

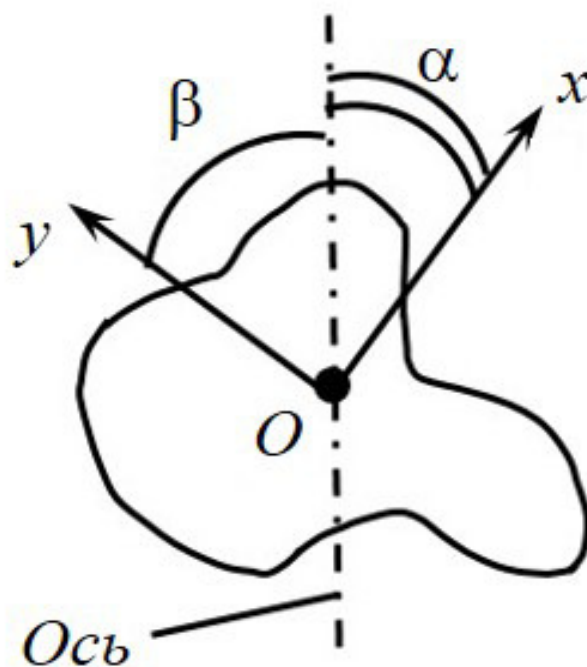


Лабораторный практикум  
по ФИЗИКЕ

МЕХАНИКА

Задача № 116

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕНЗОРА ИНЕРЦИИ  
ТВЕРДОГО ТЕЛА



МОСКВА 2024

## Лабораторная работа 116

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕНЗОРА ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

## Цель работы

Изучение тензора инерции твердого тела.

## Идея эксперимента

С помощью крутильного маятника определяют моменты инерции тела относительно различных осей вращения. По экспериментальным данным находятся компоненты тензора инерции и строится эллипсоид инерции.

## Теоретическое введение

Рассмотрим твердое тело, вращающееся относительно некоторой неподвижной точки  $O$ . Существует связь между компонентами вектора момента импульса  $\mathbf{L}$  твердого тела относительно точки  $O$  и компонентами вектора угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$ :

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix},$$

где  $\hat{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}$  — тензор инерции, являющийся симметричным\*.

Диагональные элементы тензора  $J_{xx}$ ,  $J_{yy}$ ,  $J_{zz}$  называются *осевыми* моментами инерции. Недиагональные элементы  $J_{xy} = J_{yx}$ ,  $J_{xz} = J_{zx}$ ,  $J_{yz} = J_{zy}$  называются *центробежными* моментами инерции.

В общем случае направление вектора момента импульса  $\mathbf{L}$  тела относительно точки  $O$ , даже при вращении вокруг закрепленной оси, может не совпадать с направлением вектора угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$ . Поэтому при вращении тела вектор момента импульса меняет свое направление в пространстве: конец этого вектора описывает окружность с центром, лежащим на оси вращения  $AA'$  (рис. 2.6.1). Вектор  $\mathbf{L}$

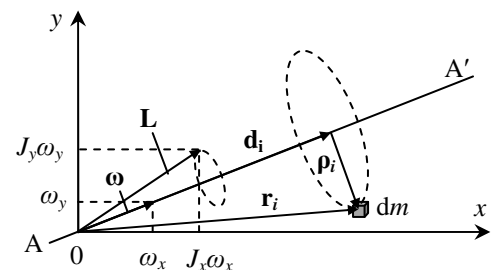


Рис. 2.6.1. Схематическое представление вращения тела вокруг закрепленной оси.

\* Вывод формулы для нахождения тензора инерции в декартовых координатах см. в Приложении 2.

можно разложить на две составляющие — совпадающую по направлению с вектором угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$ , и перпендикулярную к нему, т.е.  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{AA'} + \mathbf{L}_{\perp}$ . В этом случае векторное уравнение моментов

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$$

можно разделить на два скалярных уравнения:

$$\frac{dL_{AA'}}{dt} = M_{AA'},$$

$$\frac{dL_{\perp}}{dt} = M_{\perp}.$$

В первом уравнении  $M_{AA'}$  — проекция момента внешних сил на ось  $AA'$  (в том числе и сил трения в оси). Это уравнение полностью описывает вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Во втором уравнении  $M_{\perp}$  — перпендикулярная проекция суммарного момента внешних сил и сил упругости, действующих на тело со стороны оси. Наличие этого момента приводит к повороту вектора  $\mathbf{L}$  вокруг  $AA'$ . Это уравнение необходимо решать, если встает вопрос о деформациях, возникающих в оси вращения.

