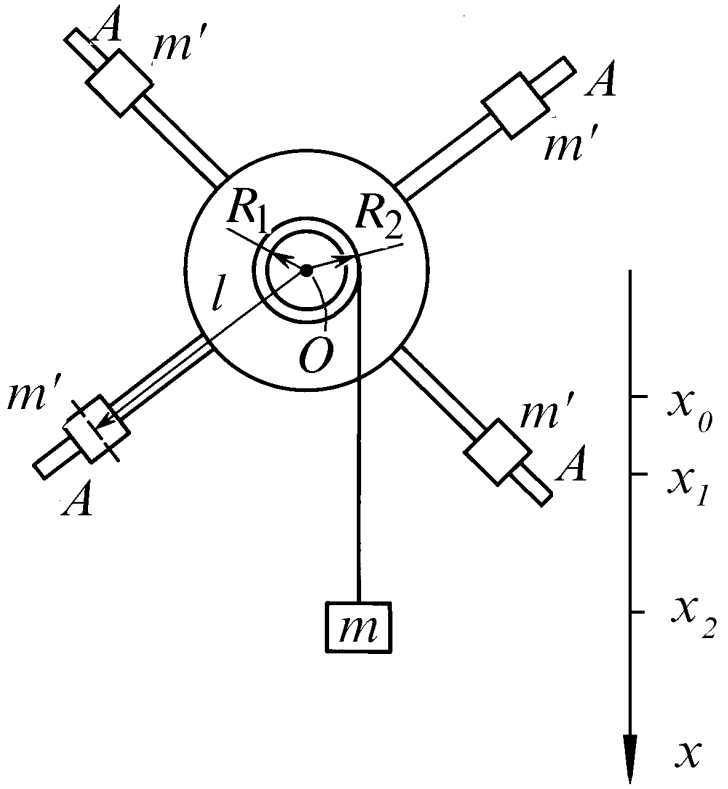


Лабораторный практикум по ФИЗИКЕ

МЕХАНИКА

Задача № 110 комп

ИЗУЧЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ ЗАКРЕПЛЕННОЙ ОСИ



МОСКВА 2026

Введение

Изучение движения твердого тела проводится в предположении, что тело является ***абсолютно твердым***, т.е. расстояние между двумя любыми точками тела не меняется.

В дальнейшем вместо термина «абсолютно твердое тело» будет использоваться термин «твердое тело».

Кинематика твердого тела. Любое движение твердого тела можно представить как суперпозицию поступательного и вращательного движений.

При ***поступательном движении*** прямая, проходящая через любые две точки тела, перемещается параллельно самой себе. В этом случае в каждый момент времени скорости всех точек тела одинаковы, поэтому достаточно знать характер движения лишь одной точки тела. Анализ такого движения сводится к анализу движения материальной точки.

При ***вращательном движении*** твердого тела вокруг неподвижной оси точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на этой оси, называемой ***осью вращения***. При таком движении все точки твердого тела за малый промежуток времени dt поворачиваются вокруг оси на один и тот же угол dφ.

Если ввести в рассмотрение аксиальный вектор d$\boldsymbol{\varphi}$, модуль которого равен углу поворота dφ, а направление определяется в соответствии с правилом правого винта и совпадает с осью вращения, то скорость изменения угла будет равна

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}. \qquad (2.1)$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}$ называется ***угловой скоростью.***

Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ связана с линейной скоростью $\mathbf{v}_i$ i-й точки тела соотношением

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i, \qquad (2.2)$$

где $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор.

Производная от $\boldsymbol{\omega}$ по времени называется ***угловым ускорением***

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}. \qquad (2.3)$$

Совместим начало поступательно движущейся системы координат с какой-либо точкой А твердого тела (точкой отсчета). Тогда в лабораторной системе отсчета скорость любой другой точки В тела представима в виде векторной суммы скорости

движения системы координат $\boldsymbol{v}_0$ (скорость точки A) и относительной скорости $\mathbf{v}'$ точки *B*:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'. \tag{2.4}$$

В качестве точки отсчета может быть выбрана любая точка твердого тела или пространства (если положение этой точки относительно твердого тела не меняется со временем). Поскольку угол поворота $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$ за малый промежуток времени $\mathrm{d}t$ не зависит от выбора точки отсчета и одинаков для всех точек твердого тела, то с учетом (2.1.) и (2.2) выражение (2.4) может быть представлено в следующем виде:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\,, \tag{2.5}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость вращения твердого тела (не зависит от выбора точки отсчета), $\mathbf{r}$ — радиус-вектор с началом в точке A. Скорость поступательного движения тела $\mathbf{v}_0$ зависит от выбора точки отсчета. В частности, точку A можно выбрать так, чтобы $\mathbf{v}_0$ была равна нулю.

