

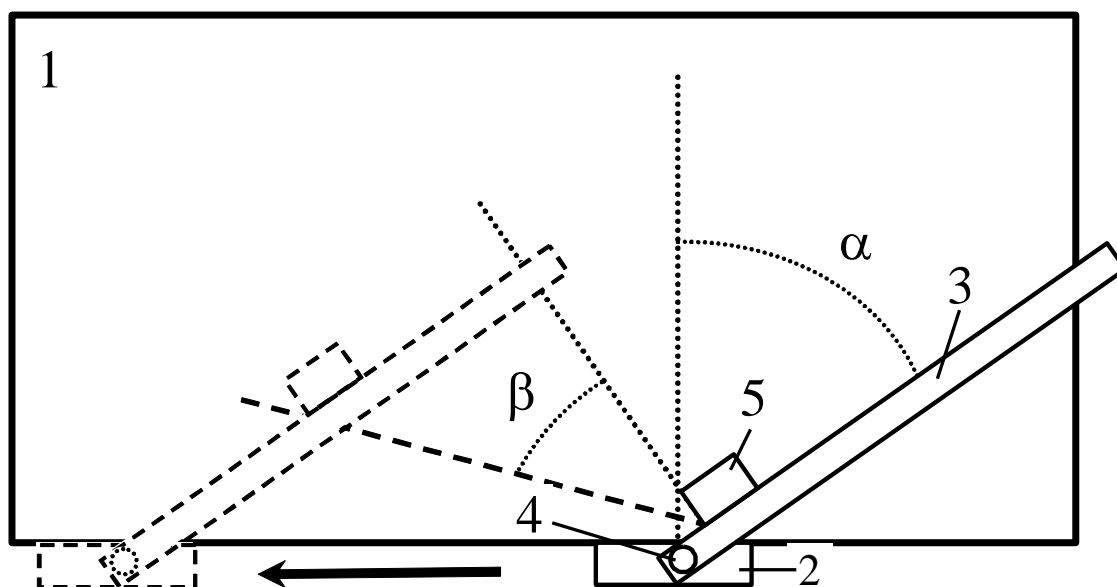


Лабораторный практикум  
по ФИЗИКЕ

МЕХАНИКА

Задача № 107

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА СИЛЫ  
СУХОГО ТРЕНИЯ.



МОСКВА 2024

## Введение

**Сухое (внешнее) трение** – механическое сопротивление, возникающее в плоскости касания двух соприкасающихся тел при их относительном перемещении (в том числе микроскопическом). Сила сопротивления направлена противоположно относительному перемещению тел и называется силой трения.

Различают трение покоя, скольжения и качения. Если внешняя тангенциальная сила недостаточна для скольжения одного тела по поверхности другого, то возникающая при этом сила сопротивления движению называется **силой трения покоя** (или неполной силой внешнего трения). Сила трения покоя вызвана малыми (несколькими микрометрами) частично обратимыми перемещениями в зоне контакта, величина которых зависит от приложенной силы и изменяется с увеличением последней от 0 до некоторого максимального значения, называемого максимальной силой трения покоя. Любое превышение внешней силы над максимальной силой трения покоя вызывает скольжение тела.

Если твердое тело скользит по поверхности, то между телом и поверхностью возникает **сила трения скольжения**.

Сила сопротивления движению является неконсервативной силой. Ее действие сопровождается выделением тепла, электризацией тел, разрушением.

Поскольку поверхности тел всегда имеют шероховатости, касание двух твердых тел происходит в дискретных областях, так называемых пятнах касания. Пятна касания – это элементарные площадки контакта, возникающие в результате упругих или пластических деформаций неровностей поверхности соприкасающихся тел. Размеры пятен касания колеблются в пределах от одного до нескольких десятков микрометров и зависят от свойств контактирующих тел и величины сил, прижимающих тела друг к другу. На пятнах касания возникают силы сцепления двух тел (адгезия, хим. связи, взаимная диффузия и др.), то есть образуются так называемые мостики.

При скольжении пятна касания мигрируют по поверхности, этот процесс сопровождается объемным деформированием приповерхностных слоев. Каждое пятно касания, т.н. фрикционная связь, существует лишь ограниченное время. Объем слоя, втянутого в деформацию тем больше, чем прочнее фрикционные связи.