Значение момента инерции твердого тела относительно некоторой оси можно найти, зная направление этой оси в пространстве и значения компонент тензора. Можно показать, что момент инерции тела относительно закрепленной оси  $AA'$  (рис. 2.6.2), проходящей через начало координат и образующей с осями координат  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  соответственно, равен:

$$J_{AA'} = J_{xx} \cos^2 \alpha + J_{yy} \cos^2 \beta + J_{zz} \cos^2 \gamma + 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta + 2J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma + 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma. \quad (2.1)$$

Используемая в настоящей работе установка удобна для определения моментов инерции «плоских тел» — т.е. тел, толщина которых значительно меньше их продольных размеров. При этом одну из осей системы координат, связанную с телом (например, ось  $Oz$ ), направляют перпендикулярно плоскости тела. Ось вращения, как и оси  $Ox$  и  $Oy$ , находятся в плоскости тела, начало координат совпадает с центром масс тела

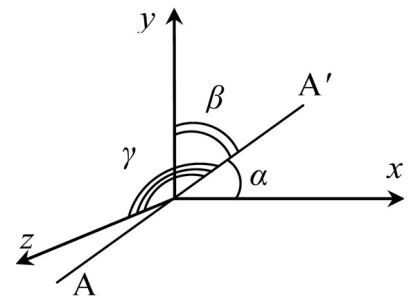


Рис.2.6.2. Положение оси  $AA'$  относительно системы координат

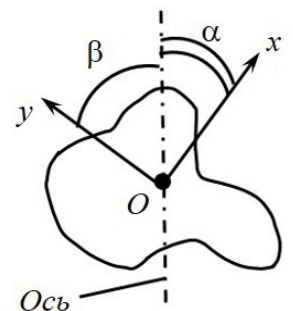


Рис. 2.6.3. Форма и положение «плоского» тела относительно оси вращения.

и находится на оси вращения (рис. 2.6.3). В этом случае один из направляющих косинусов ( $\cos\gamma$ ) равен нулю, углы  $\alpha$  и  $\beta$  связаны соотношением:

$$\alpha + \beta = 90^\circ.$$

Тогда (2.1) запишется в виде:

$$J = J_{xx} \cos^2 \alpha + J_{yy} \cos^2 \beta + 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta, \quad (2.2)$$

или с учетом связи  $\alpha$  и  $\beta$

$$J = J_{xx} \cos^2 \alpha + J_{yy} \sin^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha,$$

где  $J$  — момент инерции данного тела относительно оси вращения, лежащей в плоскости  $Oxy$  и проходящей через центр масс тела.

При повороте системы координат (осей  $Ox$  и  $Oy$  в положение  $Ox'$  и  $Oy'$ ) момент инерции  $J$  относительно фиксированной оси вращения не меняется, но каждой ориентации осей соответствуют свои значения компонент тензора инерции  $J'_{xx}$ ,  $J'_{yy}$  и  $J'_{xy} = J'_{yx}$ .

Можно выбрать такую систему координат, определяемую формой тела, что тензор станет диагональным. В этом случае координатные оси называются **главными осями инерции**, а величины  $J_x \equiv J_{xx}$ ,  $J_y \equiv J_{yy}$ ,  $J_z \equiv J_{zz}$  — **главными моментами инерции**. Оси, проходящие через центр масс тела, называются **центрально-главными осями**, а оси, проходящие через центр масс и одновременно являющиеся главными, называются **главными центрально-главными осями**.

Когда направления осей  $Ox'$  и  $Oy'$  совпадают с главными осями инерции тела, то вместо (2.2) имеем:

$$J = J'_x \cos^2 \alpha' + J'_y \cos^2 \beta'. \quad (2.3)$$

В последнем соотношении  $\cos \alpha'$  и  $\cos \beta'$  — направляющие косинусы выбранной ранее оси вращения в новых осях координат  $Ox'$  и  $Oy'$ ;  $J'_x$  и  $J'_y$  — компоненты тензора инерции в системе координат, оси которой совпадают с главными осями инерции. Нетрудно заметить, что момент инерции принимает экстремальное (минимальное или максимальное) значение, если ось вращения совпадает с одной из главных осей.

Выберем на оси вращения некоторую точку  $P$ , находящуюся на расстоянии  $R$  от начала координат и имеющую координаты  $x'$  и  $y'$ . Пусть величина  $R$  численно равна  $\frac{1}{\sqrt{J}}$ . При этом  $\cos \alpha' = x'R$ ;  $\cos \beta' = y'R$ .

