

Задача №126

Изучение движения катушки по горизонтальной поверхности

Цель работы. Исследование законов динамики твердого тела на примере движения системы, состоящей из катушки и груза, соединенных нитью. Проверка уравнения кинематической связи.

Идея эксперимента. Если катушка с намотанной на нее нитью, к другому концу которой прикреплен груз, катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания, то ускорение центра масс катушки постоянно и зависит от массы груза и соотношения радиусов обода и центральной части катушки.

Теория

Рассмотрим следующую задачу.

На горизонтальной поверхности находится катушка (масса M , радиус внешнего обода R , радиус внутреннего цилиндра r) с плотно намотанной на цилиндр нитью (рис. 1). Ко второму концу нити, перекинутой через легкий невесомый блок, прикреплен груз массы m ($m \ll M$). Горизонтальный участок нити проходит выше центра масс катушки. Первоначально систему удерживают в состоянии покоя. Найдем закон движения тел системы, если катушка катится без проскальзывания.

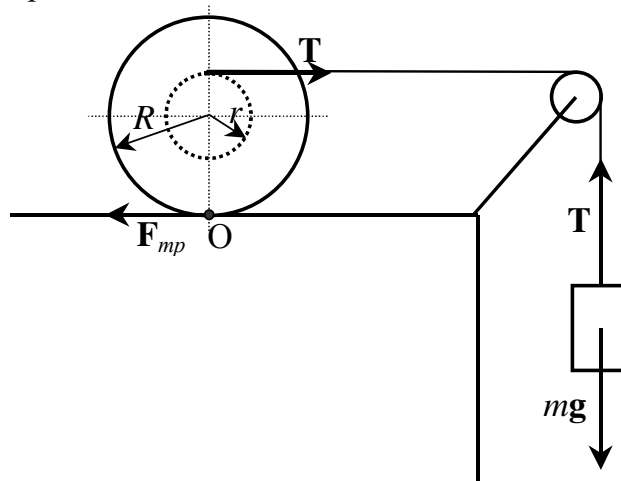


Рис. 1. Схема эксперимента

Изобразим силы, действующие на тела системы. На груз действуют сила тяжести mg и сила натяжения нити T . Уравнение движения груза в проекции на вертикальную ось, направленную вниз, запишется в виде:

$$ma_z = mg - T, \quad (1)$$

где a_z - ускорение груза.

На катушку в вертикальном направлении действуют равные по модулю, но противоположные по направлению силы тяжести и реакции опоры (на рисунке не показаны), а в горизонтальном направлении - сила натяжения нити T и сила трения $F_{тр}$. При отсутствии проскальзывания сила трения

является силой трения покоя, а скорость движения точки О (точки касания катушки с плоскостью) равна нулю. В этом случае движение катушки можно представить как чисто вращательное относительно так называемой **мгновенной оси**, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку О. Запишем уравнение вращательного движения — **уравнение моментов** — катушки относительно мгновенной оси:

$$(J_0 + MR^2) \cdot \varepsilon_k = T(R + r) \quad (2)$$

где J_0 - момент инерции катушки относительно оси, проходящей через ее центр масс;

$(J_0 + MR^2)$ - момент инерции катушки относительно мгновенной оси (применена теорема Гюйгенса-Штейнера);

ε_k - угловое ускорение катушки;

$T(R + r)$ - момент силы натяжения нити **T** (момент силы трения **F_{тр}** равен нулю).

Уравнение, связывающее угловое ускорение катушки ε_k и ускорение a_k ее центра масс при движении без проскальзывания, имеет вид:

$$a_k = \varepsilon_k \cdot R. \quad (3)$$

Рис. 2 позволяет довольно легко получить уравнение кинематической связи между ускорениями центров масс груза a_z и катушки a_k . Относительно мгновенной оси движение катушки является чисто вращательным, а для такого движения связь между линейной скоростью точки **v** и угловой скоростью вращательного движения **ω** имеет вид:

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}],$$

где **r** - радиус-вектор точки.

