

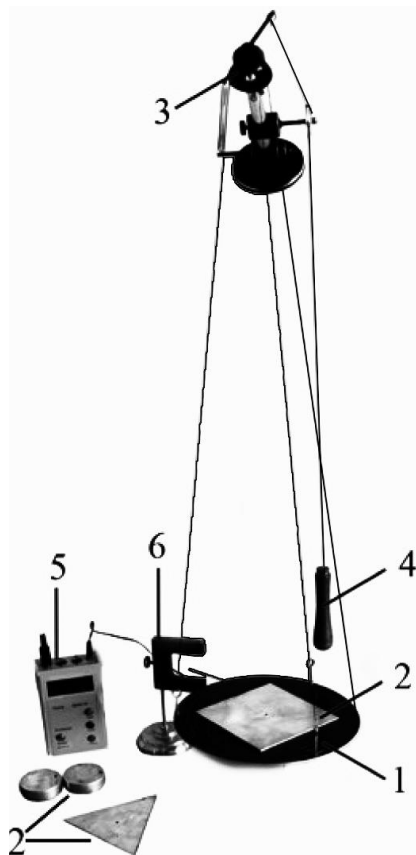


**Лабораторный практикум
по ФИЗИКЕ**

МЕХАНИКА

Задача № 111

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ
ПРОСТОЙ ФОРМЫ И ПРОВЕРКА ТЕОРЕМЫ
ГЮЙГЕНСА – ШТЕЙНЕРА МЕТОДОМ
КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ**



МОСКВА 2024

Введение

Изучение движения твердого тела проводится в предположении, что тело является *абсолютно твердым*, т.е. расстояние между двумя любыми точками тела не меняется.

В дальнейшем вместо термина «абсолютно твердое тело» будет использоваться термин «твердое тело».

Кинематика твердого тела. Любое движение твердого тела можно представить как суперпозицию поступательного и вращательного движений.

При *поступательном движении* прямая, проходящая через любые две точки тела, перемещается параллельно самой себе. В этом случае в каждый момент времени скорости всех точек тела одинаковы, поэтому достаточно знать характер движения лишь одной точки тела. Анализ такого движения сводится к анализу движения материальной точки.

При *вращательном движении* твердого тела вокруг неподвижной оси точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на этой оси, называемой *осью вращения*. При таком движении все точки твердого тела за малый промежуток времени dt поворачиваются вокруг оси на один и тот же угол $d\varphi$.

Если ввести в рассмотрение аксиальный вектор $d\varphi$, модуль которого равен углу поворота $d\varphi$, а направление определяется в соответствии с правилом правого винта и совпадает с осью вращения, то скорость изменения угла будет равна

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.1)$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}$ называется *угловой скоростью*.

Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ связана с линейной скоростью \mathbf{v}_i i -й точки тела соотношением

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i, \quad (2.2)$$

где \mathbf{r}_i — радиус-вектор.

Производная от $\boldsymbol{\omega}$ по времени называется *угловым ускорением*

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}. \quad (2.3)$$

Совместим начало поступательно движущейся системы координат с какой-либо точкой A твердого тела (точкой отсчета). Тогда в лабораторной системе отсчета скорость любой другой точки B тела представима в виде векторной суммы скорости движения системы координат \mathbf{v}_0 (скорость точки A) и относительной скорости \mathbf{v}' точки B :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'. \quad (2.4)$$

В качестве точки отсчета может быть выбрана любая точка твердого тела или пространства (если положение этой точки относительно твердого тела не меняется со временем). Поскольку угол поворота $d\phi$ за малый промежуток времени dt не зависит от выбора точки отсчета и одинаков для всех точек твердого тела, то с учетом (2.1.) и (2.2) выражение (2.4) может быть представлено в следующем виде:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (2.5)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость вращения твердого тела (не зависит от выбора точки отсчета), \mathbf{r} — радиус-вектор с началом в точке А. Скорость поступательного движения тела \mathbf{v}_0 зависит от выбора точки отсчета. В частности, точку А можно выбрать так, чтобы \mathbf{v}_0 была равна нулю.

Плоское движение твердого тела — движение, при котором траектории всех материальных точек тела лежат в параллельных плоскостях. В случае плоского движения твердого тела ось вращения, проходящая через точку А, является *мгновенной осью вращения*.

