

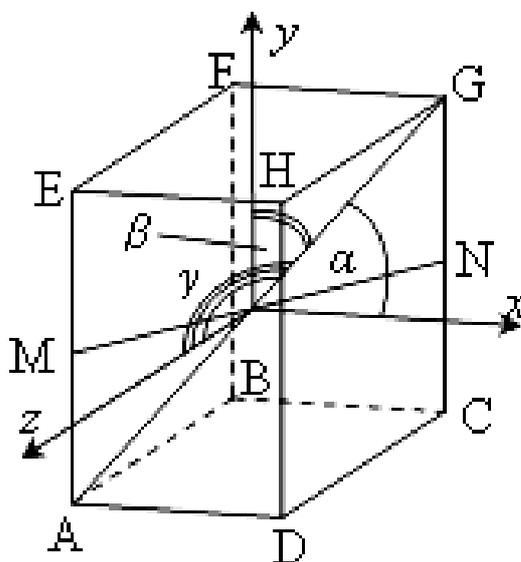


**Лабораторный практикум
по ФИЗИКЕ**

МЕХАНИКА

Задача № 114

**ИЗУЧЕНИЕ ТЕНЗОРА ИНЕРЦИИ
ТВЕРДОГО ТЕЛА**



МОСКВА 2023

Лабораторная работа 114

ИЗУЧЕНИЕ ТЕНЗОРА ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Цель работы

Знакомство с понятием «тензор инерции». Определение компонент тензора инерции цилиндра и параллелепипеда по измерениям периода колебаний и углового ускорения при вращении исследуемого тела.

Идея эксперимента

Приводя исследуемое тело в то или иное движение, измерить либо период колебаний, либо угловое ускорение при вращении. По соответствующим формулам оценить момент инерции. Реализуется возможность приведения тела во вращательное движение вокруг различных центральных осей.

Теоретическое введение

Рассмотрим твердое тело, вращающееся относительно некоторой неподвижной точки O . Существует связь между вектором момента импульса \mathbf{L} твердого тела относительно точки O и вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{L} = \hat{J}\boldsymbol{\omega}, \quad (2.5.1)$$

где $\hat{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}$ — тензор инерции, являющийся симметричным.

Можно выбрать такую систему координат, определяемую формой тела, что тензор станет диагональным. В этом случае координатные оси называются **главными осями инерции**, а величины $J_x \equiv J_{xx}, J_y \equiv J_{yy}, J_z \equiv J_{zz}$ — **главными моментами инерции**. Оси, проходящие через центр масс тела, называют **центрными осями**, а оси, проходящие через центр масс и одновременно являющиеся главными, называют **главными центральными осями**.

При вращении твердого тела относительно некоторой неподвижной оси AA' , проходящей через точку O , проекция момента импульса на эту ось равна (см. рис. 2.5.1)

$$L_{AA'} \equiv \left(\sum_i \mathbf{r}_i \times \Delta m_i \mathbf{v}_i \right)_{AA'} = \sum_i \Delta m_i \rho_i^2 \boldsymbol{\omega} = J_{AA'} \boldsymbol{\omega}, \quad (2.5.2)$$

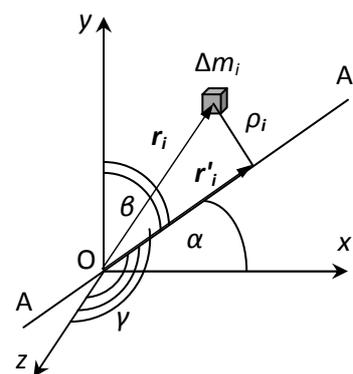
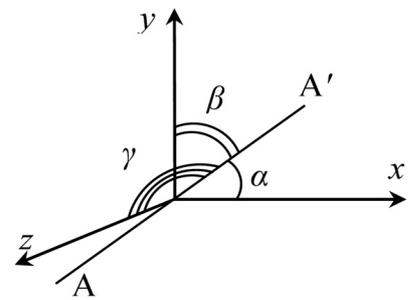


Рис. 2.5.1. Схематическое представление вращения тела вокруг закрепленной оси.

