

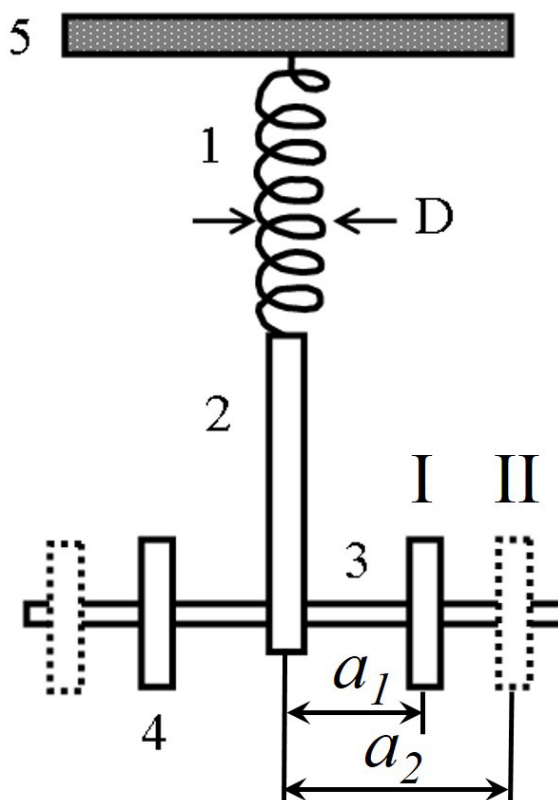


Лабораторный практикум  
по ФИЗИКЕ

МЕХАНИКА

Задача № 123

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПУАССОНА



МОСКВА 2023

## Задача №123

Лабораторная работа № 5.4

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПУАССОНА

#### Цель работы

Изучение сложных видов деформаций и связи между ними. Экспериментальное определение коэффициента Пуассона.

#### Идея эксперимента

Рассматриваются вертикальные (поступательные) и горизонтальные крутильные колебания пружинного маятника (маятника Уилберфорса). Из измерения периодов крутильных и вертикальных колебаний маятника определяется коэффициент Пуассона.

#### Теоретическое введение

Маятник Уилберфорса состоит из пружины 1 с подвешенным на ней составным металлическим телом, состоящим из цилиндра 2, прутка (спицы) 3 с перемещаемыми по ней дисками 4 (рис. 5.4.1). Верхний конец пружины закреплен на консоли 5. Пружина обладает продольной ( $k_1$ ) и крутильной ( $k_2$ ) жесткостью, поэтому маятник может совершать как продольные, так и крутильные колебания. Крутильные колебания связаны с сжатием (растяжением) слоев материала вдоль оси витков пружины, а продольные – с деформацией кручения, сводимой к сдвигу слоев в поперечном сечении материала пружины. Известно, что модуль сдвига  $G$  связан с модулем Юнга  $E$  уравнением

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (5.41)$$

где  $\mu$  - коэффициент Пуассона. Наличие одной деформации ведет к появлению другой.

При растяжении пружины с малыми углами наклона витков к горизонтали, деформации сжатия малы по сравнению с деформацией сдвига. Это позволяет при растяжении пружины рассматривать только вертикальные колебания. При ее закручивании можно пренебречь деформацией сдвига и рассматривать только крутильные колебания. При этих условиях легко определить коэффициент Пуассона по измерениям периодов двух типов колебаний груза на пружине.

**Вертикальные колебания.** Деформация кручения проволоки пружины при вертикальных колебаниях вызывается моментом  $M$  внешних сил. В том случае, когда груз подвешен на оси пружины,  $M$  равен

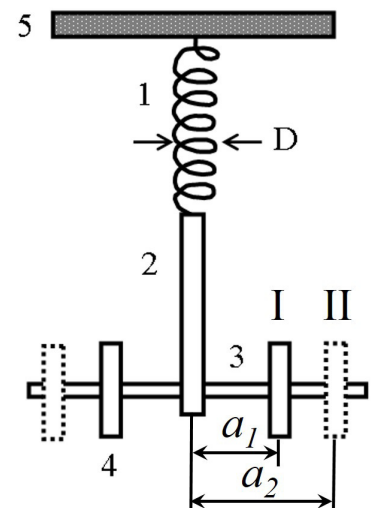


Рис. 5.4.1. Устройство пружинного маятника.

$$M = \frac{mgD_{\text{пруж}}}{2}, \quad (5.4.1)$$

где  $m$  – вся масса груза,  $g$  – ускорение свободного падения,  $D_{\text{пруж}}$  – диаметр пружины.

