

Лабораторная работа № 108

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ

Цель работы

Определение коэффициентов трения качения для различных пар материалов.

Идея эксперимента

При определенной конструкции маятника затухание его колебаний зависит, в частности, от коэффициента трения качения. По уменьшению амплитуды колебаний за определенное число периодов определяются коэффициенты трения качения.

Теоретическое введение

Трение качения – разновидность сухого трения, возникающего при качении тел. Рассмотрим возникновение силы трения качения на примере шара или цилиндра, катящегося по горизонтальной поверхности. Причины силы трения качения – потери на упругий гистерезис, связанный с нагрузкой катящегося тела и материала основания, работа, затрачиваемая на передеформирование материала в результате формирования валика перед катящимся телом, преодоление мостиков сцепления.

Трение качения является результатом того, что деформация поверхности и шара (цилиндра), не является абсолютно упругой. Рассмотрим случай качения абсолютно твердого тела по деформируемой поверхности. Возникновение хотя бы слабых остаточных деформаций приводит к тому, что сила реакции поверхности опоры F (рис. 1) несимметрична относительно

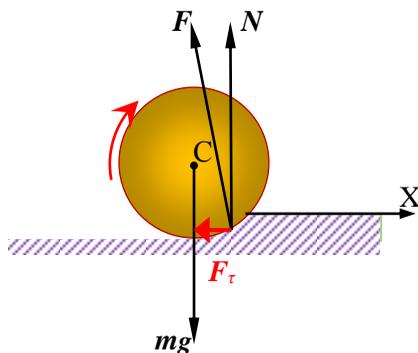


Рис. 1. Силы, действующие на катящийся цилиндр при наличии неупругих деформаций.

верти-кальной плоскости, проходящей через центр шара (точка C на рис. 1). В результате возникает момент сил реакции, замедляющий вращение, и результирующая горизонтальная сила F_τ , замедляющая поступательное движение цилиндра.

При качении по горизонтальной поверхности ускорение центра масс тела определяется только тангенциальной составляющей силы реакции опоры F_τ (рис. 1), и, следовательно, изменение кинетической энергии центра масс равно работе этой силы:

$$\Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -F_\tau\Delta x, \quad (1)$$

где m – масса шара (цилиндра), v и Δx – скорость и перемещение его центра масс.

Изменение кинетической энергии, связанной с вращением тела относительно оси, проходящей через центр масс, определяется работой двух сил:

$$\Delta\left(\frac{J_0\omega^2}{2}\right) = -Nk\Delta\varphi + F_\tau R\Delta\varphi. \quad (2)$$

Здесь J_0 – момент инерции шара (цилиндра) относительно указанной оси, ω – угловая скорость вращения, N – составляющая силы реакции опоры, перпендикулярная к недеформированной поверхности (сила нормальной реакции опоры), k – плечо этой силы относительно оси, проходящей через центр масс, R – радиус шара (цилиндра), $\Delta\varphi$ – угол его поворота. При записи уравнения (2) учтено, что при малых деформациях плечо тангенциальной составляющей силы реакции опоры примерно равно радиусу шара (цилиндра).

При качении тела без проскальзывания изменение координаты центра масс и угол поворота связаны уравнением кинематической связи:

$$\Delta x = R\Delta\varphi. \quad (3)$$

Полное изменение кинетической энергии катящегося шара (цилиндра) получаем при сложении уравнений (1) и (2). Учитывая кинематическую связь перемещения центра масс шара (цилиндра) и его угла поворота (3), получаем:

$$\Delta \left(\frac{mv^2}{2} + \frac{J_0 \omega^2}{2} \right) = -Nk\Delta\varphi. \quad (4)$$

Как видим, изменение кинетической энергии катящегося без проскальзывания тела определяется только моментом силы нормальной реакции опоры, поэтому его принято называть моментом трения качения $M_{\text{тк}}$, а плечо этой силы k относительно оси, проходящей через центр масс – коэффициентом трения качения:

$$M_{\text{тк}} = kN. \quad (5)$$

Заметим, что коэффициент трения качения, в отличие от коэффициента трения скольжения, имеет размерность длины.

