*Лабораторная работа 112*

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ ПРОСТОЙ ФОРМЫ

## Цель работы

*Экспериментальное определение моментов инерции тел простой формы.*

## Идея эксперимента

Идея эксперимента состоит в использовании связи между периодом колебаний крутильного маятника и его моментом инерции. Исследуемое тело является составной частью крутильного маятника. Измерения периода колебаний маятника дают возможность определить коэффициент жесткости пружины и моменты инерции исследуемых тел.

## Теоретическое введение

***Абсолютно твердое тело*** – тело, расстояние между двумя любыми точками которого не изменяется в условиях данной задачи.

В дальнейшем вместо термина «абсолютно твердое тело» будет использоваться термин «твердое тело».

**Кинематика твердого тела.** Любое произвольное движение твердого тела можно представить как суперпозицию поступательного и вращательного движений.

***Поступательное движение*** твердого тела – движение, при котором прямая, соединяющая любые две точки тела, перемещается параллельно самой себе. В этом случае в любой момент времени скорости всех точек тела одинаковы, а его движение можно характеризовать движением лишь одной точки тела. Анализ такого движения проводится по законам, справедливым для движения материальной точки.

***Плоское движение*** твердого тела – движение, при котором траектории всех точек тела лежат в параллельных плоскостях.

***Вращательное движение*** твердого тела вокруг неподвижной оси – плоское движение, при котором точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной оси, называемой ***осью вращения***.

При вращении твердого тела проекция радиус-вектора каждой его точки на плоскость, перпендикулярную оси вращения, за малый промежуток времени $\mathrm{d}t$ поворачивается на один и тот же угол $\mathrm{d}\varphi$. Если ввести в рассмотрение вектор $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$, длина которого равна углу поворота $\mathrm{d}\varphi$, а направление определяется в соответствии с правилом правого винта и совпадает с осью вращения, то скорость изменения угла

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t} \qquad (1)$$

называется ***угловой скоростью***.

Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ связана с линейной скоростью любой точки тела $\boldsymbol{\upsilon}_i$ соотношением:

$$\boldsymbol{\upsilon}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i, \qquad (2)$$

где $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор рассматриваемой точки.

Изменение $\boldsymbol{\omega}$ со временем определяется величиной ***углового ускорения***

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t^2}. \qquad (3)$$

Если совместить начало системы координат, движущейся поступательно, с какой-либо точкой А твердого тела (точкой отсчета), то скорость любой другой точки В тела можно представить как векторную сумму скорости движения системы координат $\boldsymbol{\upsilon}_0$ (скорость точки А) и $\boldsymbol{\upsilon}'$ – относительной скорости точки $B$:

$$\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}_0 + \boldsymbol{\upsilon}'. \tag{4}$$

В качестве точки отсчета может быть выбрана любая точка твердого тела или пространства (если положение этой точки относительно твердого тела не меняется со временем), поэтому и разложение (4) неоднозначно. Однако за малый промежуток времени d$t$ угол поворота d$\boldsymbol{\varphi}$ не зависит от выбора точки отсчета и является одинаковым для всех точек твердого тела.

С учетом (2) выражение (4) может быть представлено в следующем виде:

$$\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость вращения твердого тела (не зависящая от выбора точки отсчета), $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, начало которого лежит в точке А. Поступательная скорость тела $\boldsymbol{\upsilon}_0$ зависит от выбора точки отсчета. В частности, точку А можно выбрать так, чтобы $\boldsymbol{\upsilon}_0$ была равна нулю. Для плоского движения твердого тела ось вращения, проходящая через точку А, является *мгновенной осью вращения.*

***Мгновенная ось*** вращения твердого тела – ось, относительно которой поступательная скорость тела в данный момент времени равна нулю.

Поэтому плоское движение твердого тела в каждый момент времени может быть представлено как вращательное движение вокруг некоторой мгновенной оси.