Мгновенная ось вращения твердого тела — ось, относительно которой поступательная скорость тела в данный момент времени равна нулю. Поэтому плоское движение твердого тела в каждый момент времени может быть представлено как вращательное движение относительно некоторой мгновенной оси.

Уравнение моментов. Момент инерции относительно неподвижной оси. Рассмотрим движение твердого тела как движение системы жестко связанных между собой точек. В лабораторной системе отсчета уравнение движения для i -й материальной точки массой m_i имеет вид:

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{f}_{ij}, \quad (2.6)$$

где \mathbf{F}_i — сумма всех внешних сил, действующих на i -ю материальную точку, \mathbf{f}_{ij} — сила, действующая на i -ю материальную точку со стороны j -й материальной точки, т.е. внутренняя сила. Будем полагать, что силы взаимодействия являются центральными, то есть векторы \mathbf{f}_{ij} и $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ коллинеарны.

Умножим векторно обе части уравнения (2.6) на радиус-вектор \mathbf{r}_i :

$$m_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}. \quad (2.7)$$

Учтем, что $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{v}_i = \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$ (так как $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i$, то

$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{v}_i = 0$). Суммируя по всем материальным точкам системы, получим

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}. \quad (2.8)$$

Величина $\mathbf{L} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ (\mathbf{p}_i — импульс i -й материальной точки)

называется **моментом импульса** системы относительно некоторой неподвижной точки, выбранной за начало координат; $\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ — **момент внешних сил**

относительно той же точки; величина $\sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}$ — суммарный момент всех внутренних сил. Выражение для момента внутренних сил можно преобразовать к виду:

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ji}) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{f}_{ij}. \quad (2.9)$$

Поскольку в случае центральных сил $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{f}_{ij} = 0$, уравнение (2.8) (с учетом введенных выше обозначений) может быть записано в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}. \quad (2.10)$$

Это уравнение называется уравнением вращательного движения или **уравнением моментов**.

В частности, если ось вращения совпадает с осью координат Z , то

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z, \quad (2.11)$$

где L_z и M_z — соответственно проекции векторов \mathbf{L} и \mathbf{M} на ось Z .

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси Z с угловой скоростью ω скорость материальной точки m_i тела равна $v_i = \omega \rho_i$, где ρ_i — ее расстояние до оси Z . Проекция моментов импульса на ось Z для этих точек равны $L_{iz} = \rho_i m_i v_i = \omega m_i \rho_i^2$. Так как угловая скорость ω одинакова для всех точек твердого тела, то момент импульса всего тела относительно оси Z равен

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \omega \sum_i m_i \rho_i^2 = \omega J. \quad (2.12)$$

Величину

$$J = \sum_i m_i \rho_i^2 \quad (2.13)$$

называют **моментом инерции твердого тела относительно неподвижной оси**, который является мерой инертности тела при вращательном движении относительно этой оси.

Подставляя (2.12) в (2.11), получим **основное уравнение вращательного движения** тела вокруг неподвижной оси z :

$$\frac{d(\omega J)}{dt} = M_z. \quad (2.14)$$

Поскольку взаимное расположение точек в твердом теле со временем не меняется, то момент инерции является постоянной величиной. Поэтому уравнение (2.14) может быть представлено в следующем виде:

$$J \frac{d\omega}{dt} = J\varepsilon = M_z. \quad (2.15)$$

Для вычисления момента инерции при непрерывном распределении массы по объему суммирование можно заменить интегрированием по всему объему тела, и тогда (2.13) приводится к следующему виду:

$$J = \int \rho^2 dm. \quad (2.16)$$

Пусть известен момент инерции тела J_0 относительно некоторой оси, проходящей через центр масс — точку с радиус-вектором $\mathbf{R} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{r}_i$ (m_i — масса элементарного объема тела, \mathbf{r}_i — его радиус-вектор, m — масса тела). Тогда, в соответствии с *теоремой Гюйгенса–Штейнера*, момент инерции тела J относительно любой другой параллельной оси, находящейся на расстоянии a , равен

$$J = J_0 + ma^2. \quad (2.17)$$

Лабораторная работа 111

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ ПРОСТОЙ ФОРМЫ И ПРОВЕРКА ТЕОРЕМЫ ГЮЙГЕНСА – ШТЕЙНЕРА МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Цель работы

Экспериментальная проверка теоремы Гюйгенса–Штейнера и определение моментов инерции тел простой формы.

