Задаче №116. Тензор инерции

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Определение коэффициента упругости подвеса и момента инерции пустой рамки.

Определение упругости подвеса осуществляется по результатам изучения колебаний длинного металлического стержня, закрепленного перпендикулярно оси вращения с помощью специального приспособления в рамке.

Измерения

1. Измерить длину $L_{ст}$ и массу $m_{ст}$ стержня, результаты записать в табл. 2.6.1. Оценку погрешности результатов измерений считать равной цене деления используемых приборов.

2. Установить стержень в специальный корпус симметрично относительно центра масс. Закрепить получившуюся конструкцию в рамке. Повернуть с помощью ручки 5 рамку так, чтобы стержень был перпендикулярен оси вращения рамки.

3. Отклонить рамку на небольшой угол и отпустить. Измерить время t_1 n=10 колебаний рамки с установленным стержнем в корпусе. Измерения провести k=3 раза. Результаты измерений п.3 и п.4 записать в табл. 2.6.2.

4. Аккуратно вытащить стержень из корпуса и вновь провести k=3 измерения времени t_2 колебаний рамки с корпусом. Затем удалить корпус и провести k=3 измерения времени t_0 колебаний пустой рамки.

Таблица 2.6.1

Длина, масса и момент инерции стержня

$L_{ст}$	σ_L	$m_{ст}$	σ_m	$J_{ст}^{теор}$	σ_J

Таблица 2.6.2

Результаты измерений Упр.1

<table>
<tr><th>Тело</th><th>t, с</th><th>$\bar{t}$, с</th><th>$\sigma_{сумм}$, с</th><th>T, с</th><th>σ_T , с</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Рамка + корпус + стержень</td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Рамка + корпус</td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

Пустая рамка					

Обработка результатов.

1. Рассчитать среднее арифметическое $\bar{t}$ времени n=10 колебаний для всех трех серий измерений. Оценить случайную погрешность $S_{\bar{t}}$ среднего арифметического по формуле погрешности серии прямых измерений

$$S_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum (t_i - \bar{t})^2}{k(k-1)}}.$$

Считая систематическую погрешность σ_t таймера равной 1 проценту от результатов измерений, рассчитать суммарную погрешность

$$\sigma_{сумм} = \sqrt{S_{\bar{t}}^2 + \sigma_t^2}$$

2. Получить оценки периода колебаний T и погрешности σ_T по формулам

$$T = \frac{\bar{t}}{n}; \qquad \sigma_T = \frac{\sigma_{сумм}}{n}.$$

Результаты измерений п.1-3 записать в табл. 2.6.2.

3. Рассчитать момент инерции стержня (теоретическое значение) по формуле

$$J_{ст}^{теор} = \frac{m_{ст} L_{ст}^2}{12}$$

и оценить погрешность по формуле погрешности косвенных измерений. Результаты расчетов записать в табл. 2.6.1.

4. Так как моменты инерции системы со стержнем и без него отличаются на $J_{ст}^{теор}$, то из формулы (2.6.1) получаем

$$T_1^2 - T_2^2 = 4\pi^2 \frac{J_{ст}^{теор}}{D}.$$

Отсюда следует, что

$$D = 4\pi^2 \frac{J_{ст}^{теор}}{T_1^2 - T_2^2}.$$

Рассчитать коэффициент упругости D подвеса и оценить погрешность по формуле погрешности косвенных измерений.

5. Зная период колебаний T_0 пустой рамки, рассчитать ее момент инерции

$$J_0 = \left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2 \cdot D = J_{ст}^{теор} \cdot \frac{T_0^2}{T_1^2 - T_2^2}$$

и оценить погрешность.

Результаты расчетов записать в табл 2.6.3.

Таблица 2.6.3

Коэффициент упругости D и момент инерции пустой рамки

D, Н·м	σ_D, Н·м	J_0, кг·м^2	σ_{J0}, кг·м^2

Упражнение 2. Определение сечения эллипсоида инерции.