**Уравнение моментов. Момент инерции относительно закрепленной оси**. Рассмотрим твердое тело как систему жестко связанных между собой материальных точек. Уравнение движения для $i$-й материальной точки массой $m_i$ в лабораторной системе отсчета имеет вид:

$$m_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\upsilon}_i}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{f}_{ij}, \tag{6}$$

где $\mathbf{F}_i$ – сумма всех внешних сил, действующих на $i$-ю материальную точку, $\mathbf{f}_{ij}$ – сила, действующая на $i$-ю материальную точку со стороны $j$-й материальной точки, т.е. внутренняя сила. Будем полагать, что силы взаимодействия являются центральными, то есть векторы $\mathbf{f}_{ij}$ и $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ коллинеарны.

Умножим обе части уравнения движения (6) векторно на радиус-вектор $\mathbf{r}_i$:

$$m_i \mathbf{r}_i \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\upsilon}_i}{\mathrm{d}t} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}. \tag{7}$$

С учетом того, что $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\upsilon}_i\right) = \mathbf{r}_i \times \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\upsilon}_i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{\upsilon}_i = \mathbf{r}_i \times \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\upsilon}_i}{\mathrm{d}t}$ (так как $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\upsilon}_i$, то $\dfrac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \boldsymbol{\upsilon}_i = 0$), в результате суммирования по всем материальным точкам системы получим:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\upsilon}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}. \tag{8}$$

Величина $\mathbf{L}=\sum_i m_i\mathbf{r}_i\times\boldsymbol{\upsilon}_i=\sum_i\mathbf{r}_i\times\mathbf{p}_i$ ($\mathbf{p}_i$ – импульс $i$-й материальной точки) называется ***моментом импульса*** системы относительно некоторой неподвижной точки, выбранной в качестве начала координат; $\mathbf{M}=\sum_i\mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_i$ – ***момент внешних сил*** относительно той же точки; величина $\sum_i\sum_{j\neq i}\mathbf{r}_i\times\mathbf{f}_{ij}$ является моментом всех внутренних сил. Выражение для момента внутренних сил можно преобразовать:

$$\sum_i\sum_{j\neq i}\mathbf{r}_i\times\mathbf{f}_{ij}=\frac{1}{2}\sum_i\sum_{j\neq i}\left(\mathbf{r}_i\times\mathbf{f}_{ij}+\mathbf{r}_j\times\mathbf{f}_{ji}\right)=\frac{1}{2}\sum_i\sum_{j\neq i}\left(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j\right)\times\mathbf{f}_{ij}. \quad (9)$$

Учитывая, что для центральных сил $\left(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j\right)\times\mathbf{f}_{ij}=0$, уравнение (8) (с учетом введенных выше обозначений) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{M}\,. \quad (10)$$

Уравнение (10) называется ***уравнением моментов***.

Если твердое тело вращается вокруг закрепленной оси, то векторное уравнение (10) может быть сведено к скалярному. В частности, если ось вращения совпадает с осью координат $Z$, то

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=M_z\,, \quad (11)$$

где $L_z$ и $M_z$ – соответственно проекции $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$ на ось $Z$.

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси $Z$ с угловой скоростью ω скорость каждой материальной точки $m_i$ тела равна $\upsilon_i=\omega\rho_i$ где $\rho_i$ – ее расстояние до оси $Z$. Проекции моментов импульса на ось $Z$ для этих точек равны $L_{iz}=\rho_i m_i\upsilon_i=\omega m_i\rho_i^2$. Так как ω одинакова для всех точек твердого тела, момент импульса всего тела относительно оси $Z$ равен

$$L_z=\sum_i L_{iz}=\omega\sum_i m_i\rho_i^2=\omega J\,. \quad (12)$$

Величину

$$J=\sum_i m_i\rho_i^2 \quad (13)$$

называют ***моментом инерции твердого тела относительно неподвижной оси***, который является мерой инертности тела при вращательном движении.