Идея эксперимента

В эксперименте изучается связь между периодом колебаний крутильного маятника и его моментом инерции. В качестве маятника используется круглая однородная платформа, подвешенная горизонтально в поле силы тяжести на трех одинаковых длинных нитях (трифилярный подвес). Крутильные колебания происходят вокруг вертикальной оси симметрии этой системы. На платформу можно помещать тела различной формы, измерять периоды колебаний маятника и определять значения моментов инерции этих тел. Для проверки теоремы Гюйгенса–Штейнера на платформе размещаются симметрично относительно оси вращения два одинаковых цилиндрических груза. Изменяя расстояния от осей цилиндров до оси системы и измеряя каждый раз период колебаний системы, можно получить экспериментально зависимость момента инерции маятника с

грузами от расстояния между осью груза и центром платформы. Эта зависимость сравнивается с теоретической, предсказываемой теоремой Гюйгенса-Штейнера.

Теоретическое введение

Теорема Гюйгенса-Штейнера. Если момент инерции тела массой m относительно некоторой оси вращения, проходящей через его центр масс, равен J_0 , то относительно любой другой оси, находящейся на расстоянии a от первой и параллельной ей, момент инерции тела равен

$$J = J_0 + ma^2. \quad (2.2.1)$$

В данной работе с целью проверки теоремы Гюйгенса-Штейнера исследуются крутильные колебания твердого тела на трифилярном подвесе.

Трифиллярный подвес представляет собой круглую платформу радиусом R , подвешенную на трех симметрично расположенных нитях одинаковой длины, закрепленных у ее краев (рис. 2.2.1). Сверху эти нити также симметрично прикреплены к диску несколько меньшего размера (радиусом r). Платформа может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси OO' , перпендикулярной к плоскости платформы и проходящей через ее центр. Такое движение платформы приводит к изменению положения ее центра масс по высоте.

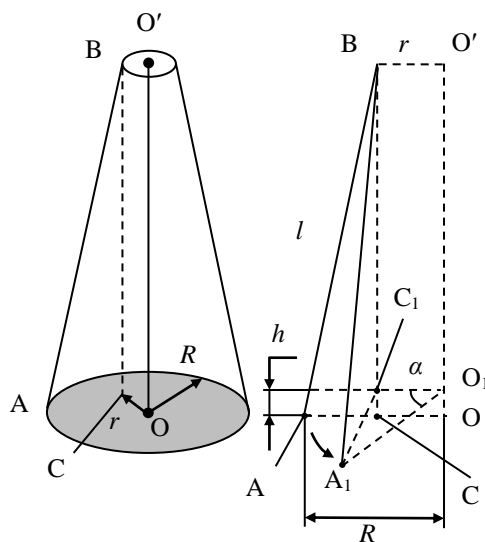


Рис. 2.2.1. Схематическое изображение трифилярного подвеса.

В поле силы тяжести потенциальная энергия платформы массой m на высоте h равна

$$W_p = mgh, \quad (2.2.2)$$

где g — ускорение свободного падения. Соотношение (2.2.2) записано с учетом нормировки потенциальной энергии: $W_p(h=0) = 0$. Кинетическая энергия вращательного движения равна

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2}, \quad (2.2.3)$$

где J — момент инерции платформы относительно оси OO' , ω — угловая скорость вращения платформы.

Если пренебречь работой сил трения со стороны воздуха, то механическая энергия сохраняется, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial t}(E_k + W_p) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{J\omega^2}{2} + mgh\right) = 0. \quad (2.2.4)$$

Пусть l — длина нитей подвеса, R — расстояние от центра платформы до точек ее крепления, r — радиус верхнего диска (рис. 2.2.1). Тогда

$$h = OO_1 = BC - BC_1 = \frac{(BC)^2 - (BC_1)^2}{BC + BC_1}. \quad (2.2.5)$$

Так как

$$(BC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2 = l^2 - (R - r)^2, \quad (2.2.6)$$

то при максимальном отклонении платформы от положения равновесия

$$(BC_1)^2 = (A_1B)^2 - (A_1C_1)^2 = l^2 - (R^2 + r^2 - 2rR \cos \alpha), \quad (2.2.7)$$

а высота подъема h и угол поворота α связаны соотношением:

$$h = \frac{2rR(1 - \cos \alpha)}{BC + BC_1} = \frac{4rR \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{BC + BC_1}. \quad (2.2.8)$$