Подставив эти величины в (2.3), получим:

$$J = J'_x \frac{x'^2}{R^2} + J'_y \frac{y'^2}{R^2},$$

или

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1, \quad (2.4)$$

где  $a^2 = \frac{JR^2}{J'_x}$ ,  $b^2 = \frac{JR^2}{J'_y}$ ,  $a$  и  $b$  — постоянные величины.

Уравнение (2.4) является каноническим уравнением эллипса в координатах  $x'$  и  $y'$ , полуоси которого равны соответственно  $a = \frac{1}{\sqrt{J'_x}}$  и  $b = \frac{1}{\sqrt{J'_y}}$ , по-

скольку  $JR^2 = \frac{J}{(\sqrt{J})^2} = 1$ .

Эллипс (2.4) является сечением эллипсоида инерции плоскостью  $x'y'$ . *Эллипсоидом инерции* называется поверхность, характеризующая значения моментов инерции твердого тела относительно множества возможных осей вращения, проходящих через одну точку (в данном случае через центр масс тела). При этом для каждого направления вдоль оси  $l$  откладываются отрезки длиной  $1/\sqrt{J_l}$ , где  $J_l$  — момент инерции тела относительно оси  $l$ . Концы этих отрезков образуют поверхность, называемую *эллипсоидом инерции* (трехмерное уравнение эллипсоида инерции может быть получено из (2.1)).

Пусть исследуемое «плоское» тело имеет форму, показанную на рис. 2.6.3. Точка  $O$  — центр масс тела. Оси  $Ox \perp Oy$ , связанные с телом, выбраны произвольно, т.е. в общем случае не являются главными осями. Тело закреплено в рамке крутильного маятника так, что точка  $O$  лежит на оси вращения, а положение тела характеризуется углом  $\alpha$  (или  $\beta = \pi/2 - \alpha$ ) между осью  $Ox$  и осью вращения, расположенной вертикально.

Найдем, как в эксперименте определить элементы тензора инерции  $J_{xx}$ ,  $J_{yy}$  и  $J_{xy} = J_{yx}$  «плоского» тела для выбранной системы координат. Для этого рассмотрим, как изменяется момент инерции тела при изменении угла  $\alpha$ .

Если тело закреплено в рамке так, как показано на рис. 2.6.4 а, то  $\alpha = 0$  и  $\beta = \pi/2$ . Из (2.2) получаем

$$J = J_1 = J_{xx}.$$

При закреплении тела так, как показано на рис. 2.6.4 б,  $\alpha = \pi/2$  и  $\beta = 0$ . Следовательно, из (2.2)

$$J = J_2 = J_{yy}.$$

При повороте тела на угол  $\alpha_0$  (рис. 2.6.4 в) и  $(-\alpha_0)$  (рис. 2.6.4 г) относительно оси вращения в соответствии с (2.2) для момента инерции получим

$$J = J_3 = J_{xx} \cos^2 \alpha_0 + J_{yy} \sin^2 \alpha_0 + J_{xy} \sin 2\alpha_0, \quad (2.5)$$

$$J = J_4 = J_{xx} \cos^2 \alpha_0 + J_{yy} \sin^2 \alpha_0 - J_{xy} \sin 2\alpha_0. \quad (2.6)$$

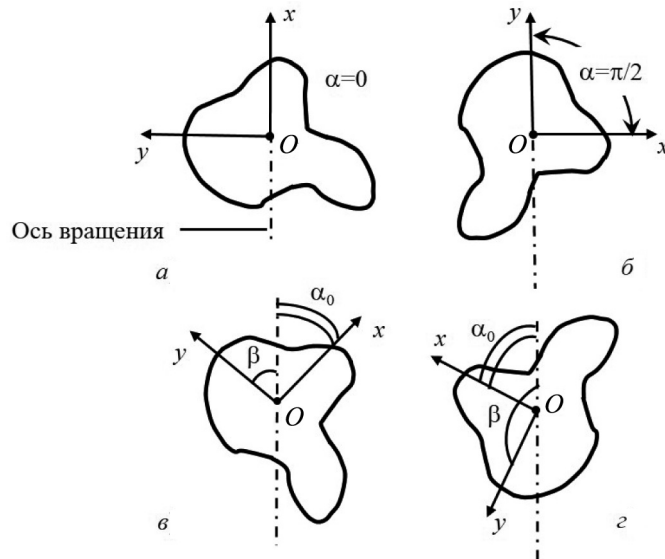


Рис. 2.6.4. Положения тела относительно оси вращения.