где ρ_i — расстояние от i -го элемента массы Δm_i до оси AA' , а величина $J_{AA'} = \sum_i \Delta m_i \rho_i^2$ — момент инерции тела относительно оси AA' .



В дальнейшем будем использовать систему координат, оси которой совпадают с главными осями инерции, а точка O совпадает с центром масс тела. В этом случае тензор инерции имеет диагональный вид, а момент инерции тела относительно произвольной оси AA' можно найти по формуле

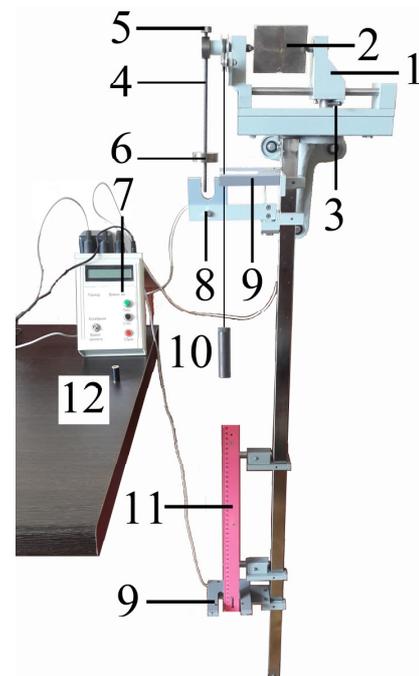
Рис.2.5.2. Положение оси AA' относительно системы координат

$$J_{AA'} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma, \quad (2.5.3)$$

где α, β, γ — углы, образуемые осью AA' с осями системы координат (рис. 2.5.2).

Экспериментальная установка

Одна статическая стойка и *стойка 1* (положение которой может регулироваться) смонтированы на основании (рис. 2.5.3). В стойках находятся подшипники, в которые вставлены держатели, фиксирующие исследуемое тело 2. Тело 2 имеет специальные углубления, в которые вставляются держатели. Таким образом, тело может вращаться вокруг выбранной оси. Положение *стойки 1* фиксируется при помощи *рычага 3*.



Исследуемое тело может приводиться как в колебательное, так и во вращательное движение. В первом случае определяют период колебаний исследуемого тела, установленного в держателях. Для этого на оси держателей закрепляется кольцо со *стержнем 4* (рис. 2.5.3) при помощи *винта 5*. На *стержне 4* зафиксирован дополнительный *груз 6*. Установка снабжена системой измерения периода колебаний, включающей в себя *таймер 7* и фотоэлектрический *датчик 8*. Для определения момента инерции установки без исследуемого *тела 2* имеется небольшой *цилиндр 12*, закрепляемый между держателями.

Рис. 2.5.3. Экспериментальная установка для определения тензора.

В случае вращательного движения необходимо ослабить *винт 5* и снять *стержень 4* с закрепленным на нем *грузом 6*. Вращение исследуемого *тела 2* в этом случае происходит при опускании *груза 10* (рис. 2.5.3), висящего на нити, намотанной на шкив. Масса груза указана на установке. Установка снабжена системой автоматического отсчета времени, включающей в себя два фотоэлектрических *датчика 9* и *таймер 7* для определения времени перемещения груза. Расстояние, на который поднимается *груз 10*, определяется по *линейке 11*, укрепленной на установке.

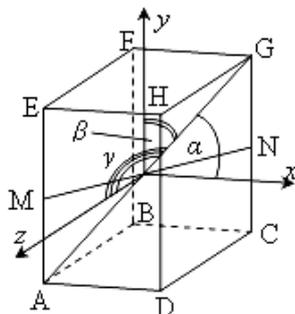


Рис. 2.5.4. Схематическое представление параллелепипеда.

