



*Лабораторный практикум
по ФИЗИКЕ*

Механика

Задача № 119

**ИЗУЧЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ
СВЯЗАННЫХ МАЯТНИКОВ**

Клавсюк А.Л., Салецкий А.М.,
Слепков А.И., Харабадзе Д.Э.

Москва - 2013

Цель работы

Изучение колебания системы из двух связанных одинаковых маятников, имеющей две степени свободы.

Идея эксперимента

Колебания двух одинаковых маятников при наличии динамической связи можно рассматривать как суперпозицию двух гармонических колебаний. Определяются нормальные частоты колебаний и частота биений связанных маятников.

Теория

Два математических маятника, связанных между собой пружиной, являются простейшим примером связанной системы. Каждый свободный математический маятник, как известно, обладает двумя степенями свободы, т.е. для описания его движения требуется два параметра - углы смещения в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

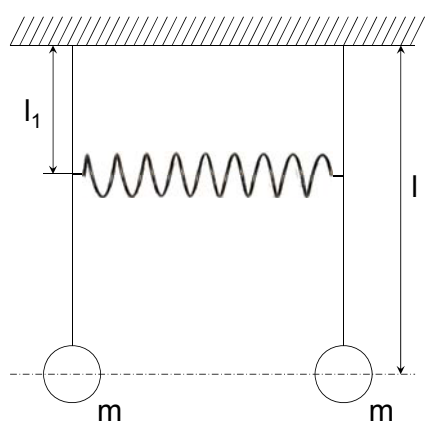


Рис. 1.1. Система из двух маятников, связанных между собой пружиной.

Система из двух маятников описывается четырьмя параметрами и, следовательно, имеет четыре степени свободы. Если колебания, соответствующие каждой из степеней свободы, независимы, то задача описания движения системы является чисто кинематической, т. е. задачей разложения сложного движения на сумму более простых движений. Если

между движениями по различным степеням свободы имеется динамическая связь, при которой

движение по одной степени свободы вызывает динамические изменения во всех остальных степенях свободы, то это приводит к обмену колебательной энергии между степенями свободы, приводя к новым физическим явлениям, отсутствующим у независимой системы.

Рассмотрим случай, когда каждый маятник имеет одну степень свободы, причем оба маятника и пружина совершают колебания в одной плоскости. Колебательная система, состоящая из двух связанных одинаковых маятников, имеет в этом случае две степени свободы (рис. 1.1). Запишем уравнение моментов для свободного математического маятника

$$J \frac{d\omega}{dt} = -mgl \sin \alpha. \quad (1)$$

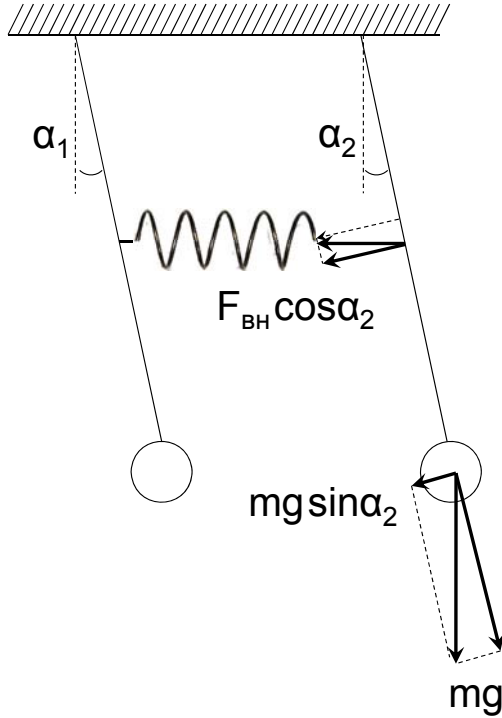


Рис. 1.2. Силы действующие на один из маятников.

