

## Глава 5 Упругие деформации

### Введение

При взаимодействиях тел меняется не только положения их в пространстве, но также изменяется их форма, то есть происходят различные *деформации*. Во многих случаях необходимо знать законы, связывающие действующие силы с теми деформациями, которые они вызывают.

Проводя анализ деформаций, следует учитывать, что нельзя переносить силу по линии ее действия, как можно было бы сделать в абсолютно твердом теле при изучении его поступательного движения. Это легко продемонстрировать на примере системы тел, состоящей из последовательности тел массами  $m$ , связанных пружинками (рис. 5.1). Деформации этой системы, очевидно, будут различными в зависимости от того, к какому телу приложена сила  $F$ .



Рис.5.1. Деформация системы тел, связанных пружинками.

В общем случае законы, связывающие силы и деформации, сложны, эти связи могут быть неоднозначными и зависеть от величины и характера приложенных сил и других причин. Однако в практически наиболее важных случаях, когда деформации являются малыми, а сами тела упругими, силы однозначно определяют деформации и наоборот.

Среди многочисленного разнообразия возможных деформаций принято выделять однородное *растяжение* (*сжатие*), *сдвиг*, *кручение*, *изгиб*. В любом случае произвольный малый объем тела подвергается либо растяжению (сжатию), либо сдвигу, либо одновременному растяжению (сжатию) и сдвигу. Эти два вида деформаций принято называть *элементарными*. Рассмотрим наиболее характерные типы деформаций более подробно.

**Деформация растяжения или сжатия.** *Деформацией растяжения* или *сжатия* называется деформация, связанная с относительным удлинением или укорочением деформируемого участка. Проанализируем мысленно опыт с растяжением упругого стержня (рис. 5.2). Если материал стержня однороден, то все его

одинаковые элементы будут растянуты одинаково при воздействии на стержень некоторой однородной нагрузки. Такую деформацию можно характеризовать относительным удлинением  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (5.1)$$

где  $\Delta l$  - удлинение отрезка стержня, имевшего первоначальную длину  $l$ . Для любого участка

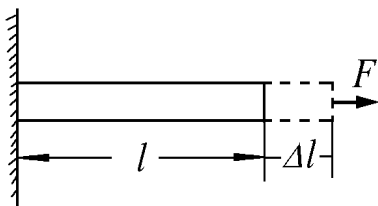


Рис.5.2. Схематическое представление деформации

длина  $l$ . Для любого участка упругого стержня величина  $\varepsilon$  одинакова и зависит от величины силы растяжения  $F$ . Под воздействием этой силы в стержне возникают внутренние силы взаимодействия (усилия) между различными участками стержня. Из усло-

вий равновесия каждого отдельного участка стержня следует, что сумма сил, действующих на него, равна нулю, то есть в любом его поперечном сечении возникают усилия, равные  $F$ . Величину усилия, действующего на единицу площади поперечного сечения стержня, называют *напряжением* и обозначают  $\sigma$ . Напряжение, возникающее в произвольном сечении растягиваемого стержня равно

$$\sigma = \frac{F}{S}, \quad (5.2)$$

где  $S$  - площадь поперечного сечения стержня.

Будем постепенно увеличивать растягивающую силу  $F$ . При небольших усилиях напряжение  $\sigma$  и относительное удлинение  $\varepsilon$  приблизительно пропорциональны друг другу. При больших значениях  $\sigma$  связь становится нелинейной (рис.5.3). После снятия нагрузки тело снова может возвратиться в прежнее состояние. При дальнейшем увеличении напряжения деформации перестают быть упругими, в теле возникают необратимые изменения.

Разделим кривую на рис. 5.3 на участки.