Вся масса  $m$  груза равна

$$m = m_{\text{цил}} + m_{\text{сп}} + 2m_{\text{д}}, \quad (5.4.2)$$

где  $m_{\text{цил}}$  – масса цилиндра А (рис.5.4.2),  $m_{\text{сп}}$  – масса спицы В,  $m_{\text{д}}$  – масса диска С.

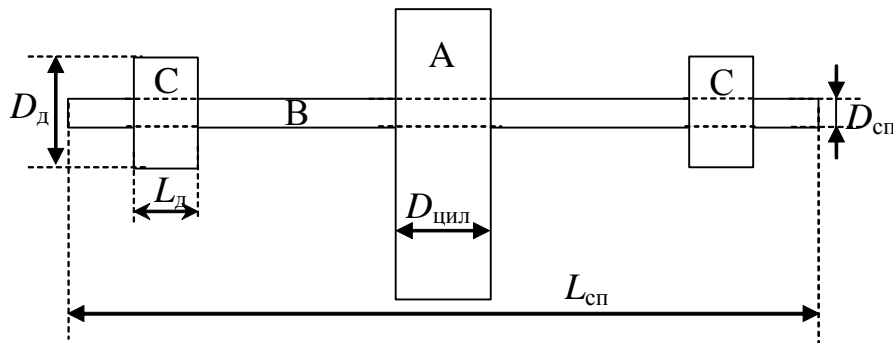


Рис. 5.4.2. Вид составного металлического груза.

В результате закручивания элемента длины  $dl$  проволоки на угол  $d\varphi$  нижний конец проволоки опустится на  $dx = \frac{D_{\text{пруж}}}{2} d\varphi$ . Используя закон Гука для деформации кручения и интегрируя по всей длине проволоки, получаем

$$mg = \frac{f}{(D_{\text{пруж}}/2)^2} \cdot x, \quad (5.4.3)$$

где  $f$  – модуль кручения для пружины,  $x$  – смещение груза по вертикали.

С учетом связи между модулем кручения и модулем сдвига

$$f = \frac{G\pi (d/2)^4}{2l}, \quad (5.9)$$

где  $d$  – диаметр проволоки пружины, можно получить выражение для коэффициента жесткости  $k_1$  пружины при вертикальных колебаниях груза (без учета деформации сжатия)

$$k_1 = \frac{f}{(D_{\text{пруж}}/2)^2} = \frac{Gd^4}{8nD_{\text{пруж}}^3} \quad (5.4.4)$$

здесь  $n$  – число витков проволоки. При малых вертикальных колебаниях уравнение движения груза можно записать в виде

$$m\ddot{x} = -k_1x. \quad (5.4.5)$$

Период вертикальных колебаний  $T_{\text{верт}}$  равен

$$T_{\text{верт}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1}}. \quad (5.4.6)$$

Зная период вертикальных колебаний, можно рассчитать продольную жесткость пружины

$$k_1 = \frac{4\pi^2 m}{T_{\text{верт}}^2}. \quad (5.4.7)$$

**Крутильные колебания.** В случае крутильных колебаний маятника проволока пружины испытывает деформацию изгиба, причем в каждом малом объеме происходит деформация сжатия или растяжения. Рассмотрим деформацию элемента проволоки длины  $dl$  и кругового поперечного сечения.

Учитывая, что при относительном удлинении внешнего слоя на  $d\varepsilon$ , угол  $d\varphi$  между поперечными сечениями проволоки пружины, расположенными на расстоянии  $dl$ , меняется на величину  $\varepsilon \frac{dl}{d/2}$ , можно установить связь между

моментом внешних сил и углом закручивания пружины из-за деформации участка длиной  $dl$

$$Mdl = EJ_S d\varphi, \quad (5.4.8)$$

где  $J_S$  – момент инерции поперечного сечения проволоки (традиционно вводимый при анализе деформации изгиба).

После интегрирования вдоль всей длины пружины  $l = n \pi D_{\text{пруж}}$  получаем

$$M = \frac{EJ_S}{l} \varphi = \frac{Ed^4}{64nD_{\text{пруж}}} \varphi. \quad (5.4.9)$$

Отсюда следует, что коэффициент жесткости  $k_2$  пружины при крутильных колебаниях (без учета деформации сдвига) равен

$$k_2 = \frac{Ed^4}{64nD_{\text{пруж}}} \quad (5.4.10)$$

Уравнение движения груза в случае крутильных колебаний имеет вид

$$J\ddot{\varphi} = -k_2\varphi, \quad (5.4.11)$$

где  $J$  – момент инерции груза, подвешенного к нижнему концу пружины (включая спицу В с дисками С),  $\varphi$  – угловое смещение груза.