Подставляя (12) в (11), получаем ***основное уравнение вращательного движения*** тела вокруг закрепленной оси $z$:

$$\frac{\mathrm{d}(\omega J)}{\mathrm{d}t}=M_z\,. \quad (14)$$

Поскольку взаимное расположение точек в твердом теле не меняется со временем, момент инерции является постоянной величиной, и уравнение (14) может быть представлено в следующем виде:

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=J\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=J\varepsilon=M_z\,. \quad (15)$$

При непрерывном распределении массы по объему суммирование в выражение (13) следует заменить на интегрирование по всему объему тела:

$$J = \int \rho^2 \mathrm{d}m\,. \qquad (16)$$

Если известен момент инерции $J_0$ относительно некоторой оси, проходящей через центр масс – точку с радиусом-вектором $\mathbf{R} = \frac{1}{m}\sum_i m_i \mathbf{r}_i$ ($m$ – масса тела, $m_i$ – масса материальной точки тела, $\boldsymbol{r}_i$ – ее радиус-вектор), то в соответствии с ***теоремой Гюйгенса–Штейнера*** момент инерции тела $J$ относительно любой другой оси, параллельной первоначальной и находящейся на расстоянии $a$ от нее, равен

$$J = J_0 + ma^2\,. \qquad (17)$$

## Крутильный маятник

Рассмотрим случай, когда тело закреплено на оси и совершает крутильные колебания под действием спиральной пружины (рис. 1). В соответствии с законом Гука, при отклонениях от положения равновесия вращающий момент со стороны упругой пружины равен

$$M = -D\varphi\,, \qquad (18)$$

где $D$ – жесткость пружины.

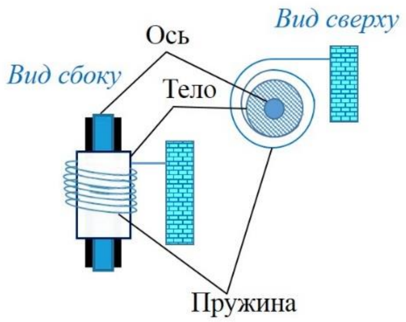


Рис. . Схематическое представление крутильного маятника.

С учетом (15) и (18) можно записать уравнение движения тела в виде:

$$J\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + D\varphi = 0\,, \qquad (19)$$

или

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{D}{J}\varphi = 0\,. \qquad (20)$$

Это уравнение свободных гармонических колебаний с собственной частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}}\,. \qquad (21)$$

и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}\,. \qquad (22)$$

Рассмотрим колебания крутильного маятника, в состав которого входят два одинаковых груза, закрепленных на стержне на одинаковых расстояниях $a$ от оси вращения. С учетом теоремы Гюйгенса–Штейнера момент инерции маятника равен

$$J = J_0 + J_\text{с} + 2m_\text{гр}a^2 + 2J_\text{гр}\,, \qquad (23)$$

где $J_0$ – момент инерции той части маятника, на которой крепятся все остальные элементы кроме грузов; $J_с$ – момент инерции стержня; $J_{гр}$ – момент инерции груза относительно его центра масс; $m_{гр}$ – масса груза. С учетом (23) период колебаний (см. (22)) равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + J_с + 2m_{гр}a^2 + 2J_{гр}}{D}}\,, \qquad (24)$$

т.е. квадрат периода колебаний линейно зависит от квадрата расстояния $a$:

$$T^2 = 4\pi^2\left(\frac{J_0 + J_с + 2J_{гр}}{D}\right) + \frac{8\pi^2 m_{гр}}{D}a^2\,. \qquad (25)$$

На рис. 2 графически представлена зависимость $T^2$ от $a^2$. Зная эту зависимость, можно определить коэффициент жесткости пружины $D$.

Если теперь вместо стержня с грузами в состав маятника включить тело с неизвестным моментом инерции $J_x$, то период колебаний такого маятника будет равен

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + J_x}{D}}\,, \qquad (26)$$

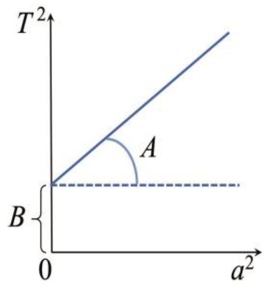

Рис. 2. Зависимость $T^2$ колебаний от $a^2$.