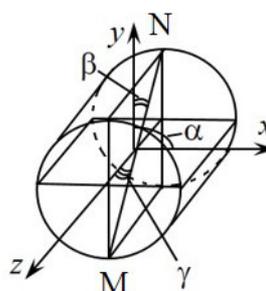


Рис. 2.5.5. Схематическое представление цилиндра.

В работе определяются компоненты тензора инерции металлических тел, имеющих форму параллелепипеда (рис. 2.5.4) и цилиндра (рис. 2.5.5).

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Изучение тензора инерции в режиме вращательного движения тела.

Тело правильной формы закрепляется при помощи держателей между двумя стойками и может приводиться во вращение вокруг некоторой оси под действием момента внешних сил. Момент внешних сил создается с помощью нити, намотанной на шкив, к концу которой подвешен груз массой m (рис. 2.5.6). В качестве исследуемого тела используется прямоугольный параллелепипед.

Если груз начал движение от отметки x_0 , затем прошел отметку x_1 со скоростью v_1 , а через время Δt после этого — отметку x_2 со скоростью v_2 , то можно записать:

$$mg(x_1 - x_2) = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) + \frac{1}{2}J'(\omega_2^2 - \omega_1^2) + M_{\text{тр}}\Delta\phi, \quad (2.5.4)$$

где $mg(x_2 - x_1)$ — изменение потенциальной энергии груза в поле силы тяжести,

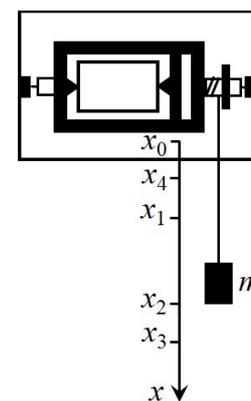


Рис. 2.5.6. Схема установки для определения тензора инерции динамическим методом.

$\frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$ — изменение кинетической энергии его поступательного движения,

$\frac{1}{2}J'(\omega_2^2 - \omega_1^2)$ — изменение кинетической энергии вращающегося тела с держателями;

$M_{\text{тр}} \cdot \Delta\varphi$ — работа сил трения в оси держателей,

m — масса груза, подвешенного на нити;

$J' = J + J_0$; J и J_0 — моменты инерции тела и держателей,

ω_1, ω_2 — угловые скорости вращения тела для положений груза в точках $x = x_1$ и $x = x_2$ соответственно,

g — ускорение свободного падения,

$M_{\text{тр}}$ — момент сил трения,

$\Delta\varphi = \frac{x_2 - x_1}{r}$ — угол, на который повернется тело при прохождении груза между отметками x_1 и x_2 ,

r — радиус шкива.

Учитывая, что $v = \omega r$, $v_2 = \sqrt{2a(x_2 - x_0)}$, $x_2 = x_1 + v_1 t + \frac{at^2}{2}$, где a — ускорение груза, t — время прохождения грузом расстояния $x_2 - x_1$, получаем:

$$J' = \frac{mg - M_{\text{тр}}/r}{a} r^2 - mr^2 = r^2 \left(\frac{(mg - M_{\text{тр}}/r)t^2}{2(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2} - m \right). \quad (2.5.5)$$

Момент инерции держателей без тела равен:

$$J_0 = r^2 \left(\frac{(mg - M_{\text{тр}}/r)t_0^2}{2(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2} - m \right), \quad (2.5.6)$$

где t_0 — время прохождения грузом расстояния $x_2 - x_1$. Из двух последних уравнений для момента инерции тела относительно оси вращения получаем:

$$J = J' - J_0 = r^2 \frac{mg - M_{\text{тр}}/r}{2(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2} (t^2 - t_0^2). \quad (2.5.7)$$

Пользуясь этой формулой, можно определять моменты инерции тела относительно произвольных осей. Это можно сделать, в частности, для главных центральных осей, совпадающих с выбранными осями координат (J_x, J_y, J_z), а также для осей, совпадающих с одной из диагоналей параллелепипеда, например AG (J_{AG}) или MN (J_{MN}) (см. рис. 2.5.4), выразив момент инерции через времена опускания груза $t_x, t_y, t_z, t_{AG}, t_{MN}$.