*Участок от 0 до а.* На большей части своего протяжения он прямолинеен. В этой части диаграмма выражает прямую пропорциональную зависимость между силой и деформацией, то

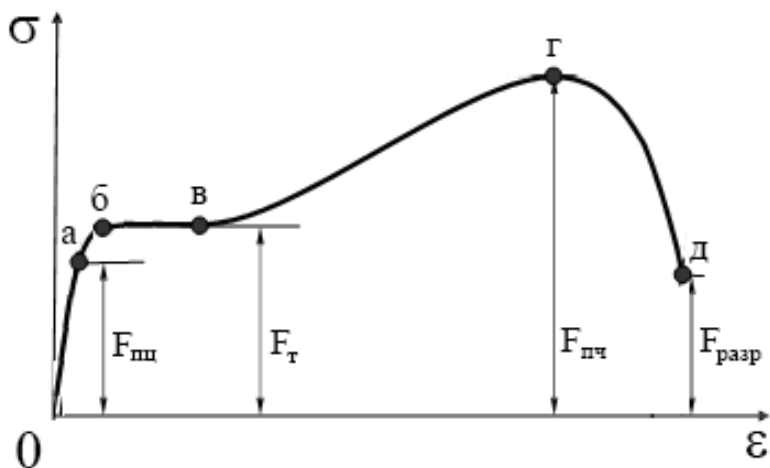


Рис.5.3. Диаграмма растяжения образца.

есть зависимость, записываемую законом Гука

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (5.3)$$

Область деформации, при которых выполняется соотношение (5.3), называется областью *пропорциональности*. Постоянный коэффициент  $E$  имеет размерность Н/м<sup>2</sup> или Н/мм<sup>2</sup> и называется *модулем Юнга*. Максимальное значение  $\sigma_{пц}$ , при котором выполняется соотношение (5.3), называется *пределом пропорциональности*.

Предел пропорциональности определяется по формуле

$$\sigma_{пц} = \frac{F_{пц}}{S_0},$$

где  $F_{пц}$  – наибольшая нагрузка, при которой выполняется закон Гука,  $S_0$  – начальная площадь поперечного сечения образца.

*Участок кривой а-б.* Деформации начинают расти быстрее, чем нагрузка, и диаграмма становится криволинейной. Точка б соответствует пределу упругости. Если напряжения не превосходят определенной величины – *предела упругости*  $\sigma_y$ , то материал

сохраняет свои упругие свойства. Предел упругости вычисляется по формуле

$$\sigma_y = \frac{F_y}{S_0},$$

где  $F_y$  – сила, действующая на этом участке.

*Участок кривой б – в.* Деформации растут без дальнейшего увеличения нагрузки – материал образца «течет». Ординаты точек на этом участке устанавливают нагрузку  $F_T$  с учетом которой вычисляется предел текучести  $\sigma_T$ .

*Предел текучести* – напряжение, при котором происходит «течение» материала, определяется по формуле

$$\sigma_T = \frac{F_T}{S_0}.$$

*Участок кривой в – г.* На этом участке наблюдается некоторое увеличение нагрузки на образец (так называемое *упрочение* материала). В точке г кривая имеет наибольшую ординату, которая равна максимальной нагрузке  $F_{пч}$ , при которой материал образца претерпевает разрушение. Для характеристики этого процесса вводится понятие *предел прочности*  $\sigma_{пч}$  – напряжение, при котором происходит разрушение материала, равный

$$\sigma_{пч} = \frac{F_{пч}}{S_0}.$$

*Участок кривой от г до д.* С момента достижения максимальной нагрузки деформация концентрируется около некоторого участка по длине образца, оказавшегося наиболее слабым. На образце возникает так называемая «шейка», сечение которой сильно уменьшается. В связи с этим дальнейшее растяжение образца требует меньших нагрузок, и это снижение нагрузок наблюдается вплоть до разрыва образца. Сила  $F_{разр}$ , соответствующая моменту разрыва образца, называется *разрушающей*. Величина напряжения  $\sigma_{разр}$  в этом случае есть истинное напряжение разрушения образца и равна:

$$\sigma_{разр} = \frac{F_{разр}}{S_{ш}},$$

где  $S_{ш}$  – площадь сечения образца в месте его разрушения.