Плоское движение твердого тела — движение, при котором траектории всех материальных точек тела лежат в параллельных плоскостях. В случае плоского движения твердого тела ось вращения, проходящая через точку A, является *мгновенной осью вращения*.

Мгновенная ось вращения твердого тела — ось, относительно которой поступательная скорость тела в данный момент времени равна нулю. Поэтому плоское движение твердого тела в каждый момент времени может быть представлено как вращательное движение относительно некоторой мгновенной оси.

Уравнение моментов. Момент инерции относительно неподвижной оси. Рассмотрим движение твердого тела как движение системы жестко связанных между собой точек. В лабораторной системе отсчета уравнение движения для *i*-й материальной точки массой m_i имеет вид:

$$m_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_i}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{f}_{ij}\,, \tag{2.6}$$

где $\mathbf{F}_i$ — сумма всех внешних сил, действующих на *i*-ю материальную точку, $\mathbf{f}_{ij}$ — сила, действующая на *i*-ю материальную точку со стороны *j*-й материальной точки, т.е. внутренняя сила.

Будем полагать, что силы взаимодействия являются центральными, то есть векторы $\mathbf{f}_{ij}$ и $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ коллинеарны.

Умножим векторно обе части уравнения (2.6) на радиус-вектор $\boldsymbol{r}_i$:

$$m_i\mathbf{r}_i \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_i}{\mathrm{d}t} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{j\neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} \,. \tag{2.7}$$

Учтем, что $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i\right) = \mathbf{r}_i \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{v}_i = \mathbf{r}_i \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_i}{\mathrm{d}t}$ (так как $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}_i$, то $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{v}_i = 0$). Суммируя по всем материальным точкам системы, получим

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i m_i\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_i \sum_{j\neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} \,. \tag{2.8}$$

Величина $\mathbf{L} = \sum_i m_i\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ ($\mathbf{p}_i$ — импульс i-й материальной точки) называется ***моментом импульса*** системы относительно некоторой неподвижной точки, выбранной за начало координат; $\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ — ***момент внешних сил*** относительно той же точки; величина $\sum_i \sum_{j\neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}$ — суммарный момент всех внутренних сил. Выражение для момента внутренних сил можно преобразовать к виду:

$$\sum_i \sum_{j\neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} = \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j\neq i} \left(\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ji}\right) = \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j\neq i} \left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right) \times \mathbf{f}_{ij}. \tag{2.9}$$

Поскольку в случае центральных сил $\left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right) \times \mathbf{f}_{ij} = 0$, уравнение (2.8) (с учетом введенных выше обозначений) может быть записано в следующем виде:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{M} \,. \tag{2.10}$$

Это уравнение называется уравнением вращательного движения или ***уравнением моментов***.

В частности, если ось вращения совпадает с осью координат Z, то

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = M_z, \tag{2.11}$$

где L_z и M_z — соответственно проекции векторов **L** и **M** на ось Z.

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси Z с угловой скоростью ω скорость материальной точки m_i тела равна $v_i = \omega\rho_i$ где ρ_i — ее расстояние до оси *Z*. Проекции моментов импульса на ось Z для этих точек равны $L_{iz} = \rho_i m_i v_i = \omega m_i \rho_i^2$. Так как угловая скорость ω одинакова для всех точек твердого тела, то момент импульса всего тела относительно оси Z равен

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \omega \sum_i m_i \rho_i^2 = \omega J \,. \tag{2.12}$$

Величину

$$J = \sum_i m_i \rho_i^2 \tag{2.13}$$

называют ***моментом инерции твердого тела относительно неподвижной оси***, который является мерой инертности тела при вращательном движении относительно этой оси.

Подставляя (2.12) в (2.11), получим ***основное уравнение вращательного движения*** тела вокруг неподвижной оси *z*:

$$\frac{\mathrm{d}(\omega J)}{\mathrm{d}t} = M_z \,. \tag{2.14}$$

Поскольку взаимное расположение точек в твердом теле со временем не меняется, то момент инерции является постоянной величиной. Поэтому уравнение (2.14) может быть представлено в следующем виде:

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J\varepsilon = M_z \,. \tag{2.15}$$

Для вычисления момента инерции при непрерывном распределении массы по объему суммирование можно заменить интегрированием по всему объему тела, и тогда (2.13) приводится к следующему виду:

$$J = \int \rho^2 \mathrm{d}m \,. \tag{2.16}$$

Пусть известен момент инерции тела J_0 относительно некоторой оси, проходящей через центр масс — точку с радиус-вектором $\mathbf{R} = \frac{1}{m}\sum_i m_i \mathbf{r_i}$ (m_i — масса элементарного объема тела,

$\mathbf{r}_i$ — его радиус-вектор, m — масса тела). Тогда, в соответствии с ***теоремой Гюйгенса–Штейнера,*** момент инерции тела J относительно любой другой параллельной оси, находящейся на расстоянии a, равен

$$J = J_0 + ma^2 . \qquad (2.17)$$

Лабораторная работа 110 (комп.)

ИЗУЧЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ ЗАКРЕПЛЕННОЙ ОСИ

Цель работы

Экспериментальная проверка основного уравнения вращательного движения твердого тела вокруг закрепленной оси.

Идея эксперимента

Система тел с изменяемым моментом инерции может свободно вращаться вокруг закрепленной оси под действием момента внешней силы.

Теоретическое введение

Согласно основному уравнению вращательного движения твердого тела (2.15), в случае вращения вокруг закрепленной оси Z тела (системы тел) с моментом инерции J

$$J\varepsilon = M\,, \qquad (2.1.1)$$

где $\varepsilon = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ — угловое ускорение, M — момент внешних сил.

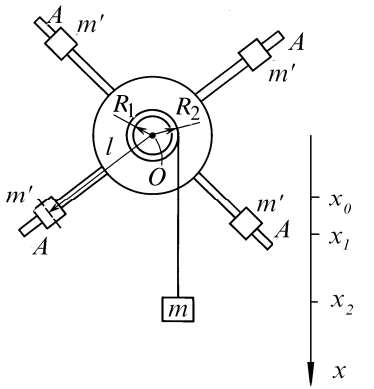


Рис. 2.1.1. Схематическое изображение маятника Обербека.

Для экспериментальной проверки этого соотношения в работе используется маятник Обербека (рис. 2.1.1). Он состоит из четырех стержней А и двух шкивов радиусом R_1 и R_2, закрепленных на одной горизонтальной оси. На каждом из стержней находятся одинаковые грузы массой m' каждый, положение которых можно фиксировать на различных расстояниях от оси. Маятник может приводиться во вращение при помощи груза массой m, подвешенного за конец намотанной на тот или иной шкив нити.

Выберем ось Ox направленной вниз (рис. 2.1.1). Считая нить невесомой и нерастяжимой, а также пренебрегая моментом силы

трения в оси, можем записать уравнение вращательного движения маятника:

$$J\varepsilon = RT\,, \tag{2.1.2}$$

уравнение поступательного движения груза на нити

$$ma = mg - T \tag{2.1.3}$$

и уравнение кинематической связи

$$a = \varepsilon R\,. \tag{2.1.4}$$

Здесь R — радиус шкива, T — проекция силы натяжения нити, a — проекция линейного ускорения груза массой m, ε - проекция углового ускорения на ось вращения, g — ускорение свободного падения.

Из системы уравнений (2.1.2)–(2.1.4) можно выразить ускорение груза массой m: оно постоянно и равно

$$a = \frac{mR^2}{J + mR^2}\,g\,. \tag{2.1.5}$$

Если учесть момент сил трения $M_{\text{тр}}$ в оси маятника, то основное уравнение вращательного движения (2.1.2) примет вид:

$$J\varepsilon_{вниз} = RT_{вниз} - M_{тр}\,, \tag{2.1.2вниз}$$

при движении груза вниз и

$$J\varepsilon_{вверх} = -RT_{вверх} - M_{тр}\,, \tag{2.1.2вверх}$$

при движении груза вверх.

Обратим внимание, что при движении груза вниз угловое ускорение положительно (угловая скорость растет), а при движении вверх угловое ускорение отрицательно (угловая скорость уменьшается). Линейное же ускорение груза всегда (за исключением момента удара) направлено вниз и определяется уравнением

$$ma_{вниз(вверх)} = mg - T_{вниз(вверх)} \tag{2.1.3вниз_вверх}$$

Уравнения кинематической связи отличаются знаком

$$a_{вниз} = \varepsilon_{вниз}R\,. \tag{2.1.4вниз}$$

$$a_{вверх} = -\varepsilon_{вверх}R\,. \tag{2.1.4вверх}$$

Исключая из системы уравнений T и ε, получим следующие уравнения для движения вниз:

$$\left(J + mR^2\right) \cdot a_{вниз} = mgR^2 - M_{тр} \cdot R,$$

и вверх:

$$\left(J + mR^2\right) \cdot a_{ввверх} = mgR^2 + M_{тр} \cdot R.$$

Суммируя полученные уравнения, исключаем момент силы трения и имеем:

$$\left(J + mR^2\right) \cdot \frac{a_{вниз} + a_{ввверх}}{2} = mgR^2,$$

или

$$\frac{a_{вниз} + a_{ввверх}}{2} = \frac{mR^2}{J + mR^2} g. \qquad (2.1.5\text{трение})$$

Данное уравнение совпадает с (2.1.5), полученным без учета момента силы трения, если положить

$$a = \frac{a_{вниз} + a_{ввверх}}{2}. \qquad (2.1.6)$$

Таким образом, для учета влияния момента силы трения на систему необходимо провести измерения ускорений груза при движении вниз и вверх, вычислить среднее арифметическое и подставить его в уравнение (2.1.5).