Входящий в (2.5.7) момент сил трения можно оценить следующим образом. Если отпустить груз на отметке x_0 , то он после опускания до нижней

точки x_3 поднимется затем до отметки x_4 . Разность значений потенциальной энергии груза в точках x_4 и x_0 и будет равна работе сил трения, т. е.

$$mg(x_4 - x_0) = \frac{M_{\text{тр}}}{r}(x_3 - x_0) + \frac{M_{\text{тр}}}{r}(x_3 - x_4), \quad (2.5.8)$$

где $\frac{M_{\text{тр}}}{r}(x_3 - x_0)$ — работа сил трения при движении груза вниз от верхней точки до полного разматывания нити, $\frac{M_{\text{тр}}}{r}(x_3 - x_4)$ — работа сил трения при подъеме груза. Из (2.5.8) следует, что

$$\frac{M_{\text{тр}}}{r} = mg \frac{x_4 - x_0}{2x_3 - x_0 - x_4}. \quad (2.5.9)$$

Упражнение 1.

Измерения

1. Измерить линейкой или штангенциркулем размеры изучаемого тела - прямоугольного параллелепипеда a, b, c . Рекомендуется выбрать направления осей Ox, Oy и Oz так, чтобы $a > b > c$. Систематическую погрешность измерения считать равной цене деления. Результаты записать в табл. 2.5.1.

2. Измерить штангенциркулем диаметр шкива d без нити. В дальнейшем следует измерить диаметр шкива $d_{\text{нить}}$ с намотанной нитью. При расчетах принять решение, какое значение радиуса шкива r применять в формулах. Систематическую погрешность измерения считать равной цене деления.

Таблица 2.5.1

Параметры установки

$a, \sigma_a(\text{мм})$	$b, \sigma_b(\text{мм})$	$c, \sigma_c(\text{мм})$	$d, \sigma_d(\text{мм})$	$d_{\text{нить}}, \sigma_{d_{\text{нить}}}(\text{мм})$

3. Для определения координат тела необходимо корректно выбрать начальную точку на оси Ox (рис. 2.5.6). В расчетных формулах присутствует довольно громоздкое выражение

$$\left(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0} \right)^2.$$

Можно заметить, что если $x_1 \approx x_0$ и $x_2 \gg x_0$, то соотношение существенно упростится и станет равным примерно x_2 .

В данной установке в качестве координаты груза, имеющего форму цилиндра, следует взять координату его нижнего торца (датчик срабатывает в момент закрытия световых ворот). В качестве начальной точки x_0 груза следует взять такое его положение, когда нижний торец располагается непосредственно над лучом световых ворот (на расстоянии 1-2 мм), т.е. $x_1 \approx x_0 = 0$. Тогда координата x_2 второго датчика будет равна расстоянию между световыми воротами.

При таком выборе системы координат формула (2.5.7) примет вид

$$J = r^2 \cdot \frac{mg - M_{\text{тр}} / r}{2x_2} \cdot (t^2 - t_0^2). \quad (2.5.7a)$$

Измерить x_2 (координата второго оптического датчика), x_3 (координата нижней точки опускания груза) и массу m груза 10. Результаты записать в табл. 2.5.2. Погрешность определения координат считать равной 1 мм.

Таблица 2.5.2

Параметры эксперимента

x_0, σ_{x0} (мм)	x_1, σ_{x1} (мм)	x_2, σ_{x2} (мм)	x_3, σ_{x3} (мм)	x_4, σ_{x4} (мм)	m, σ_m (г)

4. Не устанавливая тело в держатели, аккуратно, виток к витку, намотать на шкив нить, имеющую на конце груз. Измерить диаметр шкива $d_{\text{шкив}}$ с намотанной нитью.

