



*Лабораторный практикум
по ФИЗИКЕ*

Механика

Задача № 127

**ИССЛЕДОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ
КОЛЕБАНИЙ В РАСПРЕДЕЛЕННОЙ
СИСТЕМЕ**

А.Л. Клавсюк, Г.М. Николадзе,
А.И. Слепков, А.М. Салецкий

Москва - 2012

Цель работы

Изучение собственных колебаний в распределенной системе.

Идея эксперимента

Колебания в распределенных системах рассматриваются на примере колебаний стальной струны, натянутой между двумя неподвижными зажимами. Определяются частоты собственных колебаний стальной струны в зависимости от ее натяжения и длины. Для наблюдения колебаний используется электромагнитный датчик.

Теория

Распределенные колебательные системы обладают бесконечным числом степеней свободы, поэтому для описания произвольных движений в таких системах в общем случае необходимо использовать бесконечное число параметров.

Любое возмущение, возникающее в среде, всегда передается соседним частицам, т.е. возмущения среды не могут быть локализованы в одной точке. Колебание в одной точке пространства приводит к возникновению волнового процесса—распространению колебаний в пространстве. Очевидно, что в безграничной среде невозможны свободные колебания (без участия внешнего источника) с амплитудой, отличной от нуля. Иная картина наблюдается в ограниченных системах когда в них отсутствует затухание. В таких системах может существовать дискретный набор собственных колебаний.

В качестве примера рассмотрим колебания струны, натянутой между двумя неподвижными зажимами. В результате произвольного возмущения струны, например, удара, ее точки начинают совершать колебания около своих положений равновесия. В этом случае говорят, что струна совершает собственные колебания, поскольку они происходят под действием только внутренних сил системы—сил натяжения. Колебания струны полностью описываются положениями ее точек в каждый момент времени.

Смещения точек струны удобно описывать вектором смещения $\mathbf{u}(x,t)$, имеющим в общем случае три компоненты $u_x(x,t)$, $u_y(x,t)$, $u_z(x,t)$, которые определяют профиль струны в произвольный момент времени. Мы будем рассматривать наиболее простой случай, когда все смещения струны происходят в одной плоскости, и вектор смещения описывается одной функцией: $u_y(x,t) \equiv u(x,t)$, характеризующей вертикальные отклонения струны.

Предположим, что струна является идеальной—упругой и достаточно тонкой, а амплитуда колебаний каждой точки струны мала. Будем считать также, что натяжение струны P во всех точках одинаково. На некоторый участок струны длиной δl действуют силы упругости со стороны соседних участков (рис. 1) уравнение движения выделенного участка имеет вид

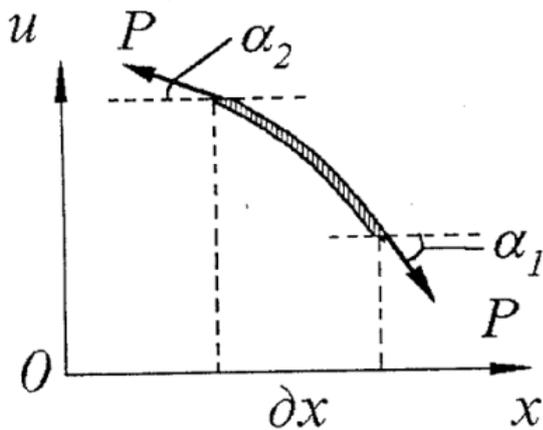


Рис. 1. Силы, действующие на участок струны δl

$$\delta m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = P(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)$$

где δm —масса выделенного участка струны, u —его отклонение от положения равновесия.

Поделим правую часть на $\delta x = \delta l \cdot \cos \alpha$, а затем умножим на эту же величину. Учитывая, что $\operatorname{tg} \frac{\partial u}{\partial x}$, а $\frac{\delta m}{\delta l}$ отношение является погонной плотностью струны ρ , получаем для малых отклонений ($\cos \alpha \approx 1$)

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = P \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где

$$v^2 = \frac{P}{\rho}. \quad (2)$$

Уравнение (1) называется волновым уравнением. Решением этого уравнения являются произвольные функции вида

$$f_1\left(t - \frac{x}{v}\right), f_2\left(t + \frac{x}{v}\right),$$

или суперпозиция этих функций.

При этом величина v является скоростью распространения волны. Действительно предположим, что некоторая точка струны с координатой $x=0$ начинает двигаться по закону $u(0,t) = f_1(t)$. Это возмущение будет распространяться вдоль струны и в некоторой точке струны с координатой x' в некоторый момент времени t' будет точно таким же, если выполняется соотношение

$$t' - \frac{x'}{v} = t, \text{ то есть } \frac{x'}{t' - t} = v.$$

Следовательно, величина v является скоростью распространения возмущения вдоль струны. При этом функции вида $f_1\left(t - \frac{x}{v}\right)$ описывают импульс, распространяющийся вправо, а $f_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$ — влево.

Для анализа возможных колебаний в струне рассмотрим распространение отдельного импульса смещения (рис. 2) более детально. Пусть в начальный момент времени импульс находится в точке x_0 и распространяется в сторону, указанную стрелкой.