В приближении малых углов ($\sin \alpha \approx \alpha$), и при $R \ll l$ $BC + BC_1 \approx 2l$, поэтому

$$h = \frac{rR\alpha^2}{2l}. \quad (2.2.9)$$

При этом (2.2.4) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{J\omega^2}{2} + mg \frac{rR\alpha^2}{2l} \right) = 0. \quad (2.2.10)$$

Поскольку по определению

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}, \quad (2.2.11)$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{J\omega^2}{2} \right) &= \frac{J \cdot 2\omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t}}{2} = J \cdot \omega \cdot \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(mg \frac{rR\alpha^2}{2l} \right) &= mg \frac{rR \cdot 2\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial t}}{2l} = mg \frac{rR \cdot \alpha \cdot \omega}{l} \end{aligned}$$

В результате (2.2.10) можно представить в виде:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{mgrR}{Jl} \alpha = 0, \quad (2.2.12)$$

или

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \omega_0^2 \alpha = 0, \quad (2.2.13)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgrR}{Jl}}$ - частота собственных незатухающих колебаний платформы.

Решение уравнения собственных (свободных) гармонических колебаний (2.2.13) может быть записано в виде:

$$\alpha = \alpha_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \alpha_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right), \quad (2.2.14)$$

где α — угловое смещение платформы, α_0 — его максимальное значение (амплитуда углового смещения), T — период колебаний, φ_0 — начальная фаза. Из формул (2.2.12) и (2.2.14) следует, что

$$J = \frac{mgrR}{4\pi^2 l} T^2. \quad (2.2.15)$$

Формула (2.2.15) позволяет экспериментально определять момент инерции как пустой платформы, так и платформы с грузом на ней, так как все величины в правой части формулы могут быть измерены непосредственно. Следует, однако, помнить, что m — это масса платформы с грузом на ней. Если в качестве груза использовать тело простой формы, то его момент инерции определяется как разность моментов инерции платформы с грузом и без него.

Формулу (2.2.15) используют и для экспериментальной проверки теоремы Гюйгенса–Штейнера. Установим в центр пустой платформы массой M два одинаковых дополнительных груза, положив их друг на друга (в настоящей задаче это два цилиндра массой m_0 каждый).

Момент инерции J_0 такой системы может быть определен по измерениям периода колебаний T_0 по формуле

$$J_0 = \frac{(M + 2m_0)grR}{4\pi^2 l} T_0^2. \quad (2.2.16)$$

Если расположить те же грузы симметрично относительно вертикальной оси платформы на расстоянии a от оси, то момент инерции в соответствии с теоремой Гюйгенса–Штейнера станет равным

$$J(a) = J_0 + 2m_0 a^2 = \frac{(M + 2m_0)grR}{4\pi^2 l} T^2, \quad (2.2.17)$$

где T — период колебаний получившейся системы.

Отсюда следует, что квадрат T^2 периода колебаний платформы с грузами линейно зависит от квадрата a^2 расстояния между осью груза и осью системы:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 l}{(M + 2m_0)grR} \cdot (J_0 + 2m_0 a^2). \quad (2.2.18)$$

Запишем полученное соотношение в виде

$$T^2 = Aa^2 + B, \quad (2.2.19)$$

где

$$A = \frac{4\pi^2 l}{(M + 2m_0)grR} \cdot 2m_0; \quad B = \frac{4\pi^2 l}{(M + 2m_0)grR} \cdot J_0 = T_0^2. \quad (2.2.20)$$

Применяя метод наименьших квадратов (МНК) для линейной модели (2.2.19), можно получить оценки параметров A и B . Параметр B позволяет оценку J_0 .

Экспериментальная установка

Общий вид установки показан на рис. 2.2.2. Отношение радиуса *платформы* 1 к длине нитей подвеса составляет $R/l \leq 0,05$, что соответствует приближению, которое использовалось при выводе формулы (2.2.15).

Тела 2 необходимо устанавливать на *платформу* 1 строго симметрично, чтобы избежать ее перекоса. Для облегчения определения положения грузов и более точной их установки на верхней поверхности платформы нанесены концентрические окружности с шагом 10 мм.

Начальное отклонение от положения равновесия, необходимое для запуска крутильных колебаний, сообщается платформе путем поворота верхнего *диска* 3 вокруг его оси с помощью шнура, связанного с *рычагом* 4 и закрепленного на верхнем диске. При таком возбуждении почти полностью отсутствуют другие типы колебаний, наличие которых затрудняет измерения. При этом амплитуда крутильных колебаний платформы не должна превышать 10° .