Из (2.5) и (2.6) следует, что

$$J_3 - J_4 = 2J_{xy} \sin 2\alpha_0, \text{ или } J_{xy} = \frac{J_3 - J_4}{2 \sin 2\alpha_0}. \quad (2.7)$$

Из (2.2) следует, что при  $\alpha = \alpha_0 + \pi/2$

$$J = J_5 = J_{xx} \sin^2 \alpha_0 + J_{yy} \cos^2 \alpha_0 - J_{xy} \sin 2\alpha_0. \quad (2.8)$$

Суммируя (2.5) и (2.8), получаем

$$J_3 + J_5 = J_1 + J_2. \quad (2.9)$$

Экспериментальное определение величин  $J_1, J_2, J_3, J_4$  и  $J_5$  дает возможность найти четыре отличные от нуля компоненты тензора инерции плоского тела ( $J_{xx}, J_{yy}, J_{xy} = J_{yx}$ ) для заданной системы координат. Если оси координат  $Ox$  и  $Oy$  совпадают с главными осями инерции тела, то  $J_{xy} = J_{yx} = 0$ . Выполнение соотношения (2.9) может служить критерием корректности проведенного эксперимента.

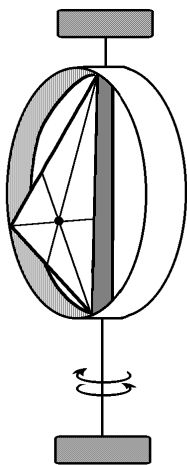


Рис. 2.6.5. Схематическое представление крутильного маятника.

### Эксперимент

Колебания маятника, представляющего собой рамку с исследуемым телом, закрепленную на вертикальной проволоке (рис. 2.6.5), возникают под действием момента сил упругости. Период таких колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J'}{D}}, \quad (2.6.1)$$

где  $D$  — коэффициент упругости подвеса,  $J'$  — момент инерции рамки с исследуемым телом.

Из соотношения (2.6.1) следует, что момент инерции  $J'$  равен

$$J' = \left( \frac{T}{2\pi} \right)^2 D. \quad (2.6.2)$$

Момент инерции рамки —

$$J_0 = \left( \frac{T_0}{2\pi} \right)^2 D,$$

где  $T_0$  — период колебаний рамки.

В силу аддитивности момент инерции  $J$  исследуемого тела относительно неподвижной оси вращения равен

$$J = J' - J_0. \quad (2.6.4)$$

Меняя положение тела относительно рамки, можно определять моменты инерции относительно различных осей.

### Экспериментальная установка

Экспериментальная установка показана на рис. 2.6.6. Она состоит из стойки и рамки 1, закрепленной на упругом подвесе 2. Исследуемые тела 3 поочередно закрепляются в рамке с помощью винта 4. Конструкция крепления рамки на подвесе такова, что рамка может поворачиваться вокруг горизонтальной оси и фиксироваться в различных положениях. Шаг поворота, при котором фиксируется положение рамки, равен  $15^\circ$ . Поворот рамки осуществляется при помощи ручки 5. В работе изучаются тензоры инерции нескольких «плоских» тел 3 разной формы: малых по толщине параллелепипеда, треугольной призмы, полудиска, а также тел, конфигурация которых может меняться в процессе эксперимента. Система координат, относительно которой определяется момент инерции тела, жестко связана с телом, а следовательно, и с рамкой. На рамке имеется шкала, позволяющая определять углы между осью вращения и осями системы координат, связанной с телом.

Период колебаний определяется с помощью электронного таймера 6 и датчика 7 с фотоэлектрической схемой. После включения таймера в сеть необходимо последовательно нажать клавиши «СБРОС» и «ПУСК». При первом же пересечении маятником светового луча фотоэлектрического датчика происходит запуск системы счета периодов и электронного таймера. После нажатия клавиши «СТОП» очередное пересечение маятником светового луча, соответствующее завершению текущего периода колебаний, вызывает остановку таймера и

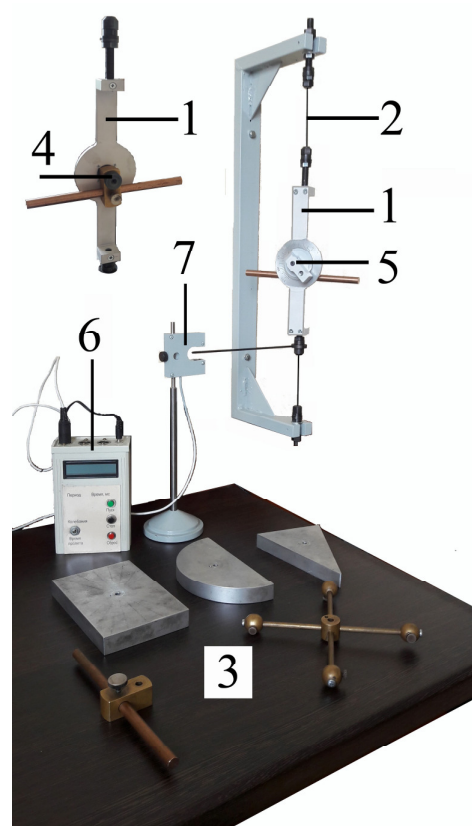


Рис. 2.6.6. Экспериментальная установка для изучения тензора инерции твердого тела.