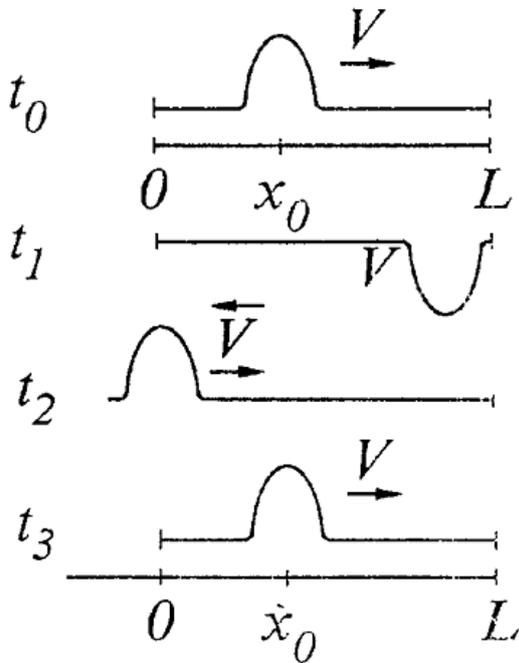


Рис. 2. Распространение импульса смещения вдоль струны

В момент времени t_1 импульс отразится от точки закрепления ($x=L$), причем его смещение поменяет знак, так как в точке закрепления всегда $u(L,t)=0$, затем импульс достигает противоположной точки закрепления ($t = t_2, x = 0$), снова отразится и при $t = t_3$, займет первоначальное положение.

В рассмотренном примере все точки струны будут совершать одинаковые движения с периодом $T = t_3 - t_0$, то есть $u(x,t)=u(x,t+T)$. При этом считается, что каждая точка струны смещается только в поперечном направлении и не смещается в продольном. Очевидно, что период T связан со скоростью распространения импульса

смещения v соотношением

$$T = \frac{2L}{v}. \tag{3}$$

Отметим, что периодические движения точек струны будут происходить и при последовательности возмущающих импульсов. Поэтому период, определенный из (3) для одиночного импульса, будет наибольшим возможным периодом колебаний.

Покажем, что это условие можно получить из волнового уравнения. Предположим, что одна из точек струны (с координатой $x=x_0$) под действием внешней силы совершает колебания по гармоническому закону. То есть, будут выполнены следующие условия

$$u(x_0, t) = u_{00} \cos wt, \tag{4}$$

$$u(0, t) = 0, \tag{5}$$

$$u(L, t) = 0, \tag{6}$$

w —циклическая частота внешней силы.

Возмущение от колеблющейся точки закрепления будет распространяться по струне в обе стороны со скоростью v . Через некоторое время в струне установятся две бегущие во встречных направлениях волны $u^+(x,t) =$

$u_0^+ \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v}x + \theta_0^+\right)$ и $u^-(x, t) = u_0^- \cos\left(\omega t + \frac{\omega}{v}x + \theta_0^-\right)$ Граничное условие (6) на закрепленном конце струны имеет вид

$$u(L, t) = u^+(L, t) + u^-(L, t) = u_0^+ \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v}L + \theta_0^+\right) + u_0^- \cos\left(\omega t + \frac{\omega}{v}L + \theta_0^-\right) = 0 \quad (7)$$

Так как это условие должно выполняться в любой момент времени, то $u_0^+ = u_0^- = u_0$,

а аргументы косинусов должны различаться на $(2k+1)\pi$.

Из (7) следует

$$2u_0 \cos\left(\omega t + \frac{\theta_0^+ + \theta_0^-}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega}{v}L + \frac{\theta_0^- - \theta_0^+}{2}\right) = 0, \quad (8)$$

то есть

$$\frac{\omega}{v}L + \frac{\theta_0^- - \theta_0^+}{2} = \frac{\pi}{2}(2k + 1), \quad (9)$$

где $k=1, 2, \dots$.

Для другой точки закрепления

$$u(0, t) = u^+(0, t) + u^-(0, t) = u_0^+ \cos(\omega t + \theta_0^+) + u_0^- \cos(\omega t + \theta_0^-) = 0. \quad (10)$$

Отсюда следует, что

$$2u_0 \cos\left(\omega t + \frac{\theta_0^+ + \theta_0^-}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_0^- - \theta_0^+}{2}\right) = 0 \quad (11)$$

и

$$\frac{\theta_0^- - \theta_0^+}{2} = \frac{\pi}{2}. \quad (12)$$

Из (9) и (12) следует, что интерференция прямой и обратной волн приводит к возникновению устойчивых колебаний в струне, если выполняется условие

$$\frac{\omega}{v}L = \pi k, \quad (13)$$

где $k=1, 2, \dots$. При $k=1$ это условие полностью соответствует (3). Определим амплитуду u_0 . Для этого воспользуемся условием (4)

$$u(x, t) = u_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v}x_0 + \theta_0^+\right) + u_0 \cos\left(\omega t + \frac{\omega}{v}x_0 + \theta_0^-\right) = u_{00} \cos \omega t.$$

Проводя тригонометрические преобразования и учитывая (12) и (13), получаем

$$u_0 = \frac{u_{00}}{2\cos\left(\frac{\omega}{v}x_0 + \frac{\pi}{2}\right)}. \quad (14)$$

То есть при x , удовлетворяющих выражению $\frac{w}{v} x_0 = \pi n$, где $n = 1, 2, 3, \dots$ это отношение будет стремиться к бесконечности. Реально из-за потерь амплитуда колебаний, конечно, не будет бесконечно большой. При выполнении условия (13) каждая точка струны будет совершать движение по закону

$$u(x, t) = u^+(x, t) + u^-(x, t) = 2u_0 \sin\left(\frac{w}{v} x\right) \cos(wt) \quad (15)$$

Такое движение является колебательным с амплитудой

$$u(x) = 2u_0 \sin\left(\frac{w}{v} x\right). \quad (16)$$

Точки, в которых амплитуда колебаний равна нулю называются узлами, а точки, где амплитуда достигает максимальных значений, называются пучностями. Очевидно (см. (14)), что в условиях данной постановки задача для достижения максимальных амплитуд колебаний струны внешний источник нужно помещать в узел.