Момент инерции  $J$  равен

$$J = J_{\text{цил}} + J_{\text{сп}} + 2 \cdot J_{\text{д}},$$

где  $J_{\text{цил}}$  – момент инерции цилиндра А массы  $m_{\text{цил}}$  и диаметра  $D_{\text{цил}}$ , равный

$$J_{\text{цил}} = \frac{m_{\text{цил}} \cdot R_{\text{цил}}^2}{2} = \frac{m_{\text{цил}} \cdot D_{\text{цил}}^2}{8}; \quad (5.4.12)$$

$J_{\text{сп}}$  – момент инерции спицы В массы  $m_{\text{сп}}$ , диаметра  $D_{\text{сп}}$ , длины  $L_{\text{сп}}$ , равный

$$J_{\text{сп}} = \frac{m_{\text{сп}} \cdot R_{\text{сп}}^2}{4} + \frac{m_{\text{сп}} \cdot L_{\text{сп}}^2}{12} = \frac{m_{\text{сп}} \cdot D_{\text{сп}}^2}{16} + \frac{m_{\text{сп}} \cdot L_{\text{сп}}^2}{12}; \quad (5.4.13)$$

$J_d$  – момент инерции диска С массы  $m_d$ , толщины  $L_d$ , диаметра  $D_d$ , с отверстием диаметра  $D_{сп}$ , центр масс находится на расстоянии  $l$  от оси, равный:

$$\begin{aligned} J_d &= J_{0д} + m_d \cdot l^2 = \frac{m_d \cdot (R_d^2 + R_{сп}^2)}{4} + \frac{m_d \cdot L_d^2}{12} + m_d \cdot l^2 = \\ &= \frac{m_d \cdot (D_d^2 + D_{сп}^2)}{16} + \frac{m_d \cdot L_d^2}{12} + m_d \cdot l^2. \end{aligned} \quad (5.4.14)$$

Для периода крутильных колебаний  $T_{крут}$  из (5.4.11) получаем.

$$T_{крут} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{k_2}}. \quad (5.4.15)$$

Величину  $T_{крут}$  можно изменять, меняя момент инерции  $J$  путем перемещения дисков С вдоль стержней В<sup>1</sup>. Момент инерции маятника можно записать в следующем виде

$$J = J_0 + 2m_d \cdot l^2, \quad (5.4.16)$$

где  $J_0$  – момент инерции цилиндра А со стержнем В и дисками С,  $l$  – расстояние от оси цилиндра до центра масс диска С.

$$J_0 = J_{цил} + J_{сп} + 2 \cdot J_{0д}, \quad (5.4.17)$$

### Определение коэффициента $\mu$ Пуассона через коэффициенты жесткости $k_1$ и $k_2$ .

Учитывая связь между коэффициентом Пуассона  $\mu$ , модулем упругости  $E$  и модулем сдвига  $G$ , а также соотношения (5.4.4), (5.4.10), получаем зависимость коэффициента  $\mu$  Пуассона от  $k_1$  и  $k_2$

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1 = \frac{k_2 \frac{64nD_{пруж}}{d^4}}{2k_1 \frac{8nD_{пруж}^3}{d^4}} - 1, \quad (5.4.18)$$

$$\mu = \frac{4k_2}{k_1 D_{пруж}^2} - 1 \quad (5.4.19)$$

**Связь между крутильными и вертикальными колебаниями. Биения.** Груз, подвешенный на винтовой пружине, имеет две степени свободы. Груз одновременно совершает два вида движений: крутильные и вертикальные колебания. Это аналогично движению двух маятников, соединенных между собой легкой пружинкой (связанные маятники).

Не изменяя массы составного груза, можно изменить его момент инерции, а, следовательно, и период крутильных колебаний. Приближая периоды колебаний груза  $T_{верт}$  и  $T_{крут}$ , можно наблюдать, как и в случае двух

<sup>1</sup> В этом случае период  $T_{верт}$  не изменяется, так как масса маятника  $m$  и жесткость пружины  $k_1$  остаются постоянными.

связанных маятников, появление биений, т.е. периодических изменений во времени амплитуды крутильных и вертикальных колебаний.

