

*Лабораторная работа №122*  
**ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ СДВИГА С ПОМОЩЬЮ  
КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ**

**Цель работы**

*Экспериментальное определение модуля кручения и расчет модуля сдвига для разных материалов. Установление зависимости модуля кручения от геометрических размеров стержней.*

**Идея эксперимента**

Используя зависимость периода колебаний крутильного маятника от модуля кручения стержня  $f$  и момента инерции маятника  $J$ , определяется  $f$ , а затем и модуль сдвига материала  $G$ .

**Теоретическое введение**

При воздействии тел могут изменяться как их положение в пространстве, так и их форма, то есть тела *деформируются*. Зачастую необходимо знать законы, связывающие действующие силы с вызываемыми ими деформациями.

Проводя анализ деформаций, следует учитывать, что нельзя переносить силу по линии ее действия, как можно было бы сделать в случае абсолютно твердого тела при изучении его поступательного движения. Это легко продемонстрировать на примере системы тел, состоящей из последовательности масс  $m$ , связанных пружинками (рис. 1). Деформации этой системы, очевидно зависят от того, к какому телу приложена сила  $F$ .

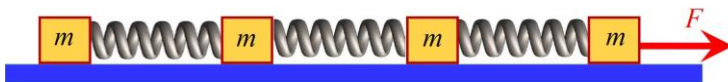


Рис.1. Деформация системы тел, связанных пружинками.

В общем случае законы, связывающие силы и деформации, весьма сложны. Но однако в практически наиболее важных случа-

ях, когда деформации являются малыми, а сами тела упругими, силы однозначно определяют деформации, и наоборот.

Известны следующие виды деформаций: однородное *растяжение (сжатие), сдвиг, кручение, изгиб*. В любом случае произвольный малый объем тела подвергается либо растяжению (сжатию), либо сдвигу, либо одновременному растяжению (сжатию) и сдвигу. Эти два вида деформаций принято называть *элементарными*. Рассмотрим эти типы деформаций более подробно.

**Деформация сдвига.** В данной задаче при колебаниях крутильного маятника происходит *деформация кручения стержня*. Любая деформация сводится к двум элементарным типам – деформации сжатия/растяжения и деформации сдвига. Деформация кручения представляет собой проявление деформации неоднородного сдвига. Рассмотрим ее особенности.

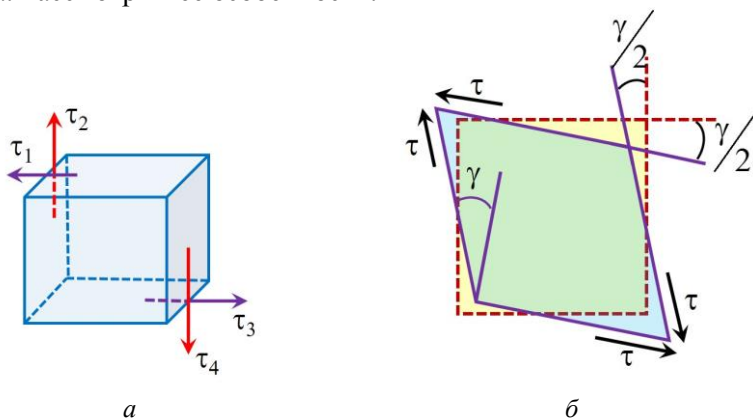


Рис. 2. Деформация тела кубической формы под действием распределенных касательных сил.

Рассмотрим деформацию кубика из однородного изотропного материала под действием распределенных **касательных** сил, приложенных к его противоположным граням. Для соблюдения условий равновесия кубика необходимо равенство всех касательных напряжений, приложенных к его граням (рис. 2 а):

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4. \quad (1)$$

Здесь  $\tau_i$  – касательные напряжения, определяемые как отношение силы, действующей на соответствующую грань ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), к площади этой грани. Действительно, отсутствие поступательного движения кубика как целого возможно, если

$$\tau_1 = \tau_3, \quad \tau_2 = \tau_4,$$

а отсутствие вращательного движения имеет место, если

$$\tau_1 = \tau_4, \quad \tau_2 = \tau_3,$$

что и доказывает условие (1).