где J – момент инерции, m – масса маятника, l – длина маятника, α – угол отклонения от положения равновесия. Для малых углов отклонения $\sin \alpha \approx \alpha$ с учетом $J = ml^2$ получаем уравнение гармонического осциллятора

$$ml^2 \ddot{\alpha} + mgl \alpha = 0. \quad (2)$$

или

$$\ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0, \quad (3)$$

где $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. В случае связанных маятников на каждый маятник будет действовать дополнительная сила со стороны пружины F_{BH} , которая при больших отклонениях маятников может быть рассчитана из закона Гука.

$$F_{BH} = k \Delta x = kl_1 (\alpha_2 - \alpha_1). \quad (4)$$

Эта сила создает дополнительный момент, который необходимо учитывать, и тогда, вместо (2) получаем (см. рис. 1.2) для первого и второго маятников, соответственно

$$ml^2 \ddot{\alpha}_1 = -mgl \sin \alpha_1 + F_{BH} l_1 \cos \alpha_1 \cong -mgl \alpha_1 + kl_1^2 (\alpha_2 - \alpha_1), \quad (5)$$

$$ml^2 \ddot{\alpha}_2 = -mgl \sin \alpha_2 - F_{BH} l_1 \cos \alpha_2 \cong -mgl \alpha_2 + kl_1^2 (\alpha_2 - \alpha_1), \quad (6)$$

где учтено, что при малых углах $\cos \alpha \approx 1$ и $\sin \alpha \approx \alpha$.

Из (5) и (6) получаем

$$\ddot{\alpha}_1 + \frac{g}{l} \alpha_1 - \frac{kl_1^2}{ml^2} (\alpha_2 - \alpha_1) = 0, \quad (7)$$

$$\ddot{\alpha}_2 + \frac{g}{l} \alpha_2 + \frac{kl_1^2}{ml^2} (\alpha_2 - \alpha_1) = 0. \quad (8)$$

Складывая и вычитая (7) и (8) и вводя обозначения $\Psi_1 = \alpha_1 + \alpha_2$ и $\Psi_2 = \alpha_1 - \alpha_2$, получаем

$$\ddot{\Psi}_1 + \omega_1^2 \Psi_1 = 0, \quad (9)$$

$$\ddot{\Psi}_2 + \omega_2^2 \Psi_2 = 0, \quad (10)$$

где $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ и $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2kl_1^2}{ml^2}}$.

Уравнения (9) и (10) являются уравнениями гармонического осциллятора, и их решение будет

$$\Psi_1(t) = A_0 \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \quad (11)$$

$$\Psi_2(t) = B_0 \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (12)$$

где A_0 , B_0 , φ_1 , и φ_2 определяются из начальных условий $(\Psi_1(0), \Psi_2(0), \dot{\Psi}_1(0), \dot{\Psi}_2(0))$ при $t=0$ и будут равны

$$A_0 = \sqrt{\Psi_1^2(0) + \frac{\dot{\Psi}_1^2(0)}{\omega_1^2}}; \quad B_0 = \sqrt{\Psi_2^2(0) + \frac{\dot{\Psi}_2^2(0)}{\omega_2^2}}; \quad (13)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\Psi_1(0)\omega_1}{\dot{\Psi}_1(0)}; \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\Psi_2(0)\omega_2}{\dot{\Psi}_2(0)}. \quad (14)$$

Возвращаясь к прежним координатам α_1 и α_2 и проделывая преобразования, обратные тем, при которых были получены (9) и (10), получаем

$$\alpha_1(t) = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (15)$$

$$\alpha_2(t) = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - B \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (16)$$

Таким образом, колебания каждого маятника удалось описать, при помощи суперпозиции двух гармонических колебаний Ψ_1 и Ψ_2 , которые получили название нормальных колебаний.

Амплитуды A и B и фазы φ_1 , φ_2 определяются из начальных $(\alpha_1(0), \alpha_2(0), \dot{\alpha}_1(0), \dot{\alpha}_2(0))$ условий $(t=0)$ и будут равны

$$A = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\alpha_1(0) + \alpha_2(0))^2 + \frac{(\dot{\alpha}_1(0) + \dot{\alpha}_2(0))^2}{\omega_1^2}}, \quad (17)$$

$$B = \frac{B_0}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\alpha_1(0) - \alpha_2(0))^2 + \frac{(\dot{\alpha}_1(0) - \dot{\alpha}_2(0))^2}{\omega_2^2}}, \quad (18)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{(\alpha_1(0) + \alpha_2(0))\omega_1}{\dot{\alpha}_1(0) + \dot{\alpha}_2(0)}; \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{(\alpha_1(0) - \alpha_2(0))\omega_2}{\dot{\alpha}_1(0) - \dot{\alpha}_2(0)}. \quad (19)$$

Рассмотрим конкретные примеры.