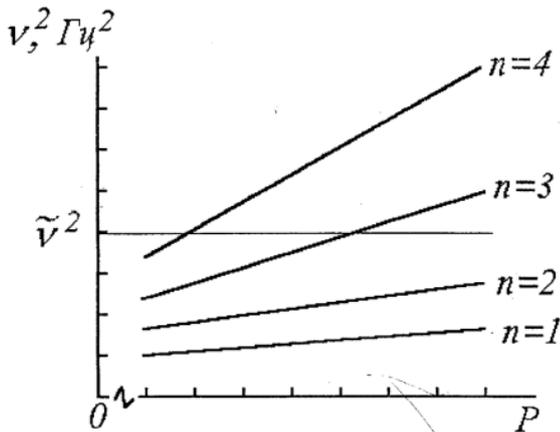


Рис. 3. Зависимости квадрата частот колебаний струны от силы натяжения для различных гармоник

В общем случае в гибкой однородной струне, натянутой между двумя точками могут наблюдаться колебания различного вида. Наибольший интерес представляет рассмотренный нами случай, когда все точки струны совершают гармонические колебания. Такие собственные колебания струны получили название нормальных колебаний. Любое собственное колебание может быть од-

нозначно представлено как суперпозиция (сумма) нормальных колебаний с определенными частотами. При возбуждении нормальных колебаний вдоль струны устанавливаются стоячие волны, причем на концах струны в соответствии с (5), (6) всегда имеем узел смещения, а вдоль струны укладывается целое число длин стоячих волн

$$n \frac{\lambda_n}{2} = L, \quad (17)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$, λ_n —длина бегущей волны. Для всех рассматриваемых колебаний скорость распространения импульса по струне одинакова, а частоты нормальных колебаний различны. Так как длина волны связана со скоростью ее распространения v и частотой ν соотношением $\lambda \nu = v$, то

$$v = \frac{2L}{n} \nu_n. \quad (18)$$

Струна, следовательно, может колебаться не с одной частотой, а с целым спектром частот, учитывая (2) получаем окончательное выражение для частот нормальных колебаний струны

$$v_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{P}{\rho}}. \quad (19)$$

На рис. 3 представлены типичные зависимости квадрата частот колебаний струны от силы натяжения для различных гармоник n . На рис. 4 изображены несколько типов стоячих волн в струне, закрепленной на обоих концах. Наблюдение собственных свободных колебаний струны затруднено, так как они относительно быстро затухают. Поэтому в работе рассматриваются колебания, возбуждаемые постоянно действующей периодической вынуждающей силой.

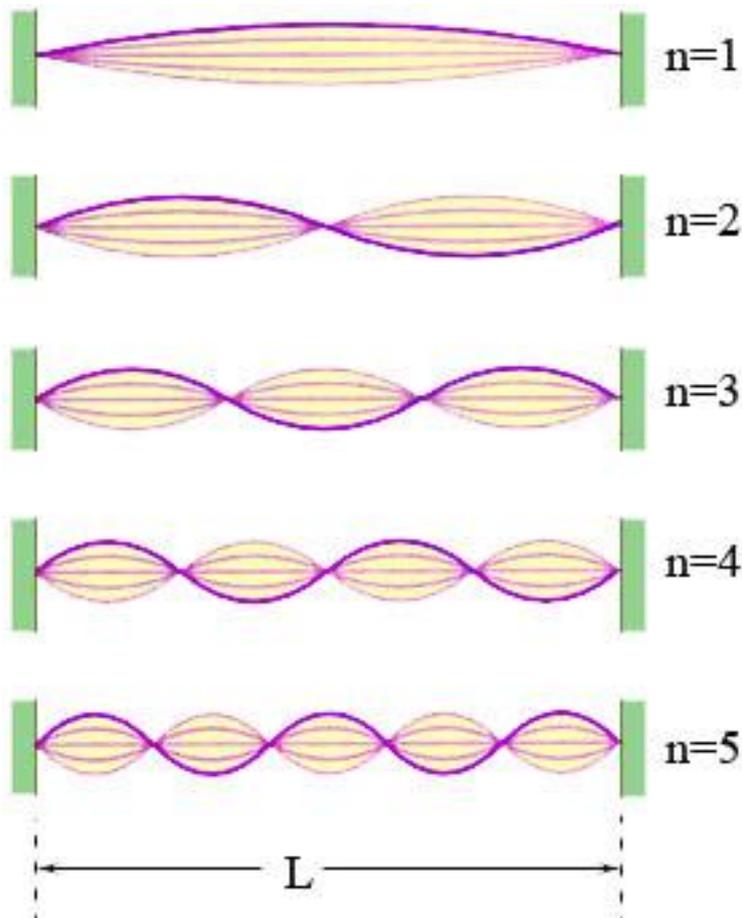


Рис. 4. Первые пять нормальных мод колебаний струны, закрепленной на обоих концах