Освободить груз и измерить время t_0 прохождения грузом отрезка $(x_2 - x_1)$. Так как размер держателей мал, время движения невелико, то в момент удара сила натяжения нити резко возрастает и может оборваться. Поэтому измерения времени t_0 проводятся не более двух раз.

5. Закрепить в держателях тело и для каждого положения провести не менее трех раз измерения времен $t_x, t_y, t_z, t_{AG}, t_{MN}$.

Обратите внимание на поведение груза в момент прохождения нижней точки в зависимости от момента инерции исследуемого тела. Для случая максимального момента инерции тела измерить значения x_4 (верхнюю отметку подъема груза). Результаты записать в табл. 2.5.3.

Таблица 2.5.3

Результаты эксперимента

	t_0 (с)	t_x (с)	t_y (с)	t_z (с)	t_{AG} (с)	t_{MN} (с)	x_4 (мм)
1							
2							
3							
Среднее и погр.							

Обработка результатов¹

1. Для всех величин в табл. 2.5.3 рассчитать среднее арифметическое и получить оценку погрешности по формулам серии прямых измерений. Результаты записать в нижнюю строку табл. 2.5.3.

2. В соответствии с формулой (2.5.9) отношение $M_{\text{тр}}/r$ к mg равно

¹ Обработку результатов рекомендуется выполнять после измерений Упр. 2.

$$\beta = \frac{M_{\text{тр}}}{r} / mg = \frac{x_4 - x_0}{2x_3 - x_0 - x_4}. \quad (2.5.10)$$

Рассчитать коэффициент β и получить оценку погрешности по формулам для косвенных измерений.

3. Запишем расчетную формулу (2.5.7a) в виде

$$J = r^2 \cdot \frac{mg(1-\beta)}{2x_2} \cdot (t^2 - t_0^2). \quad (2.5.7b)$$

Считая коэффициент β одинаковым для всех серий измерений (т.е. не зависящим от момента инерции), получить оценки для момента инерции тела относительно всех осей и оценки погрешностей. Для сравнения провести аналогичные расчеты для $\beta=0$, т.е. пренебрегая потерями на трение. Результаты записать в табл. 2.5.4.

Таблица 2.5.4

Результаты расчетов

	$J_x, (\text{кг} \cdot \text{м}^2)$	$J_y, (\text{кг} \cdot \text{м}^2)$	$J_z, (\text{кг} \cdot \text{м}^2)$	$J_{AG}, (\text{кг} \cdot \text{м}^2)$	$J_{MN}, (\text{кг} \cdot \text{м}^2)$
$\beta=0$					
$\beta=$					
Сравнение ($\beta=$)	-	-	-		
Теория					

6. Для момента инерции J_{AG} можно записать

$$J_{AG} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma. \quad (2.5.3)$$

где косинусы рассчитываются по формулам

$$\cos^2 \alpha = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad \cos^2 \beta = \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad \cos^2 \gamma = \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (2.5.11)$$

По найденным по экспериментальным данным моментам инерции J_x, J_y, J_z относительно главных осей, рассчитать J_{AG} . Оценить погрешность. Результат записать в строку «Сравнение» таблицы 2.5.4.

Сравнить со значением J_{AG} , найденным в эксперименте.

7. Так как ось MN лежит в плоскости xz, то соотношение (2.5.3) для J_{MN} принимает вид

$$J_{MN} = J_x \cos^2 \alpha + J_z \cos^2 \gamma, \quad (2.5.12)$$

где

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Для данной оси выполнить все расчеты п.би сравнить со значением, найденным в эксперименте.

8. Рассчитать главные моменты инерции по теоретическим формулам момента инерции прямоугольного параллелепипеда:

$$J_x^{теор} = \frac{m(b^2 + c^2)}{12}, \quad J_y^{теор} = \frac{m(a^2 + c^2)}{12}, \quad J_z^{теор} = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}.$$

Рассчитать по формулам (2.5.3) и (2.5.12) моменты инерции $J_{AG}^{теор}$ и $J_{MN}^{теор}$. Результаты записать в строку «Теория» таблицы 2.5.4. Сравнить с результатами расчетов по экспериментальным данным с учетом и без учета потерь на трение. Сделать вывод о применимости модели.