откуда

$$J_x = \frac{T_1^2 D}{4\pi^2} - J_0\,. \qquad (26)$$

## Экспериментальная установка

Установка (рис. 3) состоит из крутильного *маятника* 1 на *основании* 2, *фотодатчика* (*рамки с фотоэлементами*) 3, *цифрового счетчика* 4 и *набора образцов*, для которых производят измерения моментов инерции. В наборе съемных образцов имеются стержень с *цилиндрическими грузами* 5, диск с отверстиями, расположенными на разном расстоянии от центра. Образцы крепятся на вертикальной оси маятника. Крутильный маятник может вращаться вокруг этой вертикальной оси. Пружина маятника изготовлена из упругой стальной проволоки.

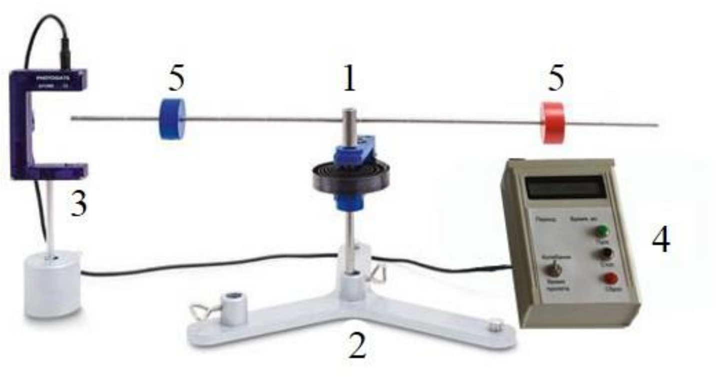

Рис. 3. Экспериментальная установка.

Система измерения времени включает в себя *фотодатчик 3* и электронный *таймер 4*. Запуск таймера осуществляется нажатием кнопки «Пуск», остановка — кнопкой «Стоп». Перед началом новых измерений показания таймера обнуляются нажатием кнопки «Сброс».

## Проведение эксперимента

*Упражнение 1.* **Определение коэффициента жесткости пружины и момента инерции тела маятника.**

На маятнике закрепляют стержень с грузами. Проводят измерения периода колебаний маятника для различных положений грузов. Строят график зависимости квадрата периода колебаний от квадрата расстояния *a*.

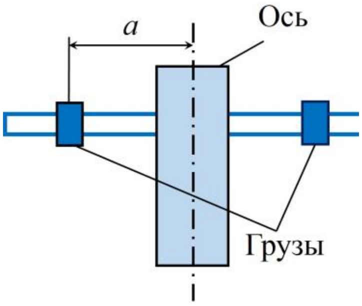


Рис. 4. Положение грузов на стержне крутильного маятника.

### *Измерения*

1. Определите массу стержня $m_с$, массу груза $m_{гр}$, длину стержня $l_с$, радиус отверстия $R_1$, внешний радиус $R_2$ и длину цилиндрических грузов $l_{гр}$, закрепленных на нем. Данные запишите в табл. 1.

Таблица 1

**Параметры экспериментальной установки**

| $m_с$, кг | $m_{гр}$, кг | $l_с$, м | $R_1$, м | $R_2$, м | $l_{гр}$, м |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

2. Закрепите на маятнике стержень с цилиндрическими грузами, расположив его симметрично относительно оси вращения (как показано на рис. 4.).

3. Установите грузы симметрично на стержне в положении, наиболее близком к оси. Запишите расстояние *a* от грузов до оси (см. рис. 4.) в табл. 2.