Система измерения времени включает в себя электронный *таймер* 5 с *фотодатчиком* 6, закрепленным на подставке. При проведении измерений датчик устанавливается в удобное положение. Начало работы *таймера* 5 осуществляется нажатием кнопки «Пуск». Отсчет времени начинается в момент пересечения указателем, закрепленным на платформе, светового луча датчика. На экране таймера, кроме времени, показывается и число полных колебаний системы. При нажатии на кнопку «Стоп» отсчет времени прекращается, когда система завершит очередное полное колебание.

При подготовке к новым измерениям результаты предыдущих убираются с табло таймера нажатием кнопки «Сброс».

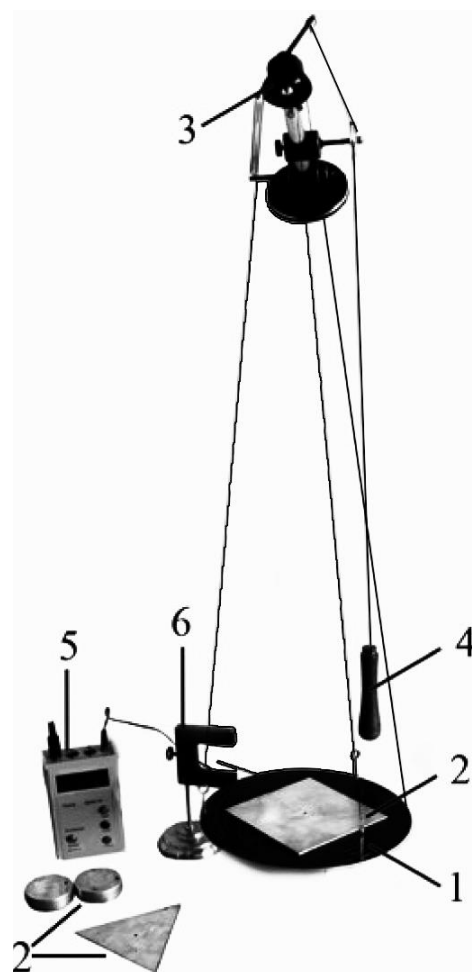


Рис. 2.2.2. Экспериментальная установка.

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Проверка теоремы Гюйгенса–Штейнера.

Справедливость теоремы Гюйгенса-Штейнера доказывается экспериментальной проверкой выполнения соотношения (2.2.19). Результаты записываются в табл. 2.2.1 - 2.2.4.

Измерения

Для проверки теоремы Гюйгенса–Штейнера выбирают два одинаковых тела (в данной работе они имеют цилиндрическую форму). Перед каждым измерением следует остановить колебания платформы.

1. Записать в табл. 2.2.1 значения параметров, приведенные на установке: радиусы платформы R и диска r , длины l нитей, массы M пустой платформы. Измерить радиус r_0 и массу m_0 груза в форме цилиндра (с указанием погрешности).

Таблица 2.2.1

Параметры установки

$R \pm \sigma_R$ (м)	$r \pm \sigma_r$ (м)	$l \pm \sigma_l$ (м)	$M \pm \sigma_M$ (кг)	$m_0 \pm \sigma_{m_0}$ (кг)	$r_0 \pm \sigma_{r_0}$ (м)

2. Предварительно следует провести измерения для определения допустимой амплитуды колебаний платформы. Для этого установить грузы в центре платформы, положив их один на другой. Возбудить с помощью рычага 4 колебания платформы с амплитудой примерно* 30° и с помощью таймера измерить время 10 колебаний. Не останавливая колебаний, подождать 2-3 минуты, за это время амплитуда колебаний немного уменьшится. Повторно запустить таймер, провести измерения и сравнить с полученными ранее. Повторить такие измерения несколько раз, чтобы убедиться, что период колебаний зависит от амплитуды.

Сделать на основе проведенных измерений вывод об амплитуде колебаний для последующих измерений.

3. Возбудить с помощью рычага 4 колебания платформы с определенной амплитудой (грузы установлены в центре платформы, $a=0$). Измерить время $n = 10$ колебаний. Не останавливая колебаний, а, только перезапуская таймер, повторить измерения $k = 3$ раза.