Упражнение 2. Изучение тензора инерции методом колебаний.

Рассмотрим малые колебания физического маятника, представляющего собой систему из стержня 4 с дополнительным грузом 6 (рис. 2.5.3) и исследуемого тела, в качестве которого выбран прямоугольный параллелепипед (рис. 2.5.4) или цилиндр (рис. 2.5.5). Колебания происходят вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр масс исследуемого тела. Действие моментов сил тяжести, приложенных к стержню с добавочным грузом, закрепленному на нем, приводит к возникновению колебаний всей системы. В этом случае основное уравнение вращательного движения имеет вид

$$J' \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -m_0 g l \sin \varphi, \quad (2.5.13)$$

где φ — угол отклонения стержня от положения равновесия,

m_0 — масса стержня с грузом,

l — расстояние от центра масс стержня с грузом до оси вращения,

$J' = J + J_0$ — момент инерции физического маятника (J — момент инерции исследуемого тела, J_0 — момент инерции стержня с дополнительным грузом, момент инерции крепления тела считать пренебрежимо малым).

Уравнение (2.5.13) при малых φ приводится к виду:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0,$$

где $\omega_0^2 = \frac{m_0 g l}{J'}$ — частота гармонических колебаний системы.

Так как $\omega_0 = 2\pi/T$, то

$$J' = \frac{m_0 g l}{4\pi^2} T^2. \quad (2.5.14)$$

Определив период T_0 колебаний установки без исследуемого тела, по (2.5.14) можно найти момент инерции J_0 маятника без тела.

Для момента инерции исследуемого тела относительно фиксированной оси вращения получаем:

$$J = J' - J_0 = \frac{m_0 g l}{4\pi^2} (T^2 - T_0^2). \quad (2.5.15)$$

По этой формуле можно определять моменты инерции тела относительно различных осей, проходящих через центр масс тела.

Измерения

1. Измерить линейкой или штангенциркулем размеры изучаемого тела – диаметр D и высоту h цилиндра. Систематическую погрешность измерения считать равной цене деления. Результаты измерений и массу m цилиндра (указана на установке) записать в табл. 2.5.5.

Параметры параллелограмма измерены ранее (табл. 2.5.1).

2. Найти центр масс стержня с закрепленным на нем грузом (способ предложить самостоятельно) и измерить расстояние l от центра масс до оси вращения. Результаты измерений и массу m_0 системы (указана на установке) записать в табл. 2.5.5.

Таблица 2.5.5

Параметры установки

$D, \sigma_D(\text{мм})$	$h, \sigma_h(\text{мм})$	$m, \sigma_m(\text{г})$	$l, \sigma_l(\text{мм})$	$m_0, \sigma_{m_0}(\text{г})$

3. Закрепить стержень на оси вращения. Не устанавливая тело в держатели, измерить время t_0 для $n = 3-5$ колебаний маятника. Повторить измерения 3 раза.

4. Установить в держатели исследуемое тело (прямоугольный параллелепипед или цилиндр) относительно одной из главных осей. Повторить измерения аналогично п.3.

5. Повторить измерения для всех главных осей исследуемых тел, а также для одной из диагональных осей для каждого из тел. Результаты всех измерений записать в табл. 2.5.6.

Таблица 2.5.6

Результаты эксперимента

	$n =$	параллелепипед				цилиндр		
	$t_0(\text{с})$	$t_x(\text{с})$	$t_y(\text{с})$	$t_z(\text{с})$	$t_{AG}(\text{с})$	$t_z(\text{с})$	$t_y(\text{с})$	$t_{MN}(\text{с})$
1								
2								
3								
Среднее и погр.								