Таблица 2

**Экспериментальные данные**

| *l*, м | *a*, м | *k* | $t_n$, с | $\bar{t}$, с | $S_{\bar{t}}$, с |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | | | |
| | | 2 | | | |
| | | 3 | | | |
| | | **1** | | | |
| | | 2 | | | |
| | | 3 | | | |
| … | | | | | |

4. Измерьте время $t_n$ $n = 2$ или $n = 3$ колебания. Угловые амплитуды колебаний маятника должны быть $\sim 15°$. Эти измерения провести $k = 3$ раза. Данные записать в табл. 2.

5. Проведите измерения времени колебаний $t_n$ для 6 положений грузов *l* (для каждого *l* измерения провести $k = 3$ раза),

перемещая их каждый раз на 5 см к концам стержня. Результаты записать в табл. 2.

### *Обработка результатов*

1. Для каждого из положений груза вычислите среднее арифметическое значение $\bar{t}$ времени $n$ = 2 или $n$ = 3 колебания:

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^{k} t_i}{k}.$$

2. Для каждого из положений груза вычислите случайную погрешность $S_{\bar{t}}$ среднего арифметического по формуле:

$$S_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum (t_i - \bar{t})^2}{k(k-1)}}.$$

Результаты вычислений по пп. 1, 2 запишите в табл. 2.

3. Для каждого положения грузов определите значения $a$, $a^2$ и погрешность $S_{a^2}$.

4. Рассчитайте суммарную погрешность $\sigma_{\pm\Sigma}$ по формуле

$$\sigma_{t\Sigma} = \sqrt{S_{\bar{t}}^2 + \sigma_t^2},$$

где $\sigma_t$ – приборная погрешность таймера, равная 2% от результата измерения.

5. Определите период колебаний $\hat{T}$ и погрешность $S_{\hat{T}}$ по формулам: $\hat{T} = \dfrac{\bar{t}}{n}$, $\quad S_{\hat{T}} = \dfrac{\sigma_{t\Sigma}}{n}$.

Результаты пп. 3–5 запишите в табл. 3.

Таблица 3

**Вычисленные значения $a^2$, $\hat{T}$, $A$, $B$ и их погрешности**

| $a^2$, м$^2$ | $S_{a^2}$ м$^2$, | $\hat{T}$, с | $S_{\hat{T}}$, с | $A$, с$^2$/м$^2$ | $S_A$, с$^2$/м$^2$ | $B$, с$^2$ | $S_B$, с$^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |

6. Постройте график зависимости $T^2$ от $a^2$ и найти его линейную аппроксимацию методом наименьших квадратов. Определить коэффициенты $A$ и $B$ в формуле $T^2=B+Aa^2$. Определить погрешности значений $A$ и $B$. Результаты записать в табл. 3.

7. Из (25) следует, что коэффициент жесткости пружины равен

$$D = 4\pi^2 \frac{2m_{\text{гр}}}{A}.$$

Вычислите коэффициент жесткости пружины $D$.

8. Рассчитайте стандартное отклонение $S_D$ для коэффициента жесткости $D$ по формуле для косвенных измерений (считая, что $\pi$ =3,14159… без погрешностей)

$$S_D = \sqrt{\left(\frac{\partial D}{\partial m_{\text{гр}}}\right)^2 \cdot S^2_{m_{\text{гр}}} + \left(\frac{\partial D}{\partial A}\right)^2 \cdot S^2_A}\ .$$

Результаты в пп. 6, 7 запишите в табл. 4.

Таблица 4

**Определенные значения коэффициента жесткости пружины *D* и моменты инерции стержня и грузов**

| $D$, $\text{Н} \cdot \text{м}$ | $S_D$, $\text{Н} \cdot \text{м}$ | $J_c$, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ | $S_{J_c}$, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ | $J_{\text{гр}}$, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ | $S_{J_{\text{гр}}}$, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ | $J_c^{\text{эксп}}$, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ | $S_{J_c^{\text{эксп}}}$, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

9. Определите моменты инерции стержня и грузов по формулам (см. ***Приложение***):

$$J_c = \frac{1}{12} m_c l_c^2 ,$$

$$J_{\text{гр}} = \frac{1}{12} m_{\text{гр}} l_{\text{гр}}^2 + \frac{1}{4} m_{\text{гр}} \left(R_1^2 + R_2^2\right)$$

и соответствующие стандартные отклонения. Результаты запишите в табл. 4.