При изменении напряжений ( $\tau_1 - \tau_4$ ) будут меняться только углы между гранями кубика, но не его объем (см. рис. 2 б). Пусть под действием этих напряжений углы между соответствующими гранями изменятся на малый угол  $\gamma$ . Опыт показывает, что для многих материалов при малых деформациях связь между  $\gamma$  и  $\tau$  – линейная (закон Гука для деформации сдвига):

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (2)$$

коэффициент  $G$  называется *модулем сдвига*.

Размерности модулей  $E$  и  $G$  одинаковы.

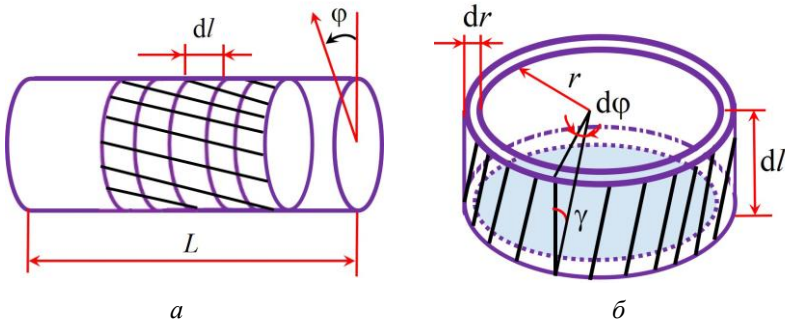


Рис. 3. Закручивание однородного круглого стержня.

**Деформации кручения.** Этот вид деформации рассмотрим на примере закручивания круглого однородного стержня, когда одно основание стержня повернуто относительно другого вокруг оси стержня на некоторый угол  $\phi$  (рис.3 а). При малых деформациях угол кручения  $\phi$  связан с моментом сил  $M$ , закручивающих стержень, законом Гука:

$$M = -f \cdot \phi, \quad (3)$$

где  $f$  – *модуль кручения*. При этом каждый из малых объемов испытывает деформацию сдвига. Знак «минус» в уравнении (3) указывает на то, что вращающий момент стремится уменьшить угловое отклонение  $\varphi$ .

Если стержень однородный, то для любого выделенного элемента стержня длиной  $dl$  его основания повернуты друг относительно друга на один и тот же угол  $d\varphi$ :

$$d\varphi = \frac{dl}{L} \cdot \varphi, \quad (4)$$

где  $L$  – длина стержня. Если из диска толщиной  $dl$  выделить кольцо радиусом  $r$  и толщиной  $dr$ , то, как видно из рис. 3 б, угол кручения  $d\varphi$  и угол  $\gamma$ , характеризующий деформацию сдвига элементарного объема, связаны соотношением:

$$\gamma \cdot dl = d\varphi \cdot r. \quad (5)$$

Здесь учтено, что углы  $\gamma$  и  $d\varphi$  малы, поэтому  $\sin \gamma \approx \gamma$  и  $\sin(d\varphi) \approx d\varphi$ . Определим касательное усилие, действующее на элементарную поверхность кольца площадью  $dr \cdot r d\varphi$ , используя соотношения (3) и (5):

$$\tau(r \cdot dr \cdot d\varphi) = G \cdot \gamma \cdot (r \cdot dr \cdot d\varphi) = r^2 G \frac{d\varphi}{dl} dr \cdot d\varphi.$$

Вклад этого элементарного усилия в момент относительно оси стержня равен

$$dM = r^3 G \frac{d\varphi}{dl} \cdot dr \cdot d\varphi.$$

Интегрируя по  $r$  и  $\varphi$ , находим суммарный момент внутренних сил, действующих в произвольном сечении стержня:

$$M = G \frac{d\varphi}{dl} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 dr d\varphi = \frac{\pi G R^4}{2} \frac{d\varphi}{dl}, \quad (6)$$

где  $R$  – радиус стержня.