системы счета периодов колебаний. Результаты высвечиваются на табло блока— это количество периодов и соответствующее ему полное время колебаний. Точность измерений времени таймером считать равной 0,001 сек.

## Проведение эксперимента

### Упражнение 1. Определение коэффициента упругости подвеса и момента инерции пустой рамки.

Определение упругости подвеса осуществляется по результатам изучения колебаний длинного металлического стержня, закрепленного перпендикулярно оси вращения с помощью специального приспособления в рамке.

#### Измерения

(результаты измерений записываются в табл. 2.6.1 и 2.6.2)

1. Измерить длину  $L_{cm}$  и массу  $m_{cm}$  стержня. Оценку погрешности результатов измерений считать равной цене деления используемых приборов.

2. Установить стержень в специальный корпус симметрично относительно центра масс. Закрепить получившуюся конструкцию в рамке. Повернуть рамку так, чтобы стержень был перпендикулярен оси вращения рамки.

3. Отклонить рамку на небольшой угол и отпустить. Измерить время  $t_1$   $n=10$  колебаний рамки с установленным стержнем в корпусе. Измерения провести  $k=3$  раза.

Таблица 2.6.1

Длина, масса и момент инерции стержня

$L_{cm}$	$\sigma_L$	$m_{cm}$	$\sigma_m$	$J_{cm}^{теор}$	$\sigma_J$

Таблица 2.6.2

Результаты измерений Упр.1

Тело	$t, c$	$\bar{t}, c$	$\sigma_{сумм}, c$	$T, c$	$\sigma_T, c$
Рамка + корпус + стержень				$T_1$	
Рамка + корпус				$T_2$	
Пустая рамка				$T_0$	



4. Аккуратно вытащить стержень из корпуса и вновь провести  $k=3$  измерения времени  $t_2$  колебаний рамки с корпусом.

5. Удалить корпус и провести  $k=3$  измерения времени  $t_0$  колебаний пустой рамки.

### Обработка результатов.

(результаты обработки записываются в табл. 2.6.1, 2.6.2 и 2.6.3)

1. Рассчитать среднее арифметическое  $\bar{t}$  времени  $n=10$  колебаний для всех трех серий измерений. Оценить случайную погрешность  $S_{\bar{t}}$  среднего арифметического по формуле погрешности серии прямых измерений

$$S_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum (t_i - \bar{t})^2}{k(k-1)}}.$$

Считая систематическую погрешность  $\sigma_t$  таймера равной единице последнего разряда шкалы, рассчитать суммарную погрешность

$$\sigma_{\text{сумм}} = \sqrt{S_{\bar{t}}^2 + \sigma_t^2}$$

2. Получить оценки периода колебаний  $T$  и погрешности  $\sigma_T$  по формулам

$$T = \frac{\bar{t}}{n}; \quad \sigma_T = \frac{\sigma_{\text{сумм}}}{n}.$$

3. Рассчитать момент инерции стержня (теоретическое значение) по формуле

$$J_{cm}^{\text{теор}} = \frac{m_{cm} L_{cm}^2}{12}$$

и оценить погрешность по формуле погрешности косвенных измерений.

4. Так как моменты инерции системы со стержнем и без него отличаются на  $J_{cm}^{\text{теор}}$ , то из (2.6.1) получаем

$$T_1^2 - T_2^2 = 4\pi^2 \frac{J_{cm}^{\text{теор}}}{D}.$$

Отсюда следует, что

$$D = 4\pi^2 \frac{J_{cm}^{\text{теор}}}{T_1^2 - T_2^2}.$$

Рассчитать коэффициент упругости  $D$  подвеса и оценить погрешность по формуле погрешности косвенных измерений.

5. Зная период колебаний  $T_0$  пустой рамки, рассчитать ее момент инерции

$$J_0 = \left( \frac{T_0}{2\pi} \right)^2 \cdot D = J_{cm}^{\text{теор}} \cdot \frac{T_0^2}{T_1^2 - T_2^2}$$

и оценить погрешность.