Частота биений  $\omega$  равна разности частот крутильных и вертикальных колебаний

$$\omega = \omega_{\text{верт}} - \omega_{\text{крут}} \quad (5.4.20)$$

Для периода биений получим

$$\tau = \frac{T_{\text{верт}} \cdot T_{\text{крут}}}{|T_{\text{верт}} - T_{\text{крут}}|} \quad (5.4.21)$$

### Экспериментальная установка

Внешний вид экспериментальной установки представлен на рис.5.4.4. К верхней части рамы 1 прикреплены два датчика 2,3 и держатель 4 для исследуемых объектов. В качестве объектов используется маятники Уилберфорса с пружинами из разных материалов. Маятники Уилберфорса состоит из пружины 5, на конце которой подвешен составной груз (состоящий из цилиндра 6, спицы 7 и двух дисков 8). На верхнем конце пружины имеется крепление 9, которое позволяет подвесить маятник на держатель 4. При завершении работы необходимо составной груз подвесить на стропах 10 или полностью снять маятник с держателя 4.

Датчики 2,3 соединены с многофункциональным устройством 11, которое позволяет с помощью программы PCSGU250 выводить на экран компьютера 12 сигнал с датчиков 2,3. Датчик 2 предназначен для исследования вертикальных колебаний, а датчик 3 для исследования крутильных колебаний.

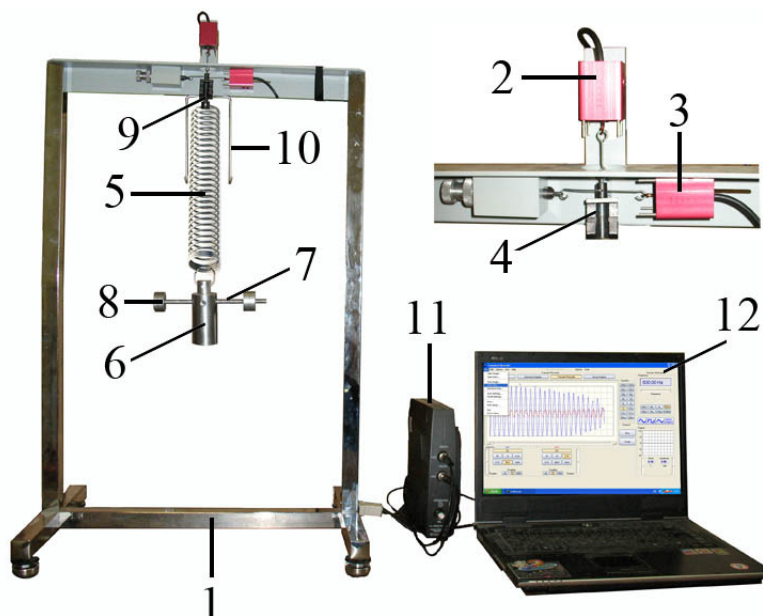


Рис.5.4.4. Маятник Уилберфорса.

В цилиндре 6 просверлено сквозное отверстие для размещения спицы 7. В дисках 8 также сделаны отверстия с резьбой для перемещения дисков по спице. Шаг резьбы следует определить самостоятельно.

Все необходимые для расчетов параметры маятников указаны на установке.

## Порядок проведения эксперимента.

В процессе выполнения задачи требуется перемещать диски 8 по спице 7 и измерять расстояние  $l$  от оси до центра масс диска. Проведение таких измерений в ситуации, когда маятник подвешен на держателе 4, крайне неудобно. К тому же при таких измерениях можно повредить систему соединения держателя 4 с датчиками 2 и 3.

Предлагается следующий механизм определения расстояния  $l$  центра масс диска 8 до оси (**все измерения производятся на столе, без подвешивания маятника**).

а) измерить штангенциркулем диаметр и толщину дисков 8;

б) развести диски на максимальное расстояние от оси и измерить расстояние между ними; рассчитать расстояние между центрами масс дисков;

в) так как диски перемещаются по спице 7 по резьбе, предложить способ определения шага резьбы. Измерить шаг резьбы.

г) в дальнейшем на основе проведенных измерений предложить механизм определения расстояния  $l$ , подсчитывая число  $N$  полных оборотов диска вокруг спицы. Для удобства подсчета на каждом из дисков нанесены метки.

В рабочей тетради кратко изложить предложенный алгоритм и записать формулу расчета  $l(l_0, N)$ , где  $l_0$  - начальное расстояние от оси до центра масс каждого из дисков.

После этого можно подвешивать маятник и приступать к измерениям.

### Упражнение 1. Определение продольной жесткости пружины.

#### Измерения

1. Записать все указанные на установке параметры исследуемых объектов в табл. 1.