А. Пусть в начальный момент времени второй маятник находится в состоянии покоя, а первый маятник отклонен на начальный угол $\alpha_1(0)$. Тогда $\alpha_2(0) = \dot{\alpha}_2(0) = 0$; $\alpha_1(0) \neq 0$; $\dot{\alpha}_1(0) = 0$, откуда $A = \alpha_1(0)/2$; $B = \alpha_1(0)/2$; $\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_2 = \infty$; $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$. Соответственно для первого маятника получаем закон движения

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= \frac{\alpha_1(0)}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = \\ &= \alpha_1(0) \left(\cos \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \cos \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \right) \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Считая, как в нашем случае, связь достаточно слабой, т. е. считая, что $mgl \gg kl_1^2$, получаем, что $\omega_1 \approx \omega_2$ и $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \ll \omega' = (\omega_1 + \omega_2)/2$. В этом случае (20) описывает так называемые биения двух близких частот, т.е. $\alpha_1(t)$ мы можем рассматривать (см. рис. 1.3) как колебания, происходящие с периодом $T_1 = 2\pi/\omega' = 4\pi/(\omega_1 + \omega_2)$, амплитуда которого медленно (по отношению к T_1) меняется со временем от своего максимального значения до нуля по закону $|\alpha_0 \cos \Delta\omega t/2|$ с периодом $T_\delta = 2\pi/(\omega_2 - \omega_1)$ (т. е. $T_\delta \gg T_1$).

Для второго маятника, находящегося в начальный момент в покое, аналогичным образом получаем

$$\alpha_2(t) = \frac{\alpha_1(0)}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = -\alpha_1(0) \sin \frac{\Delta\omega t}{2} \sin \omega' t. \quad (21)$$

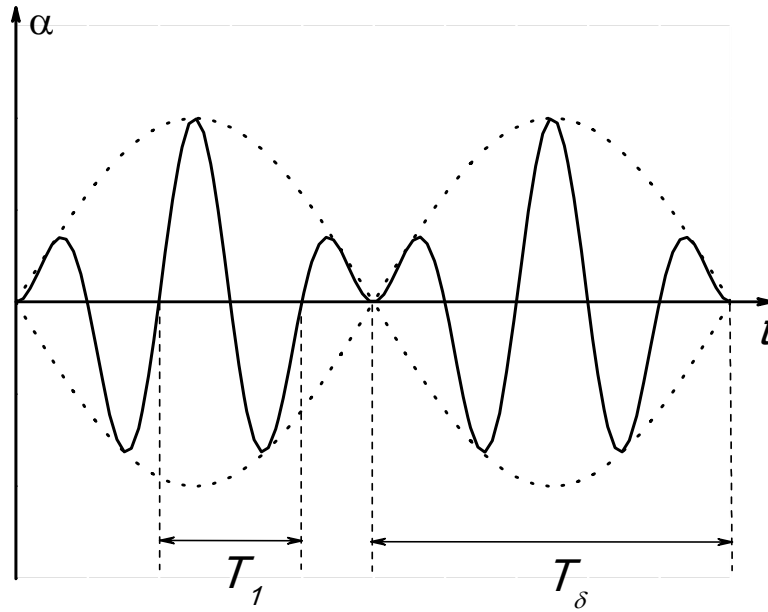


Рис. 1.3. Колебание одного из маятников при биениях.

Б. Пусть в начальный момент времени $t=0$ оба маятника отклонены от положения равновесия в одну сторону на одинаковый угол $\alpha_1(0) = \alpha_2(0)$. Тогда из начальных условий получаем $\alpha_1(0) = \alpha_2(0)$; $\dot{\alpha}_1(0) = \dot{\alpha}_2(0) = 0$ и соответственно $A = \alpha_1(0)$; $B = 0$; $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$,

$$\alpha_{1,2}(t) = \alpha_1(0) \cos \omega_1 t. \quad (22)$$

Оба маятника синхронно колеблются с первой нормальной частотой

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (23)$$

Действительно, в этом случае пружина связи не растягивается и не влияет на движение каждого маятника.