## *Лабораторная работа № 5.1* **ИЗУЧЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ РАСТЯЖЕНИЯ**

### **Цель работы**

*Изучение деформаций растяжения, определение модуля Юнга для различных материалов.*

### **Идея эксперимента**

Определяются величины растяжения стержней из различных материалов под действием нагрузок. Из экспериментальных данных определяется значение модуля Юнга для различных материалов.

### **Теоретическое введение**

В данной работе определяется модуль Юнга для различных материалов. Величина модуля Юнга как следует из формул (5.1) – (5.3) может быть определена из следующего соотношения

$$E = \frac{F}{S} \frac{l}{\Delta l} . \quad (5.1.1)$$

### **Экспериментальная установка**

Установка для изучения упругой деформации стержней и определения модуля Юнга материала (рис. 5.1.1) состоит из рамы 1 (на рис. 5.1.1. она отмечена пунктиром) на основании 2. К раме 1 прикреплен кронштейн 3. Стержень  $l$ , модуль Юнга материала которого необходимо определить, верхним концом прочно укреплен в верхней части рамы 1. Нижний ее конец закреплен в цилиндре 4, к которому подвешен груз 5 для выпрямления стержня. Цилиндр 4 зафиксирован в рычаге 6. Удлинение стержня измеряется с помощью индикатора часового типа (часового индикатора) ИЧ-10. Часовой индикатор установлен в держателе, закрепленном на кронштейне 3, и его шуп опирается на рычаг 6. При удлинении стержня рычаг 6 опускается, и стрелка часового индикатора показывает величину, пропорциональную этому удлинению. Шуп индикатора расположен от центра вращения рычага 6 на расстоянии  $a=106,6$  мм, а расстояние от центра вращения до стержня равно  $b=40$  мм. Для предохранения проволоки от ненужных толчков и разрыва в приборе используется арретир 7, который укреплен на кронштейне 3. Поворотом винта 8 арретира 7, можно освободить проволоку от нагрузки. Для

растяжения проволоки  $l$  грузы поочередно подвешиваются на ось груза 5.

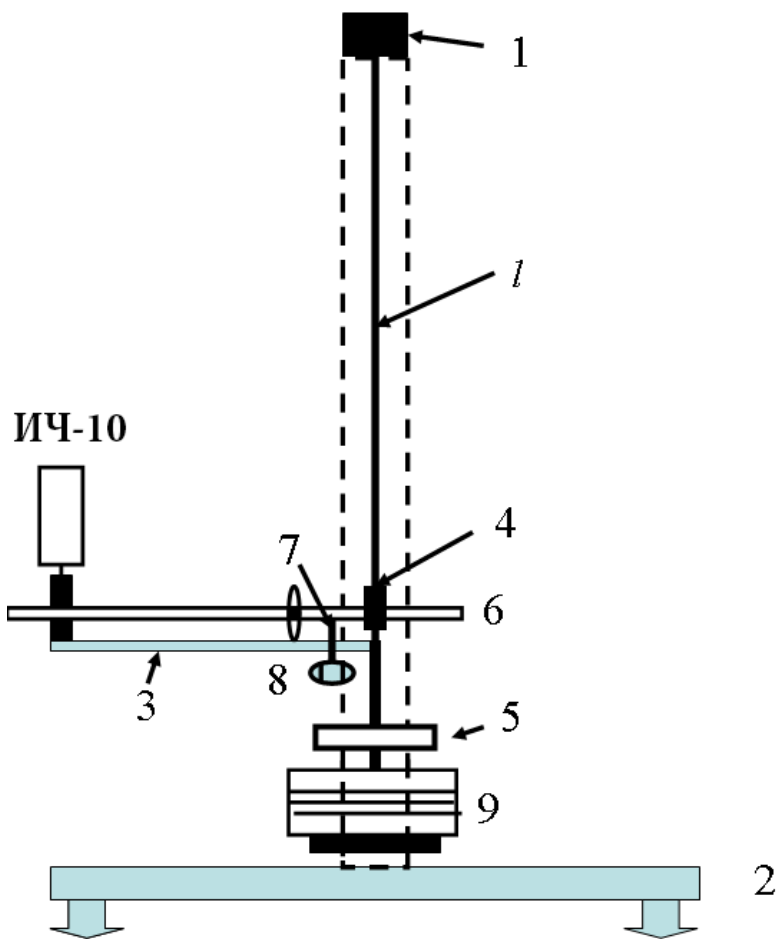


Рис. 5.1.1. Схема экспериментальной установки для измерения упругой деформации растяжения стержня.