4. Расположить те же грузы симметрично относительно вертикальной оси платформы на минимально возможном расстоянии от оси (грузы касаются друг

* Точных измерений амплитуды проводить не требуется, оценить «на глаз»

друга в центре платформы). Определить расстояние a_1 от центра масс груза до оси вращения*. Трижды провести измерения времени t_i $n = 10$ колебаний.

5. Провести измерения t_i для 8-10 положений грузов, перемещая их каждый раз на 1-2 см от центра к краю платформы. Способ наиболее точного определения расстояния a_i предложить самостоятельно. Рекомендуется использовать концентрические окружности, нанесенные на платформу. Провести измерения диаметров таких окружностей. Для каждого a_i измерение времени t_i повторить 3 раза.

Таблица 2.2.2

Экспериментальные данные

a (см)	t_1 (с)	t_2 (с)	t_3 (с)	\bar{t} (с)	$S_{\bar{t}}$ (с)	σ_i (с)	T (с)	σ_T (с)
0								

Обработка результатов

1. Для каждого положения грузов на платформе рассчитать среднее арифметическое значение \bar{t} времени $n = 10$ колебаний

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^k t_i}{k}.$$

2. Получить оценку случайной погрешности $S_{\bar{t}}$ среднего арифметического по формуле:

$$S_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum (t_i - \bar{t})^2}{k(k-1)}}.$$

3. Оценить суммарную погрешность по формуле

$$\sigma_i = \sqrt{S_{\bar{t}}^2 + \sigma_{\text{приб}}^2},$$

где $\sigma_{\text{приб}}$ - приборная погрешность таймера, равная единице последнего разряда таймера.

4. Определить период колебаний T и погрешность S_T по формулам:

* Нетрудно сообразить, что минимальное расстояние a_1 равно радиусу цилиндра r_0 .

$$T = \frac{\bar{t}}{n}, \quad \sigma_T = \frac{\sigma_t}{n}.$$

5. Рассчитать величины a_i^2 , T_i^2 , оценить погрешности $\sigma_{T_i^2}$ по формуле погрешности косвенных измерений

$$\sigma_{T_i^2} = 2T_i \cdot \sigma_{T_i}.$$

Таблица 2.2.3

Результаты расчетов

a^2 (см)									
T^2 (с)									
σ_{T^2} (с)									

6. Построить график зависимости квадрата T^2 периода колебаний от квадрата a^2 расстояния от оси груза до оси вращения платформы. Применяя метод наименьших квадратов (МНК)* для линейной модели (2.2.19), получить оценки параметров A и B и оценки погрешностей σ_A и σ_B .

7. Зная параметры установки, по формулам (2.2.20) рассчитать коэффициент $A_{\text{расч}}$, оценить погрешность $\sigma_{A_{\text{расч}}}$ и сравнить со значением, полученным в эксперименте (табл. 2.2.4). Сравнить коэффициент B с квадратом периода колебаний T_0^2 . В соответствии с (2.2.20) найти момент инерции J_0 платформы с двумя грузами, установленными в центре платформы:

$$J_0 = \frac{B}{A} 2m_0.$$

Таблица 2.2.4

Результаты расчетов

Эксперимент		Сравнение		
$A \pm \sigma_A$	$B \pm \sigma_B$	$A_{\text{расч}} \pm \sigma_{A_{\text{расч}}}$	$T_0^2 \pm \sigma_{T_0^2}$	$J_0 \pm \sigma_{J_0}$

8. По построенному графику $T^2(a^2)$ оценить применимость теоремы Гюйгенса-Штейнера к результатам эксперимента.

Упражнение 2. Определение момента инерции тела методом колебаний.

* Для применения МНК использовать формулы из пособия [4] или воспользоваться программой обработки экспериментальных данных МНК на сайте кафедры общей физики по адресу: <http://genphys.phys.msu.ru/rus/ofp/>.

В данном упражнении определяются моменты инерции двух пластин, имеющих форму квадрата и равностороннего треугольника. Результаты записываются в табл. 2.2.5, 2.2.6 и 2.2.7.

Измерения

1. Измерить массы ($m_{кв}$ и $m_{тр}$) и размеры ($a_{кв}$ и $a_{тр}$) сторон исследуемых объектов – квадрата и равностороннего треугольника.

Таблица 2.2.5

Параметры установки (упр. 2)

квадрат		треугольник	
$m_{кв} \pm \sigma_{m_{кв}}$ (КГ)	$a_{кв} \pm \sigma_{a_{кв}}$ (М)	$m_{тр} \pm \sigma_{m_{тр}}$ (КГ)	$a_{тр} \pm \sigma_{a_{тр}}$ (М)

2. Измерить время t_i $n = 10$ полных колебаний пустой платформы $T_{пл}$. Измерения провести $k = 3$ раза.