В. Оба маятника отклонены на одинаковый начальный угол $\alpha_1(0)$, но в противоположных направлениях от положения равновесия (при $t=0$). Тогда $\alpha_1(0) = -\alpha_2(0)$; $\dot{\alpha}_1(0) = \dot{\alpha}_2(0) = 0$ и $A = 0$; $B = \alpha_1(0)$; $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$,

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= \alpha_1(0) \cos \omega_2 t \\ \alpha_2(t) &= -\alpha_1(0) \cos \omega_2 t \end{aligned} \quad (24)$$

Оба маятника колеблются со второй нормальной частотой

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2kl_1^2}{ml^2}}. \quad (25)$$

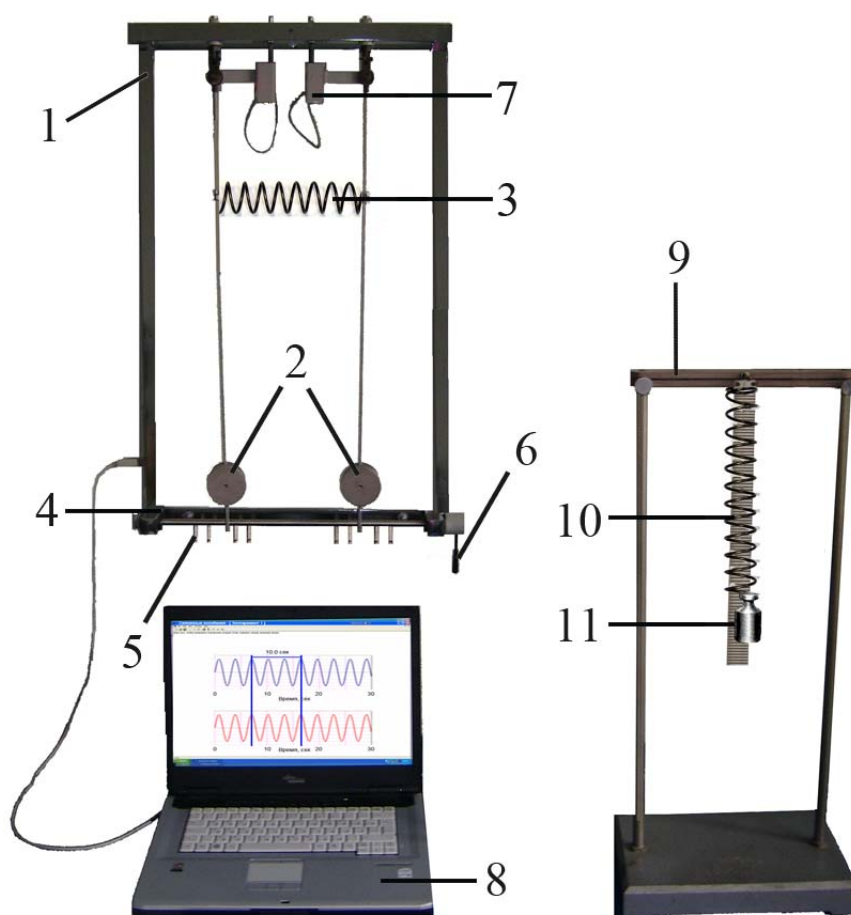


Рис. 1.4. Экспериментальная установка.

Экспериментальная установка

Установка состоит из металлической *рамы 1* (см. рис.1. 4) на которой подвешены два одинаковых *маятника 2*. Маятники состоят из длинных легких стержней, на нижнем конце которых укреплены чечевицы массы m . Верхние концы стержней маятников закреплены на *раме 1* с помощью подшипников так, что плоскость движения маятников совпадала с плоскостью рамы. На расстоянии l_1 от точки подвеса (центра подшипника) в стержнях маятника просверлены маленькие отверстия для крепления легкой *пружины связи 3*. Ниже маятников установлен специальный стартовый механизм, который позволяет плавно запускать маятник при различных начальных отклонениях от положения равновесия. Он состоит из поворачивающейся *планки 4*, на которой в разных положениях устанавливаются небольшие *стержни 5*, которые удерживают концы маятников в заданных отклоненных положениях. При по-

вороте планки 4, с помощью рычага 6 стержни 5 поворачиваются вместе с ней, освобождая концы маятников, которые начинают совершать колебания. К верхней части рамы прикреплены датчики 7, регистрирующие углы отклонения маятников. Датчики 7 соединены с компьютером, на котором в реальном времени отображаются колебания маятников.