Индикатор (рис.5.1.2) имеет металлический корпус *1*, в котором заключен механизм прибора. Через корпус индикатора проходит стержень *2* с выступающим наружу наконечником, всегда находящимся под воздействием пружины. Если нажать на стержень снизу вверх, он переместится в осевом направлении и при этом повернет стрелку *3*, которая передвинется по циферблату, имеющему шкалу в 100 делений, каждое из которых соответствует перемещению стержня на 1/100 мм. При перемещении стержня на 1 мм стрелка *3* сделает по циферблату полный оборот. Для отсчета целых оборотов служит стрелка *4*.

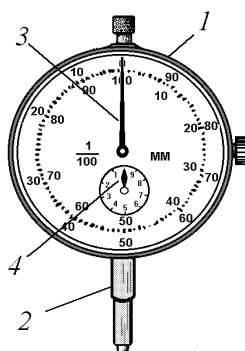


Рис. 5.1.2. Устройство часового индикатора.

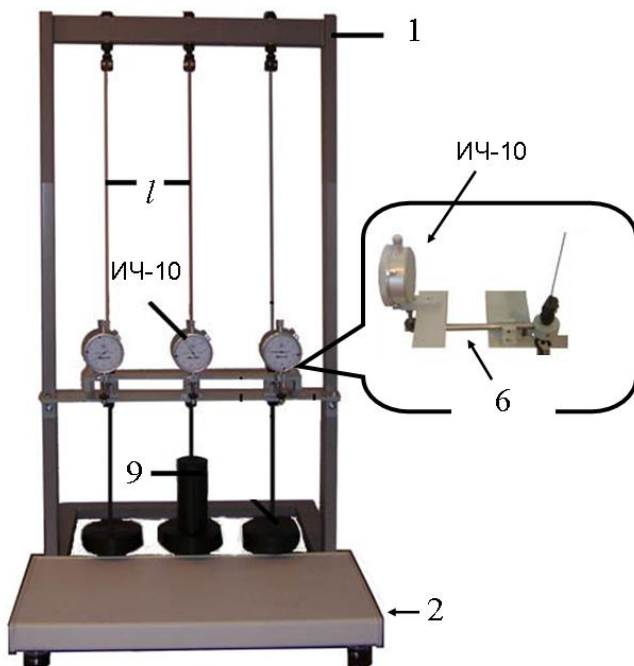


Рис.5.1.3. Общий вид установки для изучения деформаций растяжения.

Общий вид экспериментальной установки представлен на рис.5.1.3(на вставке показан узел измерения удлинения стержня). На данной установке одновременно можно измерять модуль Юнга трех стержней из различных материалов (в данной работе это сталь, медь и дюралюминий).

Для определения модуля Юнга стержня необходимо знать результирующую массу установленных для его растяжения грузов и его удлинение при растяжении. Удлинение  $\Delta l$  измеряется с помощью индикатора часового типа. При этом индикатор (его острие) опирается не на цилиндр 4, а на рычаг 6. По этой причине