10. В соответствии с (25) $B = 4\pi^2 \left(J_0 + J_{\text{c}} + 2J_{\text{гр}}\right) / D$. Пренебрегая моментом инерции маятника $J_0$ момент инерции стержня можно определить как:

$$J_{\text{c}}^{\text{эксп}} = \frac{BD}{4\pi^2} - 2J_{\text{гр}} .$$

Определите значение момента инерции стержня $J_c^{\text{эксп}}$ и его стандартное отклонение. Результаты вычислений записать в табл. 4.

11. Сравните экспериментальные и теоретические значения моментов инерции стержня. С этой целью отметьте значения $J_c^{\text{эксп}}$ и $J_c^{\text{теор}}$ (с учетом их погрешностей) на числовой оси (см. рис. 5). По степени перекрывания интервалов сделайте вывод о точности метода определения моментов инерции тел с помощью крутильного маятника.

## *Упражнение 2.* Проверка теоремы Гюйгенса–Штейнера и определение момента инерции тонкого диска.

В этом упражнении проводится измерение момента инерции тонкого диска.

### *Измерения*

1. Определите массу (путем взвешивания) и геометрические размеры диска (радиус *R* и толщина *H*). Оценить погрешности измерений. Результаты запишите в табл. 5.

Таблица 5

**Экспериментальные данные**

| Тело | $m$, кг | $S_m$, кг | $R$, м | $S_R$, м | $H$, м | $S_H$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Диск | | | | | | |

2. Закрепите диск по центру на оси маятника. Измерьте время $t_n$ $n = 2$ полных колебаний. Измерения провести $k = 3$ раза. Полученные результаты запишите в табл. 6.

Таблица 6

**Экспериментальные данные**

| Расстояние от оси до центра, см | $k$ | $t_n$, с | $\bar{t}$, с | $S_{\bar{t}}$, с | $\hat{T}$, с | $S_{\hat{T}}$, с |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | |
| | 2 | | | | | |
| | 3 | | | | | |
| 4 | 1 | | | | | |
| | 2 | | | | | |
| | 3 | | | | | |
| 8 | 1 | | | | | |
| | 2 | | | | | |
| | 3 | | | | | |
| 10 | 1 | | | | | |
| | 2 | | | | | |
| | 3 | | | | | |
| 12 | 1 | | | | | |
| | 2 | | | | | |
| | 3 | | | | | |
| 14 | 1 | | | | | |
| | 2 | | | | | |
| | 3 | | | | | |

3. Аналогично проведите измерения для диска, закрепив его на расстоянии 4, 8, 10, 12, 14 см от центра. Данные измерений записать в табл. 6.

### *Обработка результатов*

1. Для каждого из тел вычислите среднее арифметическое значение $\bar{t}$ времени $n = 2$ полных колебаний, случайную погрешность $S_{\bar{t}}$ среднего арифметического (см. пп. 1,2 *упр.*1). Результаты запишите в табл. 6.

2. Определите период колебаний $\hat{T}$ и погрешность $S_{\hat{T}}$ (как в п. 5 *упр.* 1). Результаты запишите в табл. 6.

3. По формуле $J^{эксп} = \dfrac{T_0^2 D}{4\pi^2}$ вычислите значение момента инерции диска, где $T_0$ период колебаний диска, когда он закреплен по центру. Вычислить стандартное отклонение и запишите значение в табл. 7.

Таблица 7

**Вычисленные значения *J* и их погрешности**

| Тело | $J^{эксп}$, $кг \cdot м^2$ | $S_{J^{эксп}}$, $кг \cdot м^2$ | $J^{теор}$, $кг \cdot м^2$ | $S_{J^{теор}}$, $кг \cdot м^2$ |
|---|---|---|---|---|
| Диск | | | | |

4. Рассчитайте теоретическое значение момента инерции диска по формуле (см. ***Приложение*** ):

$$J_д^{теор} = \frac{1}{2} m_д R_д^2 .$$

Вычислите стандартное отклонение и запишите в табл. 7.