Установка комплектуется специальным станком для определения жесткости пружин статическим методом (см. рис.1. 4), который представляет собой укрепленную вертикально на штативе 9 линейку 10 с миллиметровой шкалой и набор различных грузов 11 с известной массой.

Масса чечевицы маятника m , эффективная длина l (расстояние от точки подвеса до центра чечевицы) и расстояние l_1 известны и их величины указаны на каждой установке.

Проведение эксперимента

До выполнения работы нужно включить компьютер и войти в операционную систему как пользователь "студент", и далее на рабочем столе запустить программу "Связанные колебания" (Oscill_o2).

Упражнение 1. Определение нормальных частот колебаний системы связанных маятников из статических измерений и параметров установки.

1. На станке для определения жесткости пружин закрепить один из концов пружины.
2. К другому концу пружины прикрепить груз массой m .
3. С помощью миллиметровой шкалы измерить удлинение пружины Δx . Полученные значения m и Δx занести в таблицу 1.1.
4. Провести не менее 5–7 измерений удлинения пружины, постепенно подвешивая грузы и изменяя тем самым нагрузку.

Обработка результатов

1. Рассчитать и занести в таблицу 1.1. силу, действующую со стороны груза на пружину $F=mg$.

2. Построить график зависимости $F(\Delta x)$. Убедиться, что эта зависимость является линейной. С помощью метода наименьших квадратов (МНК) определить коэффициент наклона, который является коэффициентом жесткости пружины. Программа МНК имеется на компьютерах.

3. По формулам (23) и (25) рассчитать значения нормальных частот колебаний системы связанных маятников, а так же рассчитать значение величины $\omega_1^2 - \omega_2^2 = 2kl_1^2/ml^2$.

4. Оценить погрешность полученных в п. 3 величин.

Таблица 1.1

N	$\Delta x, \text{м}$	$m, \text{кг}$	$F, \text{Н}$
1			
2			
...			

Упражнение 2. Определение первой нормальной частоты колебаний системы связанных маятников.

1. Первоначально определяются периоды, нормальных колебаний каждого маятника в отдельности (при отсутствии пружины). Для этого оба маятника отклоняют от положения равновесия в одну сторону на равный угол, поставив маятники в пазы пускового устройства.

2. Нажать левую клавишу мыши, установив курсор мыши в окно "эксперимент".

3. Опустите вниз рычаг пускового устройства. После чего в окне "эксперимент" начнут отображаться колебания маятников. Вверху отображаются колебания маятника, расположенного слева, а внизу правого (см. рис.1.5).

4. Дождитесь нужного количества (20-30) колебаний.

5. Нажмите левую клавишу мыши, установив курсор мыши в окно "эксперимент".

6. Подведите курсор мыши к первой границе измеряемого интервала и нажмите левую клавишу мыши. После чего появится первая вертикальная линия.

7. Подведите курсор мыши ко второй границе измеряемого интервала и нажмите левую клавишу мыши. После чего появится вторая вертикальная линия и значение временного интервала между двумя вертикальными линиями (см. рис.1.5).

8. Запишите полученные значения временного интервала Δt и количество колебаний n в таблицу 1.2.

9. Для проведения нового эксперимента нажмите на иконку с изображением чистого листа (новый). Либо нажмите Ctrl+N на клавиатуре.

10. Повторить п. 1 – п. 8 3-4 раза.

11. Прикрепить пружину, связав два маятника и повторить п. 1 – п. 10.