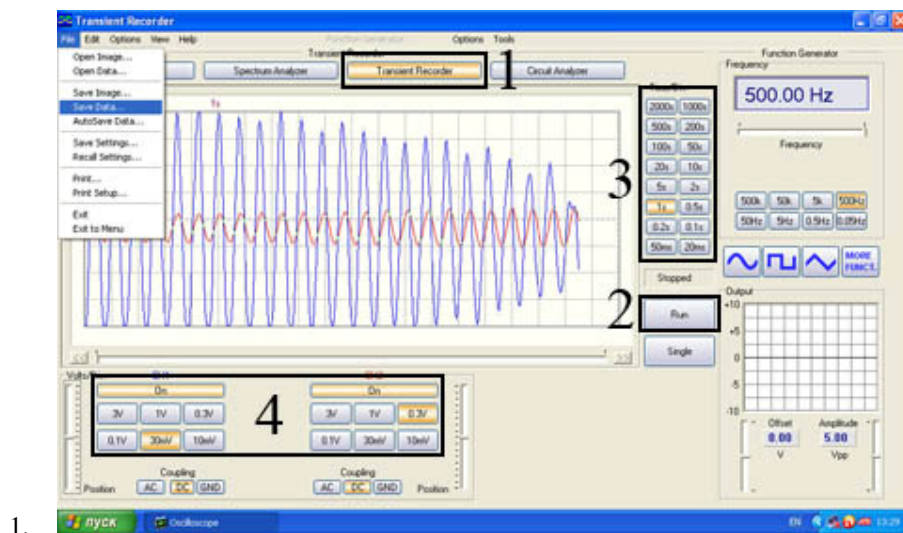
Таблица 1. Параметры объектов

Параметры пружины (материал – сталь)		
Диаметр $D_{\text{пруж}} = \_\_\_ \pm \_\_\_ \text{ мм}$	Диам пров $d = \_\_\_ \pm \_\_\_ \text{ мм}$	Число витков $n = \_\_\_ \pm \_\_\_$
Цилиндр		
Диаметр $D_{\text{цил}} = \_\_\_ \pm \_\_\_ \text{ мм}$	Высота $h_{\text{цил}} = \_\_\_ \pm \_\_\_ \text{ мм}$	Масса $m_{\text{цил}} = \_\_\_\_\_\_ \pm \_\_\_ \text{ г}$
Спица		
Диаметр $D_{\text{сп}} = \_\_\_ \pm \_\_\_ \text{ мм}$	Длина $L_{\text{сп}} = \_\_\_ \pm \_\_\_ \text{ мм}$	Масса $m_{\text{сп}} = \_\_\_\_\_\_ \pm \_\_\_ \text{ г}$
Диски (2 шт)		
Диаметр $D_{\text{д}} = \_\_\_ \pm \_\_\_ \text{ мм}$	Толщина $L_{\text{д}} = \_\_\_ \pm \_\_\_ \text{ мм}$	Масса $m_{\text{д}} = \_\_\_\_\_\_ \pm \_\_\_ \text{ г}$
Общая масса груза $m = \_\_\_\_\_\_ \pm \_\_\_ \text{ г}$		

2. Запустить программу Задача 123, расположенную на рабочем столе монитора. При этом на устройстве 11 должна загореться сигнальная лампочка.

Выбрать для дальнейшей работы режим самописца (кнопка 1 на рис. 5.4.4. с надписью **Transient Recorder**).

Для измерения временных интервалов следует нажать кнопку **View** и выбрать режим **Markers dV & dt**. На экране появятся вертикальные и горизонтальные штриховые линии, каждую из которых можно перемещать с помощью курсора мышки. В нижней части появятся данные о временном интервале между вертикальными линиями.



1.

Рис.5.4.4. Вид окна программы PCSGU250.

3. Раздвинуть на маятнике Уилберфорса со стальной пружиной диски 8 на максимальное расстояние от оси цилиндра.

Придерживая рукой тело маятника и, не растягивая пружину, аккуратно повесить его на держатель. Аккуратно опустить тело маятника вниз так, чтобы оно повисло на растянутой пружине.

Осторожно, чтобы не сообщить системе других колебаний, создать небольшим опусканием груза (на 3-4 см) вертикальные колебания. Подождать 15-20 секунд, чтобы убедиться в отсутствии (или малости) крутильных колебаний.

4. Кнопкой 2 (с надписью Run) начать процесс измерений. На экране появятся сигналы от обоих датчиков. Сигнал с первого канала отображается синим цветом и соответствует вертикальным колебаниям. Сигнал со второго канала отображается красным цветом и соответствует крутильным колебаниям.

Провести настройку работы измерительного блока. Переключателем чувствительности 4 каждого из каналов (рис.5.4.4.) можно регулировать амплитуду сигналов на экране. Переключатель разверток 3 позволяет



изменять цену деления по оси времени. Она нажимается только при остановке измерений (когда кнопка 2 отжата).

Выбор режимов на панелях 3 и 4 – ваше личное дело, но он должен быть разумным.