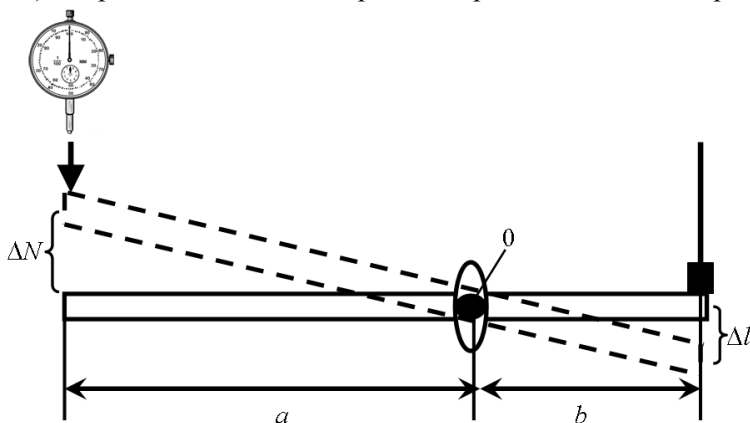


Рис.5.1.4. К установлению связи между  $\Delta l$  и  $\Delta N$ .

показания индикатора и удлинение стержня отличаются. Для связи удлинения стержня  $\Delta l$  и показания индикатора  $\Delta N$  рассмотрим два подобных треугольника (рис.5.1.4). Откуда получаем

$$\Delta l = \Delta N \frac{b}{a}. \quad (5.1.2)$$

С учетом того, что площадь поперечного сечения стержня равна

$$S = \frac{\pi D^2}{4}, \quad (5.1.3)$$

где  $D$  – диаметр проволоки, а  $F = mg$  ( $m$ –масса груза,  $g$  –ускорение свободного падения) формулу (5.1.1) можно переписать в следующем виде

$$E = mg \frac{4l \cdot a}{\pi D^2 \cdot \Delta N \cdot b} \quad (5.1.4)$$



Эта формула является окончательной для определения модуля Юнга.

В данной работе модуль Юнга определяется не только по формуле (5.1.4), но и из графика зависимости  $\Delta l = f(F)$ .

### Проведение эксперимента

1. Определить диаметры  $D_i$  каждого из стержней с помощью микрометра, проведя измерения не менее трех раз в различных сечениях. При оценке погрешности диаметра учесть не только случайную  $S_D$ , но и систематическую  $\sigma_D$  погрешность, сопоставимую с ценой деления микрометра.

Таблица 1. Результаты измерений

Материал	$D_i$ (мм)			$\langle D \rangle$ (мм)	$S_D$ (мм)	$\sigma_D$ (мм)
Сталь						
Медь						
Дюралюм.						

2. Занести в таблицу 2 значения рассчитанных диаметров  $D_i$  и их погрешностей, а также указанные на установке одинаковые для всех объектов длины стержней  $l$ , параметры рычага  $a$  и  $b$ , массу одного груза  $m_0$  с указанием погрешностей.

Таблица 2. Параметры установки

$D_{\text{сталь}}$ (мм)	$D_{\text{медь}}$ (мм)	$D_{\text{дюрал}}$ (мм)	$l$ (см)	$a$ (мм)	$b$ (мм)	$m_0$ (г)
			95,0±0,5	106,5±1,0	40,0±1,0	212,7±0,3

3. Для одного из стержней отпустить арретир 7, вращая винт 8 до тех пор, пока стержень 1 под действием массивного груза 5 не выпрямится, при этом показания индикатора перестанут изменяться.

4. Установить индикатор на нулевое значение, вращая его корпус.

5. Положить на массивный груз 5 один из грузов массой  $m_0$ , при этом стрелка индикатора слегка повернется. Вследствие небольшого трения в шестеренках индикатора поворот стрелки может оказаться меньшим ожидаемого, поэтому следует ладонью несильно ударить два-три раза по краю стола (но ни в коем случае

не по установке!!!). Записать в таблицу 3 показания индикатора  $\Delta N_{i\uparrow}$  (в мм).

Таблица 3. Результаты измерений и расчетов

$n_i$	сталь			медь			дюралюминий		
	$\Delta N_{i\uparrow}$ (мм)	$\Delta N_{i\downarrow}$ (мм)	$\Delta N_i$ (мм)	$\Delta N_{i\uparrow}$ (мм)	$\Delta N_{i\downarrow}$ (мм)	$\Delta N_i$ (мм)	$\Delta N_{i\uparrow}$ (мм)	$\Delta N_{i\downarrow}$ (мм)	$\Delta N_i$ (мм)
0	0			0			0		
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
$S_N$ (мм)									

6. Аналогичные действия произвести, помещая поочередно все грузы  $m_0$  (всего 9 грузов). Занести в таблицу 2 соответствующие числу грузов  $n_i$  показания индикатора  $\Delta N_{i\uparrow}$ .