Поэтому соотношение между скоростями точек O_k и O_z можно записать в следующем виде:

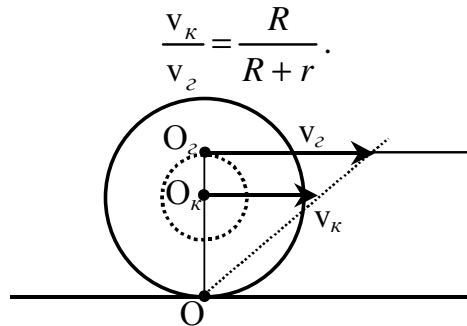


Рис. 2. К выводу уравнения кинематической связи

Заметим, что скорость точки O_k есть скорость центра масс катушки v_k , а скорость точки O_z катушки равна скорости примыкающей к ней точки нити, и, следовательно, скорости груза v_z . Поэтому связь между ускорениями запишется так же, как и соотношение скоростей:

$$\frac{a_k}{a_z} = \frac{R}{R + r}. \quad (4)$$

Из (3)–(4) получаем:

$$\frac{a_k}{R} = \frac{a_z}{R+r} = \epsilon_k. \quad (5)$$

Подставим в (2) T из (1) и ϵ_k из (5)

$$\begin{aligned} \left(J_0 + MR^2 \right) \frac{a_z}{R+r} &= m(g - a_z)(R+r); \\ \left(J_0 + MR^2 + m(R+r)^2 \right) \cdot a_z &= mg \cdot (R+r)^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая, что $m \ll M$, одним из слагаемых в левой части уравнения можно пренебречь. В итоге получим:

$$\left(J_0 + MR^2 \right) \cdot a_z \approx mg \cdot (R+r)^2. \quad (7)$$

Из уравнения (7) следует, что ускорение a_z груза прямо пропорционально его массе m и величине $(R+r)^2$, при этом коэффициент пропорциональности несет информацию о моменте инерции катушки. Указанные зависимости и проверяются при выполнении данной работы.

Заметим также, что соотношение (7) может быть получено из уравнения (2) с учетом (5), в котором сила натяжения нити примерно равна силе тяжести, действующей на груз: $T \approx mg$. Это условие можно считать верным, если масса груза существенно меньше массы катушки.

Кроме этого, в работе проверяется уравнение кинематической связи (4), записанное для модулей перемещений катушки Δx_k и груза Δx_z :

$$\frac{\Delta x_k}{\Delta x_z} = \frac{R}{R+r}. \quad (4a)$$

Если горизонтальный участок нити будет проходить ниже центра масс катушки (рис. 3), то можно показать (сделайте это самостоятельно!), что во всех записанных выше уравнениях r следует заменить на $(-r)$. Таким образом, структура уравнений, включая проверяемые в задаче уравнения (4a) и (7), не изменяется. Поэтому в дальнейшем при экспериментальной проверке уравнений (4a) и (7) будем считать, что в схеме эксперимента, представленной на рис. 3 (горизонтальный участок нити проходит ниже центра масс катушки), радиусы центральной части катушки принимают отрицательные значения ($r < 0$).

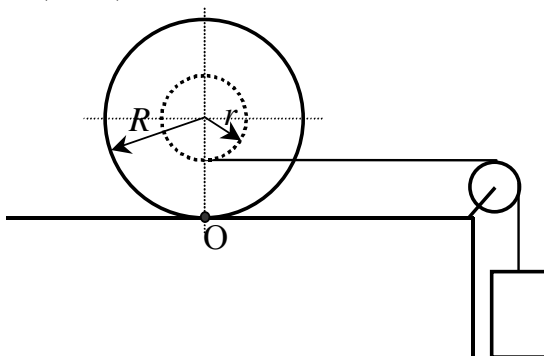


Рис. 3. Схема эксперимента

(горизонтальный участок нити проходит ниже центра масс катушки)

Обратим внимание, что при выводе формул нам не потребовалась какая-либо информация о силе трения F_{mp} (ее момент в формуле (2) равен нулю). Однако силу трения можно найти, используя уравнение движения центра масс катушки

$$Ma_k = T - F_{mp},$$

и проанализировать полученное выражение для нахождения условия появления проскальзывания катушки (сделайте это самостоятельно).