Этот момент одинаков во всех поперечных сечениях стержня и равен моменту сил, закручивающих стержень. Подставляя  $d\varphi$  в виде (4) в (6), получаем:

$$M = \frac{G\pi R^4}{2} \frac{\varphi}{L}.$$

Учитывая (3), находим связь между модулем кручения  $f$  и модулем сдвига  $G$ :

$$f = \frac{\pi GR^4}{2L}. \quad (7)$$

Обычно деформации кручения исследуются на крутильном маятнике (рис. 4). Если один из концов стержня закрепить, а ко второму концу приложить момент сил  $M$  относительно продольной оси, то стержень закрутится. Угол поворота  $\varphi$  одного конца относительно другого может быть найден с учетом закона Гука (3) для деформации кручения.

В каждом малом объеме тела, подвергающегося деформации кручения, происходит деформация сдвига.

Для испытываемого тела цилиндрической формы (длинный тонкий стержень) связь между модулем кручения и модулем сдвига описывается формулой (7).

Метод определения модуля сдвига, используемый в данной работе, основан на зависимости периода крутильных колебаний маятника от упругих свойств стержня из исследуемого материала. Телом маятника служит горизонтальный цилиндр с надетыми на него грузами массы  $m$ . Изменяя расстояние от грузов до оси вращения, можно менять момент инерции, а следовательно, и период колебаний маятника. По зависимости периода колебаний маятника от его момента инерции определяется модуль кручения материала, а затем и модуль сдвига.

Уравнение вращательного движения маятника относительно неподвижной вертикальной оси (уравнение моментов) имеет вид:

$$J \cdot \varepsilon = M, \quad (8)$$

где  $J$  – момент инерции маятника,  $\varepsilon$  – угловое ускорение,  $M$  – момент внешних сил (в данном случае – сил упругости).

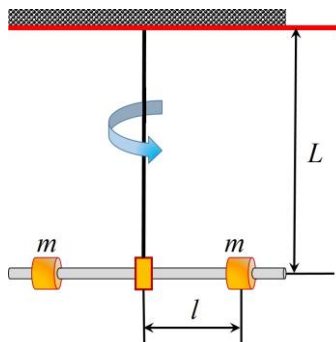


Рис. 4. Устройство маятника для исследования крутильных колебаний.

При малых углах отклонения маятника от положения равновесия можно считать, что этот угол и момент внешних сил связаны соотношением (3).

Подставляя (3) в (8), получим уравнение вращательного движения:

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -f\varphi. \quad (9)$$

Уравнение (9) приводится к каноническому виду уравнения гармонических колебаний:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (10)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{f/J}$  – круговая частота.

Учитывая связь между круговой частотой  $\omega_0$  и периодом колебаний  $T$ , получаем:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{f}}. \quad (11)$$

С учетом (7) можно записать

$$T^2 = 8\pi \frac{J \cdot L}{G \cdot R^4}. \quad (12)$$

Из (12) видно, что период колебаний зависит от трех параметров:  $J$ ,  $L$  и  $R$ . При проведении измерений, зафиксировав два из них, можно проверить зависимость периода колебаний от третьего параметра. Эти зависимости и проверяются в данной лабораторной работе.

Модуль кручения  $f$  и модуль сдвига  $G$  можно определить с помощью (11), исключив неизвестный момент инерции  $J$ . Так как на горизонтальной штанге располагаются на одинаковом расстоянии от оси вращения  $l$  два одинаковых груза массой  $m$  каждый, то можно записать:

$$J = J_0 + 2ml^2, \quad (13)$$

где  $J_0$  – момент инерции штанги без учета грузов.

Подставляя (13) в (11), а затем, используя (7) получим:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{f} (J_0 + 2ml^2) = \frac{8\pi L}{G \cdot R^4} (J_0 + 2ml^2). \quad (14)$$

Из (14) следует, что зависимость  $T^2(l^2)$  является линейной. Поэтому, если провести серию измерений периода колебаний, из-

меняя положение грузов на стержне, то при помощи метода наименьших квадратов по графику зависимости  $T^2(I^2)$  можно вычислить как модуль кручения  $f$ , так и момент инерции  $J_0$ .