5. Датчики 2 и 3 обладают высокой чувствительностью, они реагируют на небольшие сотрясения стола, на котором находится установка. В результате в течение некоторого времени в системе могут наблюдаться паразитные колебания, кривые сильно «зашумлены».

6. Когда измеряемые кривые доходят до правого края экрана, результаты измерений пропадают, и начинается новый цикл измерений. Если выбран разумный режим измерений, и на экране наблюдаются отчетливые колебания, то следует нажать кнопку 2, остановить измерения и приступить к обработке результатов, представленных на экране.

7. Используя вертикальные линии (см. п.2) измерить время  $t_i$   $n=10$  полных колебаний. Для наглядности при просмотре результатов можно отключить канал крутильных колебаний и изменить настройки на панелях 3 и 4. Так как кривые зашумлены, то оценить субъективную погрешность  $\sigma_{\text{суб}}$  выбора временного интервала. Результаты измерений записать в Табл.2.

*Таблица 2. Результаты измерений упражнения 1*

$t_1$ (с)	$t_2$ (с)	$t_3$ (с)	$\langle t \rangle$ (с)	$\sigma_{\text{суб}}$ (с)	$\sigma_{\text{случ}}$ (с)	$\sigma_{\text{сумм}}$ (с)

Для оценки случайной погрешности  $\sigma_{\text{случ}}$  провести измерения несколько раз, суммарная погрешность определяется по формуле

$$\sigma_{\text{сумм}} = \sqrt{\sigma_{\text{суб}}^2 + \sigma_{\text{случ}}^2} .$$

*Обработка результатов проводится по окончании всех экспериментов.*

## **Упражнение 2. Определение продольной жесткости пружины.**

### *Измерения*

Диски 8 установлены на максимальном расстоянии  $l_0$  от оси. Записать в таблицу 3 ранее измеренное расстояние  $l_0$  (или измерить его повторно). Кроме этого, Вами уже получена формула для определения расстояния  $l$  в зависимости от числа оборотов  $N$  диска.

1. Осторожно, чтобы не сообщить системе других колебаний, создать небольшим поворотом вокруг вертикальной оси (на 15-20 градусов) крутильные колебания. Подождать 15-20 секунд, чтобы убедиться в отсутствии (или малости) вертикальных колебаний.

2. В соответствии с описанной выше методикой измерить время  $n=10$  полных колебаний маятника и оценить субъективную погрешность  $\sigma_{\text{суб}}$  выбора временного интервала. При необходимости провести измерения 2-3 раза.

Результаты измерений записать в Табл.3.

Таблица 3. Результаты измерений упражнения 2

$N$	$l$ (см)	$t_1$ (с)	$t_2$ (с)	$t_3$ (с)	$\langle t \rangle$ (с)	$\sigma_{\text{суб}}$ (с)	$\sigma_{\text{случ}}$ (с)	$\sigma_{\text{сумм}}$ (с)
0								

3. Аккуратно приподнять тело маятника так, чтобы пружина не растягивалась, и повернуть диски по резьбе на  $N$  оборотов. Число  $N$  определить самостоятельно, но так, чтобы измерения крутильных колебаний были проведены для 6-7 положений дисков. Расчет расстояния  $l$  проводить в соответствии в разработанным самостоятельно алгоритмом.

4. Провести измерения времени по той же методике, что и ранее.

5. Повторять измерения, каждый раз поворачивая диски, до тех пор, пока они не окажутся максимально близко от оси системы. В положении, когда частоты крутильных и вертикальных колебаний будут близки, следует быть предельно аккуратным, стараться так запустить крутильные колебания, чтобы не возникло ощутимых биений.

*Обработка результатов проводится по окончании всех экспериментов.*

### Упражнение 3. Наблюдение и измерение биений.

#### *Измерения*

1. Установить диски 8 в положение, когда периоды крутильных и вертикальных колебаний будут примерно равны. Вновь в соответствии с методикой Упр. 2 провести измерения  $t_{\text{крут}}$   $n=10$  полных крутильных колебаний маятника (измерения вертикальных колебаний не проводить). В данном упражнении измерение расстояния  $l$  от оси до центра масс дисков можно не проводить.

Результаты измерений записать в Табл.4.

Таблица 4. Результаты измерений и обработки упражнения 3

№	$T_{\text{верт}}$ (с)	$t_{\text{крут}}$ (с)	$T_{\text{крут}}$ (с)	$(\tau \pm \sigma_{\tau})_{\text{экс}}$ (с)	$(\tau \pm \sigma_{\tau})_{\text{теор}}$ (с)
1					
2					
3					

2. Аккуратно опустить тело маятника на 3-4 см, как при возбуждении вертикальных колебаний, и отпустить его. Вследствие близости частот в системе должны возникнуть биения. При этом крутильные колебания в определенные моменты должны полностью затухать, для вертикальных

колебаний подобного полного затухания может не быть. Если устойчивой картины биений не наблюдается, повторить процесс возбуждения колебаний.