Измерения

1. Для выполнения этого упражнения необходимо по указанию преподавателя выбрать одно из трех тел: параллелепипед (1), треугольную призму (2), полудиск (3). Измерить геометрические размеры (включая толщину b) и массу тела. Данные занести в табл. 2.6.4.

2. Благодаря конструкции рамки любое тело закрепляется в ней таким образом, что его центр масс находится на оси вращения. Закрепить в рамке выбранное тело так, чтобы небольшой штырек на рамке попал в углубление на теле. Ручкой 5 установить рамку в положение, соответствующее нулевому значению шкалы (α=0°)[1].

Измерить время n=10 колебаний. Провести k = 3 измерения. Повернуть рамку вокруг горизонтальной оси на угол α=15° и вновь измерить время колебаний. Так действовать до поворота рамки на угол 180°. Результаты каждого измерения записать в табл. 2.6.4.

Таблица 2.6.4

Результаты измерений Упр.2

Форма и размеры изучаемого тела									
α	t, с	$\bar{t}$, с	σ_t, с	T, с	σ_T, с	J, кг·м^2	σ_J, кг·м^2	R, кг$^{-0,5}$·м$^{-1}$	σ_R, кг$^{-0,5}$·м$^{-1}$
15°									
30°									
…									

[1] Как правило, в данном положении ось симметрии тела совпадает с осью вращения.

Обработка результатов

1. Аналогично пп. 1-2 упр. 1 для каждого значения угла поворота α рамки найти $\bar{t}(\alpha)$, $S_{\bar{t}}$, $T(\alpha)$, S_T.

2. Используя полученные в Упр. 1 формулы для коэффициента упругости D и момента инерции J_0 пустой рамки, а также формулы (2.6.2) и (2.6.4), можно получить формулу для момента инерции $J(\alpha)$ исследуемого тела для различных значений α:

$$J(\alpha) = J_{cm}^{теор} \cdot \frac{T^2(\alpha) - T_0^2}{T_1^2 - T_2^2}$$

Рассчитать моменты инерции $J(\alpha)$ исследуемого тела для различных значений α и оценить погрешности S_J.

3. Для каждого значения α вычислить $R(\alpha) = \sqrt{1/J(\alpha)}$ и оценить погрешность S_R (по формуле для косвенного измерения). Результаты пп. 1-3 записать в табл. 2.6.4.

4. Построить в полярных координатах (R, α) сечение эллипсоида инерции. Угол α меняется в пределах от 0° до 360°, считая, что $J(180°+\alpha)=J(\alpha)$. На этом же графике необходимо изобразить контур исследуемого тела.

5. Определить положения рамки, соответствующие максимальному и минимальному значениям момента инерции. Соединив точки, соответствующие максимальным и минимальным значениям $J(\alpha)$, изобразить главные центральные оси инерции X и Y изучаемого тела.

6. Используя известные теоретические формулы (см. **Приложение 2**), рассчитать моменты инерции тела относительно главных центральных осей J_x и J_y и сравнить с полученными в эксперименте. При расчете необходимо учесть, что тела не являются плоскими, а имеют толщину b. Оценить погрешность. Результаты записать в табл. 2.6.5.

Таблица 2.6.5

Моменты инерции относительно главных центральный осей (эксперимент и теория)

эксперимент		теория	
$J_x + \sigma_J$, кг·м^2	$J_y + \sigma_J$, кг·м^2	$J_x + \sigma_J$, кг·м^2	$J_y + \sigma_J$, кг·м^2

Упражнение 3. Определение компонент тензора инерции.

При выполнении этого упражнения новые измерения не проводятся.

1. Выбрать произвольно (по результатам измерений Упр. 2, табл. 2.6.4) угол поворота рамки α_1, не совпадающий ни с одной из главных осей тела.