7. Провести аналогичные измерения, постепенно снимая грузы  $m_0$ . Показания индикатора записать в столбец  $\Delta N_{i\downarrow}$  таблицы 2. Обращаем внимание, что после снятия всех грузов стрелка индикатора может оказаться не на нулевом делении, показание  $\Delta N_{0\downarrow}$  следует занести в ячейку таблицы с  $n=0$ .

8. По окончании измерений **обязательно** ослабить натяжение стержня, вращая винт 8 арретира. Невыполнение данного указания может привести к появлению необратимой деформации стержня!!!

9. Провести аналогичные измерения (пункты 3-8) с остальными стержнями. Результаты занести в табл.3.

### Обработка результатов

1. Для каждого числа грузов  $n_i$  (включая  $n=0$ ) рассчитать среднее значение показаний индикатора:

$$\Delta N_i = \frac{\Delta N_{i\uparrow} + \Delta N_{i\downarrow}}{2}$$

и занести в табл.3.

2. Считая, что измерения удлинения  $\Delta N_i$  проводятся в одинаковых условиях, оценить погрешность показаний  $S_N$ , считая ее **одинаковой** для любого числа грузов  $n_i$ . Занести найденное значение в нижнюю строку таблицы 3.

3. Запишем формулу

$$E = mg \frac{4l \cdot a}{\pi D^2 \cdot \Delta N \cdot b} \quad (5.1.4)$$

в виде

$$\Delta N = \frac{g \cdot 4l \cdot a \cdot m_0}{\pi D^2 \cdot E \cdot b} n, \quad (5.1.5)$$

где  $n$ - число грузов ( $n=0,1,\dots,9$ , всего 10 значений)

Данная форма записи позволяет заметить, что проводились *совместные* измерения, при которых одна из величин (число грузов  $n$ ) изменялась целенаправленно, при этом фиксировалось изменение другой величины (показаний индикатора  $\Delta N$ ). Для обработки результатов таких измерений разумным является применение метода наименьших квадратов (МНК).

Обработку следует провести в рамках линейной модели

$$y = Ax + B,$$

где  $x=n$  - известно точно;

$y=\Delta N$  - имеет одну и ту же погрешность  $S_N$  во всех точках;  
коэффициент

$$A = \frac{g \cdot 4l \cdot a \cdot m_0}{\pi D^2 \cdot E \cdot b}. \quad (5.1.6)$$

Подчеркнем, что из вида формулы (5.1.5), казалось бы, следует применить модель

$$y = Ax,$$

однако в этом случае значению  $x=n=0$  должно соответствовать значение показаний индикатора  $\Delta N_0$  абсолютно точно равное нулю, что, вообще говоря, не соответствует результатам эксперимента.

4. Для получения оценок коэффициента  $A$  и его погрешности  $S_A$  следует использовать формулы (46)-(47) из [1]:

$$\widehat{A} = \frac{\Delta_A}{\Delta}, \quad \widehat{B} = \frac{\Delta_B}{\Delta}, \quad (46)$$

$$S_A^2 = S_N^2 \cdot \frac{n}{\Delta}, \quad S_B^2 = S_N^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\Delta}, \quad (47)$$

где

$$\Delta = n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2,$$

$$\Delta_A = n \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i,$$

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i,$$

$$n=9+1=10.$$

5. Из (5.1.6) для модуля Юнга  $E$  следует:

$$E = \frac{g \cdot 4l \cdot a \cdot m_0}{\pi D^2 \cdot A \cdot b}, \quad (5.1.7)$$

Данная формула является формулой *косвенных* измерений, в которую входят только знаки умножения, деления и возведения в степень. Поэтому для расчета погрешности  $S_E$  лучше использовать формулу расчета через относительные погрешности измеренных величин ( $l, a, b, D, m_0, A$ ):

$$\frac{S_E}{E} = \sqrt{\left(\frac{S_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{S_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{S_{m_0}}{m_0}\right)^2 + \left(\frac{S_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{2S_{Dl}}{D}\right)^2 + \left(\frac{S_A}{A}\right)^2}.$$

Данная формула позволяет также оценить, какая из измеренных величин вносит наибольший вклад в погрешность.