3. При отчетливом визуальном наблюдении биений приступить к измерению периода биений  $\tau$ . Так как период биений довольно большой (десятки секунд), то измерения можно провести с помощью ручного секундомера. Можно при желании провести регистрацию с помощью компьютера, увеличив время развертки на панели 3. Для повышения точности можно измерить время 3-4 биений.

4. Повторить 2-3 раза измерения биений по указанной методике, каждый раз немного меняя положения дисков.

**Заменить первый маятник на второй и провести с ним те же самые измерения Упражнений 1, 2 и 3. По окончании измерений снять маятник и положить его на рабочий стол.**

**После этого можно приступать к обработке результатов.**

### Обработка результатов измерений

#### Упражнение 1.

1. Рассчитать по данным, указанным в таблице на рабочем столе, полную массу  $m$  составного маятника. Результат внести в табл.5.4.1.

2. Используя экспериментальные данные (табл.2) рассчитать среднее значение  $\langle t \rangle$  времени вертикальных колебаний по формуле

$$\langle t \rangle = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m t_i,$$

где  $m$ -число измерений.

3. Рассчитать среднеквадратичную случайную погрешность  $\sigma_{\text{случ}}$  измерения времени вертикальных колебаний по формуле

$$\sigma_{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{m(m-1)} \sum_{i=1}^m (t_i - \langle t \rangle)^2}.$$

Сравнить  $\sigma_{\text{случ}}$  с оценкой субъективной погрешности  $\sigma_{\text{суб}}$ .

4. Рассчитать суммарную погрешность  $\sigma_{\text{сумм}}$  измерения времени вертикальных колебаний по формуле

$$\sigma_{\text{сумм}} = \sqrt{\sigma_{\text{суб}}^2 + \sigma_{\text{случ}}^2}.$$

Результаты записать в Табл.2.

5. Найти оценку периода вертикальных колебаний  $T_{\text{верт}}$  и оценку погрешности  $\sigma_{T_{\text{верт}}}$  по формулам

$$T_{\text{верт}} = \frac{\langle t \rangle}{n}; \quad \sigma_{T_{\text{верт}}} = \frac{\sigma_{\text{сумм}}}{n},$$

где  $n=10$  – число колебаний.

6. Рассчитать продольную жесткость пружины  $k_1$  по формуле

$$k_1 = \frac{4\pi^2 m}{T_{\text{верт}}^2} \quad (5.4.7)$$

где  $m$  – масса всего груза.

7. Получить оценку погрешности  $\sigma_{k_1}$  определения продольной жесткости пружины по формуле

$$\sigma_{k_1} = k_1 \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_{T_{\text{верт}}}}{T_{\text{верт}}}\right)^2}$$

8. Результаты вычисления занести в табл. 5.

Таблица 5. Результаты обработки измерений упражнения 1

$T_{\text{верт}}$ (с)	$\sigma_{T_{\text{верт}}}$ (с)	$k_1$ (кГ/с <sup>2</sup> )	$\sigma_{k_1}$ (кГ/с <sup>2</sup> )

## Упражнение 2.

1. Аналогично обработке результатов упражнения 1 получить оценки периода  $T_{\text{крут}}$  крутильных колебаний для каждого рассчитанного значения расстояния  $l$  от оси до центра масс диска. Рассчитать  $T_{\text{крут}}^2$  и  $l^2$  и оценить погрешности.

Таблица 6. Результаты обработки измерений упражнения 2

$l$ (см)	$T_{\text{крут}}$ (с)	$\sigma_{T_{\text{крут}}}$ (с)	$l^2$ (см <sup>2</sup> )	$T_{\text{крут}}^2$ (с <sup>2</sup> )	$\sigma_{T_{\text{крут}}^2}$ (с <sup>2</sup> )

2. Построить график зависимости  $T_{\text{крут}}^2$  от  $l^2$ .

В соответствии с моделью

$$T_{\text{крут}}^2 = \frac{4\pi^2 \cdot 2m_{\text{д}} l^2}{k_2} + \frac{4\pi^2 \cdot J_0}{k_2},$$

т.е. зависимость  $T_{\text{крут}}^2(l^2)$  является линейной вида

$$y = Ax + B,$$

где  $y = T_{\text{крут}}^2$ ;  $x = l^2$ ;  $A = \frac{4\pi^2 \cdot 2m_{\text{д}}}{k_2}$ ;  $B = \frac{4\pi^2 \cdot J_0}{k_2}$ .