### Экспериментальная установка

Общий вид экспериментальной установки показан на рис. 5. На массивном *основании 1* установлена вертикальная *стойка 2* в верхней части, которой находится горизонтально расположенная *планка – держатель 3* для исследуемых объектов. Исследования проводятся со *стержнями 4* различной длины и толщины, на концах которых находятся цилиндрические насадки для крепления, которые имеют различные диаметры. Один из концов стержня с цилиндрической насадкой с большим диаметром закрепляется неподвижно в *держателе 3*. К другому концу стержня крепится металлическая *штанга 5* с *грузами 6*. Цилиндрическая насадка стержня 4 крепится в *штанге 5* с помощью *винта 7*. Небольшим поворотом *штанги 5* вокруг вертикальной оси в системе возбуждаются колебания. Для предотвращения раскачивания нижний конец

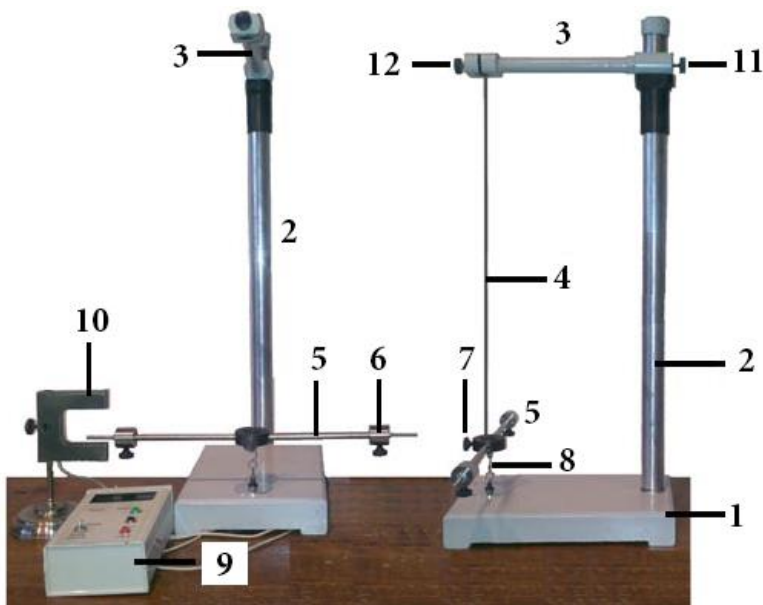


Рис. 5. Общий вид экспериментальной установки.

стержня соединяется с *основанием 1* небольшой *цепочкой 8*. Система измерения времени (периода) включает в себя *электронный таймер 9* с *фотодатчиком 10*, укрепленным на подставке. При проведении измерений датчик устанавливается таким образом, чтобы *штанга 5* при колебаниях пересекала луч света *фотодатчика 10*. Запуск *таймера 8* осуществляется нажатием кнопки «Пуск», остановка — кнопкой «Стоп». При подготовке к дальнейшим измерениям результаты предыдущих «стираются» с табло таймера нажатием кнопки «Сброс».

В комплект установки входят семь стержней: пять стальных различных длин и сечений, один алюминиевый и один медный, которые находятся в вертикальном положении на специальном держателе (рис. 6).

В ходе работы потребуется несколько раз менять стержни, поэтому рассмотрим подробнее процедуру смены.

*Для снятия стержня необходимо:*

- 1) Ослабив *крепежный винт 7* на штанге поднять ее на 2-3 см и снять ее с нижнего конца стержня через прорезь в штанге.
- 2) Опустить вниз на 2-3 см *планку-держатель 3* с закрепленным в ней верхним концом проволоки, ослабив *крепежный винт 11*.
- 3) Отсоединить *цепочку 8* от нижней насадки стержня.
- 4) Снять *стержень 4* через прорезь в *планке держателе 3*, ослабив *крепежный винт 12*.