...									

### Обработка результатов

(результаты обработки записываются в табл. 2.6.5 и 2.6.6)

1. Аналогично пп. 1-2 упр. 1 для каждого значения угла поворота  $\alpha$  рамки найти  $\bar{t}(\alpha)$ ,  $S_T$ ,  $T(\alpha)$ ,  $S_T$ .

2. Используя полученные в упр. 1 формулы для коэффициента упругости  $D$  и момента инерции  $J_0$  пустой рамки, а также формулы (2.6.2) и (2.6.4), можно получить формулу для момента инерции  $J(\alpha)$  исследуемого тела для различных значений  $\alpha$ :

$$J(\alpha) = J_{ст}^{теор} \cdot \frac{T^2(\alpha) - T_0^2}{T_1^2 - T_2^2}$$

Рассчитать моменты инерции  $J(\alpha)$  исследуемого тела для различных значений  $\alpha$  и оценить погрешности  $S_J$ .

3. Для каждого значения  $\alpha$  вычислить  $R(\alpha) = \sqrt{1/J(\alpha)}$  и оценить погрешность  $S_R$  (по формуле для косвенного измерения). Результаты пп. 1-3 записать в табл. 2.6.5.

4. Построить в полярных координатах  $(R, \alpha)$  сечение эллипсоида инерции. Угол  $\alpha$  меняется в пределах от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ , считая, что  $J(180^\circ + \alpha) = J(\alpha)$ . На этом же графике необходимо изобразить контур исследуемого тела.

5. Определить положения рамки, соответствующие максимальному и минимальному значениям момента инерции. Соединив точки, соответствующие максимальным и минимальным значениям  $J(\alpha)$ , изобразить главные центральные оси инерции  $X$  и  $Y$  изучаемого тела.

6. Используя известные теоретические формулы (см. Приложение 1), рассчитать моменты инерции тела относительно главных центральных осей  $J_x$  и  $J_y$  и сравнить с полученными в эксперименте. При расчете необходимо учесть, что тела не являются плоскими, а имеют толщину  $b$ .

Таблица 2.6.6

Главные моменты инерции (эксперимент и теория)

Эксперимент		Теория	
$J_x \pm \sigma_{J_x}, \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	$J_y \pm \sigma_{J_y}, \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	$J_x \pm \sigma_{J_x}, \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	$J_y \pm \sigma_{J_y}, \text{ кг} \cdot \text{м}^2$

### Упражнение 3. Определение компонент тензора инерции.

(результаты обработки записываются в табл. 2.6.7, 2.6.8 и 2.6.9)

При выполнении этого упражнения новые измерения не проводятся.

1. Выбрать произвольно (по результатам измерений Упр. 2, табл. 2.6.4) угол поворота рамки  $\alpha_1$ , не совпадающий ни с одной из главных осей тела. Выбранное значение будет соответствовать новой оси  $Ox$ , значение  $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$  соответствует оси  $Oy$ .

Для данного выбора осей диагональные компоненты тензора инерции будут равны

$$J_{xx} = J(\alpha_1); \quad J_{yy} = J(\alpha_2).$$

2. Для нахождения недиагонального компонента тензора  $J_{xy} = J_{yx}$  воспользоваться формулой (2.7). Выбрав значение  $\alpha_0 = 15^\circ$ , провести расчеты по формуле

$$J_{xy} = \frac{J(\alpha_1 + \alpha_0) - J(\alpha_1 - \alpha_0)}{2 \sin 2\alpha_0}.$$

Т.к. в данной формуле выбор значения  $\alpha_0$  произволен, выполнить вычисления  $J_{xy}$  для всех значений из диапазона  $15^\circ \leq \alpha_0 \leq 75^\circ$ . Результаты занести в табл. 2.6.6. и сравнить друг с другом. Сделать выводы.

Таблица 2.6.7

Выбор осей и осевые моменты инерции

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$J_{xx} \pm \sigma_{J_{xx}}, \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	$J_{yy} \pm \sigma_{J_{yy}}, \text{ кг} \cdot \text{м}^2$

Таблица 2.6.8

Недиагональный компонент тензора

$\alpha_0$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$
$J_{xy}, \text{ кг} \cdot \text{м}^2$					

3. В соответствии с формулой (2.9) для произвольного  $\alpha_0$  справедливо соотношение

$$J_{xx} + J_{yy} = J(\alpha_1 + \alpha_0) + J(\alpha_2 + \alpha_0).$$

Выполнить проверку для всех значений из диапазона  $15^\circ \leq \alpha_0 \leq 75^\circ$ . Результаты занести в табл. 2.4.6. и сравнить друг с другом. Сделать выводы.