3. Применяя метод наименьших квадратов (МНК)<sup>2</sup>, получить оценки параметров  $A$  и  $B$  и оценки их погрешностей  $\sigma_A$  и  $\sigma_B$ .

Таблица 7. Результаты расчетов упражнения 2

$A \pm \sigma_A$	$B \pm \sigma_B$	$k_2 \pm \sigma_{k_2}$	$(J_0 \pm \sigma_{J_0})_{\text{эксп}}$	$(J_0 \pm \sigma_{J_0})_{\text{расч}}$	$\mu \pm \sigma_\mu$	$G \pm \sigma_G$	$E \pm \sigma_E$

4. По формуле

$$k_2 = \frac{4\pi^2 \cdot 2m_d}{A}$$

рассчитать крутильную жесткость пружины  $k_2$ .

5. Получить оценку погрешности  $\sigma_{k_2}$  коэффициента жесткости пружины при крутильных колебаниях по формуле

$$\sigma_{k_2} = k_2 \sqrt{\left(\frac{\sigma_{m_d}}{m_d}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_A}{A}\right)^2}.$$

6. Записав выражение для коэффициента  $B$  в виде

$$B = \frac{4\pi^2 \cdot J_0}{k_2} = \frac{A \cdot J_0}{2m_d},$$

рассчитать момент инерции маятника по результатам эксперимента

$$(J_0)_{\text{эксп}} = \frac{B \cdot 2m_d}{A}.$$

Оценить погрешность  $\sigma_{J_0}$ .

7. Зная массы и размеры всех частей маятника, рассчитать момент инерции всего маятника как сумму моментов инерции составных частей:

$$J_0 = J_{\text{цил}} + J_{\text{сп}} + J_{0д},$$

где  $J_{\text{цил}} = \frac{m_{\text{цил}} \cdot R_{\text{цил}}^2}{2} = \frac{m_{\text{цил}} \cdot D_{\text{цил}}^2}{8};$

$$J_{\text{сп}} = \frac{m_{\text{сп}} \cdot R_{\text{сп}}^2}{4} + \frac{m_{\text{сп}} \cdot L_{\text{сп}}^2}{12} = \frac{m_{\text{сп}} \cdot D_{\text{сп}}^2}{16} + \frac{m_{\text{сп}} \cdot L_{\text{сп}}^2}{12};$$

$$J_{0д} = 2 \cdot \frac{m_d \cdot (R_d^2 + R_{\text{сп}}^2)}{4} + 2 \cdot \frac{m_d \cdot L_d^2}{12} = \frac{m_d \cdot (D_d^2 + D_{\text{сп}}^2)}{8} + \frac{m_d \cdot L_d^2}{6}.$$

Сравнить найденный результат с полученным в эксперименте.

8. По найденным коэффициентам жесткости рассчитать коэффициент Пуассона  $\mu$  по формуле

$$\mu = \frac{4k_2}{k_1 D_{\text{пруж}}^2} \quad (5.4.19)$$

<sup>2</sup> Расчеты по МНК проводить по пособию [1] или по программе обработки на сайте кафедры общей физики физического факультета МГУ: <http://genphys.phys.msu.ru/rus/ofp/>

и оценить погрешность.

9. Из формулы

$$k_1 = \frac{f}{\left(D_{\text{пруж}}/2\right)^2} = \frac{Gd^4}{8nD_{\text{пруж}}^3} \quad (5.4.4)$$

получить оценку модуля сдвига  $G$  и оценить погрешность. Сравнить с табличными значениями для стали и бронзы.

10. Из формулы

$$k_2 = \frac{Ed^4}{64nD_{\text{пруж}}} \quad (5.4.10)$$

получить оценку модуля Юнга  $E$  и оценить погрешность. Сравнить с табличными значениями для стали и бронзы.

### Упражнение 3.

1. Аналогично обработке результатов упражнения 2 получить оценки периода  $T_{\text{крут}}$  крутильных колебаний для каждого положения дисков. Результаты записать в Табл.4.

2. По формуле

$$\tau = \frac{T_{\text{верт}} \cdot T_{\text{крут}}}{\left|T_{\text{верт}} - T_{\text{крут}}\right|} \quad (5.4.21)$$

рассчитать период биений  $\tau$  и оценить погрешность. Результаты записать в Табл.4. Сравнить с экспериментально измеренными значениями периода биений.

### Литература

1. Митин И.В., Русаков В.С. Анализ и обработка экспериментальных данных. М.- 2012.