Рассмотрим, как изменяется механическая энергия системы. Пусть груз в процессе движения опустился вниз на расстояние H , уменьшив свою потенциальную энергию (в поле силы тяжести) на

$$\Delta E_{пот} = mgH.$$

Скорость груза в этот момент времени может быть найдена из соотношения, вытекающего из закона равноускоренного движения:

$$v_z = \sqrt{2a_z H}.$$

Угловая скорость ω_k вращательного движения катушки находится с помощью уравнения кинематической связи:

$$\omega_k = \frac{v_k}{R} = \frac{v_z}{R+r}.$$

Кинетическая энергия системы складывается из энергии поступательного движения груза и энергии вращательного движения катушки относительно мгновенной оси:

$$E_{кин} = \frac{mv_z^2}{2} + \frac{J\omega_k^2}{2}.$$

Подставляя найденные выше соотношения, получим:

$$\begin{aligned} E_{кин} &= \frac{mv_z^2}{2} + \frac{(J_0 + MR^2)v_z^2}{2(R+r)^2} = \frac{(m(R+r)^2 + J_0 + MR^2)v_z^2}{2(R+r)^2} = \\ &= \frac{(m(R+r)^2 + J_0 + MR^2) \cdot 2a_z H}{2(R+r)^2}. \end{aligned}$$

С учетом найденного ранее соотношения (6) для a_z получим, что

$$E_{кин} = mgH,$$

т.е. механическая энергия системы сохраняется: потенциальная энергия груза перешла в кинетическую энергию груза и катушки. Работа силы трения равна нулю, так как перемещение точки приложения этой силы (а это точка О) в каждое мгновение равно нулю.

Эксперимент

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 4 (*а* – вид сбоку; *б* – вид сверху). На рабочем столе установлена специальная доска длиной 120 см, по которой будет перемещаться катушка. Перед началом

работы необходимо с помощью уровня выставить доску горизонтально, помещая при необходимости под нее тонкие подкладки.