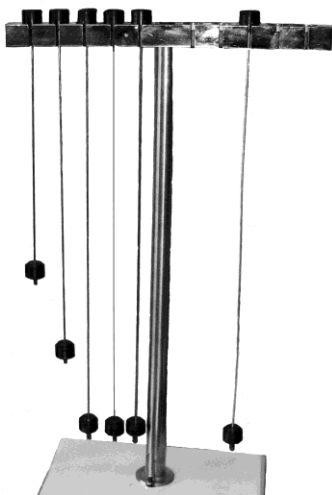


Рис. 6. Держатель стержней.



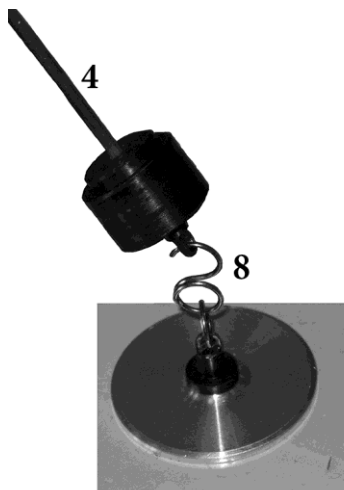


Рис. 7. Соединение нижней насадки стержня с цепочкой. Рис. 8. Установка цепочки 8.

*Для установки стержня необходимо:*

- 1) Соединить нижнюю насадку *стержня 4* с *цепочкой 8* (рис. 7).
- 2) Установить верхнюю насадку *стержня 4* в гнездо на *планке-держателе 3* (через прорезь в нем), но не закреплять его.
- 3) Аккуратно приподнять *стержень 4* из гнезда на *планке-держателе 3* повернуть ее вокруг вертикальной оси так, чтобы после установки *цепочки 8* плоскости ее соседних звеньев были взаимно перпендикулярны (см. рис. 8). Если этого не сделать, то из-за трения между звеньями цепочки колебания будут быстро затухать. Только после этого можно закрепить верхний конец *стержня 4* *крепежным винтом 12*.
- 4) Поднять вдоль стойки *планку-держатель 3*, обеспечив небольшое натяжение *стержня 4* и *цепочки 8*, проверить вертикальность *стержня 4* и закрепить *крепежный винт 11*.

5) Установить горизонтально *штангу 5* с *грузами 6* (стороной с меньшим диаметром отверстия) через прорезь на нижний конец *стержня 4* (рис. 9), опустив его до упора на нижнюю насадку (рис. 10) и закрепив ее *крепежным винтом 7*.

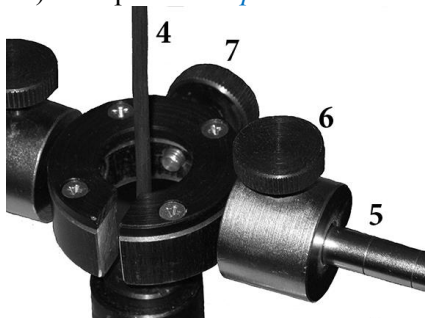


Рис. 9. Установка штанги 5 на стержень 4.

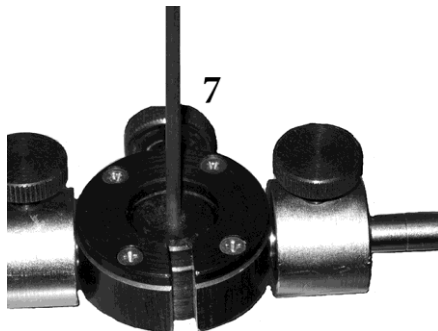


Рис. 10. Закрепление штанги 5 на стержне 4.

6) Аккуратно повернув *штангу 5* на небольшой угол (10-15 градусов) и проверить, что в системе возбуждаются колебания с малым затуханием (не менее 15 колебаний). При большом затухании поворотом стержня в верхнем гнезде дополнительно отрегулировать взаимное расположение звеньев *цепочки 8*.