Для определения тангенциальной составляющей силы реакции опоры F_τ запишем уравнение вращательного движения шара (цилиндра) относительно оси, проходящей через центр масс и второй закон Ньютона в проекции на горизонтальную ось X:

$$J_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -M_{\text{тк}} + RF_\tau, \quad (6)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -F_\tau. \quad (7)$$

Из системы уравнений (3), (6) и (7) получаем дифференциальное уравнение относительно угла поворота φ :

$$(J_0 + mR^2) \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -M_{\text{тк}} \quad (8)$$

и связь тангенциальной составляющей силы реакции опоры с моментом трения качения:

$$F_\tau = \frac{mR}{(J_0 + mR^2)} M_{\text{тк}}. \quad (9)$$

В данной работе для экспериментального определения коэффициента трения качения k используется маятник, схема которого представлена на рис. 2.

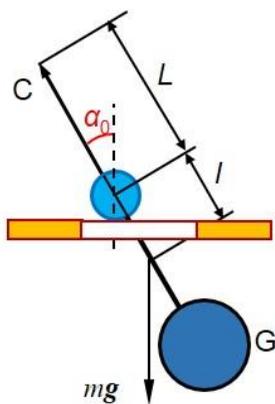


Рис. 2. Схема маятника.

Цилиндр радиусом R находится на горизонтальной плите. Стержень C прикреплен к цилиндру сверху, а снизу к системе прикреплен массивный груз G . При отклонении груза от положения равновесия система может совершать колебания. Колебания являются затухающими в первую очередь из-за противодействия момента трения качения. Движение цилиндра при этом является поступательно-вращательным. Коэффициент трения качения k можно определить по скорости затухания колебаний.

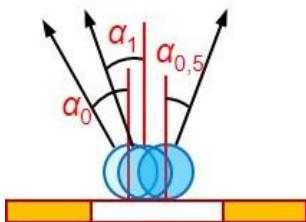


Рис. 3. Углы отклонения маятника от положения равновесия.

При рассмотрении процесса затухания колебаний, воспользуемся законом изменения механической энергии. Пусть маятник в начальный момент отклонили на угол α_0 от положения равновесия и отпустили. Через период (одно колебание) угол отклонения будет равен α_1 (см. рис. 3), а через n периодов – α_n соответственно. Максимальная за период потенциальная энергия маятника через n периодов становится

равной

$$E_n = mgl(1 - \cos \alpha_n) = 2mgl \sin^2(\alpha_n / 2), \quad (10)$$

где m – масса маятника, l – расстояние между центром тяжести маятника и осью цилиндра.

Уменьшение потенциальной энергии за первый период равно:

$$\Delta E = 2mgl \left(\sin^2 \left(\frac{\alpha_0}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\alpha_1}{2} \right) \right). \quad (11)$$

При малых углах α выражение (11) преобразуется к виду:

$$\Delta E = \frac{mgl}{2} (\alpha_0^2 - \alpha_1^2). \quad (12)$$

Пренебрегая работой сил сопротивления воздуха и считая, что изменение энергии вызвано работой силы нормальной реакции опоры (смещенной в сторону движения при неупругих деформациях), можно записать:

$$\Delta A = M_{\text{тр}} \alpha = kN\alpha = kmg\alpha, \quad (13)$$

где ΔA – работа силы нормальной реакции опоры при повороте цилиндра на угол α .

$$\text{За один полный период колебаний угол поворота составляет} \\ \alpha = \alpha_0 + 2\alpha_{0,5} + \alpha_1, \quad (14)$$

где $\alpha_{0,5}$ – угол отклонения цилиндра после одного полупериода (рис. 3).