Таблица 2.2.6

Экспериментальные данные

Объект	t_1 (с)	t_2 (с)	t_3 (с)	\bar{t} (с)	$S_{\bar{t}}$ (с)	T (с)	σ_T (с)	$J \pm S_J$ КГ М ²
пустая платформа								
Платформа с квадратом								
Платформа с треугольником								

3. Платформу поочередно нагрузить исследуемыми телами таким образом, чтобы их центр масс совпадал с осью вращения платформы (совпадали отверстия в теле и на платформе). Измерить время t_i $n = 10$ колебаний всей системы. Для каждого тела провести измерения $k = 3$ раза.

Обработка результатов

1. Для каждого из тел рассчитать среднее арифметическое значение \bar{t} времени $n = 10$ колебаний, оценить случайную погрешность $S_{\bar{t}}$ среднего арифметического (по аналогии с п. 2 упр.1).

2. Определить период колебаний T и оценить погрешность S_T (см. п. 5 упр. 1).

3. По формуле (2.2.15) рассчитать моменты инерции пустой платформы $J_{пл}$ и платформ с телами J_2 и J_3 . Оценить погрешности.

4. Вычислить моменты инерции квадратной ($J_{кв}$) и треугольной ($J_{тр}$) пластин по формулам:

$$J_{кв} = J_2 - J_{пл}, \quad J_{тр} = J_3 - J_{пл} \quad (2.2.16)$$

Оценить погрешности.

Таблица 2.2.7

Результаты расчетов момента инерции (упр. 2)

квадрат		треугольник		цилиндр	
$J \pm S_J$	$J \pm S_J$	$J \pm S_J$	$J \pm S_J$	$J \pm S_J$	$J \pm S_J$
(кг м ²)	(кг м ²)	(кг м ²)	(кг м ²)	(кг м ²)	(кг м ²)
эксперимент	теория	эксперимент	теория	эксперимент	теория

5. В Упр. 1 был рассчитан момент инерции J_0 платформы с двумя грузами цилиндрической формы, расположенными в центре платформы. Зная момент инерции $J_{пл}$ пустой платформы, рассчитать момент инерции одного цилиндра:

$$J_{цил} = \frac{J_0 - J_{пл}}{2}.$$

Оценить погрешность.

6. Сравнить значения $J_{кв}$, $J_{тр}$ и $J_{цил}$ полученные экспериментально и рассчитанные теоретически по формулам:

для квадрата

$$J_{кв} = \frac{1}{6} m a^2; \quad (2.2.17)$$

для равностороннего треугольника

$$J_{тр} = \frac{1}{12} m a^2, \quad (2.2.18)$$

(где m — масса пластины, a — сторона геометрической фигуры)

для цилиндра

$$J_{цил} = \frac{1}{2} m r_{цил}^2.$$

Основные итоги работы

В результате выполнения работы должно быть проверено выполнение теоремы Гюйгенса–Штейнера и проведено сравнение экспериментально найденного значения момента инерции для тела заданной формы с соответствующим значением, рассчитанным теоретически.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое момент инерции тела относительно неподвижной оси?
2. Что такое главные оси инерции? Центральные оси? Привести примеры.
3. Сформулируйте теорему Гюйгенса – Штейнера.

4. Выведите формулы для главных центральных моментов инерции следующих тел: тонкая палочка, тонкий диск, тонкие прямоугольная и треугольная пластины, цилиндр, шар, параллелепипед.

Литература

1. *Матвеев А. Н.* Механика и теория относительности. — М. Изд. дом «Оникс 21 век», 2003. — 432 с.
2. *Алешкевич В. А., Деденко Л. Г., Караваев В. А.* Механика. — М.: Изд. центр «Академия», 2004. — 480 с.
3. *Бушина Т.А., Никанорова Е.А., Русаков В. С., Слепков А. И., Чистякова Н. И.* Механика. Методика решения задач. Учебное пособие. М.: Физический факультет МГУ, 2018. — 720 с.
4. *Митин И. В., Русаков В. С.* Анализ и обработка экспериментальных данных. Уч.-метод. пособие для студ. младших курсов. — М.: МГУ. 2002. — 44 с.