### Проведение эксперимента

#### Упражнение 1. Изучение зависимости модуля кручения от длины проволоки.

В соответствии с соотношением (11) для маятников, имеющих одинаковые моменты инерции, но разные модули кручения упругого подвеса, будет выполняться соотношение

$$T^2 \cdot f = \text{const} , \quad (15)$$

или с учетом (7)

$$T^2 \cdot \frac{R^4}{L} = \text{const} . \quad (16)$$

Таким образом, чтобы проверить обратно пропорциональную зависимость модуля кручения  $f$  от длины проволоки, достаточно убедиться в том, что зависимость  $T^2$  от  $L$  является линейной.

### Измерения

1. Определить длины  $L_i$  трех стальных стержней одинаковой толщины. Результаты измерений и их погрешности  $\sigma_L$  записать в табл. 1.

2. Установить в устройство крепления самый короткий стержень (в соответствии с приведенными выше указаниями). Грузы на горизонтальной штанге закрепить на максимальном расстоянии от оси вращения.

3. Отклонить штангу на небольшой угол (15-20 градусов) и отпустить. Измерить время  $t_n$   $n = 10$  колебаний системы. Данные записать в табл. 1. Повторить эксперимент  $k = 3$  раз.

4. Аналогично провести измерения для двух других стержней, не меняя положения грузов на штанге. Результаты записать в табл. 1.

Таблица 1

### Экспериментальные данные упражнения 1

$L \pm \sigma_L$	Номер опыта	$t$	$\bar{t}$	$\sigma_{\bar{t}}$	$\sigma_{t\Sigma}$	$\hat{T}$	$\sigma_T$	$(\hat{T})^2$	$\sigma_{T^2}$
см	$k$	с	с	с	с	с	с	с <sup>2</sup>	с <sup>2</sup>
	1								
	2								
	3								
	1								
	2								
	3								
	1								
	2								
	3								

### Обработка результатов

1. Для каждого из стержней вычислить среднее арифметическое значение  $\bar{t}$  времени  $n = 10$  колебаний

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^k t_i}{k}.$$

2. Для каждого из стержней вычислить случайную погрешность  $\sigma_{\bar{t}}$  среднего арифметического по формуле:

$$\sigma_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum (t_i - \bar{t})^2}{k(k-1)}}.$$

3. Рассчитать суммарную погрешность по формуле

$$\sigma_{t\Sigma} = \sqrt{\sigma_{\bar{t}}^2 + \sigma_t^2},$$

где  $\sigma_t$  – приборная погрешность таймера, равная 2% от результата измерения.

Результаты вычислений пп. 1-3 записать в табл. 1.

4. Определить период колебаний  $\hat{T}$  и погрешность  $\sigma_T$  по формулам:

$$\hat{T} = \frac{\bar{t}}{n}, \quad \sigma_T = \frac{\sigma_{t\Sigma}}{n}.$$

Результаты записать в табл. 1.

5. Вычислить  $T^2$  и погрешность величины  $T^2$  по формуле для косвенных измерений

$$\sigma_{T^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)^2} \cdot \sigma_T = 2T \cdot \frac{\sigma_{t\Sigma}}{n}.$$

Результаты вычислений записать в табл. 1.

6. Построить график зависимости  $\langle T^2 \rangle$  от  $L$  с указанием погрешностей. Погрешность величины  $T^2$  рассчитать по соответствующей формуле расчета погрешности для косвенных измерений. Визуально оценить степень соответствия экспериментальных результатов линейной зависимости  $T^2 \sim L$ .

## Упражнение 2. Изучение зависимости периода колебаний маятника от толщины стержня.

Если стержни сделаны из одного материала, имеют одинаковую длину, но разные радиусы, то в соответствии с (14) :

$$T^2 \cdot R^4 = \text{const} \quad (17)$$

или

$$T \sim \frac{1}{R^2} \quad (18)$$

В данном упражнении проводится экспериментальная проверка соотношения (18).

### Измерения

1. Определить радиусы  $R_i$  исследуемых стальных стержней одинаковой длины в нескольких сечениях и среднее значение  $\langle R \rangle$  и погрешности измерений. Результаты измерений и погрешности записать в табл. 2.