Считая, что в среднем

$$\alpha_{0,5} \approx \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}, \quad (15)$$

и используя соотношения (13) – (15), получаем выражение для работы силы нормальной реакции опоры за период:

$$\Delta A_1 = 2kmg(\alpha_0 + \alpha_1) \quad (16)$$

Поскольку изменение механической энергии за период равно работе силы нормальной реакции опоры для коэффициента трения качения из соотношений (12) и (16) получаем следующее выражение:

$$k = \frac{l}{4}(\alpha_0 - \alpha_1). \quad (17)$$

Аналогичные соотношения можно получить для следующих периодов. Следовательно, коэффициент трения качения связан с изменением угла отклонения маятника за n периодов соотношением:

$$k = \frac{l}{4n}(\alpha_0 - \alpha_n). \quad (18)$$

Таким образом, определяя начальный α_0 и конечный α_n углы отклонения цилиндра, а также измеряя число колебаний n , можно оценить коэффициент трения качения k .

В связи с тем, что цилиндр при качении движется вращательно-поступательно, необходимо уточнить связь угла поворота цилиндра α с линейным отклонением конца стержня маятника.

Смещение конца стержня x можно представить в виде суммы двух смещений: поступательного движения оси цилиндра a_1 и

вращательной компоненты a_2 поворота конца стержня относительно центра цилиндра (см. рис. 4):

$$x = a_1 + a_2 = R\alpha + L \operatorname{tg} \alpha. \quad (19)$$

Здесь R – радиус цилиндра, L – расстояние от оси цилиндра до конца стержня, α – угол поворота маятника.

При малых углах $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$, и можно считать, что

$$\alpha_0 = \frac{x_0}{L+R}, \quad \alpha_n = \frac{x_n}{L+R}, \quad (20)$$

где x_0 и x_n – начальная и конечная амплитуды отклонения стержня. Тогда формулу (18) для коэффициента трения качения можно окончательно представить в виде:

$$k = \frac{l}{4n} \cdot \frac{x_0 - x_n}{L+R} = \frac{l}{4n} \cdot \frac{\Delta x_n}{L+R}, \quad (21)$$

где n – число периодов колебаний маятника за время измерения.

Из (21) следует, что амплитуда x_n от числа колебаний n является линейной

$$x_n = x_0 - \frac{4k(L+R)}{l} n. \quad (22)$$

При выводе соотношения (21) коэффициент трения качения считался постоянной величиной для конкретной пары соприкасающихся материалов. Проверку справедливости этого утверждения можно провести двумя способами*.

Во-первых, если плечо смещенной силы нормальной реакции опоры не изменяется в процессе колебаний и можно пренебречь силой сопротивления воздуха, то затухание колебаний происходит под действием постоянного момента силы нормальной реакции опоры (аналогично затуханию колебаний горизонтального пружинного маятника при наличии постоянной силы трения скольжения). Следовательно, в рассматриваемом случае период колебаний должен определяться только моментом инерции

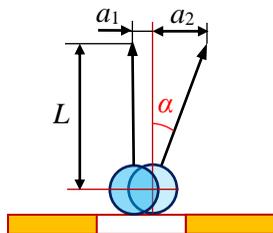


Рис. 4. Линейное и угловое смещение маятника от положения равновесия.

* Может быть выполнено по указанию преподавателя.

маятника и расстоянием от его центра тяжести до оси вращения. Поэтому следует сравнить периоды колебаний маятника при качении по подложкам из различных материалов, проанализировать полученные результаты и сделать вывод о возможных причинах несовпадения результатов в пределах погрешностей.

Во-вторых, необходимо выяснить, изменяется ли плечо силы нормальной реакции опоры в процессе качения цилиндра по одной и той же подложке с течением времени. С этой целью следует провести измерение коэффициента трения качения в течение двух интервалов времени τ_1 и τ_2 (например, $0 < \tau_1 < 10T$, $10T < \tau_2 < 20T$, где T – период колебаний).

Экспериментальная установка

Внешний вид установки представлена на рис. 5. На



Рис.5. Экспериментальная установка.