5. Сравните экспериментальные и теоретические значения моментов инерции диска. С этой целью отметить значения $J_{эксп}$ и $J_{теор}$ (с учетом их погрешностей) на числовой оси (см. рис. 5). По степени перекрывания интервалов сделайте вывод о точности метода определения моментов инерции тел с помощью крутильного маятника.

6. Постройте график зависимости $T^2$ от $a^2$, где $a$ – расстояние от оси вращения до оси, проходящей через центр масс. Убедитесь, что график линейный, и как следствие выполняется теорема Гюйгенса–Штейнера.

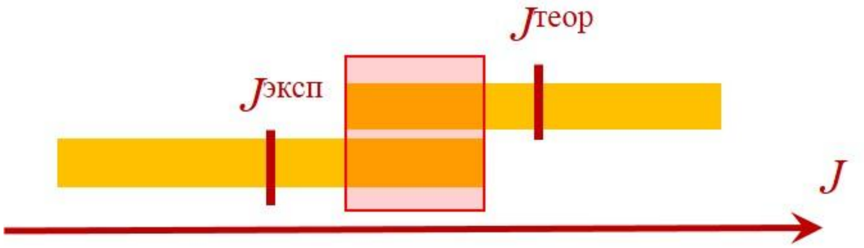


Рис. 5. Сравнение экспериментальных и теоретических значений моментов инерции.

## Основные итоги работы

*В процессе выполнения работы должны быть определены коэффициент жесткости пружины, моменты инерции стержня и диска и проведено сравнение последних двух значений со значениями, рассчитанными теоретически. Кроме того, должна быть проведена проверка выполнения теоремы Гюйгенса–Штейнера.*

## Контрольные вопросы

1. Что такое момент инерции тела?
2. Что такое главные оси инерции? Центральные оси? Привести примеры.
3. Что такое момент инерции тела относительно неподвижной оси?
4. Выведите формулы для вычисления главных центральных моментов инерции следующих тел: тонкая палочка, тонкий диск, тонкие прямоугольная и треугольная пластины, цилиндр, шар, параллелепипед.
5. Сформулируйте и докажите теорему Гюйгенса–Штейнера.

## *Приложение.* ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ

### 1. *Момент инерции тонкого стержня относительно перпендикулярной ему оси, проходящей через его середину.*

Пусть тонкий однородный стержень имеет длину $l$ и массу $m$. Выделим на нем малый элемент длиной d$x$ (рис. 1) и массой d$m$ = ($m$/$l$)d$x$. Если этот элемент находится на расстоянии $x$ от оси, то его вклад в момент инерции равен $\mathrm{d}J = x^2\mathrm{d}m$, т.е.

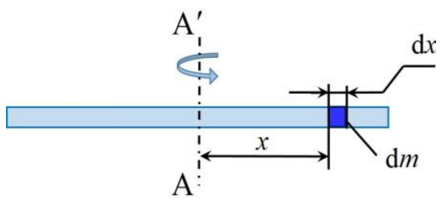


Рис. 1. Представление стержня, вращающегося вокруг оси, проходящей через его середину, в виде совокупности малых элементов d$m$.

$$\mathrm{d}J = \frac{m}{l}x^2\mathrm{d}x.$$

Интегрируя по $x$ в пределах от $-l/2$ до $l/2$, получим

$$J = \int\limits_{-l/2}^{l/2} \frac{m}{l}x^2\mathrm{d}x = \frac{ml^2}{12}. \qquad (1)$$

Эту формулу можно получить и другим способом – с помощью метода подобия. Будем считать, что рассматриваемый стержень состоит из двух половин (рис. 2). Каждая из них имеет массу $m/2$ и длину $l/2$. Момент инерции стержня зависит от его массы, длины и положения оси вращения. Пусть

$$J = kml^2, \qquad (2)$$

где $k$ – неизвестный безразмерный коэффициент.