2. Установить в устройство крепления самый тонкий стержень (в соответствии с приведенными выше указаниями). Грузы на горизонтальной штанге закрепить на максимальном расстоянии от оси вращения.

3. Отклонить штангу на небольшой угол (15-20 градусов) и отпустить. Измерить время  $t_n$   $n = 10$  колебаний системы. Данные записать в табл. 2. Повторить эксперимент  $k = 3$  раз.

4. Аналогично провести измерения для двух других стержней, не меняя положения грузов на штанге. Результаты записать в табл. 2.

Таблица 2

**Экспериментальные данные упражнения 2**

$\bar{R} \pm \sigma_R$	Номер опыта	$t$	$\bar{t}$	$\sigma_{\bar{t}}$	$\sigma_{t\Sigma}$	$\hat{T}$	$\sigma_T$	$\frac{1}{(\bar{R})^2}$	$\sigma_{\frac{1}{(\bar{R})^2}}$
см	$k$	с	с	с	с	с	с	см	см
	1								
	2								
	3								
	1								
	2								
	3								
	1								
	2								
	3								

### Обработка результатов

1. Для каждого из стержней вычислить среднее арифметическое значение  $\bar{t}$  времени  $n = 10$  колебаний, случайную погрешность  $\sigma_{\bar{t}}$  среднего арифметического, суммарную погрешность  $\sigma_{\Sigma}$ , аналогично пп. 1-3 раздела **обработка результатов упр. 1**.

Результаты вычислений записать в табл. 2.

2. Определить период колебаний  $\hat{T}$  и погрешность  $\sigma_T$  (аналогично п.4 раздела **обработка результатов упр. 1**).

Результаты записать в табл. 2.

3. Вычислить  $\frac{1}{(\bar{R})^2}$  и погрешность вычислить по формуле

для косвенных измерений. Результаты вычислений записать в табл. 2.

4. Построить график зависимости периода колебаний  $T$  от  $\frac{1}{R^2}$ , с указанием погрешностей измерения. Визуально оценить степень соответствия экспериментальных результатов линейной зависимости.

### Упражнение 3. Определение модуля кручения и модуля сдвига для различных материалов.

Как уже отмечалось выше период колебаний маятника зависит от момента инерции штанги и координаты грузов. Зависимость  $T^2(J_0, l)$  описывается формулой (14). Перепишем эту формулу в следующем виде

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{f} 2ml^2 + \frac{4\pi^2}{f} J_0.$$

Данная зависимость является линейной типа

$$y = Ax + B, \tag{19}$$

где  $y = T^2$ ,  $x = l^2$ ,  $A = \frac{8\pi^2 m}{f}$ ,  $B = \frac{4\pi^2 J_0}{f}$ .

Поэтому для определения модуля упругости  $f$  и момента инерции  $J_0$  штанги без грузов можно применить метод наименьших квадратов (МНК) в рамках модели (19). В данном упражнении проводится совместные измерения периода колебаний последовательно из-

меняя расстояние от оси вращения до грузов. А обработку осуществляется методом МНК

### Измерения

1. Выбрать один из стальных стержней. Измерить и записать в табл. 3 его длину  $L$  и радиус  $R$ .
2. Стержень установить в устройство крепления (в соответствии с приведенными выше указаниями). Грузы на горизонтальной штанге закрепить на максимально близком расстоянии от оси вращения. Измерить это расстояние. Результат записать в табл. 3.
3. Отклонить штангу на небольшой угол (15-20 градусов) и отпустить. Измерить время  $t_i$   $n = 10$  колебаний системы. Данные записать в табл. 3. Повторить эксперимент  $k = 3$  раз.
4. Смещая каждый раз грузы на 2 см\* от оси провести аналогичные измерения 5 раз. Результаты записать в табл.3.