Выбранное значение будет соответствовать новой оси Ох, значение $\alpha_2=\alpha_1+90°$ - новой оси Оу.

Для данного выбора осей диагональные компоненты тензора инерции будут равны

$$J_{xx} = J(\alpha_1); \qquad J_{yy} = J(\alpha_2).$$

2. Для нахождения недиагонального компонента тензора $J_{xy} = J_{yx}$ воспользоваться формулой (2.6.12). Выбрав значение $\alpha_0=15°$, провести расчеты по формуле

$$J_{xy} = \frac{J(\alpha_1+\alpha_0) - J(\alpha_1-\alpha_0)}{2\sin 2\alpha_0}.$$

Т.к. в данной формуле выбор значения α_0 произволен, выполнить вычисления J_{xy} для всех значений из диапазона $15^\circ \le \alpha_0 \le 75^\circ$. Результаты занести в табл. 2.6.6 и сравнить друг с другом. Сделать выводы.

Таблица 2.6.6

Недиагональный компонент тензора

α_0	15°	30°	45°	60°	75°
J_{xy}, кг·м^2					

3. В соответствии с формулой (2.6.14) для произвольного α_0 справедливо соотношение

$$J_{xx} + J_{yy} = J(\alpha_1+\alpha_0) + J(\alpha_2+\alpha_0).$$

Выполнить проверку для всех значений из диапазона $15^\circ \le \alpha_0 \le 75^\circ$. Результаты занести в табл. 2.4.7 и сравнить друг с другом. Сделать выводы.

Таблица 2.6.7

Сумма компонентов тензора

α_0	0°	15°	30°	45°	60°	75°
$J(\alpha_1+\alpha_0)+$ $+J(\alpha_2+\alpha_0)$ кг·м^2						

Упражнение 4. Определение компонент тензора инерции тела, составленного из стержней и шаров (*выполняется по указанию преподавателя*).

Изучаемое тело представляет собой крестовину из стержней (заданной массы и длины) и шаров (с известным радиусом и массой). Шары закрепляются на крестовине с помощью винтов. По указанию преподавателя исследуется одна из трех конфигураций тел, показанных на рис. 2.6.6.

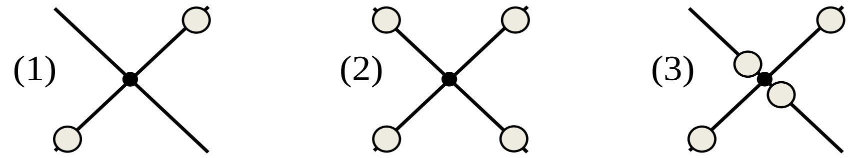


Рис. 2.6.6. Конфигурации тел, исследуемых в данной работе

Измерения и обработка

В данном упражнении все измерения и обработка проводятся точно также, как и в Упр.2.

По результатам следует:

- построить сечение эллипсоида инерции;

- определить все компоненты тензора инерции выбранного тела, для системы координат, оси которой направлены вдоль стержней крестовины.

Для выбранных осей по формулам для моментов инерции стержня и шара (см. **Приложение 2**) рассчитать диагональные моменты инерции тела. По формуле (2.6.6) рассчитать моменты инерции для всех значений α. Построить в полярной системе координат сечение эллипсоида инерции $\left(R(\alpha)=\sqrt{1/J(\alpha)}\right)_{теор}$ по теоретическим данным.

Основные итоги работы

В результате выполнения работы экспериментально находится сечение эллипсоида инерции плоскостью xOy для исследованного тела. Определяются направления главных центральных осей инерции и компоненты тензора инерции для двух различных ориентаций осей Ox и Oy. Для одной системы координат крестовины определяются экспериментально и теоретически компоненты тензора инерции.

Контрольные вопросы

1. Что называют уравнением моментов? Каков физический смысл входящих в него величин?

2. Какова связь между моментом импульса и угловой скоростью? Что такое тензор инерции?