При вращении вокруг оси AA′ момент инерции для каждой из половин стержня можно найти, используя (2) и теорему Гюйгенса – Штейнера:

$$J_1 = k\frac{m}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{l}{4}\right)^2. \qquad (3)$$

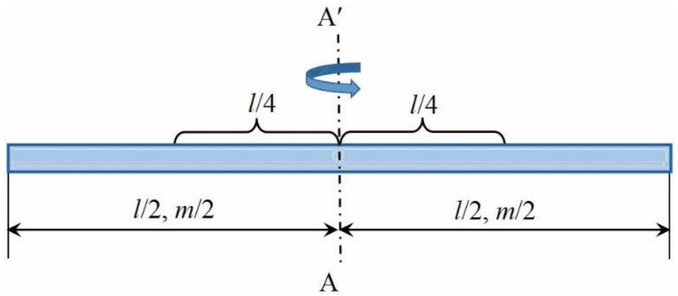


Рис. 2. К определению момента инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через его середину прямой с помощью метода подобия.

Полный момент инерции стержня равен

$$J = 2J_1 = 2\left(k\frac{m}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{l}{4}\right)^2\right). \qquad (4)$$

Приравнивая (2) и (4), находим:

$$2k\frac{m}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + 2\frac{m}{2}\left(\frac{l}{4}\right)^2 = kml^2 \qquad (5)$$

или $\frac{k}{4}+\frac{1}{16}=k$, откуда

$$k=\frac{1}{12}, \quad (6)$$

т.е. $J=\frac{ml^2}{12}$, что совпадает с (1).

**2. *Моменты инерции тонкого диска относительно его главных центральных осей.***

Для расчета моментов инерции тонкого диска массой $m$ и радиусом $R$ выберем систему координат так, чтобы ее оси совпадали с главными центральными осями (рис. 3). Определим момент инерции тонкого однородного диска относительно оси $z$, перпендикулярной к плоскости диска. Рассмотрим достаточно тонкое кольцо с внутренним радиусом $r$ и наружным $r$ + d$r$. Площадь такого кольца d$s$ = 2$\pi r$d$r$, а его масса $\mathrm{d}m=\frac{m\mathrm{d}s}{S}=2m\frac{r\mathrm{d}r}{R^2}$, где $S = \pi R^2$ – площадь всего диска. Момент инерции тонкого кольца равен d$J$ = d$mr^2$. Момент инерции всего диска определяется интегралом:

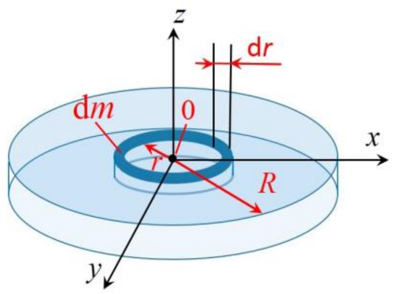


Рис. 3. Выбор системы координат и представление диска в виде набора тонких колец.

$$J_z=\int r^2\mathrm{d}m=\frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3\mathrm{d}r=\frac{mR^2}{2}. \quad (7)$$

Если выделить малый элемент диска массой $\delta m$, то его момент инерции $\delta J_z$ относительно оси $z$ равен

$$\delta J_z=\delta m\left(x^2+y^2\right), \quad (8)$$

т.е.

$$\delta J_z=\delta m x^2+\delta m y^2=\delta J_x+\delta J_y, \quad (9)$$

где $\delta J_x$, $\delta J_y$ – моменты инерции этого элемента относительно осей $x$ и $y$. Для определения $J_x$ воспользуемся симметрией диска ($J_x = J_y$) и соотношением (9). При этом из (9) получаем:

$$J_z=2J_x, \quad (10)$$

откуда

$$J_x=J_y=\frac{mR^2}{4}. \quad (11)$$