

Задача 127 «Волны в струне»

К выводу волнового уравнения

Предположим, что струна является идеальной — упругой и достаточно тонкой, а колебания каждой точки струны происходят только вдоль вертикальной оси, причем амплитуда колебаний мала. Будем считать также, что сила натяжения P струны во всех точках одинакова. На малый участок струны длиной δl действуют силы упругости со стороны соседних участков (рис. 1). Уравнение движения выделенного участка в проекции на вертикальную ось имеет вид

$$\delta m \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = P \cdot (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2),$$

где δm — масса выделенного участка струны, u — его отклонение от положения равновесия.

Так как углы α малы, то $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$, в результате

$$(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) \approx (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_2 = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_2}{dx} \cdot dx = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

Для массы δm запишем $\delta m = \rho dx$, где ρ — погонная плотность струны (массы единицы длины). В результате получим уравнение движения в виде:

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = P \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Найдем размерность отношения

$$\left[\frac{P}{\rho} \right] = \frac{H}{\frac{кг}{м}} = \frac{\frac{кг \cdot м}{с^2}}{\frac{кг}{м}} = \frac{м^2}{с^2} = \left(\frac{м}{с} \right)^2.$$

Вводя обозначение $v = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Уравнение (1) называют **волновым уравнением**.

Митин И.В.