Экспериментальная установка

Установка для изучения вращательного движения (рис. 2.1.2) состоит из вертикальной *стойки* 1 с закрепленными на ней двумя подвижными *кронштейнами* 2 и 3, на которых крепятся оптические датчики положения. Кроме того, на стойке закреплены два неподвижных *кронштейна* 4 и 5.

На нижнем *кронштейне* 4 закреплен *вал* 6 с двумя шкивами радиусами R_1 и R_2. На верхнем *кронштейне* 5 закреплен *блок* 7. Через блок перекинута нить, один конец которой намотан на двухступенчатый *вал* 6, а ко второму концу прикреплен *груз* 8. На двухступенчатом валу крепится *тело маятника* 9: четыре стержня, на каждом из которых закреплено по одному дополнительному грузу массой m'. Для того, чтобы при движении груза 8 нить наматывалась

на тот или иной шкив, необходимо регулировать положение блока 7 на кронштейне 5.

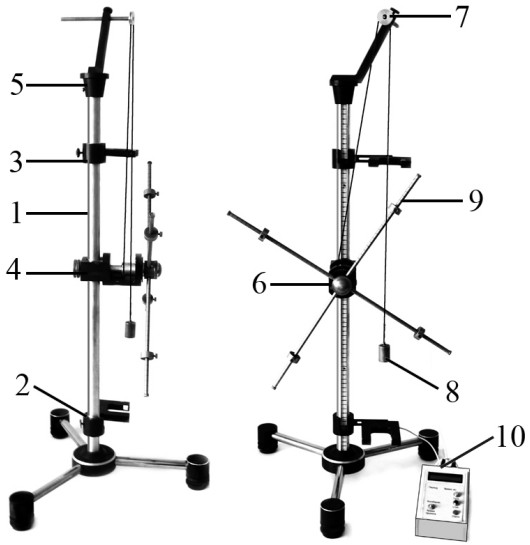


Рис. 2.1.2. Экспериментальная установка для изучения вращательного движения твердого тела.

Компьютерная система регистрации.

В настоящей установке для фиксации результатов измерений применяется компьютерная система регистрации с использованием фотоэлектрического датчика, установленного на кронштейне 5 (на рис. 2.1.2 не показан). При этом кронштейны 2 и 3, а также таймер 10 отсутствуют.

Датчик представляет собой «световые ворота», состоящие из размещенных напротив друг друга источника и приемника света. Он срабатывает в момент, когда какой-либо предмет последовательно сначала перекрывает световой луч «ворот», а затем вновь их открывает. Система регистрации фиксирует время срабатывания «световых ворот».

Блок 7 имеет 12 отверстий на одинаковом расстоянии друг от друга. При движении груза вниз или вверх блок вращается, и отверстия закрывают и открывают «световые ворота». Зная радиус

блока и число отверстий, можно по углу поворота рассчитать изменение положения груза. Коэффициент пересчета определен заранее и введен в память программы.

При запуске программы на мониторе компьютера появляется рабочее поле (рис. 2.1.3) для отображения графика зависимости пути, пройденного грузом 8, от времени. В процессе измерений блок может вращаться в ту или иную сторону (в зависимости от направления движения груза), но используемые «световые ворота» не позволяют определять направление вращения. Поэтому на графике показывается именно путь s, пройденный грузом 8, а не его координата.

В верхней части экрана расположены кнопки управления работой установки.

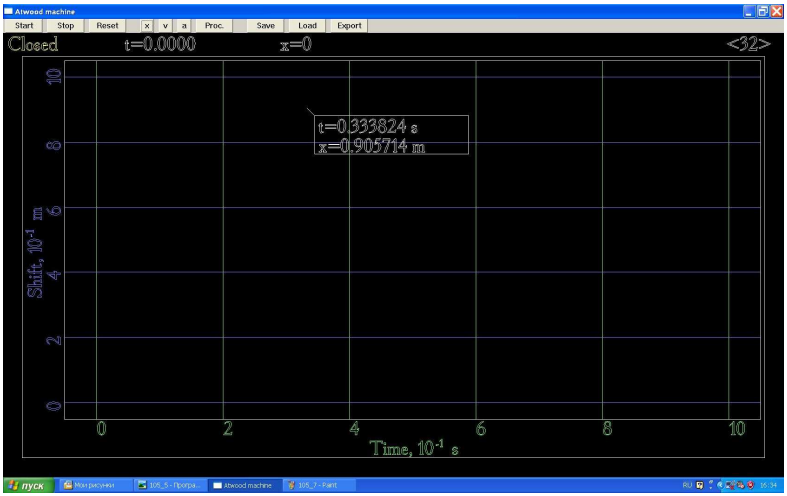


Рис. 2.1.3. Рабочее окно программы.