Таблица 2.6.9

Сумма компонентов тензора

$\alpha_0$	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$J_{xx} + J_{yy}, \text{ кг} \cdot \text{м}^2$
$J(\alpha_1 + \alpha_0) + J(\alpha_2 + \alpha_0)$ $\text{кг} \cdot \text{м}^2$							

#### Упражнение 4. Определение компонент тензора инерции тела, составленного из стержней и шаров (выполняется по указанию преподавателя).

Изучаемое тело представляет собой крестовину из стержней (заданной массы и длины) и шаров (с известным радиусом и массой). Шары закрепляются на крестовине с помощью винтов. По указанию преподавателя исследуется одна из трех конфигураций тел, показанных на рис. 2.6.6.

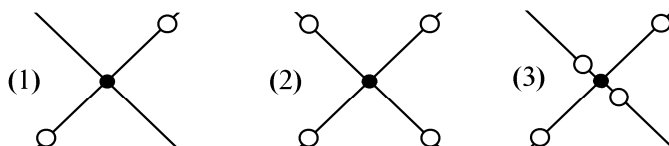


Рис. 2.6.6. Конфигурации тел, исследуемых в данной работе.

#### Измерения и обработка

В данном упражнении все измерения и обработка проводятся точно также, как и в Упр.2.

По результатам следует:

- построить сечение эллипсоида инерции;
- определить все компоненты тензора инерции выбранного тела, для системы координат, оси которой направлены вдоль стержней крестовины.

Для выбранных осей по формулам для моментов инерции стержня и шара рассчитать диагональные моменты инерции тела. По формуле (2.3) рассчитать моменты инерции для всех значений  $\alpha$ . Построить в полярной системе координат сечение эллипсоида инерции  $\left(R(\alpha) = \sqrt{1/J(\alpha)}\right)_{теор}$  по теоретическим данным.

#### Основные итоги работы

В результате выполнения работы экспериментально находится сечение эллипсоида инерции плоскостью  $xOy$  для исследованного тела. Определяются направления главных центральных осей инерции и компоненты тензора инерции для двух различных ориентаций осей  $Ox$  и  $Oy$ . Для одной системы координат крестовины определяются экспериментально и теоретически компоненты тензора инерции.

#### Контрольные задания и вопросы

1. Напишите уравнение моментов и поясните смысл входящих в него величин.

2. Какова связь между моментом импульса и угловой скоростью? Что такое тензор инерции?

3. Компоненты тензора инерции для простейших систем: тонкая палочка, система материальных точек.

4. Что такое главные оси? Что такое центральные оси? Примеры.

5. Как направлены векторы угловой скорости и момента количества движения тела при его вращении вокруг закрепленной оси, если

1) ось вращения совпадает с одной из главных осей;

2) ось вращения не совпадает ни с одной из главных осей?

6. Какова связь между компонентами тензора инерции и моментом инерции относительно фиксированной оси?

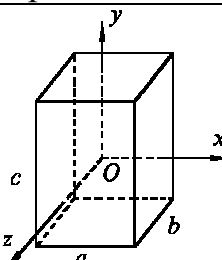
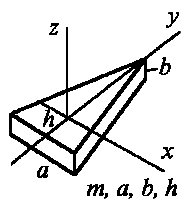
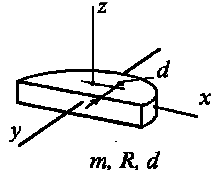
7. Что такое эллипсоид инерции? Как с помощью эллипсоида инерции определить значение момента инерции тела относительно заданной оси?

### Литература

1. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности. §32.— М. Изд. дом «Оникс 21 век», 2003. — 432 с.
2. Алешкевич В. А., Деденко Л. Г., Караваев В. А. Механика. Лекция 12.— М.: Изд. центр «Академия», 2004. — 480 с.
3. Сивухин Д. В. Общий курс физики. В 5 томах. Т. 1. Механика. §53. — М.: ФИЗМАТЛИТ / МФТИ, 2005. — 559 с.
4. Русаков В. С., Слепков А. И., Никанорова Е. А., Чистякова Н. И. Механика. Методика решения задач. Учебное пособие. М.: Физический факультет МГУ, 2010. — 368 с.
5. Митин И. В., Русаков В. С. Анализ и обработка экспериментальных данных. Уч.-метод. пособие для студ. младших курсов. — М.: МГУ. 2002. — 44 с.