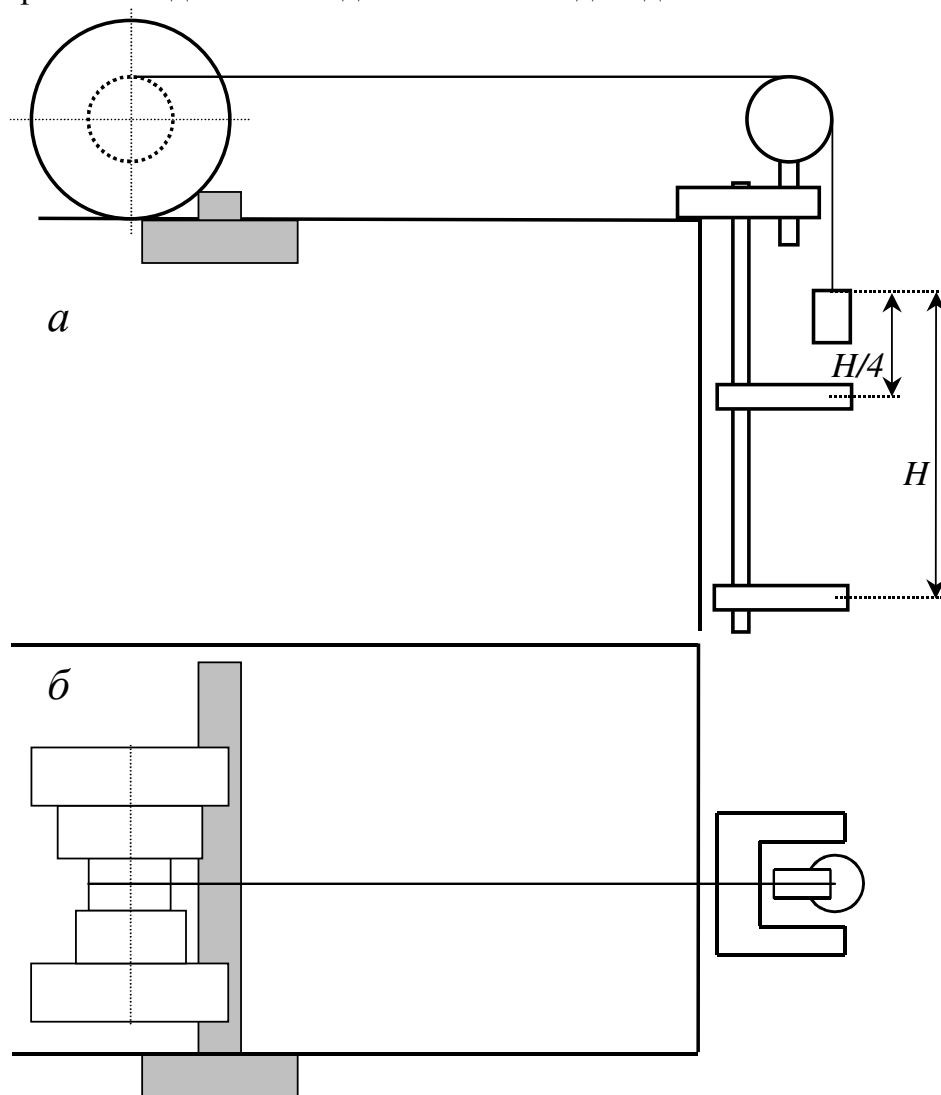


Рис. 4. Схема экспериментальной установки
(*а* – вид сбоку; *б* – вид сверху)

Катушка представляет собой два массивных стальных диска радиусом $R=5\text{ см}$, соединенные стальной осью малого диаметра. На оси прочно закреплены цилиндры трех различных радиусов: $r_1=1\text{ см}$; $r_2=1,5\text{ см}$; $r_3=2\text{ см}$. Конец нити закреплен между цилиндрами, саму нить можно намотать на любой из цилиндров, во избежание соскальзывания нити используются установленные в цилиндры винты. Профиль катушки показан на рис. 4б.

В торце стола в специальном креплении устанавливаются легкий блок и вертикальный длинный стержень, на котором размещаются два П-образных электронных датчика времени типа «световые ворота». Высоту блока можно изменять таким образом, чтобы горизонтальный участок нити был параллелен доске.

В качестве груза используется небольшая пластиковая емкость, массу которой можно изменять, помещая в нее металлические монеты. При

движении груза мимо верхнего датчика световые ворота сначала перекрываются, а затем вновь открываются. В данной установке таймер времени запускается, когда световые ворота вновь открываются. Аналогично при прохождении груза мимо нижнего датчика отсчет времени прекращается. Таким образом, электронный таймер измеряет время прохождения груза между датчиками.

Для нахождения ускорения груза a_z воспользуемся формулой равноускоренного движения, связывающей расстояние H , пройденное грузом, и время движения t :

$$H = \frac{a_z t^2}{2}. \quad (8)$$

В эксперименте измеряется время t_{12} прохождения груза между двумя датчиками. Однако если нижний датчик поместить на расстоянии H от начальной точки, а верхний – на расстоянии $H/4$, то, как нетрудно получить из (8), время t_{12} будет ровно в два раза меньше времени движения груза от начальной точки до нижнего датчика:

$$t_{12} = t/2.$$

В результате (8) запишется в виде:

$$H = 2a_z t_{12}^2.$$

Для ускорения груза получаем:

$$a_z = \frac{H}{2t_{12}^2} \quad (9)$$

Таким образом, для измерения ускорения груза необходимо датчики поместить на расстояния $H/4$ и H от начальной точки, измерить время t_{12} прохождения груза между датчиками и воспользоваться формулой (9).

Для измерения перемещения центра масс катушки на доске размещена шкала с миллиметровыми делениями, там же располагается специальный Т-образный упор (рис 4), препятствующий движению катушки.

Рисунок 5 иллюстрирует процедуру проверки уравнения кинематической связи (4а) между перемещениями груза и катушки. Перед катушкой с намотанной на любой из его цилиндров ниткой установим упор, препятствующий ее движению. Поместим на верхний датчик небольшую линейку или планку. Подберем такое положение упора (и, следовательно, катушки), чтобы дно груза касалось этой линейки, и запишем соответствующую координату упора по шкале.

Теперь переместим линейку с верхнего на нижний датчик, при этом из-за упора система будет находиться в покое. Аккуратно придерживая рукой катушку, начнем перемещать упор так, чтобы груз постепенно опускался вниз. Найдем положение упора, при котором дно груза коснется линейки на нижнем датчике, и запишем текущую координату упора. Для проверки

уравнения (4а) следует вычислить перемещение катушки Δx_k и измерить линейкой расстояние между датчиками, равное перемещению груза Δx_z .