Таблица 3

### Экспериментальные данные упражнения 3

$l$	$k$	$t$	$\bar{t}$	$\sigma_{\bar{t}}$	$\hat{T}$	$\sigma_T$	$(\hat{T})^2$	$\sigma_{T^2}$	$l^2$
см	с	с	с	с	с	с	с <sup>2</sup>	с <sup>2</sup>	см <sup>2</sup>
Сталь, $L=$ см, $R=$ см									
	1								
	2								
	3								
...									
	1								
	2								
	3								
Медь, $L=$ см, $R=$ см									
	1								
	2								
	3								
...									
	1								

\* Для удобства установки грузов 6 на штанге 5 нанесена шкала с шагом 1см.

	2								
	3								
Дюралюминий, $L=$ см, $R=$ см									
	1								
	2								
	3								
...									
	1								
	2								
	3								

5. Провести измерения, аналогичные пп.1-3 для стержней из меди и дюралюминия. Результаты записать в табл. 3.

#### *Обработка результатов*

1. По методике, описанной в упр.1 (выполнение пп. 1-5 раздела «Обработка результатов») для каждого из стержней получить значения  $\hat{T}$ ,  $T^2$  и их погрешностей  $\sigma_T$ ,  $\sigma_{T^2}$  для всех значений (в МНК значения  $x = l^2$  считаются измеренными точно). Результаты всех вычислений записать в табл. 3.

2. Построить зависимость  $T^2(l^2)$  для трех стержней из разных материалов. Применяя МНК получил значения  $A$  и  $B$  и их погрешности  $\sigma_A$  и  $\sigma_B$ .

3. Определить значение модуля кручения  $f$  и момент инерции штанги без грузов  $J_0$

$$f = \frac{8\pi^2 m}{A}, \quad J_0 = \frac{2B}{A} \cdot m.$$

4. Вычислить погрешности величин  $f$  и  $J_0$  по формулам для косвенных измерений

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial m}\right)^2 \cdot \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)^2 \cdot \sigma_A^2},$$

$$\sigma_{J_0} = \sqrt{\left(\frac{\partial J_0}{\partial m}\right)^2 \cdot \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial J_0}{\partial A}\right)^2 \cdot \sigma_A^2 + \left(\frac{\partial J_0}{\partial B}\right)^2 \cdot \sigma_B^2}.$$

5. Сравните значения момента инерции  $J_0$ , полученные при измерении колебаний с разными стержнями.



б. Используя формулу (7) вычислите модуль сдвига  $G$  для различных материалов. Вычислите погрешности этих величин по формуле для косвенных измерений.

### **Основные итоги работы**

*В процессе выполнения работы устанавливаются зависимости модуля кручения стержня от его длины и радиуса. Определяют значения модулей кручения и сдвига для стали, алюминия и меди.*

### **Контрольные вопросы**

1. Какие виды деформаций вы знаете?
2. Сформулируйте закон Гука и условия его применимости
3. Что такое модуль Юнга? От чего он зависит?
4. Нарисуйте примерный график зависимости напряжения от удлинения для растяжения. Объясните эту зависимость.
5. Сформулируйте закон Гука для деформации кручения.
6. Что такое модуль кручения, модуль сдвига.
7. Каковы размерности модуля кручения и модуля сдвига?
8. Как связаны модуль кручения и модуль сдвига?
9. Как зависят модуль кручения и модуль сдвига от длины и толщины проволоки?
10. Что такое момент инерции. Сформулируйте теорему Гюйгенса-Штейнера.
11. Каким образом можно найти модуль кручения, если неизвестен момент инерции маятника?
12. Какое уравнение описывает вращательное движение маятника?
13. Выведите период колебаний из уравнения гармонических колебаний для данной задачи.
14. В задаче грузы считать материальными точками. Как изменятся значения формулы расчета кручения и модуля сдвига, если отказаться от такого допущения?

## Литература

1. В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев. Механика. – М.: Изд. центр «Академия», 2004. – Лекция 15.
2. И.В. Митин, В.С. Русаков. Анализ и обработка экспериментальных данных. Учебно-методическое пособие для студентов младших курсов. – М.: МГУ. 2002.