### Приложение 1.

#### Моменты инерции тел, используемых при выполнении работы.

Параллелепипед	Треугольная призма	Полудиск
		
$J_x = \frac{m(b^2 + c^2)}{12}$	$J_x = \frac{mh^2}{18} + \frac{mb^2}{12}$	$J_x = mR^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \right) + \frac{mb^2}{12}$

$J_y = \frac{m(a^2 + c^2)}{12}$	$J_y = \frac{ma^2}{24} + \frac{mb^2}{12}$	$J_y = \frac{mR^2}{4} + \frac{mb^2}{12}$
$J_z = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}$	$J_z = \frac{ma^2}{24} + \frac{mh^2}{18}$	$J_z = mR^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right)$

## Приложение 2.

### Тензор инерции тела в декартовых координатах.

Предположим, что твердое тело может вращаться вокруг некоторой неподвижной точки  $O$ . Совместим с этой точкой начало декартовой системы координат  $XYZ$ . Скорость произвольной  $i$ -й точки твердого тела массой  $m_i$  равна  $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ , где  $\boldsymbol{\omega}$  — вектор угловой скорости вращения твердого тела, а  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор. По определению, момент импульса этой материальной точки относительно точки  $O$  равен

$$\mathbf{L}_i \equiv m_i [\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i] = m_i [\mathbf{r}_i \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i]] = m_i \left[ \boldsymbol{\omega} (\mathbf{r}_i)^2 - \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \right].$$

Перепишем выражение для  $\mathbf{L}_i$  в проекциях на оси системы координат  $XYZ$  с началом в точке  $O$ . Учитывая, что

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2, \text{ и } (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) = x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z,$$

получим

$$\begin{aligned} L_{ix} &= m_i \left[ \omega_x (y_i^2 + z_i^2) - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z \right], \\ L_{iy} &= m_i \left[ -x_i y_i \omega_x + \omega_y (x_i^2 + z_i^2) - y_i z_i \omega_z \right], \\ L_{iz} &= m_i \left[ -x_i z_i \omega_x - y_i z_i \omega_y + \omega_z (x_i^2 + y_i^2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{П2.1})$$

Момент импульса твердого тела равен сумме моментов импульсов всех элементарных объемов тела:

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i \left[ \boldsymbol{\omega} (\mathbf{r}_i)^2 - \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \right]. \quad (\text{П2.2})$$

Учитывая (П2.1), соотношение (П2.2) можно переписать в проекциях на координатные оси:

$$\begin{aligned} L_x &= J_{xx} \omega_x + J_{xy} \omega_y + J_{xz} \omega_z, \\ L_y &= J_{yx} \omega_x + J_{yy} \omega_y + J_{yz} \omega_z, \\ L_z &= J_{zx} \omega_x + J_{zy} \omega_y + J_{zz} \omega_z. \end{aligned} \quad (\text{П2.3})$$

Совокупность девяти величин  $J_{xx}, J_{xy}, J_{xz}, J_{yx}, J_{yy}, J_{yz}, J_{zx}, J_{zy}, J_{zz}$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{J_{ij}}$$

называется **тензором инерции**

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}.$$

Проекции момента импульса на оси координат (П2.3) удобно записать в матричном виде. В рассматриваемом случае начало декартовой системы координат совпадает с точкой  $O$  (центром вращения), поэтому из (П2.1) и (П2.3) получаем

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i (x_i y_i) & -\sum_i m_i (x_i z_i) \\ -\sum_i m_i (y_i x_i) & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i (y_i z_i) \\ -\sum_i m_i (z_i x_i) & -\sum_i m_i (z_i y_i) & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}.$$

Для плоского тела (ось  $OZ$  перпендикулярна его плоскости)  $z$ -координата всех точек тождественно равна нулю. В этом случае тензор инерции принимает вид:

$$J_{\text{плоск}} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i y_i^2 & -\sum_i m_i (x_i y_i) & 0 \\ -\sum_i m_i (y_i x_i) & \sum_i m_i x_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix},$$

и справедливо соотношение:

$$J_{xx} + J_{yy} = J_{zz}.$$

Отметим, что выражение (П2.2) принимает точно такой же вид, если векторы  $L$ ,  $\omega$ ,  $r_i$  проецировать на оси лабораторной системы координат  $XYZ$ . Отличие заключается в том, что в неподвижной лабораторной системе отсчета постоянно меняются координаты  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  каждого малого элемента тела, поэтому и компоненты тензора  $\hat{J}$  меняются со временем. В выбранной системе координат  $XYZ$  радиус-вектор  $r_i$  — неизменная величина, а проекции угловой скорости  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  меняются со временем.