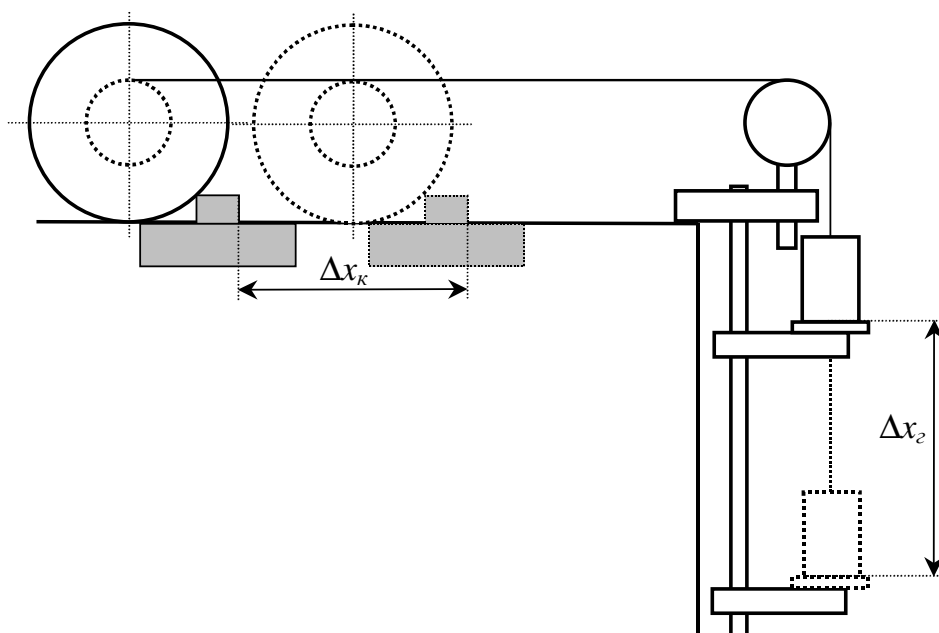


Рис. 5. К проверке уравнения кинематической связи

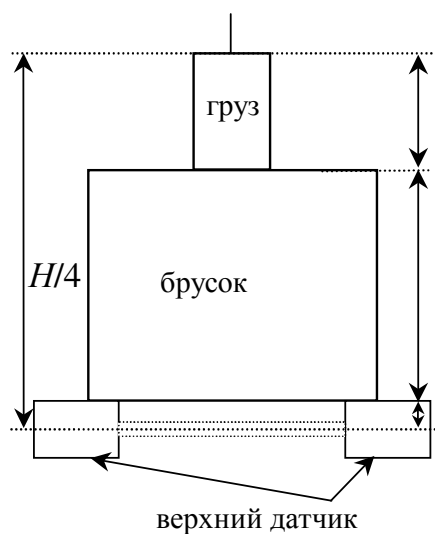


Рис. 6. Фиксация начального положения груза

При измерении ускорения груза чрезвычайно важно каждый раз аккуратно фиксировать начальное положение груза относительно верхнего датчика. Для этого в комплект входит деревянный прямоугольный брусок. Он устанавливается на верхний датчик, затем катушка с помощью упора помещается в такое положение, чтобы дно груза оказалось точно на бруске (рис. 6). Данное положение будет начальным для движения системы.

Расстояние от верхнего края груза до уровня светового луча верхнего датчика, равное $H/4$, может быть найдено как сумма трех слагаемых: высот груза и бруска, а также половины ширины датчика (можно считать, что световой луч проходит примерно в середине корпуса датчика).

Нижний датчик устанавливается так, чтобы расстояние между датчиками было равно $3H/4$. Таким образом, оба датчика расположены на

необходимых расстояниях от начальной точки, равных $H/4$ и H соответственно.

Затем брусок можно снять с верхнего датчика, так как начальное положение катушки (и груза) фиксировано Т-образным упором. Далее следует подготовить таймер к измерениям (нажать кнопку «Пуск») и для начала движения резко, но аккуратно убрать упор. После прохождения грузом нижних световых ворот катящуюся катушку следует аккуратно остановить рукой.

Для повторных измерений следует рукой откатить катушку примерно в первоначальное положение, вновь на верхний датчик установить брусок и фиксировать упором начальное положение катушки. Подобные действия позволят довольно точно фиксировать начальное состояние системы.

