							
	2							
	3							
Вторая система координат								
...								

Обработка результатов

1. Аналогично пп. 4–7 *упр. 1*, вычислить \bar{t} , $S_{\bar{t}}$, \hat{T} , $S_{\hat{T}}$ для каждого значения α для различных направлений двух линий на поверхности тела.

2. Используя определенные в *упр. 1* значения D и J_0 , по формулам (2.6.2) и (2.6.4) определить моменты инерции исследуемого тела J для различных направлений двух линий. Вычислить погрешности S_J . Результаты пп. 1, 2 записать в табл. 2.6.5.

3. Используя измеренные величины $J_1^{(i)}$, $J_2^{(i)}$, $J_3^{(i)}$, $J_4^{(i)}$ и соотношения (2.6.8)–(2.6.11), определить J_{xx} , J_{yy} , J_{xy} для двух систем координат (двух линий на поверхности тела). Записать их в табл. 2.6.5, указав ориентацию системы координат, для которой они получены. Убедиться, что компоненты тензора инерции зависят от выбора системы координат.

Упражнение 4. Определение компонент тензора инерции тела, составленного из стержней и шаров.

Исследуемое тело представляет собой крестовину из стержней (заданной массы и длины) и шаров (с известным радиусом и массой). Шары закрепляются на крестовине с помощью винтов. По указанию преподавателя исследуется одна из трех конфигураций тел, показанных на рис. 2.6.6.

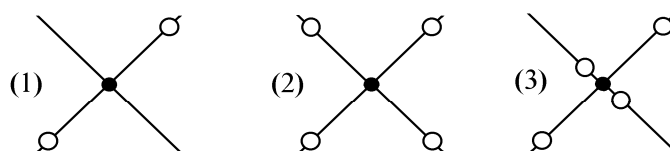


Рис. 2.6.6. Конфигурации тел, исследуемых в данной работе.

Измерения

1. Закрепить тело в рамке. Измерить время t_n $n = 10$ колебаний. Провести $k = 3$ измерения. Повернуть рамку относительно горизонтальной оси на угол 15° и вновь измерить время t_n . Еще раз повернуть рамку на такой же угол и провести измерения t_n . Так поступают до поворота рамки на 180° . Результаты каждого измерения записать в табл. 2.6.6.

Таблица 2.6.6

Экспериментальные данные

Форма и размеры исследуемого тела (номер тела):										
k	α_i , град	t_n , с	\bar{t} , с	$S_{\bar{t}}$, с	\hat{T}_α , с	$S_{\hat{T}_0}$, с	J_α , кг·м ²	S_{J_α} , кг·м ²	$\sqrt{1/J_\alpha}$, м ⁻¹ ·кг ^{-1/2}	$S_{\sqrt{1/J_\alpha}}$, м ⁻¹ ·кг ^{-1/2}
1										
2										
3										
1										
2										
3										
...										

Обработка результатов

1. Аналогично пп. 4–7 упр. 1, вычислить \bar{t} , $S_{\bar{t}}$, \hat{T} , $S_{\hat{T}}$ для каждого значения α .

2. Используя определенные в упр. 1 значения D и J_0 , по формулам (2.6.2) и (2.6.4) определить моменты инерции J исследуемого тела для различных α . Вычислить погрешности S_J . Результаты, полученные в пп. 1, 2, записать в табл. 2.6.6.

3. Для каждого значения α вычислить $R = \sqrt{1/J}$ и погрешности S_R , считая, что $J(180^\circ + \alpha) = J(\alpha)$. Результаты пп. 1–3 записать в табл. 2.6.6.

4. Построить в полярных координатах (R, α) сечение эллипсоида инерции.

5. Определить компоненты тензора инерции выбранного тела J_{xx} , J_{yy} , J_{xy} для системы координат, оси которой направлены вдоль стержней крестовины.

3. По формулам для моментов инерции стержня и шара (см. Приложение 2) определить моменты инерции тела относительно вертикальной оси для всех значений α . Построить в полярной системе координат сечение эллипсоида инерции $(R = \sqrt{1/J})_{\text{теор}}$ по теоретическим данным.

Основные итоги работы

В результате выполнения работы экспериментально находится сечение эллипсоида инерции плоскостью xOy для исследованного тела. Определяются направления главных центральных осей инерции и компоненты тензора инерции для двух различных ориентаций осей Ox и Oy . Для одной системы координат крестовины определяются экспериментально и теоретически компоненты тензора инерции.

Контрольные вопросы

1. Уравнение моментов и смысл входящих в него величин.
 2. Какова связь между моментом импульса и угловой скоростью? Что такое тензор инерции?
 3. Компоненты тензора инерции для простейших систем: тонкая палочка, система материальных точек.
 4. Что такое главные оси? Что такое центральные оси?
- Примеры.
5. Как направлены векторы угловой скорости и момента количества движения тела при его вращении вокруг закрепленной оси, если
 - 1) ось вращения совпадает с одной из главных осей;
 - 2) ось вращения не совпадает ни с одной из главных осей?
 6. Какова связь между компонентами тензора инерции и моментом инерции относительно фиксированной оси.
 7. Что такое эллипсоид инерции? Как с помощью эллипсоида инерции определить значение момента инерции тела относительно заданной оси?

Литература к разделу 2

1. *Матвеев А. Н.* Механика и теория относительности. — М. Изд. дом «Оникс 21 век», 2003. — 432 с.
2. *Алешкевич В. А., Деденко Л. Г., Караваев В. А.* Механика. — М.: Изд. центр «Академия», 2004. — 480 с.
3. *Стрелков С. П.* Механика. — СПб.: «Лань», 2005. — 560 с.
4. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. В 5 томах. Т. 1. Механика. — М.: ФИЗМАТЛИТ / МФТИ, 2005. — 559 с.
5. *Русаков В. С., Слепков А. И., Никанорова Е. А., Чистякова Н. И.* Механика. Методика решения задач. Учебное пособие. М.: Физический факультет МГУ, 2010. — 368 с.
6. *Митин И. В., Русаков В. С.* Анализ и обработка экспериментальных данных. Уч.-метод. пособие для студ. младших курсов. — М.: МГУ. 2002. — 44 с.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

3

- **ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ПУЛИ
С ПОМОЩЬЮ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО
МАЯТНИКА**
- **КРУТИЛЬНЫЙ БАЛЛИСТИЧЕСКИЙ
МАЯТНИК**
- **ИЗУЧЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА
МАКСВЕЛЛА**
- **ИЗМЕРЕНИЕ РЕАКТИВНОЙ СИЛЫ**
- **ПРОВЕРКА ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ
МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ**