

## СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

### Цель работы

Изучение свободных и вынужденных колебаний в системе с одной степенью свободы.

### Идея эксперимента

Используется пружинный маятник, тело которого обладает магнитными свойствами и движется в вязкой среде, а внешняя вынуждающая сила создается с помощью переменного магнитного поля. Для анализа движения маятника используется пьезоэлектрический датчик, управление экспериментом и обработка результатов производится с помощью ЭВМ.

### Теоретическое введение

Уравнение колебаний. Колебания широко распространены в природе. В общем случае под колебаниями понимают движения, в той или иной степени повторяющиеся во времени. По физической природе колебательные процессы разделяют на *механические*, *электромагнитные*, *электро-механические* и т.д. Особую роль в физике играют механические и электромагнитные колебания. С помощью распространяющихся колебаний плотности и давления воздуха (воспринимаемых как звук) и с помощью распространяющихся электромагнитных колебаний (свет) мы получаем большую часть информации об окружающем мире.

Несмотря на различную физическую природу колебаний, их можно описать одинаковыми уравнениями. Если физическая величина  $x(t)$  изменяется со временем по гармоническому закону

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1)$$

колебания называют *гармоническими*. Здесь  $A$  — амплитуда колебаний;  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  — круговая частота ( $T$  — период);  $t$  — время;  $\varphi_0$  — начальная фаза. Функция  $x(t)$  из (1) представляет решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2)$$

называемого *уравнением свободных колебаний*.

Если уравнения, описывающие колебания, имеют вид линейных дифференциальных уравнений, колебания называются *линейными*. В реальной системе это соответствуют тем случаям, когда все возникающие силы можно считать линейными функциями координат и скоростей.

Физическую систему, выведенную из состояния равновесия и предоставленную самой себе, в которой изменение одного из параметров  $x$  описывается дифференциальным уравнением (2), называют *классическим гармоническим осциллятором*.

Колебания можно разделить на *собственные* и *вынужденные*. В первом из них за счет внешней силы система выводится из состояния устойчивого равновесия, т.е. ей сообщается некоторое достаточное количество энергии, после чего внешние силы полностью отключаются. В этом случае возникают колебания, которые называются *собственными* колебаниями системы. Если же на систему постоянно действует внешняя сила, то происходят так называемые *вынужденные* колебания.

Рассмотрим колебания гармонического осциллятора на примере пружинного маятника.

Собственные колебания пружинного маятника. Пружинный маятник состоит из тела массы  $m$  и легкой пружины с коэффициентом жесткости  $k$  (рис. 1, а). В общем случае движение пружинного маятника в поле силы тяжести довольно сложно и описывается большим числом степеней свободы. Практический интерес, однако, представляют колебания с одной степенью свободы, когда движение маятника происходит вдоль вертикальной оси. Для возбуждения таких колебаний можно немного растянуть пружину, а затем отпустить маятник (рис. 1 б, в). В этом случае для полного описания колебаний необходимо знать поведение

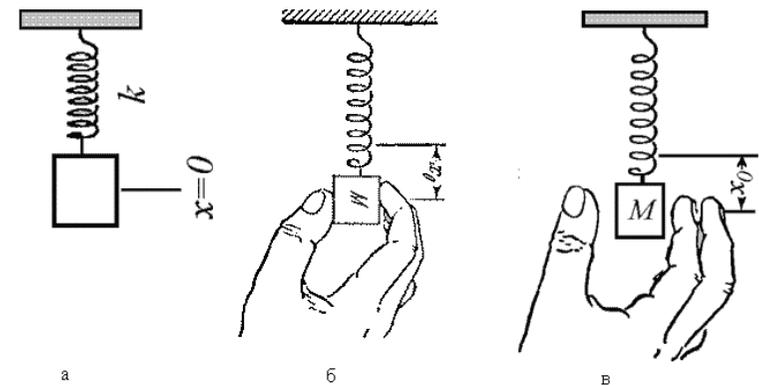


Рис. 1. Вертикальные колебания пружинного маятника

только одной переменной, например, вертикальной координаты центра масс тела маятника. На тело, подвешенное на пружине в поле силы тяжести действуют две силы (без учета сил трения): сила тяготения и упругая сила. Начало

координат выберем таким образом, чтобы при  $x=0$  масса  $m$  находилась в равновесии. При этом сила тяжести  $mg$  будет скомпенсирована некоторым начальным растяжением пружины и в дальнейшем рассмотрении участвовать не будет.

При отклонении тела от точки равновесия будет возникать возвращающая сила  $F(x)$ . Рассмотрим *малые* колебания пружинного маятника. Колебания пружинного маятника называют малыми, если сила, возникающая при смещении грузика от положения равновесия, пропорциональна его смещению и направлена в сторону положения равновесия. Для пружинного маятника условия малости колебаний удовлетворяются при смещениях, создающих возвращающую силу у пружины в пределах применимости закона Гука. Уравнение движения пружинного маятника при этом имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx. \quad (3)$$

Сравнивая с (2), имеем

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (4)$$

В реальных осцилляторах, за счет сил трения, происходит рассеяние (диссипация) запасенной энергии, в результате чего свободные колебания со временем затухают. При движении тела пружинного маятника в вязкой среде, с небольшими скоростями сила трения пропорциональна скорости  $F_{mp} = -h\nu$ , где  $h$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от размеров и формы тела, свойств его поверхности и среды. При учете диссипации энергии в уравнении движения необходимо добавить силу трения, и уравнение колебаний будет

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (5)$$

Решение этого уравнения имеет вид затухающих колебаний

$$X_1(t) = X_{10} e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_{01}), \quad (6)$$

где  $X_{10}$ ,  $\varphi_{01}$  — начальная амплитуда и фаза колебаний,  $\omega$  — частота затухающих колебаний,  $\gamma$  — коэффициент затухания. Действительно, подставим (6) в (5) и получим:

$$\cos(\omega t + \varphi_{01}) \left( \gamma^2 - \omega^2 - \frac{h}{m} \gamma + \omega_0^2 \right) + \sin(\omega t + \varphi_{01}) \left( \frac{h}{m} \omega - 2\omega\gamma \right) = 0. \quad (7)$$

Отсюда следует, что (6) является решением (5) при условии

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{h}{m}; \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2.$$

Обратите внимание: частота затухающих колебаний отличается от частоты собственных  $\omega_0$ .

Используя полученный результат, уравнение колебаний удобно записать в виде:

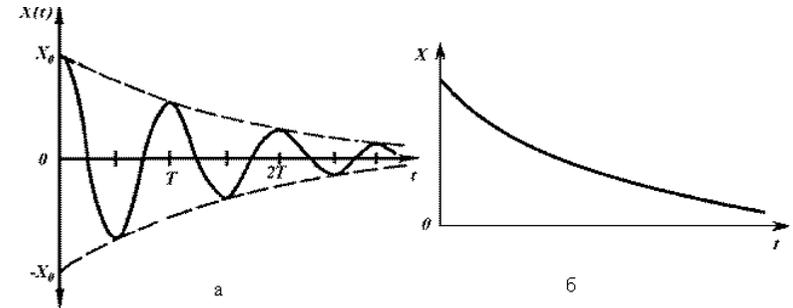


Рис. 2 Зависимость амплитуды колебаний пружинного маятника  $X_1$  от времени с учетом диссипации энергии для случая малых коэффициентов затухания (а) и для случая  $\gamma \geq \omega_0$  (б)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (9)$$

Отклонение маятника от положения равновесия в зависимости от времени в соответствии с (6) имеет вид, показанный на рис. 2,а. Для малых декрементов затухания колебания близки к гармоническим, при больших  $\gamma$  затухание происходит за 1–2 периода. В том случае, когда  $\gamma \geq \omega_0$ , значение частоты  $\omega$  становится мнимым и гармонические колебания не реализуются, происходит аperiодический процесс — тело маятника после начального отклонения плавно возвращается в положение равновесия (см. рис. 2,б). При этом величина  $\frac{1}{\gamma}$  равна времени, за которое амплитуда колебаний затухает в  $e$  раз. Затухание колебаний за период носит название логарифмического декремента затухания  $\theta$ , его можно определить из соотношения

$$\theta = \ln \frac{X_n}{X_{n+1}} = \gamma T, \quad (10)$$

где  $\frac{X_n}{X_{n+1}}$  — отношение амплитуд двух последовательных колебаний.

Вынужденные колебания пружинного маятника. Рассмотрим теперь колебания пружинного маятника, которые возникают под действием внешней периодической силы  $F_{вн}(t) = f_0 \cos pt \neq 0$  в системе с одной степенью свободы. Вынужденные колебания в случае гармонического воздействия описываются уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f \cos(pt), \quad (11)$$

где  $f = \frac{f_0}{m}$  — нормированная амплитуда, а  $p$  — частота вынуждающей силы. Решение уравнения (11) имеет вид

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t), \quad (12)$$

где  $X_1(t)$  соответствует затухающим собственным колебаниям (см. уравнение (6)), а  $X_2(t)$  — вынужденным колебаниям на частоте вынуждающей силы:

$$X_2(t) = X_{20} \cos(p t + \varphi(p)), \quad (13)$$

где

$$X_{20}(p) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\gamma^2 p^2}} \quad (14)$$

— зависящая от частоты амплитуда вынужденных колебаний,

$$\operatorname{tg} \varphi(p) = - \left[ \frac{2p\gamma}{\omega_0^2 - p^2} \right] \quad (15)$$

— фаза колебаний.

Величина  $\varphi$  в данном случае представляет собой отставание по фазе вынужденного колебания от обуславливающей его вынуждающей силы.

Выражения для амплитуды и фазы колебаний  $X_2(t)$ , так же, как и для свободных колебаний, можно определить непосредственной подстановкой (13) в (14). При малых декрементах затухания на частотах вблизи частоты  $p \approx \omega_0$  свободных коле-

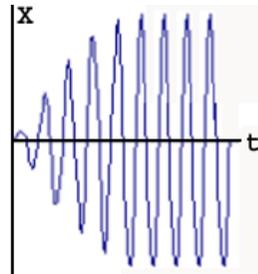


Рис. 3. Зависимость амплитуды  $X$  при установлении колебаний от времени  $t$  ( $p \approx \omega_{рез}$ )

баний маятника амплитуда колебаний резко возрастает. Это явление получило название резонанса. Более точно значение резонансной частоты  $\omega_{рез}$  можно получить из (14), проводя исследование функции на экстремум:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}. \quad (16)$$

Слагаемое  $X_1(t)$  играет заметную роль только в начальной стадии процесса, при установлении колебаний (рис. 3). С течением времени из-за экспоненциального множителя  $e^{-\gamma t}$  роль слагаемого  $X_1(t)$  уменьшается и через некоторое время им можно пренебречь, сохраняя в решении только слагаемое

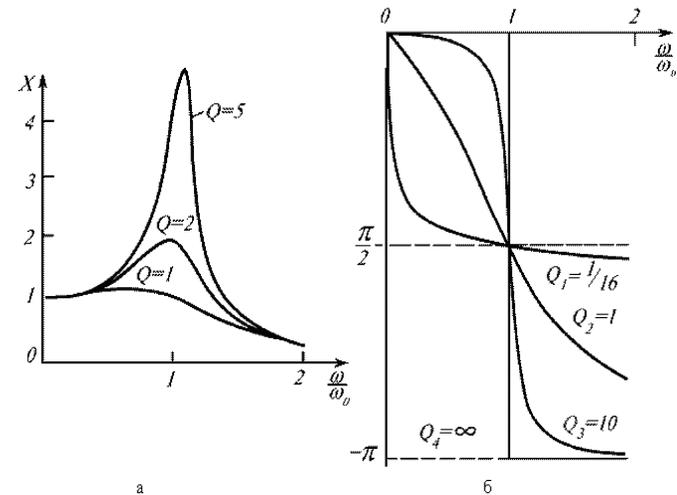


Рис. 4. Типичные амплитудно-частотные (а) и фазо-частотные характеристики пружинного маятника (б)

$X_2(t)$ .

Типичные амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики показаны на рис. 4.

Вместе с логарифмическим декрементом затухания  $\theta$  широко пользуются величиной  $Q$ , которая называется добротностью системы  $Q$ . Она определяется как отношение амплитуды смещения при резонансе ( $p = \omega_0$ )  $X_{2рез}$  к амплитуде смещения  $X_{2ст}$  при  $p \rightarrow 0$ . Учитывая определения коэффициента затухания, логарифмического декремента затухания, а также соотношение (14), получаем

$$Q = \frac{X_{2\text{рез}}}{X_{2\text{ст}}} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{2\pi}{2\gamma T} = \frac{\pi}{\theta}. \quad (17)$$

Можно показать, что в случае  $Q \gg 1$  добротность можно выразить также через полуширину резонансной кривой (см. рис. 5):

$$Q = \frac{\omega_{\text{рез}}}{\omega_2 - \omega_1}. \quad (18)$$

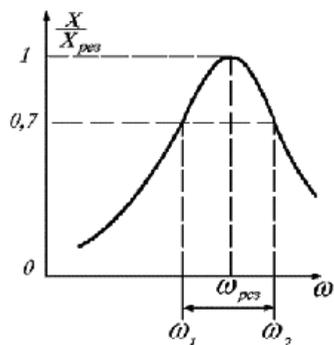


Рис. 5. Резонансная кривая для пружинного маятника

### Экспериментальная установка

Исследование колебаний маятника проводится на установке, схема которой приведена на рис. 6. Установка состоит из пружинного маятника, системы регистрации колебаний на основе *пьезоэлектрического датчика*, системы возбуждения вынужденных колебаний, а также системы обработки информации на *персональном*

*компьютере* (ПК). Исследуемый пружинный маятник состоит из стальной пружины с коэффициентом жесткости  $k$  и тела маятника, в центре которого вмонтирован постоянный магнит. Движение маятника происходит в жидкости и при небольших скоростях колебаний возникающая сила трения может быть с достаточной точностью аппроксимирована линейным законом, т.е.

$$F = -hx' = -h\dot{v}.$$

Для регистрации колебаний используется *пьезоэлектрический датчик*, к которому подвешена пружина маятника. Во время движения маятника сила упругости пропорциональна смещению  $x$ .

Так как ЭДС, возникающая в *пьезодатчике*, в свою очередь пропорциональна силе давления, то сигнал, получаемый с датчика будет пропорционален смещению тела маятника от положения равновесия.

Возбуждение колебаний осуществляется с помощью магнитного поля. Гармонический сигнал, создаваемый ПК, усиливается и подается на *электромагнит*, расположенный под телом маятника. В результате этого вокруг *электромагнита* переменное во времени и неоднородное в пространстве

магнитное поле. Это поле действует на постоянный магнит, вмонтированный в тело маятника и создает внешнюю периодическую силу.

Система обработки информации состоит из *блока сопряжения с ПК* (аналого-цифрового преобразователя) и *персонального компьютера*. Аналоговый сигнал с пьезоэлектрического датчика с помощью аналого-цифрового преобразователя представляется в цифровом виде и подается на ПК. Установка снабжена также *устройством для статических измерений жесткости пружины*. На исследуемую пружину могут подвешиваться грузы различной мас-

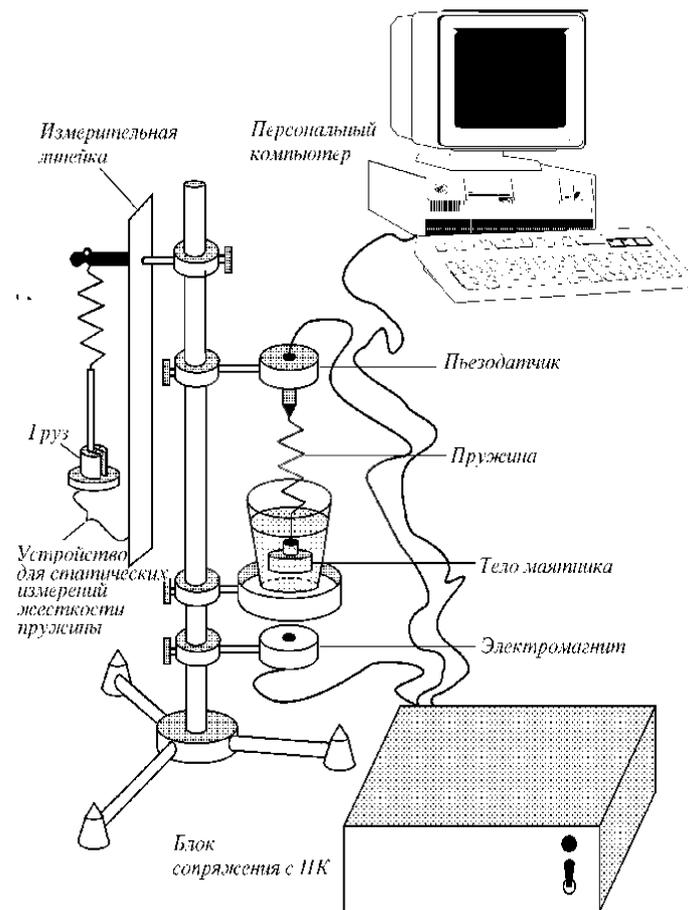


Рис. 6. Блок-схема экспериментальной установки

сы. Для регистрации растяжения пружины используется *измерительная линейка*.

### Управление экспериментальной установкой с помощью ЭВМ

После включения компьютера и загрузки программы на экране монитора появляется меню, общий вид которого показан на рис. 7. Используя клавиши управления курсором  $\rightarrow$ ,  $\leftarrow$ ,  $\uparrow$ ,  $\downarrow$ , можно выбрать один из пунктов меню. После нажатия кнопки ENTER компьютер приступает к выполнению выбранного режима работы. Простейшие подсказки по выбранному режиму работы содержатся в выделенной строке внизу экрана.

*Рассмотрим возможные режимы работы программы:*

**Статика** — этот пункт меню используется для обработки результатов первого упражнения (см. рис. 7). После нажатия на кнопку ENTER компьютер запрашивает массу груза маятника. После следующего нажатия кнопки ENTER на экране появляется новая картинка с мигающим курсором. Последовательно записывают на экране массу груза в граммах и, после нажатия пробела, величину растяжения пружины. Нажав на ENTER, переходят на новую строку и снова записывают массу груза и величину растяжения пружины. Допускается редактирование данных в пределах последней строки. Для этого, нажав клавишу Backspace, удаляют неправильное значение массы или

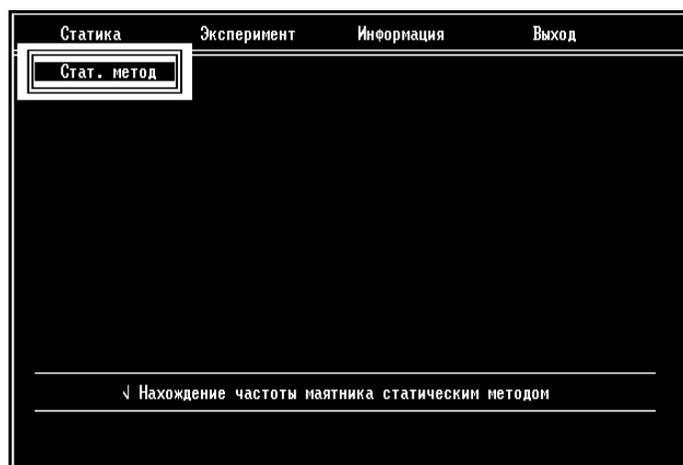


Рис. 7. Вид меню для управления экспериментальной установкой на экране компьютера

растяжения пружины и записывают новое значение. Для изменения данных в других строках необходимо последовательно нажать Esc и ENTER, а затем повторить набор результатов.

После набора данных нажимают на функциональную клавишу F2. На экране появляются рассчитанные с помощью метода наименьших квадратов значения коэффициента жесткости пружины и частоты свободных колебаний маятника. После нажатия ENTER на экране появляется график зависимости упругой силы от величины растяжения пружины. Возврат в основное меню происходит после нажатия любой клавиши.

**Эксперимент** — этот пункт имеет несколько подпунктов (рис. 8). Рассмотрим особенности работы каждого из них. Частота — в этом режиме с помощью клавиш управления курсором осуществляется задание частоты вынуждающей силы. В том случае, если проводится эксперимент со свободными колебаниями, то необходимо установить значение частоты, равное 0.

**Старт** — в этом режиме после нажатия кнопки ENTER программа начинает снимать экспериментальную зависимость отклонения маятника от вре-



Рис. 8. Вид меню для проведения эксперимента

мени. В том случае, когда частота вынуждающей силы не равна нулю, то наряду с графиками зависимостей отклонения маятника и вынуждающей силы от времени на экране в отдельных окошках записываются значения частоты вынуждающей силы и ее амплитуды, а также измеренных частоты и амплитуды колебаний маятника. Нажав на клавишу Esc можно выйти в основное меню.

**Сохранить** — если результат эксперимента удовлетворителен, то его можно сохранить, нажав на соответствующую клавишу меню.

**Нов. серия** — этот пункт меню используется в том случае, если возникла необходимость отказаться от данных текущего эксперимента. После нажатия клавиши ENTER в этом режиме из памяти машины стираются результаты всех предыдущих экспериментов, и можно начать новую серию измерений.

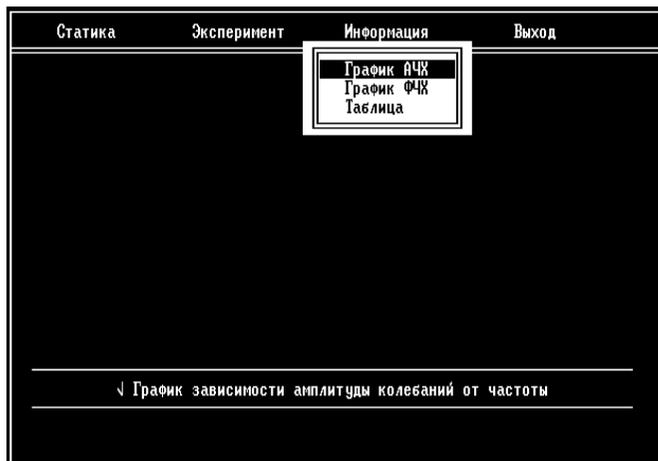


Рис. 9. Вид меню в режиме «Информация»

После проведения эксперимента переходят в режим **Информация**. Этот пункт меню имеет несколько подпунктов (рис. 9).

**График АЧХ** — этот пункт меню используется после окончания эксперимента по изучению вынужденных колебаний. На экране монитора строится амплитудно-частотная характеристика вынужденных колебаний.

**График ФЧХ** — в этом режиме после окончания эксперимента по изучению вынужденных колебаний на экране монитора строится фазо-частотная характеристика.

**Таблица** — этот пункт меню позволяет выдать на экран монитора значения амплитуды и фазы колебаний в зависимости от частоты вынуждающей силы. Эти данные переписываются в тетрадь для отчета по данной работе.

Пункт меню компьютера **Выход** — окончание работы программы (см. например, рис. 9).

## Проведение эксперимента

### Упражнение 1. Определение коэффициента жесткости пружины статическим методом

Измерения проводятся путем определения удлинения пружины под действием грузов с известными массами. Рекомендуется провести не менее 7–10 измерений удлинения пружины, постепенно подвешивая грузы и изменяя тем самым нагрузку от 20 до 150 г. Используя пункт меню работы программы **Статика**, результаты этих измерений заносят в память компьютера и определяют коэффициент жесткости пружины, используя метод наименьших квадратов. В ходе выполнения упражнения необходимо рассчитать значение собственной частоты колебаний маятника

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (19)$$

Отчет по первому упражнению должен содержать таблицу зависимости удлинения пружины  $x$  от массы подвешиваемых грузов  $M$ , график этой зависимости (см. рис. 10), рассчитанные значения  $k$ ,  $\omega$  и их погрешности.

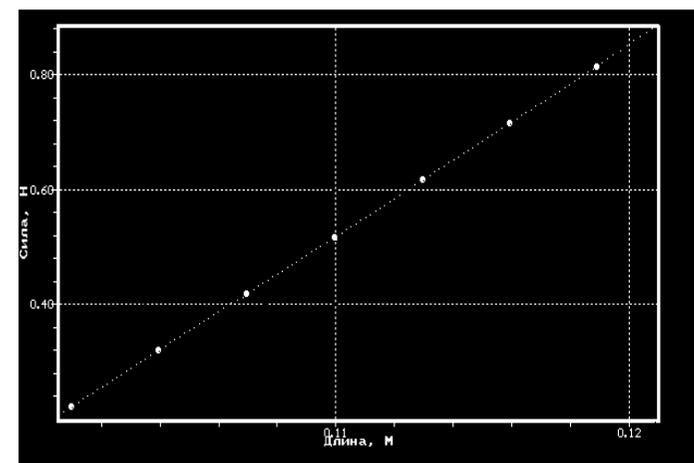


Рис. 10. График зависимости удлинения пружины  $x$  от массы груза  $M$

### Упражнение 2. Определение частоты свободных колебаний пружинного маятника и коэффициента затухания.

Для выполнения этого упражнения выбранный маятник подвешивают на установку. Устанавливают зазор между маятником и дном стакана около 1 см. Во время выполнения упражнения в пункте меню **Частота** (см. рис. 11) устанавливается значение частоты, равное нулю. После этого нажимают кнопку **Старт** в меню программы. При этом на маятник с персонального компьютера импульсно падает возбуждающее воздействие. Через некоторое время на экране монитора строится зависимость смещения затухающих колебаний от времени и выводятся результаты расчета частоты и коэффициента затухания (рис. 12). Измерения проводят 5–7 раз. Условно считая эти измерения прямыми, находят значения частоты и коэффициента затухания для собственных колебаний пружинного маятника, а также погрешности их

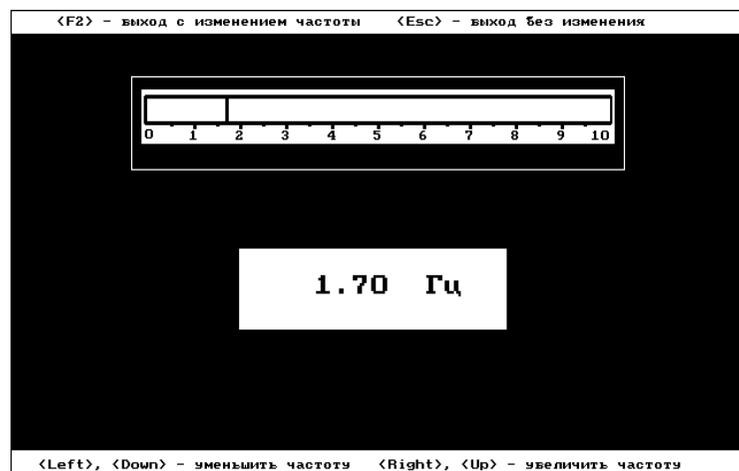


Рис. 11 Панель управления частотой генератора экспериментальной установки

определения. Проводят сравнение частоты собственных колебаний со значением, найденным из первого упражнения по формуле (19). Отчет по этому упражнению должен содержать таблицу результатов измерений значений частоты и коэффициента затухания для собственных колебаний, средние значения этих величин и их стандартные отклонения.