6. Построить график экспериментальной зависимости показаний индикатора  $\Delta N_i$  от числа грузов  $n_i$ . Для экспериментальных точек указать погрешности  $S_N$ , одинаковые для всех точек. На графике провести прямую линию, полученную в результате расчетов коэффициентов  $\widehat{A}$  и  $\widehat{B}$  по МНК.

7. Оценку значения модуля Юнга можно получить и не используя МНК, а просто подставив в формулу

$$E = mg \frac{4l \cdot a}{\pi D^2 \cdot \Delta N \cdot b} \quad (5.1.4)$$

одну из измеренных пар значений  $m_i = n_i m_0$  и  $\Delta N_i$ . Выбрав произвольно 2-3 пары значений для каждого материала из табл. 3, получить для каждой по формуле (5.1.4) оценку значения модуля Юнга  $E$  и погрешности  $S_E$ . Результаты занести в таблицу 4. Сравнить с результатами, полученными при использовании МНК.

*Таблица 4. Результаты расчетов (данные для столбцов  $n_i$  и  $\Delta N_i$  берутся из соответствующих ячеек табл.3)*

Материал	$n_i$	$\Delta N_i$ (мм)	$E$	$S_E$	$E \pm S_E$ по МНК
<b>сталь</b>					
<b>сталь</b>					
<b>медь</b>					
<b>медь</b>					
<b>дюралюм</b>					
<b>дюралюм</b>					

8. Указанную выше обработку провести для трех различных материалов, используемых в работе. Все три графика построить на одних и тех же осях.

### ***Основные итоги работы***

1. В результате измерений и последующей обработки и анализа получить оценки модулей Юнга и погрешностей для трех различных материалов. Сравнить с табличными данными, найденными в Интернете.

2. Сопоставить результаты, полученные с помощью МНК и рассчитанные по результатам отдельных измерений, сделать вывод в пользу того или иного способа.

3. Представить график экспериментальных зависимостей для различных материалов и провести на нем прямые линии, найденные с помощью МНК.

**4. Сформулировать и записать в тетради «открытия» (не менее пяти), которые Вы лично сделали для себя в результате выполнения данной работы.**

**Литература.**

1. Митин И.В., Русаков В.С. Анализ и обработка экспериментальных данных. М., Физический факультет МГУ (2012).

**Контрольные вопросы**

1. Какие виды деформаций вы знаете? Сформулируйте закон Гука и условия его справедливости.
2. Что такое модуль Юнга и каков его физический смысл? Укажите размерность в системе СИ.
3. Как влияет природа материала на модуль Юнга?
4. Зависит ли модуль упругости от размеров испытуемого образца и силы упругости?
5. С какой целью к образцу прикладывают начальную нагрузку?
6. Напишите формулу для определения нормальных напряжений при центральном растяжении.
7. Что такое изотропия материалов?
8. Какие упругие постоянные характеризуют изотропные материалы?
9. Как определяют относительную продольную деформацию опытным путём?
10. Какая зависимость существует между упругими постоянными изотропного материала?
11. Какие деформации могут внести существенные погрешности в результате опыта?
12. Какова связь между модулем Юнга и коэффициентом жесткости проволоки?
13. Используя измеренное значение модуля Юнга, вычислите силу, необходимую для того, чтобы растянуть стержень диаметром 1 см на 0,1% длины.
14. Как нужно изменить длину стержня и его диаметр, чтобы увеличить чувствительность установки?