Экспериментальная автоматизированная установка

Описание установки

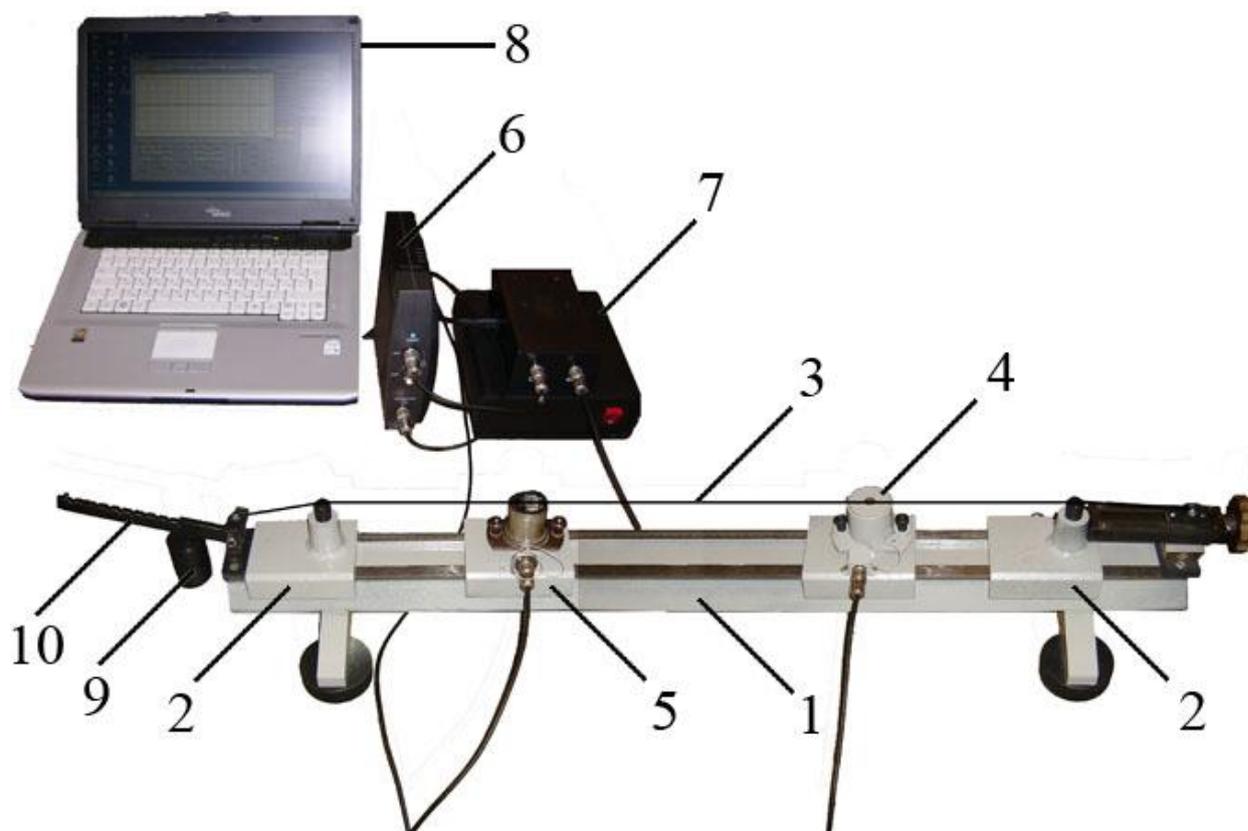


Рис. 5. Экспериментальная установка

Экспериментальная установка (рис. 5) состоит из оптической скамьи (1) на которой установлены стойки (2), с помощью которых устанавливается рабочая длина струны (3). Длина струны между двумя закрепленными ее концами, равная расстоянию между стойками (2) измеряется линейкой, находящейся на оптической скамье. Колебания струны (3) возбуждаются с помощью электромагнитного вибратора (4). Электромагнитный вибратор (4) заставляет струну совершать вынужденные колебания с **удвоенной** частотой генератора. Амплитуда колебаний регистрируется электромагнитным датчиком (5). Электромагнитный вибратор (4) и датчик (5) соединены с многофункциональным устройством (6) через усилитель (7). Многофункциональное устройство (6) включает в себя как генератор, так и осциллограф, управление которыми осуществляется с помощью программы PCSGU250, установленной на компьютере (8). Сила натяжения изменяется с помощью груза (9), который может перемещаться вдоль рычага (10).