столике 1 установлен маятник. Маятник состоит из *цилиндра 2*, сделанного из нержавеющей стали, *стержня 3* с закрепленной на его верхнем конце *пластиной с прорезями 4* и массивного *груза 5*. Начальное отклонение маятника производится вручную до *фиксатора 6*.

Световой луч проходит сквозь зубчатую пластину и регистрируется *фотоэлектрическим датчиком 7*, закрепленным на *стойке 8*, что позволяет определять отклонение маятника от положения равновесия в различные моменты времени. При этом на экране *компьютера 9* наблюдается график зависимости смещения конца *стержня 3* от времени (см. рис. 6).

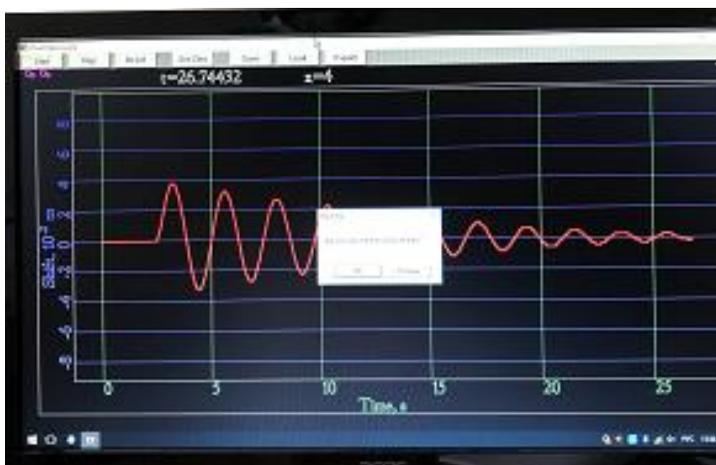


Рис. 6. График зависимости смещения маятника от времени.

Между *цилиндром 2* и *столиком 1* размещаются *пластинки 10* из различных исследуемых материалов, входящие в комплект установки.

Эксперимент проводится следующим образом. После запуска программы необходимо убедиться в том, что начальное смещение отсутствует. Для этого нажмите кнопку "Start" (маятник при этом не должен качаться) и убедитесь в том, что график имеет вид горизонтальной прямой с ординатой 0. Если положение прямой смещено, то нажмите кнопку "Set Zero". Перед каждой

новой серией измерений следует нажимать кнопку "Reset". Для начала измерений нажмите кнопку "Start", после чего приведите маятник в движение, отклонив его до фиксатора. Когда на экране график будет иметь явно выраженный вид затухающих колебаний (в течении ~ 60 с.) с изменением амплитуды не менее трех сантиметров, нажмите кнопку "Stop". Помещая курсор на экране в нужную точку графика, определите период колебаний маятника и изменение амплитуды колебаний, произошедшее за определенное число периодов. Координаты точки на графике отображаются в верхнем правом углу экрана желтым цветом. Изменение масштаба осуществляется вращением колёсика мыши, а перемещение графика в целом – нажатием левой клавиши мыши.

Проведение эксперимента

Измерения

1. Запишите в тетрадь указанные на установке значения следующих параметров маятника: радиуса цилиндра R , расстояния L от оси цилиндра до конца стержня и расстояния l между центром тяжести маятника и осью цилиндра.

2. Установите между столиком и цилиндром одну из пластин 10, входящих в комплект установки. Запишите название материала пластины.

3. Отклоните маятник до соприкосновения с фиксатором и запустите программу (нажать кнопку "Start") и отпустите маятник.

4. После 60 колебаний маятника (за время 80-100 секунд) остановите измерения кнопкой «Stop». При больших затуханиях колебаний, измерения времени проведите до уменьшения амплитуды до ~ 1 см.

5. С помощью курсора проведите измерения амплитуды x_n и соответствующих моментов времени t_n для начального ($n = 0$) колебания и $n = 10, 20, \dots, 60$ колебаний. Результаты прямых измерений запишите в табл. 1. При больших затуханиях колебаний измерения проводятся для $n = 0, 1, 2, \dots$, и т.д.