Обработка результатов²

1. Для всех величин в табл. 2.5.6 рассчитать среднее арифметическое и получить оценку погрешности по формулам серии прямых измерений. Результаты записать в нижнюю строку табл. 2.5.6.

2. Получить оценки для периодов колебаний в каждой серии измерений. Оценить погрешность. Результаты записать в табл. 2.5.7.

Таблица 2.5.7

Результаты расчета периодов колебаний

	параллелепипед					цилиндр		
	$T_0(c)$	$T_x(c)$	$T_y(c)$	$T_z(c)$	$T_{AG}(c)$	$T_z(c)$	$T_y(c)$	$T_{MN}(c)$
период								
погр.								

3. По формуле (2.5.15) получить оценку моментов инерции J обоих тел для всех осей. Результаты записать в табл. 2.5.8.

Таблица 2.5.8

Результаты расчетов

	параллелепипед				цилиндр		
	$J_x,$ (кг·м ²)	$J_y,$ (кг·м ²)	$J_z,$ (кг·м ²)	$J_{AG},$ (кг·м ²)	$J_z,$ (кг·м ²)	$J_x,$ (кг·м ²)	$J_{MN},$ (кг·м ²)
J							
Сравнение	-	-	-		-	-	
Теория							

4. В соответствии с рис. 2.5.5 для цилиндра ось MN лежит в плоскости уз, поэтому соотношение (2.5.3) для J_{MN} цилиндра принимает вид

$$J_{MN} = J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma, \quad (2.5.16)$$

где

$$\cos \beta = \frac{D}{\sqrt{D^2 + h^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{h}{\sqrt{D^2 + h^2}}.$$

По найденным в эксперименте моментам инерции J_y, J_z относительно главных осей, рассчитать J_{MN} . Оценить погрешность. Результат записать в строку «Сравнение» таблицы 2.5.8.

Сравнить со значением J_{MN} , найденным в эксперименте.

² Обработку результатов рекомендуется выполнять после измерений Упр. 2.

5. Для прямоугольного параллелограмма оценку момента инерции J_{AG} получить по схеме, предложенной в Упр.1. Сравнить со значением J_{AG} , найденным в эксперименте.

6. Рассчитать главные моменты инерции по теоретическим формулам момента инерции цилиндра:

$$J_x^{теор} = J_y^{теор} = \frac{mD^2}{16} + \frac{mh^2}{12}, \quad J_z^{теор} = \frac{mD^2}{8}.$$

Рассчитать по формуле (2.5.16) момент инерции $J_{MN}^{теор}$ цилиндра. Результаты записать в строку «Теория» таблицы 2.5.8.

Для прямоугольного параллелепипеда воспользоваться результатами расчетов Упр.1 (таблица 2.5.4).

Сравнить с результатами расчетов по экспериментальным данным. Сделать вывод о применимости модели.

Основные итоги работы

В результате работы определяются моменты инерции двух тел относительно главных осей, а также относительно оси AG (для параллелепипеда) и оси MN (для цилиндра). Полученные результаты сравниваются с рассчитанными по теоретическим формулам.

Контрольные задания и вопросы

1. Напишите уравнение моментов. Каков смысл входящих в него величин?
2. Как связаны момент импульса и угловая скорость? Что такое тензор инерции?
3. Компоненты тензора инерции для простейших систем.
4. Что такое главные оси? Что такое центральные оси? Приведите примеры.
5. Как направлены векторы угловой скорости и момента количества движения при вращении тела вокруг закрепленной оси:
 - а) если ось вращения совпадает с одной из главных осей;
 - б) если ось вращения не совпадает ни с одной из главных осей?
6. Как связаны компоненты тензора инерции и момент инерции относительно фиксированной оси?

Литература.

1. В.А.Алешкевич, Л.Г.Деденко, В.А.Караваяев. Механика (Университетский курс общей физики) – М.: Издательский центр «Академия», 2004. Лекция 12.
2. А.Н.Матвеев. Механика и теория относительности – М.: Изд.дом «Оникс 21 век», 2003. §32.