Основные элементы управления программы PCSGU250

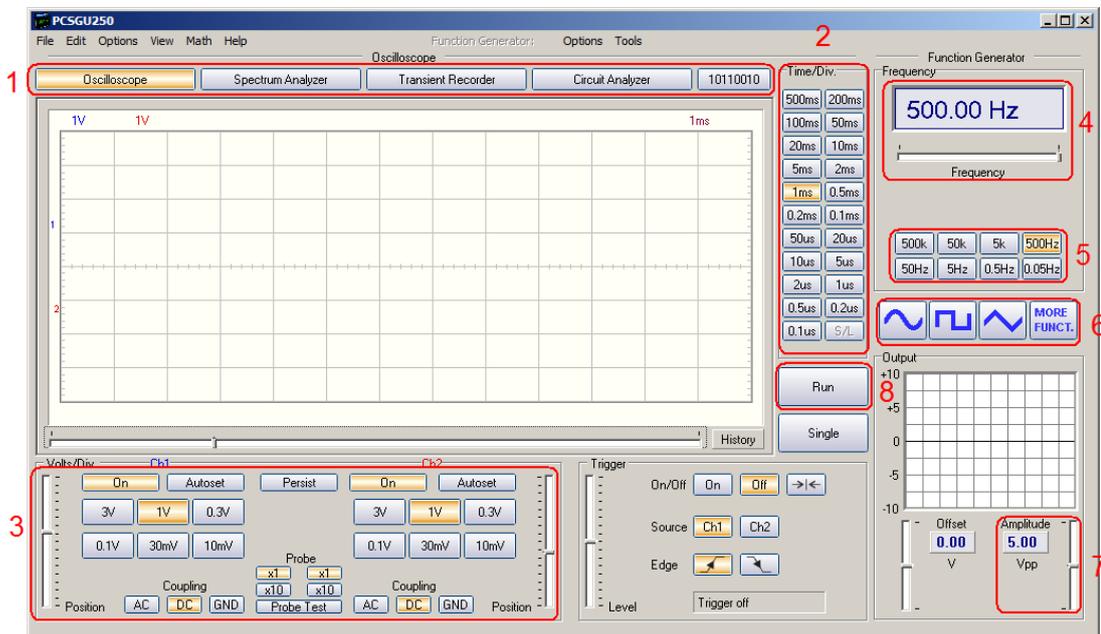


Рис. 6. Внешний вид окна программы PCSGU250

На рис. 6 отмечены основные элементы программы PCSGU250

(1) Переключатель режимов работы устройства: осциллограф, спектроанализатор, самописец, характериограф. В работе будут использоваться режимы осциллографа и характериографа.

(2) Переключатель развёрток осциллографа.

(3) Переключатель чувствительности каналов.

(4) Регулятор частоты сигнала генератора. Нужно значение можно вводить как с помощью ползунка (с шагом, равным 1% от максимальной частоты выбранного поддиапазона), так и непосредственно вводя его в текстовое поле (дробную часть можно отделять и точкой, и запятой). При этом сначала надо выбрать нужный поддиапазон переключателями 5.

(5) Переключатель поддиапазонов генератора. В работе будут использоваться диапазоны 50Hz (от 5 до 50 герц) и 500Hz (от 50 до 500 герц).

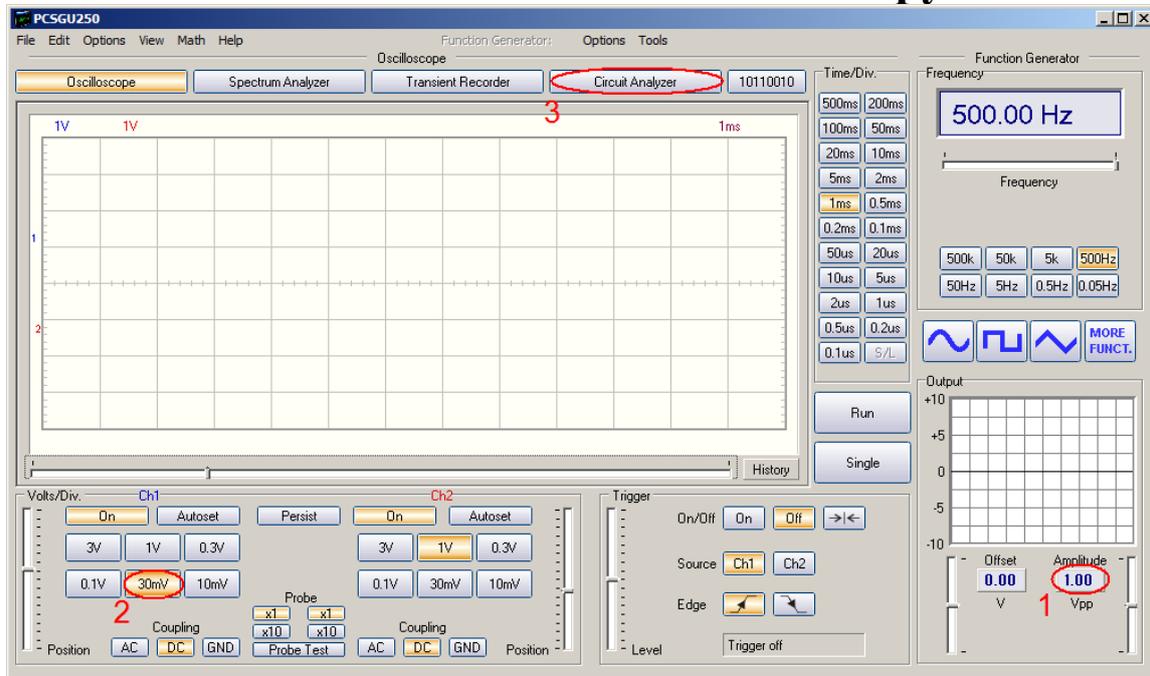
(6) Переключатель рода выходного сигнала: гармонический сигнал, меандр, треугольный и пр. Одновременно служит и выключателем генератора (для выключения надо нажать на выбранный в данный момент).

(7) Регулятор амплитуды сигнала генератора. Нужно значение вводится таким же способом, как и значение частоты.