6. Выполните измерения пп. 3-5 для остальных материалов. Результаты занесите в табл. 1.

Таблица 1.

**Результаты прямых измерений амплитуды и
времени для различных материалов**

| <i>n</i> | сталь | | оргстекло | | дюраль | | текстолит | | резина | |
|----------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | <i>t_n</i> | <i>x_n</i> |
| | с | см |
| 0 | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | |
| 20 | | | | | | | | | | |
| 30 | | | | | | | | | | |
| 40 | | | | | | | | | | |
| 50 | | | | | | | | | | |
| 60 | | | | | | | | | | |

Обработка результатов

Зависимость амплитуды x_n от числа колебаний n является линейной, что позволяет применить метод наименьших квадратов (МНК) в рамках модели

$$x_n = An + B,$$

где $A = -\frac{4k(L+R)}{l}$.

1. Применяя МНК, определите коэффициент A и оценку погрешности σ_A . Экспериментальные значения берутся из табл.1, значения $n=0, 10, 20, \dots$ известны точно, погрешности определения амплитуд оцените самостоятельно, исходя из точности позиционирования курсора на максимумах.

2. Из формулы косвенных измерений найдите коэффициент трения качения k

$$k = -\frac{Al}{4(L+R)}$$

3. Вычислите выборочное стандартное отклонение погрешности определения коэффициента трения качения:

$$\sigma_k = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial l}\right)^2 \cdot \sigma_l^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial A}\right)^2 \cdot \sigma_A^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial L}\right)^2 \cdot \sigma_L^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial R}\right)^2 \cdot \sigma_R^2}$$

Значения, полученные в пп.1 -3, запишите в табл. 2.

Таблица 2

Значения A, k, T для различных материалов и погрешности их определения

| Материал | A см | σ_A см | k см | σ_k см | T с | σ_T с |
|-----------|-----------|------------------|-----------|------------------|----------|-----------------|
| сталь | | | | | | |
| оргстекло | | | | | | |
| дюраль | | | | | | |
| текстолит | | | | | | |
| резина | | | | | | |

4. Выполните пп.1 - 3 для всех материалов. Результаты запишите в табл. 2.

5. По результатам измерения времени t_n для всех материалов найти определите периоды колебаний T . Сделайте выводы о зависимости (или независимости) $T(k)$.

Основные итоги работы

В результате выполнения работы должны быть получены значения коэффициентов трения качения для различных пар материалов, периоды колебаний маятника, рассчитаны погрешности, проведен анализ причин их возникновения.

Контрольные вопросы

1. Какие виды трения Вам известны?
2. Сформулируйте закон Амонтона-Кулона.
3. Дайте определение коэффициента трения качения. Каковы причины возникновения трения качения?
4. От чего зависит коэффициент трения качения?
5. В чем отличие трения качения от трения скольжения?

6. Изобразите на рисунке все силы, действующие на цилиндр в процессе качения.
7. Какая сила препятствует качению цилиндра?
8. Выведите соотношение нормальной и тангенциальной составляющих силы реакции опоры.
9. Укажите на том же рисунке коэффициент трения качения. Каков его физический смысл?
10. Какова размерность коэффициента трения качения?
11. Каким образом определяется коэффициент трения качения при выполнении данной задачи? Выведите расчетную формулу.
12. Какие факторы вносят погрешность в измерения коэффициента трения качения?
13. Какими физическими факторами мы пренебрегаем в процессе определения коэффициента трения качения?

Литература

1. А. Н. Матвеев. Механика и теория относительности. – М. Изд. дом «Оникс 21 век», 2003. – . Гл. 8.
2. И.В. Митин, В.С. Русаков. Анализ и обработка экспериментальных данных. Учебно-методическое пособие для студентов младших курсов. – М.: МГУ. 2002.