Start – начинается отсчет времени; при срабатывании фотодатчика на экране появляется соответствующая экспериментальная точка.

Stop – прекращается фиксация результатов измерений.

Reset – очистка экрана.

X, **V**. **A** – в зависимости от выбора кнопки на экране показывается график пройденного телом пути (**X**), модуля скорости тела (**V**) или ускорения тела (**A**). Значения скорости и ускорения

рассчитываются по экспериментальным точкам, поэтому из-за погрешностей эксперимента могут быть не совсем корректными.

Proc. – запуск программы обработки результатов эксперимента. При нажатии и удержании левой кнопки мыши выделяется область данных для последующей обработки. При отпускании кнопки мыши программа аппроксимирует **методом наименьших квадратов** (МНК) выделенную область параболической зависимостью вида

$$y = At^2 + Bt + C.$$

В нижней части экрана появляются значения коэффициентов A, B и C без указания размерности.

Если на экране представлен график скорости от времени (нажата кнопка **V**), то точки в выделенной области аппроксимируются линейной зависимостью

$$\mathrm{v} = At + B.$$

В данном случае коэффициент A равен ускорению груза на соответствующем участке.

Кнопки **Save**, **Load** и **Export** в настоящей работе не используются.

Проведение эксперимента

Предварительная настройка установки

1. Снимите груз 8 с крюка нити. Установите размещенные на теле маятника 9 четыре груза массой m' максимально близко к оси вращения. При этом, вследствие возможной несимметрии расположения грузов, маятник может самопроизвольно поворачиваться. Небольшими перемещениями грузов вдоль стержней маятника добейтесь положения безразличного равновесия. Данное положение маятника будет начальной конфигурацией.

2. Разместите груз 8 на конце полностью размотанной нити. При вращении тела маятника 9 груз будет подниматься вверх, а нить наматываться на один из шкивов. Когда груз окажется на расстоянии 5-10 сантиметров от блока 7, отпустите тело маятника. Груз 8 начнет опускаться, раскручивая маятник. В нижней точке произойдет удар, маятник продолжит вращение в том же направлении, но оно будет замедленным (вслед-

ствие изменения направления момента силы). Груз 8 начнет замедленно подниматься вверх. При этом нить должна наматываться на тот же самый шкив, с которого она сматывалась. Если это не так, то следует изменить положение блока 7.

После выполнения настройки установка готова к работе.

Упражнение 1. **Проверка основного уравнения вращательного движения.**

Измерения
(результаты заносятся в Табл.1 и 2)

1. Измерить штангенциркулем радиусы шкивов R_1 и R_2. Измерить линейкой расстояния l_i от центров масс четырех грузов массой m' от оси вращения. С помощью весов определить массы трех грузов m_i (i=1,2,3), которые будут использованы в задаче. Результаты измерений и массу m' (указана на установке) записать в Таблицу 1. Для всех величин указать погрешности.

Таблица 1. Параметры установки.

R_1(м)	R_2(м)	m'(кг)	m_1 (кг)	m_2 (кг)	m_3 (кг)
l_1(м)	l_2(м)	l_3(м)	l_4(м)	$l_{\text{сред}}$(м)	Погр.

2. Запустите на компьютере рабочую программу «Задача 110». На экране монитора наблюдается рабочее окно (рис. 2.1.3).

3. Разместите груз 8 массой m_1 на конце полностью размотанной нити. При вращении рукой тела маятника 9 груз будет подниматься вверх, а нить наматываться на один из шкивов. Зафиксируйте, на какой именно шкив наматывается нить. Когда груз окажется на расстоянии 5-10 сантиметров от блока 7, нажмите кнопку «Start» на экране монитора и отпустите тело маятника.

Груз начнет опускаться вниз, тело маятника - вращаться. На экране появится график зависимости **пути** $s(t)$, пройденного грузом, от времени. В нижней точке произойдет удар, груз начнет подниматься вверх, нить должна наматываться на тот же самый шкив. Иногда в нижней точке происходят незначительные сбои в режиме движения. Но путь, пройденный грузом, по-прежнему увеличивается. Тело маятника будет вращаться замедленно и в какой-

то момент остановится, при этом груз окажется на высоте, которая вследствие потерь энергии будет меньше начальной.