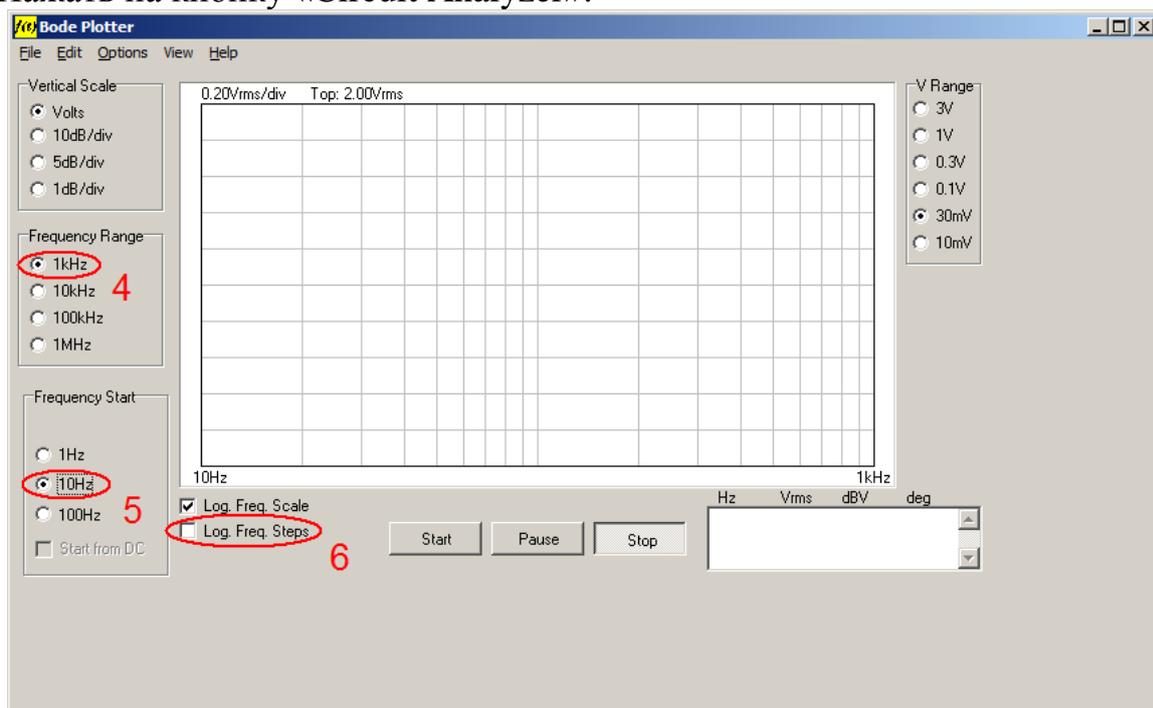
(8) Кнопка запуска осциллографа (повторное нажатие на неё — выключение).

Особенности проведения эксперимента с использованием программы PCSGU250

Автоматическое снятие «АЧХ» струны

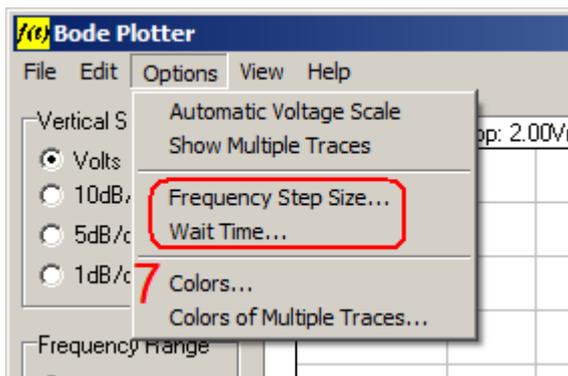


1. Установить амплитуду выходного сигнала генератора в 1 вольт и нажать на клавиатуре кнопку «ENTER».
2. Установить чувствительность первого канала осциллографа в 30 милливольт на деление (при автоматическом режиме используется именно первый канал).
3. Нажать на кнопку «Circuit Analyzer».

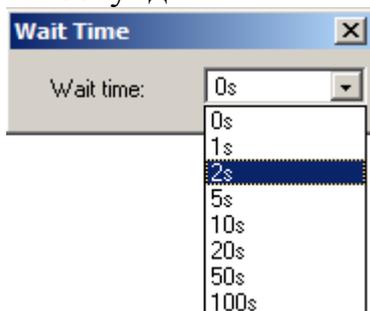


В появившемся окне нужно

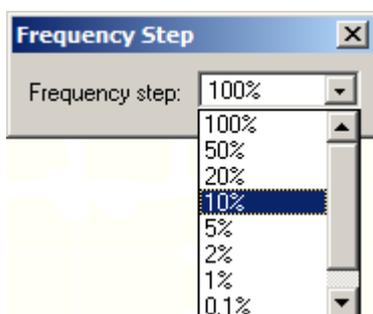
4. Установить диапазон частот, в котором будут проводиться измерения, в 1 килогерц.
5. Установить начальную частоту в 10 герц.
6. Установить линейное изменение частоты генератора, сняв флажок Log. Freq. Steps.
7. Задать время задержки и шаг изменения частоты, для чего в меню «Options» выбрать пункты «Wait time» и «Frequency step size», и в появившихся списках выбрать, соответственно, значения