3. Компоненты тензора инерции для простейших систем: тонкая палочка, система материальных точек.

4. Что такое главные оси? Что такое центральные оси? Приведите примеры.

5. Как направлены векторы угловой скорости и момента количества движения тела при его вращении вокруг закрепленной оси, если

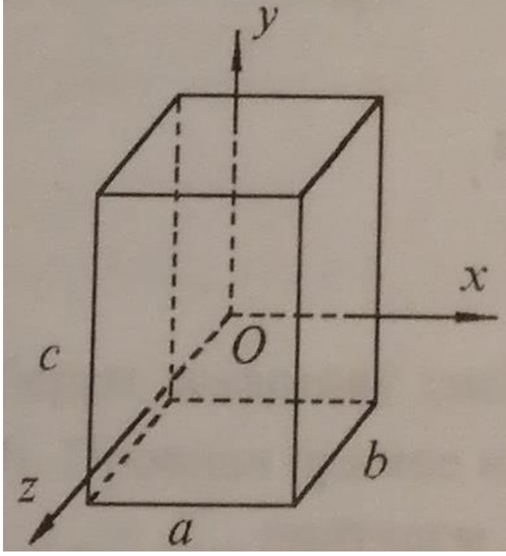
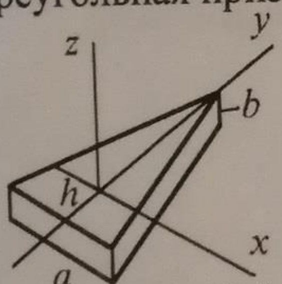
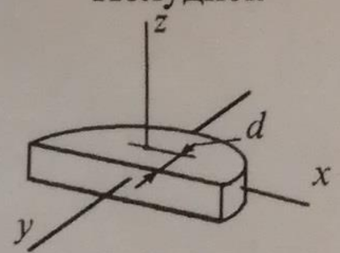
1) ось вращения совпадает с одной из главных осей;

2) ось вращения не совпадает ни с одной из главных осей?

6. Какова связь между компонентами тензора инерции и моментом инерции относительно фиксированной оси?

7. Что такое эллипсоид инерции? Как с помощью эллипсоида инерции определить значение момента инерции тела относительно заданной оси?

Приложение 2.

Параллелепипед 	$J_x = \frac{m\left(b^2+c^2\right)}{12}$ $J_y = \frac{m\left(a^2+c^2\right)}{12}$ $J_z = \frac{m\left(a^2+b^2\right)}{12}$
Треугольная призма  *m, a, b, h*	$J_x = \frac{mh^2}{18} + \frac{mb^2}{12}$ $J_y = \frac{ma^2}{24} + \frac{mb^2}{12}$ $J_z = \frac{ma^2}{24} + \frac{mh^2}{18}$
Полудиск  *m, R, d*	$J_x = mR^2\left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right) + \frac{1}{12}mb^2$ $J_y = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mb^2$ $J_z = mR^2\left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)$

Литература

1. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности. - М. Изд. дом «Оникс 21 век», 2003. 432 с.
2. Алешкевич В А.. Деденко Л. Г. Караваев В. А. Механика – М. Изд. центр «Академия», 2004. - 480 с.
3. Стрелков С. П. Механика. - СПб.: Лань», 2005.-560 с.
4. Сивухин Д. В. Общий курс физики. В 5 томах. Т. 1. Механика М.: ФИЗМАТЛИТ/МФТИ, 2005.-559 с.
5. Русаков В. С., Слепков А. И., Никанорова Е. А., Чистякова Н. И Механика. Методика решения задач. Учебное пособие. М.: Физический факультет МГУ, 2010. - 368 с.
6. Митин И. В.. Русаков В. С. Анализ и обработка экспериментальных данных. Уч.-метод. пособие для студ. младших курсов. - М.: МГУ, 2002. - 44 с.