Затем груз начнет движение вниз и т.д. Измерения продолжают в течение 3-4 циклов «спуск-подъем». В программе предусмотрено ограничение по количеству измеряемых точек, после чего фиксация прекращается. Процесс измерений можно остановить, нажав кнопку **Stop**. На рис. 2.1.4 показан примерный вид графика $s(t)$ на экране.

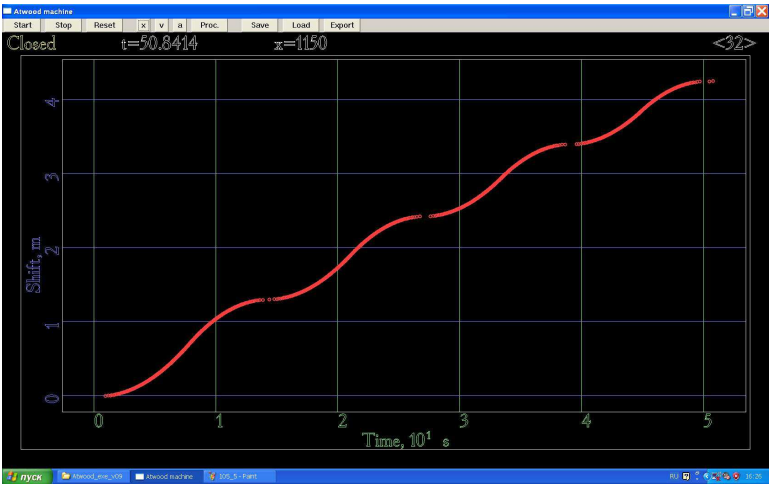


Рис. 2.1.4. График пути, пройденного грузом, от времени.

5. Нажав на кнопку **V**, наблюдайте на экране график модуля скорости v(t) от времени (примерный вид графика показан на рис. 2.1.5). Если при измерениях в нижней точке (точке удара) происходили сбои в движении, то на графике скорости будут наблюдаться выбросы. Но в целом на каждом этапе движения должен наблюдаться линейный участок изменения скорости. Если полученные в эксперименте графики соответствуют указанным на рис. 2.1.4-2.1.5, приступайте к обработке данных.

7. Найдите ускорения груза при движении как вниз, так и вверх. Для этого, нажав на кнопку **V**, а затем на кнопку **Pros**, выделите с помощью мышки один из участков равноускоренного движения (вниз) и по результатам аппроксимации определите ускорение $a_{вниз}$. Повторите те же действия для остальных участков движения груза вниз.

Так же найдите и ускорения $a_{вверх}$ при движении груза вверх. Результаты запишите в Табл.2.

8. Проведите аналогичные измерения ускорений при движении вниз и вверх для трех различных масс грузов m_i.

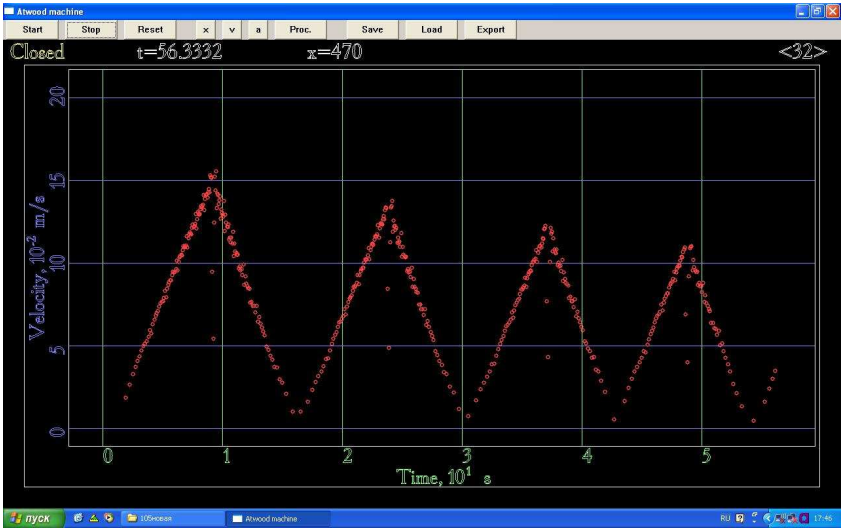


Рис. 2.1.5. График модуля скорости от времени при неизменном моменте инерции.

Таблица 2.Результаты измерения ускорений.