### Упражнение 3. Изучение вынужденных колебаний пружинного маятника

Целью этого упражнения является снятие амплитудно-частотной (АЧХ) и фазо-частотной (ФЧХ) характеристик вынужденных колебаний. При снятии



Рис. 12. Зависимость амплитуды затухающих колебаний пружинного маятника от времени

частотных характеристик, пользуясь пунктом меню **Частота**, выбирают значение частоты  $\nu$ . Частоту выбирают таким образом, чтобы  $|\nu - \nu_0| < 0,3$  Гц, где  $\nu_0$  — частота собственных колебаний, найденная из второго упражнения. Уменьшение частоты генератора осуществляется стрелками «вниз» (с шагом 0,5 Гц) и «влево» (с шагом 0,05 Гц), а увеличение частоты — стрелками «вверх» (с шагом 0,5 Гц) и «вправо» (с шагом 0,05 Гц). Амплитуда вынужденных колебаний маятника в этом диапазоне частот должна быть не менее 2–5 мм. При снятии АЧХ и ФЧХ следует помнить, что в системе могут одновременно возбуждаться собственные и вынужденные колебания, поэтому при изменении частоты генератора каждый раз нужно выждать некоторое время  $dt$ , чтобы собственные колебания маятника успевали затухнуть. Значение времени  $dt$  в секундах следует определить по формуле:

$$dt \approx 3 \cdot (1/\gamma), \quad (20)$$

где  $\gamma$  — коэффициент затухания, найденный из второго упражнения. Для определения амплитуды и фазы вынужденных колебаний при заданной частоте следует выбрать пункт меню **Старт** и нажать кнопку ENTER. На экране монитора при этом выводятся зависимости вынуждающей силы и скорости маятника от времени, а также результаты расчета амплитуды и частоты вынуждающей силы, амплитуды, частоты и фазы колебаний маятника (рис. 13). В том случае, когда относительная разность между значениями частоты вынуждающей силы и частоты генератора не превышает величины одного процента, можно считать, что собственные колебания затухли. Эти результаты следует запомнить, нажав **ENTER** в режиме **Сохранить**.

Снимать амплитудно-частотную и фазо-частотные характеристики следует тщательно, особенно в области резкого изменения амплитуды и фазы. Для этого следует менять частоту возбуждающей силы каждый раз не более чем на 0,05 Гц. Рассчитанные на компьютере значения амплитуды и фазы колебаний следует занести в таблицу, а затем по этим данным построить графики. Используя пункты меню **График АЧХ** и **График ФЧХ**, можно просмотреть на экране монитора АЧХ и ФЧХ (рис. 14 и 15).

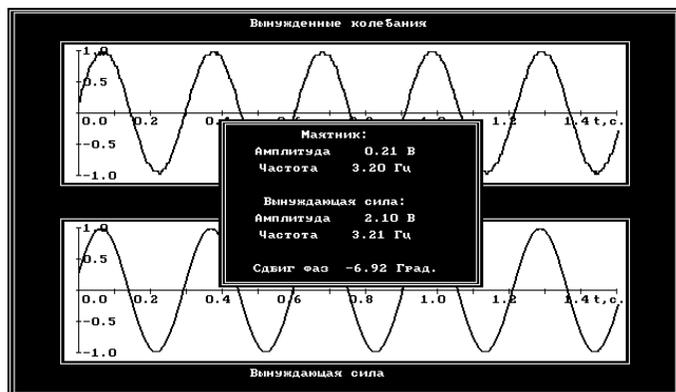


Рис. 13 Зависимость вынуждающей силы и амплитуды вынужденных колебаний пружинного маятника от времени

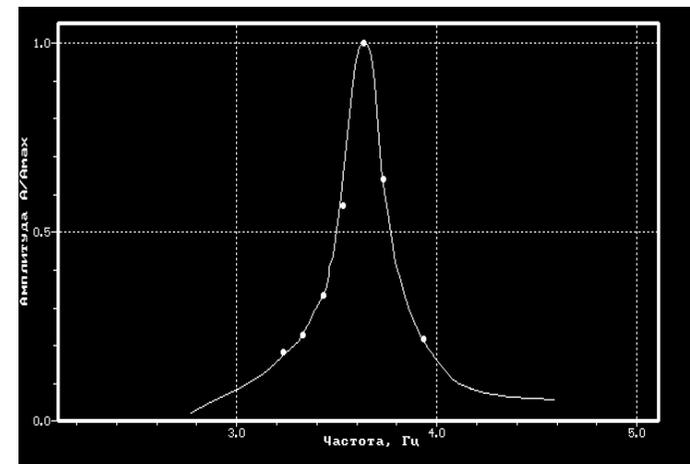


Рис. 14. Амплитудно-частотная характеристика пружинного маятника

Используя фазо-частотную характеристику, следует определить коэффициент затухания (вывод формулы см. в приложении):