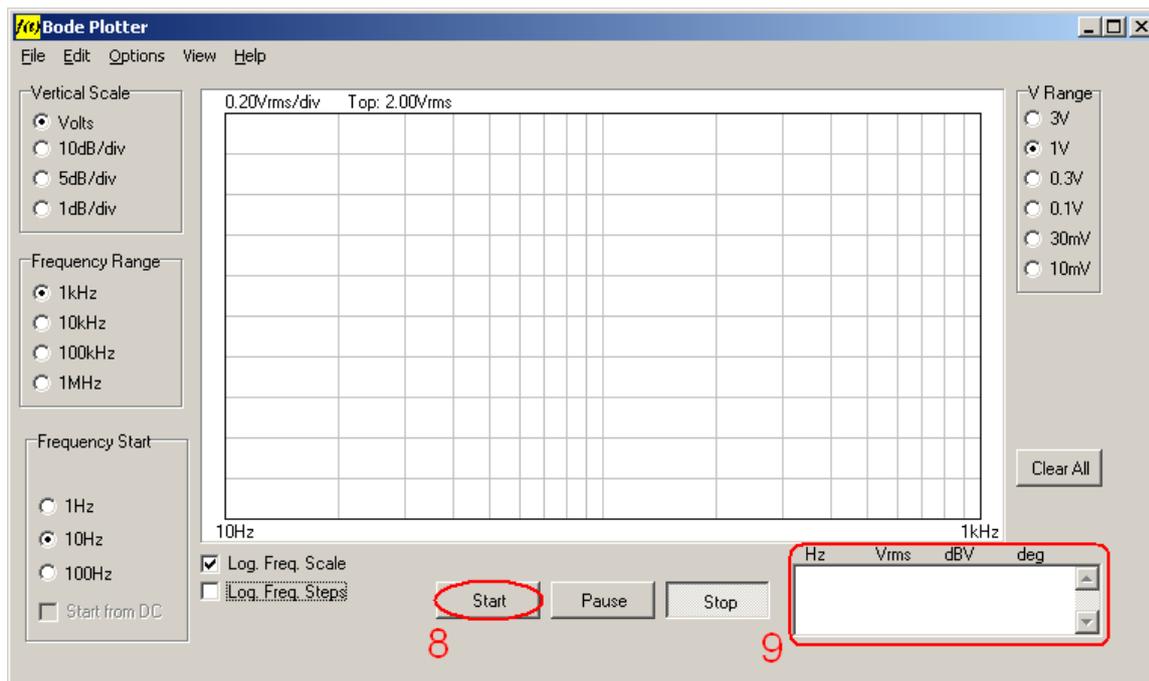


в 2 секунды



и 10% (10% берётся от значения минимальной частоты, так что для нижней границы в 10 герц шаг составит 1 герц).

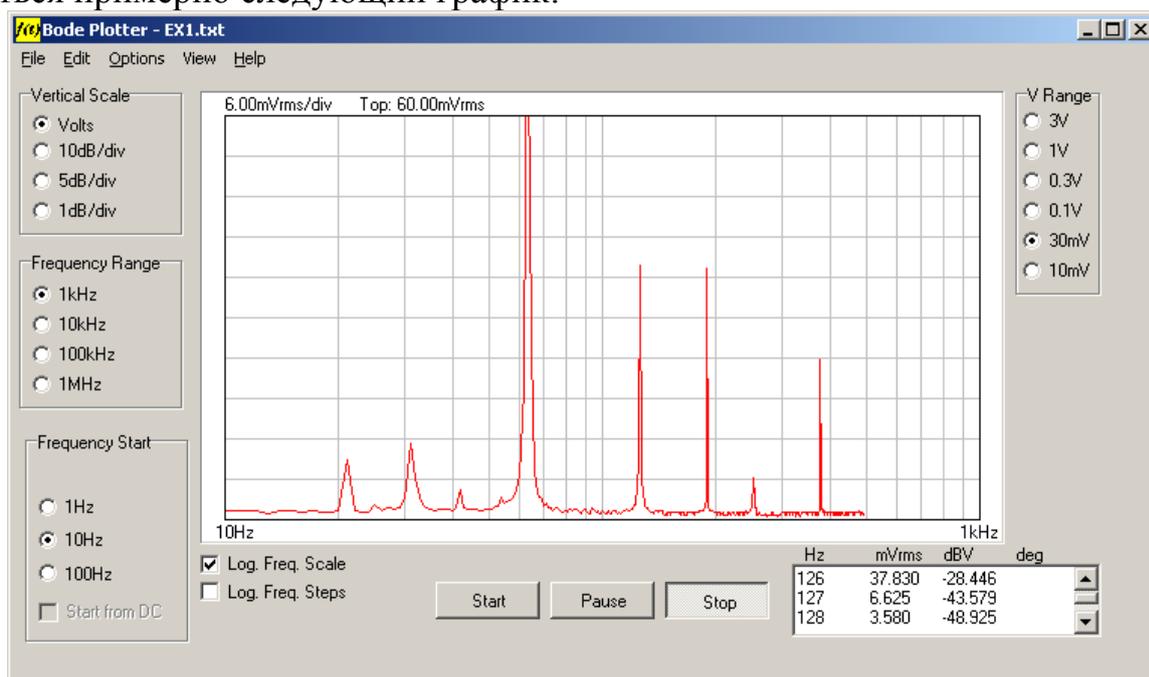




8. Нажать на кнопку «Start».