Измерения и обработка.

Упражнение 1. Проверка уравнения кинематической связи.

1. Намотайте на любой из осевых цилиндров катушки нить и, используя упор, установите катушку на расстояние около 1 метра от блока. Отрегулируйте высоту блока так, чтобы нить была параллельной поверхности доски и проходила, к примеру, выше центра масс катушки (рис. 5). При этом груз должен висеть выше верхнего датчика. Положите в пластиковую емкость груза произвольное число монет, чтобы обеспечить натяжение нити.

2. Так как все размеры катушки заданы, то предварительно, используя проверяемую формулу (4а), провести расчеты и найти такое расстояние между датчиками (и, следовательно, величину перемещения груза Δx_z), чтобы при всех возможных намотках нити перемещение катушки Δx_k было бы не более расстояния от катушки до блока.

3. В соответствии с описанной выше методикой и рис. 5 проведите эксперимент и определите перемещения груза Δx_z и катушки Δx_k . Полученные результаты запишите в тетрадь.

Повторите измерения 3-5 раз, рассчитайте среднее и оцените погрешность.

4. Переверните катушку так, чтобы нить шла ниже центра масс катушки (рис. 3), отрегулируйте высоту блока и вновь проведите 3-5 измерений для нового положения катушки. Сделайте все необходимые расчеты.

5. Намотайте нить на второй (а затем и на третий) осевой цилиндр катушки и проведите измерения и обработку, указанные в п.п.3-4. Положение датчиков (и расстояние Δx_z) не изменять! Полученные результаты запишите в тетрадь.

6. Из формулы (4а), записанной в виде

$$\Delta x_k = R \cdot \Delta x_z \cdot \frac{1}{R + r}, \quad (46)$$

следует, что перемещение катушки Δx_k пропорционально величине $\frac{1}{R + r}$.

Постройте график этой зависимости Δx_k от $\frac{1}{R + r}$ (напомним, что если нить проходит ниже центра масс катушки, то значение радиуса r следует взять отрицательным).

Используя метод наименьших квадратов (МНК) для пропорциональной зависимости (формулы (39)-(40) из [3], прямая проходит через начало координат¹), рассчитайте коэффициент в уравнении прямой линии, проходящей по экспериментальным точкам наилучшим образом. Сравните найденное значение углового коэффициента с величиной $R \cdot \Delta x_z$ (напоминаем, что во всех экспериментах Δx_z должно быть одним и тем же). Сделайте вывод о справедливости уравнения кинематической связи (4а).

Если наблюдается существенное расхождение при проверке уравнения (4а), то следует найти объяснение. Например, учесть ненулевую толщину нити, и, как следствие, скорректировать значения радиусов r_i .

Упражнение 2. Проверка зависимости ускорения груза от его массы. Определение момента инерции катушки.

1. Намотайте на любой из цилиндров катушки нить и, используя упор, установите катушку на расстояние около 1 метра от блока. Отрегулируйте высоту блока так, чтобы нить была параллельной поверхности доски и проходила выше или ниже (выбор сделайте самостоятельно) центра масс катушки (рис. 3 или 5). При этом груз должен висеть выше верхнего датчика.

2. Разместите на верхнем датчике брусок. В соответствии с описанной выше методикой рассчитайте расстояние $H/4$. Затем установите нижний датчик в правильное положение: на расстоянии $3H/4$ от верхнего датчика.

3. Установите катушку так, чтобы дно пустой пластиковой емкости (груза) находилось на бруске. Подобное положение будет начальным для всех последующих измерений.

4. Проведите эксперимент по определению времени t_{12} движения груза между датчиками по описанной выше методике. При этом начальную массу m_0 пустой емкости, крюка и нити определять не следует, она будет найдена в дальнейшем путем расчетов.

Сделаем одно замечание. В соответствии с (7) система должна прийти в движение при любой, даже очень малой массе груза. Однако вследствие наличия силы трения качения, возможной негоризонтальности опоры и

¹ Для расчетов по МНК можно использовать и формулы линейной зависимости (39)-(40) из [3], но в этом случае следует учесть, что искомое значение перемещения груза находится из условия $\Delta x_k = \Delta x_z$ при $r=0$.