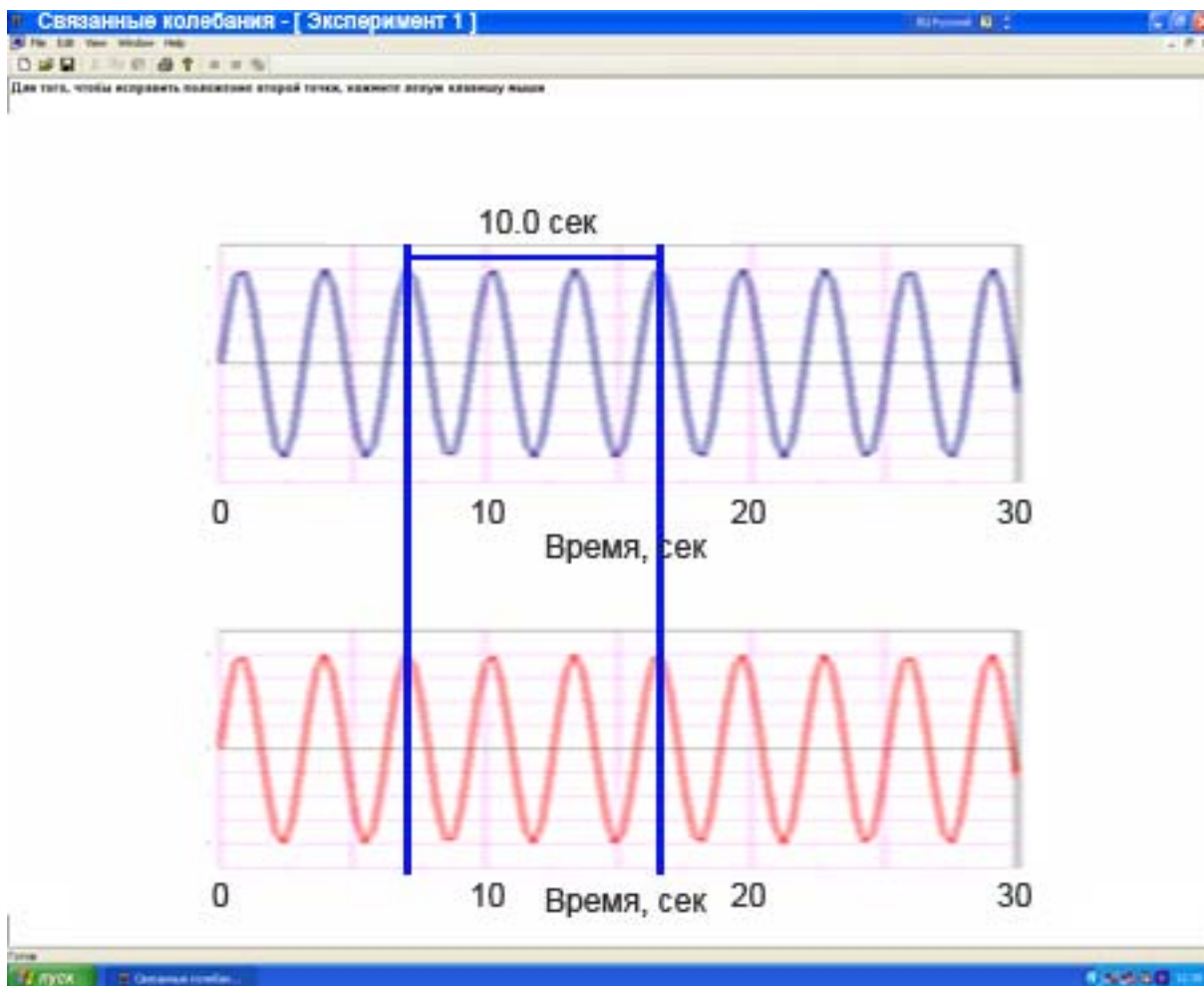


Рис. 1.5. Рабочая область экрана, окно "эксперимент".

Обработка результатов

1. Для каждого измерения вычислить период колебаний $T_i = \Delta t_i/n$ и занести в таблицу 1.2.
2. Вычислить и занести в таблицу 1.2. среднее значение периода T . Убедится, что периоды обоих маятников совпадают.
3. По среднему значению периода T_1 определяется первая нормальная частота $\omega_1 = 2\pi/T_1$.
4. Оценить погрешность измерения периодов и частот.

Таблица 1.2

Без пружины					
	N	n	$\Delta t_i, \text{с}$	$T_i, \text{с}$	$\langle T_1 \rangle, \text{с}$
Первый маятник	1				

	2				
	3				
Второй маятник	1				
	2				
	3				
С пружиной					
	N	n	$\Delta t_i, \text{ с}$	$T_i, \text{ с}$	$\langle T_1 \rangle, \text{ с}$
Первый маятник	1				
	2				
	3				
Второй маятник	1				
	2				
	3				

Упражнение 3. Определение второй нормальной частоты колебаний системы связанных маятников.