Параметры m и R		1	2	3	4	Среднее ±погр.	Среднее ±погр.
$m =$	$a_{вниз}$ (м/с^2)						
$R =$	$a_{вверх}$ (м/с^2)						
$m =$	$a_{вниз}$ (м/с^2)						
$R =$	$a_{вверх}$ (м/с^2)						
$m =$	$a_{вниз}$ (м/с^2)						
$R =$	$a_{вверх}$ (м/с^2)						
$m =$	$a_{вниз}$ (м/с^2)						
$R =$	$a_{вверх}$ (м/с^2)						

$m =$	$a_{вниз}$ (м/с^2)						
$R =$	$a_{вверх}$ (м/с^2)						
$m =$	$a_{вниз}$ (м/с^2)						
$R =$	$a_{вверх}$ (м/с^2)						

9. Переместите блок 7 таким образом, чтобы нить наматывалась на шкив другого радиуса. Проведите аналогичные измерения ускорений при движении вниз и вверх для трех различных масс грузов m_i.

Таким образом, проводятся измерения ускорений груза при движении вниз и вверх для трех различных масс грузов и для двух различных радиусов шкивов. Результаты измерений записываются в Табл. 2.

Обработка результатов

(рекомендуется проводить после выполнения измерений Упражнения 2).

Выше при решении системы уравнений было получено

$$\frac{a_{вниз} + a_{вверх}}{2} = \frac{mR^2}{J + mR^2} g \ . \qquad (2.1.5\text{трение})$$

Из результатов эксперимента можно заметить, что

$$a_{сред} = \frac{a_{вниз} + a_{вверх}}{2} << g \ ,$$

следовательно, $J >> mR^2$. Тогда (2.1.5трение) можно записать в виде

$$a_{сред} \cong \frac{mR^2}{J} g \ . \qquad (2.1.7)$$

Таким образом, среднее арифметическое $a_{сред}$ ускорений груза при движении вниз и вверх прямо пропорционально произведению массы груза и квадрату радиуса шкива. Эту зависимость и следует проверить по результатам эксперимента.

1. Для каждой серии измерений ускорений для движения вниз и для движения вверх рассчитать среднее арифметическое серии прямых измерений

$$\overline{a}_i = \sum_{i=1}^{N} a_i ,$$

оценить среднеквадратичную погрешность

$$S_{\overline{a}_i} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(a_i - \overline{a}_i\right)^2}{N\left(N-1\right)}} .$$

Результаты записать в Табл. 2.

2. Для каждой серии рассчитать среднее арифметическое двух средних значений ускорений при движении вниз и вверх

$$\overline{a}_{i,сред} = \frac{\overline{a}_{i,вниз} + \overline{a}_{i,вверх}}{2}$$

и оценить погрешность.

3. Для каждого значения радиуса шкива R_1 и R_2 построить на одних осях графики зависимости среднего ускорения от массы груза $\overline{a}_{сред}\left(m_i\right)$. В соответствии с (2.1.7) зависимость должна быть пропорциональной. Убедиться в этом, используя МНК для пропорциональной модели

$$\overline{a} = B \cdot m ,$$

где $B = \dfrac{R^2}{J} g$.

Записать в Табл. 3 коэффициенты $B\left(R_i\right)$ для каждого радиуса шкива и оценку погрешности.

Таблица 3. Результаты расчетов.

$B\left(R_1\right)$ ±погр	$B\left(R_2\right)$ ±погр	$\dfrac{B\left(R_1\right)}{B\left(R_2\right)}$ ±погр	$\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^2$ ±погр

3. Для проверки зависимости среднего ускорения от радиуса шкива рассчитать отношение $\dfrac{B\left(R_1\right)}{B\left(R_2\right)}$ и оценить погрешность. Сравнить полученное значение отношения с величиной $\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^2$. Сделать вывод.

Упражнение 2. **Проверка выполнения теоремы Гюйгенса–Штейнера.**

Момент инерции J маятника Обербека относительно оси вращения можно представить как сумму момента инерции J_0 тела маятника (включая стержни и шкивы) и четырех моментов инерции J' грузов массой m', размещенных на стержнях

$$J = J_0 + 4J' . \qquad (2.1.8)$$

При изменении положения грузов m' на стержнях маятника момент инерции J_0 остается неизменным. Момент инерции груза массой m', расположенного на расстоянии r от оси вращения, можно выразить, используя теорему Гюйгенса-Штейнера:

$$J' = J'_0 + m'r^2 , \qquad (2.1.9)$$

где J'_0 - момент инерции груза m' относительно оси, проходящей через его центр масс. Момент инерции J'_0 неизвестен и в настоящей задаче не измеряется.