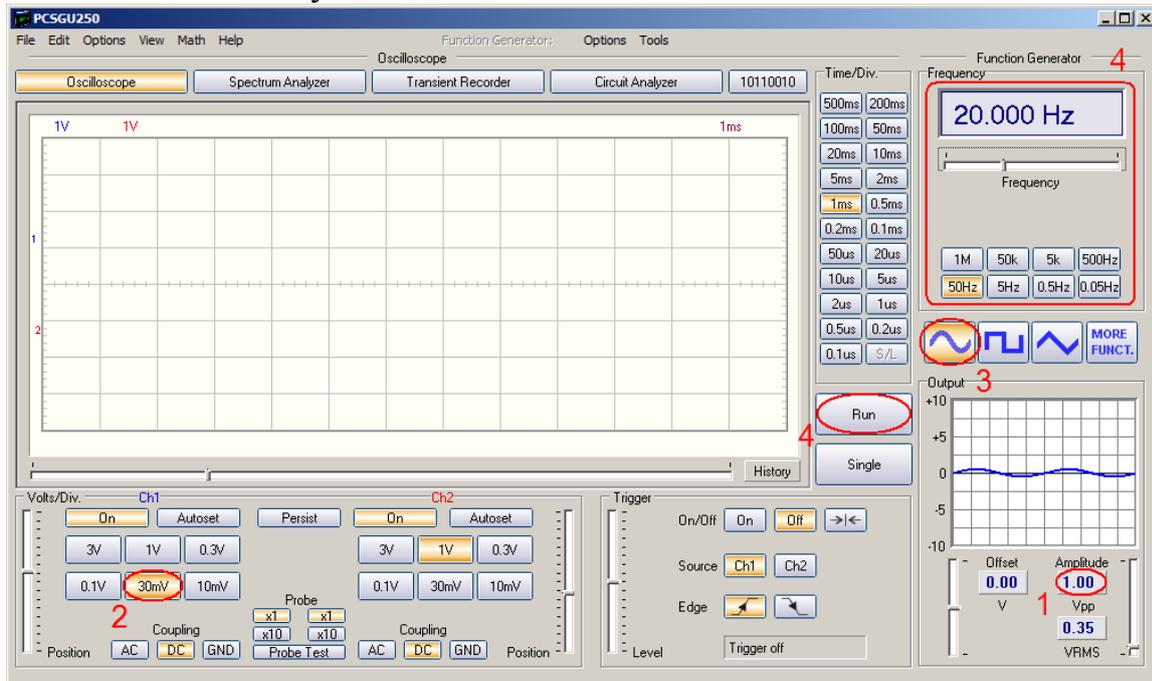
9. Результаты измерений будут отображаться одновременно на графике и в таблице, которая находится справа от кнопки «Stop». Еще раз обращаем ваше внимание на то, что электромагнитный вибратор представляет собой катушку с сердечником из мягкого железа, поэтому электромагнит будет притягивать струну с удвоенной частотой и **частота возбуждающей силы будет в два раза больше**.

Когда на графике появится 5-6 пиков, свидетельствующих о регистрации частот соответствующих гармоник, можно не дожидаясь автоматического завершения измерения нажать на кнопку «Stop». В результате должен получиться примерно следующий график:



«Ручное» снятие «АЧХ» струны

1. Установить амплитуду выходного сигнала генератора в 1 вольт и нажать на клавиатуре кнопку «ENTER».
2. Установить чувствительность первого канала осциллографа в 30 милливольт на деление.
3. Выбрать форму выходного сигнала (синусоида).
4. Нажать на кнопку «Run».



Проведение эксперимента

Упражнение 1. Установление зависимости частот собственных колебаний от силы натяжения струны.

Сила натяжения P определяет скорость распространения возмущения вдоль струны и, следовательно, частоту собственных колебаний (19). В этом упражнении экспериментально определяется характер зависимости ν_n от силы натяжения струны P .

Измерения

1. Стойками (2) установите максимальную длину струны. Натяните струну поместив груз (9) на самое дальнее положение на рычаге (10), соответствующие минимальному натяжению струны. Вибратор (4) и датчик (5) установите в крайние положения, вплотную к стойкам (2).

2. Изменяя частоту генератора либо в автоматическом, либо в «ручном» режиме снятия АЧХ определить резонансные частоты для пяти гармоник. Экспериментально установленные значения $\nu_{\text{экс}}$ занесите в таблицу 1. Если вы пользуетесь автоматическим режимом, убедитесь в том, что все резонанс-

ные частоты были найдены. Если при автоматическом режиме была пропущена n -ая гармоника, то для ее нахождения повторите эксперимент в «ручном» режиме

3. Установите значения нормальных колебаний пяти первых гармоник для различных значений натяжения струны P (для различных положений груза N). Экспериментально установленные значения $\nu_{\text{экс}}$ занесите в таблицу 1.

Таблица 1

N	1-я гармоника	2-я гармоника	3-я гармоника	4-я гармоника	5-я гармоника

Обработка результатов

1. Постройте экспериментальные зависимости квадрата частоты колебаний $\nu_{\text{экс}}^2$ от положения груза N (сила натяжения $P \sim N$) для пяти первых гармоник колебаний (см. рис. 3).

2. Убедитесь, что получившаяся зависимость в п.1. получилась линейной.

Упражнение 2. Определение зависимости частот собственных колебаний от длины струны.

Измерения

1. Установите произвольную силу натяжения струны.

2. Изменяя длину струны (уменьшая каждый раз ее длину примерно на 8-10 см.) определите значения частот 1 и 2 гармоник ее собственных колебаний. Результаты эксперимента занесите в таблицу 2.

Обработка результатов

1. Постройте экспериментальные зависимости $\nu_{1,2}$ от величины, обратной длине струны $\frac{1}{L}$.

2. Убедитесь, что получившаяся зависимость в п.1. получилась линейной.

Таблица 2

L, см	$\frac{1}{L}$, см ⁻¹	1-я гармоника	2-я гармоника

Основные итоги работы

В ходе работы должны быть экспериментально получены зависимости частот собственных колебаний струны от силы натяжения и длины. Результаты, должны быть сопоставлены с теорией.

Контрольные вопросы

1. Что такое свободные, вынужденные, собственные и нормальные колебания системы?
2. Сколько степеней свободы имеет натянутая струна, сколько нормальных колебаний в ней может быть возбуждено?
3. Вывести волновое уравнение для струны.
4. Вывести связь между частотой нормального колебания, длиной струны скоростью распространения волны в струне.
5. Что происходит в струне, когда частота внешнего сигнала выбрана произвольно (не обязательно равной одной из собственных частот)?

Литература

1. Стрелков С.П. Механика, М. Наука, 1975, гл.15, §143.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики, т.1. Механика. М. Наука, 1989, §84.