1. Оба маятника отклоняют на равный начальный угол, но в противоположных направлениях от положения равновесия, поставив маятники в пазы пускового устройства.

2. Нажмите на иконку с изображением чистого листа (новый). Либо нажмите Ctrl+N на клавиатуре.

3. Опустите вниз рычаг пускового устройства. После чего в окне "эксперимент" начнут отображаться колебания маятников.

4. Дождитесь нужного количества (20-30) колебаний.

5. Нажмите левую клавишу мыши, установив курсор мыши в окно "эксперимент".

6. Подведите курсор мыши к первой границе измеряемого интервала и нажмите левую клавишу мыши. После чего появится первая вертикальная линия.

7. Подведите курсор мыши ко второй границе измеряемого интервала и нажмите левую клавишу мыши. После чего появится вторая вертикальная линия и значение временного интервала между двумя вертикальными линиями.

8. Запишите полученные значения временного интервала Δt и количество колебаний n в таблицу 1.3.

9. Повторить п. 1 – п. 8 3-4 раза.

Обработка результатов

1. Для каждого измерения вычислить период колебаний $T_i = \Delta t_i / n$ и занести в таблицу 1.3.

2. Вычислить и занести в таблицу 1.3. среднее значение периода T . Убедитесь, что периоды обоих маятников совпадают.

3. По среднему значению периода T_2 определяется вторая нормальная частота $\omega_2 = 2\pi / T_2$.

4. Оценить погрешность измерения периодов и частот.

Таблица 1.3

	N	n	$\Delta t_i, \text{с}$	$T_i, \text{с}$	$\langle T_2 \rangle, \text{с}$
Первый маятник	1				
	2				
	3				
Второй маятник	1				
	2				
	3				

Упражнение 4. Определение частоты биений системы связанных маятников.

1. Один маятник отклоняют на начальный угол, поставив маятник в паз пускового устройства, второй маятник находится в состоянии покоя.

2. Нажмите на иконку с изображением чистого листа (новый). Либо нажмите Ctrl+N на клавиатуре.

3. Опустите вниз рычаг пускового устройства. После чего в окне "эксперимент" начнут отображаться колебания маятников.

4. Дождитесь нужного количества колебаний (один два периода биений).
5. Нажмите левую клавишу мыши, установив курсор мыши в окно "эксперимент".
6. Подведите курсор мыши к первой границе измеряемого интервала и нажмите левую клавишу мыши. После чего появится первая вертикальная линия.
7. Подведите курсор мыши ко второй границе измеряемого интервала и нажмите левую клавишу мыши. После чего появится вторая вертикальная линия и значение временного интервала между двумя вертикальными линиями.
8. Запишите полученные значения периода биений T_{δ} (см. рис.1.3) в таблицу 1.4.
9. Повторить п. 1 – п. 8 3-4 раза.

Обработка результатов

1. Вычислить и занести в таблицу 1.4. среднее значение периода биений T_{δ} .
2. По среднему значению периода T_{δ} определяется частота биений $\omega_{\delta}=2\pi/T_{\delta}$.
3. Оценить погрешность измерения периода и частоты биений.
4. Сравнить полученное значение частоты биений со значением, полученным в первом упражнении.

Таблица 1.4

	N	$T_{\delta}, \text{с}$	$\langle T_{\delta} \rangle, \text{с}$
Первый маятник	1		
	2		
	3		
Второй маятник	1		
	2		
	3		

Основные итоги работы

В результате выполнения работы должны быть представлены значения ω_1 , ω_2 , $\omega_1^2 - \omega_2^2 = 2kl_1^2/ml^2$ и сравнение с ними величин, вычисленных из статических измерений и параметров установки.

Контрольные вопросы

1. Что такое классический гармонический осциллятор?
2. Сколько степеней свободы имеет каждый из маятников?
3. Получить выражения для нормальных частот.
4. При каких условиях в системе из двух связанных одинаковых маятников, имеющих только две степени свободы, возникают биения?

Литература

1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. - М.: Изд. дом «Оникс 21 век», 2003.
2. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Механика.- М.: Изд. Центр «Академия», 2004.
3. Стрелков С.П. Механика. - СПб.: «Лань», 2005.
4. Сивухин Д.В. Общий курс физики, т.1. Механика. М. Наука, 1989.