Объединяя (2.1.8) и (2.1.9), получим

$$J = \left(J_0 + 4J'_0\right) + 4m'r^2 = \tilde{J}_0 + 4m'r^2 , \qquad (2.1.10)$$

Подставляя (2.1.10) в (2.1.7), получим

$$a_{сред} = \frac{mR^2}{\tilde{J}_0 + 4m'r^2}\, g ,$$

или

$$\frac{1}{a_{сред}} = \frac{1}{mR^2 g}\left(\tilde{J}_0 + 4m'r^2\right) \qquad (2.1.11)$$

Нетрудно заметить, что зависимость $\frac{1}{a_{сред}}\left(r^2\right)$ является линейной:

$$y = Ax + C , \qquad (2.1.12)$$

где

$$y = \frac{1}{a_{сред}}, \quad x = r^2 , \quad A = \frac{4m'}{mR^2 g}, \quad C = \frac{\tilde{J}_0}{mR^2 g} . \qquad (2.1.13)$$

Таким образом, изменяя расстояние r грузов m' от оси вращения и измеряя при этом ускорения $a_{сред}$ груза m, можно проверить теорему Гюйгенса – Штейнера.

Измерения
(результаты заносятся в Табл.4)

1. Выберите в качестве начального одно из измерений Упр. 1, т.е. определенный радиус шкива R и определенную массу груза m. В Упр. 1 также были проведены измерения расстояния l_i от четырех грузов до оси вращения (Табл. 1). Рассчитайте среднее арифметическое $l_{сред}$ и оцените погрешность.

В первые строки Табл. 4 внесите результаты измерения ускорений вниз и вверх из Табл. 2 в соответствии с выбранными R и m. Запишите также значение $l_{сред}$, в дальнейшем оно будет обозначаться r_1.

Таблица 4.Результаты измерения ускорений.

Масса груза m (кг)				Радиус шкива			
Параметр r	Ускорение	1	2	3	4	Среднее ±погр.	Среднее ±погр.
	$a_{вниз}$ (м/с^2)						
	$a_{вверх}$ (м/с^2)						
	$a_{вниз}$ (м/с^2)						
	$a_{вверх}$ (м/с^2)						
	$a_{вниз}$ (м/с^2)						
	$a_{вверх}$ (м/с^2)						
	$a_{вниз}$ (м/с^2)						
	$a_{вверх}$ (м/с^2)						
	$a_{вниз}$ (м/с^2)						
	$a_{вверх}$ (м/с^2)						

2. Переместите каждый из четырех грузов m' на одно и то же расстояние (3-4 см) от оси вращения. Для точности перемещения используйте разметку, нанесенную на стержнях. Проводить дополнительные измерения расстояния r_2 не следует.

3. По аналогии с Упр. 1 проведите измерения ускорений при движении вниз и вверх с измененным положением грузов m'.

4. Проведите аналогичные измерения в совокупности для 4-5 расстояний r_i.

Обработка результатов

(результаты заносятся в Табл.4 и 5)

1. Проведите обработку результатов, представленных в Табл.4, в соответствии в п.п.1-2 обработки в Упр. 1.

2. Рассчитайте значения $y_i = \dfrac{1}{a_{i,сред}}$ и $x_i = r_i^2$ и запишите их в Табл. 5.

3. Постройте график зависимости $\dfrac{1}{a_{сред}}\left(r^2\right)$. В соответствии с (2.1.11) зависимость должна быть линейной. Убедиться в этом, используя МНК для линейной зависимости (2.1.12).

Запишите в Табл. 5 рассчитанные значения коэффициентов $A_{эксп}$ и $C_{эксп}$, оцените погрешности.

Таблица 5. Результаты расчетов.

$x_i = r_i^2$					
$y_i = \dfrac{1}{a_{i,сред}}$					
$A_{эксп}$=	±	( )	$C_{эксп}$=	±	( )
$A_{расч}$=	±	( )	$\tilde{J}_0$ =	±	( )
			$\left(4m'r^2\right)_{мах}$ =	±	( )

4. Рассчитайте по (2.1.13) значение коэффициента $A_{расч}$ и сравните его с полученным в эксперименте.

5. По найденному в эксперименте $C_{эксп}$ и формулам (2.1.13) оцените момент инерции $\tilde{J}_0$. В соответствии с предложенной моделью он должен быть существенно больше суммарного момента инерции четырех грузов массой m' на максимальном удалении r_{max} от оси вращения. Сравните рассчитанные величины и сделайте вывод.

Основные итоги работы

В результате работы осуществляется экспериментальная проверка основного уравнения вращательного движения — уравнения моментов. Также экспериментально проверяется выполнимость теоремы Гюйгенса-Штейнера.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое абсолютно твердое тело? Сколько степеней свободы имеет абсолютно твердое тело? Сколько независимых скалярных уравнений необходимо для описания движения твердого тела?
2. Как направлен вектор угловой скорости?
3. Что такое момент силы относительно некоторой точки? Что такое момент силы относительно оси?
4. Что такое момент импульса тела, системы тел?
5. Что такое момент инерции тела относительно оси?
6. Сформулировать теорему Гюйгенса – Штейнера.
7. Записать уравнение моментов относительно неподвижной оси.