других причин при пустой емкости этого может и не произойти. В этом случае положите в емкость 1-3 монеты, предварительно определив их массу m_1 . Таким образом, масса груза в первом измерении будет равна $(m_0 + m_1)$. Если емкость останется пустой, то $m_1=0$.

5. Повторите эксперимент по определению времени движения t_{12} 3-5 раз. Получите оценку искомого времени (среднее арифметическое) и оцените погрешность.

По формуле (9) рассчитайте ускорение груза и оцените погрешность. Результаты запишите в тетрадь.

6. Положите в емкость еще 2-3 монеты, предварительно определив их массу Δm . В этом случае дополнительная масса монет будет равна

$$m_2 = m_1 + \Delta m.$$

Повторите эксперименты (п.п.3-5) с данной массой, результаты обработки запишите в тетрадь.

7. Последовательно добавляя по 2-3 монеты, проведите эксперименты с 6-8 различными массами m_i монет. Рассчитайте для каждого случая ускорения груза a_{zi} и оцените погрешность.

8. Из формулы (7), записанной в виде

$$a_{zi} = \frac{g \cdot (R + r)^2}{(J_0 + MR^2)} \cdot (m_0 + m_i), \quad (7a)$$

следует, зависимость ускорения a_{zi} от массы m_i является линейной. Постройте график этой зависимости и, используя МНК для линейной зависимости (формулы (46)-(47) из [3]), найдите уравнение прямой, проходящей по экспериментальным точкам.

9. Приравнявая коэффициент, соответствующий наклону графика, величине $\frac{g \cdot (R + r)^2}{(J_0 + MR^2)}$, найдите момент инерции J_0 катушки относительно оси, проходящей через центр масс. Оцените погрешность.

10. Найдите точку пересечения прямой, найденной с помощью МНК, с горизонтальной осью координат. Ее координата будет отрицательной, модуль этого значения даст оценку массы груза m_0 без монет.

Определите массу m_0 пустой емкости без монет путем взвешивания. Сравните с результатами, полученными по МНК. В случае существенного расхождения результатов постарайтесь найти объяснение. Например, учесть наличие момента силы трения качения, или негоризонтальность доски.

Упражнение 3. Проверка зависимости ускорения груза от соотношения радиусов. Определение момента инерции катушки.

В данном упражнении масса груза фиксирована и равна суммарной массе емкости и монет $m_2 = (m_0 + m_m)$, нить наматывается последовательно на различные осевые цилиндры.

Запишем формулу (7) в виде

$$a_{zi} = \frac{g \cdot (m_0 + m_m)}{(J_0 + MR^2)} \cdot (R + r_i)^2, \quad (76)$$

Разработайте самостоятельно (по аналогии с Упражнением 2) порядок измерений для проверки зависимости ускорения груза от величины $(R + r)^2$. Массу монет m_m выберите самостоятельно, значение массы m_0 возьмите из Упражнения 2.

По результатам измерений необходимо построить соответствующий график и оценить момент инерции J_0 катушки относительно центральной оси. Сравните с результатами Упражнения 2.

Контрольные вопросы и задания.

1. Укажите положение мгновенной оси вращения в случае, если катушка катится без проскальзывания. Как изменится положение оси при наличии проскальзывания?
2. Какое уравнение называют уравнением моментов? Запишите это уравнение относительно оси, проходящей через центр масс катушки, и сравните с формулой (2).
3. Выведите уравнение кинематической связи между ускорениями центра масс катушки и груза, если горизонтальный участок нить проходит ниже центра масс катушки.
4. Выведите уравнение (3), связывающее угловое ускорение катушки ϵ_k и ускорение a_k ее центра масс при движении без проскальзывания.
5. Получите формулу для нахождения силы трения и найдите условия появления проскальзывания катушки.
6. Как зависит направление движения центра масс катушки от угла, образованного нитью с линией горизонта? Ответ обосновать.

Литература.

1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. М.: Высшая школа, 1986. §9, 33, 34.
2. Иродов И.Е. Основные законы механики. М.: Высшая школа, 1997. §3.4, 5.2, 5.4.
3. Митин И.В., Русаков В.С. Анализ и обработка экспериментальных данных. М.: Физический факультет МГУ, 2009.