$$\gamma = - \left[ \frac{360}{d\varphi/d\nu} \right],$$

а также значение добротности по формуле

$$Q = 2\pi \frac{\nu_{\text{рез}}}{2\gamma},$$

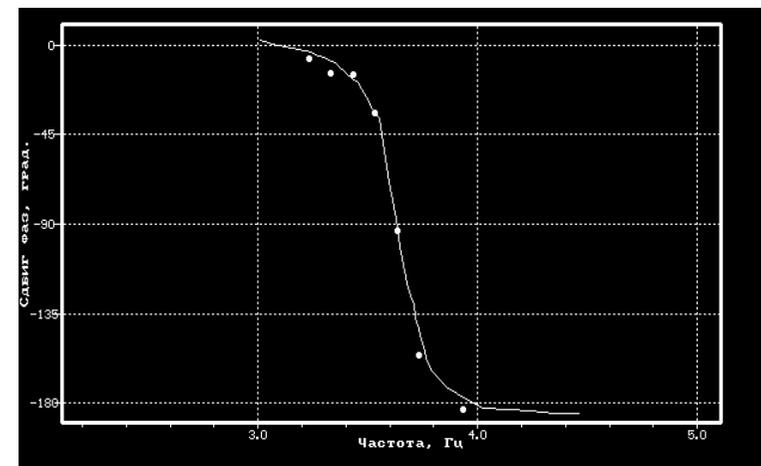


Рис. 15. Фазо-частотная зависимость пружинного маятника

где  $\nu_{\text{рез}}$  — резонансная частота.

Полученное значение коэффициента затухания следует сравнить с  $\gamma$ , найденным во втором упражнении. Значение добротности можно также оценить по АЧХ. Измерив ширину резонансной кривой  $\Delta\nu$  на уровне значения амплитуды, равного  $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$  от значения амплитуды при резонансе ( $\nu = \nu_{\text{рез}}$ ), получают оценку добротности  $Q$  (справедливую при малом затухании, когда  $\Delta\nu \ll \nu$ ):

$$Q = \frac{\nu_{\text{рез}}}{\Delta\nu}.$$

Отчет по третьему упражнению должен содержать таблицу зависимостей амплитуды и фазы колебаний от частоты, АЧХ и ФЧХ, а также результаты расчета  $\gamma$  и  $Q$ .

### Основные итоги работы

*В результате работы должны быть определены собственная частота колебаний пружинного маятника, декремент затухания и получены его амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики.*

### Контрольные вопросы

1. Что такое классический гармонический осциллятор?
2. Показать, что постоянная сила тяжести не влияет на частоту колебаний пружинного маятника.
3. На какой частоте происходят колебания пружинного маятника при наличии затухания?
4. На какой частоте происходят вынужденные колебания маятника?
5. Что такое коэффициент затухания, добротность?
6. На каких частотах наблюдаются резонансы смещения и скоростей?

### Приложение

#### Расчет коэффициента затухания по ФЧХ

Известно, что сдвиг фазы  $\phi$  вынужденных колебаний зависит от частоты  $p$  и коэффициента затухания  $\gamma$  следующим образом:

$$\text{tg } \phi(p) = - \left[ \frac{2p\gamma}{\omega_0^2 - p^2} \right],$$

(п.1)

дифференцируя по частоте  $p$  обе части (п.1) получаем:

$$\frac{d\phi}{dp} = - \frac{2\gamma}{\omega_0^2 - p^2} - 2p \frac{2p\gamma}{(\omega_0^2 - p^2)^2}. \quad (\text{п.2})$$

Так как  $\frac{1}{\cos^2 \phi} = 1 + \text{tg}^2 \phi$ , то, используя (п.1), имеем:

$$\frac{d\phi}{dp} \left[ \frac{(\omega_0^2 - p^2)^2 + (2p\gamma)^2}{(\omega_0^2 - p^2)^2} \right] = - \left[ \frac{2\gamma(\omega_0^2 + p^2)}{(\omega_0^2 - p^2)^2} \right]. \quad (\text{п.3})$$

В точке  $p = \omega_0$  получаем

$$\frac{d\phi}{dp} = - \left[ \frac{4\gamma p^2}{4\gamma^2 p^2} \right] = - \frac{1}{\gamma}. \quad (\text{п.4})$$

При выполнении работы сдвиг фаз  $\phi$  измеряется не в радианах, а в градусах, а фазовая зависимость строится не от  $p$ , а от частоты колебаний

$\nu = \frac{p}{2\pi}$ , поэтому можно записать:

$$\frac{d\phi}{d\nu} = \frac{360}{2\pi} \left[ 2\pi \frac{d\phi}{d\omega} \right] = -360 \left[ \frac{1}{\gamma} \right], \quad (\text{п.5})$$

отсюда находим

$$\gamma = - \frac{360}{\left| \frac{d\phi}{d\nu} \right|}. \quad (\text{п.6})$$

### Литература

1. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваяев В.А. Университетский курс общей физики. Колебания и волны. Лекции 1, 2. М.: Физический ф-т МГУ, 2001.

2. *Матвеев А.Н.* Механика и теория относительности. 2-е изд. М.: Высшая школа, 1986. Гл. 13.