Сила трения определяется двумя группами факторов, как зависящими от нормальной нагрузки, так и независящими от нее. В

широком диапазоне параметров она подчиняется закону Амонтона – Кулона.

**Закон Амонтона – Кулона** – эмпирический закон, описывающий свойства сил сухого трения:

1) модуль силы сухого трения покоя может принимать значения от нуля до некоторого своего максимального значения:

$$0 \leq F_{\text{п}} \leq F_{\text{max}} ;$$

2) модуль силы сухого трения скольжения равен максимальному значению модуля силы сухого трения покоя:  $F_{\text{ск}} = F_{\text{max}} ;$

3) модуль силы сухого трения скольжения пропорционален модулю силы нормального давления:

$$F_{\text{ск}} = \mu N , \quad (4.1)$$

где  $\mu$  – коэффициент (силы сухого) трения, не зависящий от силы нормального давления, а только от вещества и состояния поверхностей трущихся тел;

4) сила сухого трения скольжения направлена противоположно направлению скорости относительного движения тел  $v_{\text{отн}}$  :

$$F_{\text{ск}} \uparrow \downarrow v_{\text{отн}} .$$

**Трение качения** – разновидность сухого трения, возникающего при качении тел. Рассмотрим возникновение силы трения качения на примере шара или цилиндра, катящегося по горизонтальной поверхности. Причины силы трения качения – потери на упругий гистерезис, связанный с нагрузкой катящегося тела и материала основания, работа, затрачиваемая на передеформирование материала в результате формирования валика перед катящимся телом, преодоление мостиков сцепления.

Трение качения является результатом того, что деформация поверхности и шара (цилиндра), не является абсолютно упругой. Рассмотрим случай качения абсолютно твердого тела по деформируемой поверхности. Возникновение хотя и слабых остаточных деформаций приводит к тому, что реакция поверхности опоры несимметрична относительно вертикальной плоскости, проходящей через центр шара (точка С на рис. 4.1). В результате возникает момент сил реакции, замедляющий вращение, и результирующая горизонтальная сила  $F_{\tau}$ , замедляющая поступательное движение цилиндра.

При качении по горизонтальной поверхности ускорение центра масс тела определяется только тангенциальной составляющей

силы реакции опоры  $F_\tau$  (рис. 4.1), и, следовательно, изменение кинетической энергии центра масс равно работе этой силы:

$$\Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -F_\tau\Delta x, \quad (4.2)$$

где  $m$  – масса шара (цилиндра),  $v$  и  $\Delta x$  – скорость и перемещение его центра масс.

Изменение кинетической энергии, связанной с вращением тела относительно оси, проходящей через центр масс, определяется работой двух сил:

$$\Delta\left(\frac{J_0\omega^2}{2}\right) = -Nk\Delta\varphi + F_\tau R\Delta\varphi. \quad (4.3)$$

Здесь  $J_0$  – момент инерции шара (цилиндра) относительно указанной оси,  $\omega$  – угловая скорость вращения,  $N$  – составляющая силы реакции опоры, перпендикулярная к недеформированной поверхности (сила нормальной реакции опоры),  $k$  – плечо этой силы относительно оси, проходящей через центр масс,  $R$  – радиус шара (цилиндра),  $\Delta\varphi$  – угол его поворота. При записи уравнения (4.3) учтено, что при малых деформациях плечо тангенциальной составляющей силы реакции опоры примерно равно радиусу шара (цилиндра).

При качении тела без проскальзывания изменение координаты центра масс и угол поворота связаны уравнением кинематической связи:

$$\Delta x = R\Delta\varphi. \quad (4.4)$$

Полное изменение кинетической энергии катящегося шара (цилиндра) получаем при сложении уравнений (4.2) и (4.3). Учитывая кинематическую связь перемещения центра масс шара (цилиндра) и его угла поворота (4.4), получаем:

$$\Delta\left(\frac{mv^2}{2} + \frac{J_0\omega^2}{2}\right) = -Nk\Delta\varphi. \quad (4.5)$$

Как видим, изменение кинетической энергии катящегося без проскальзывания тела определяется только моментом силы нор-

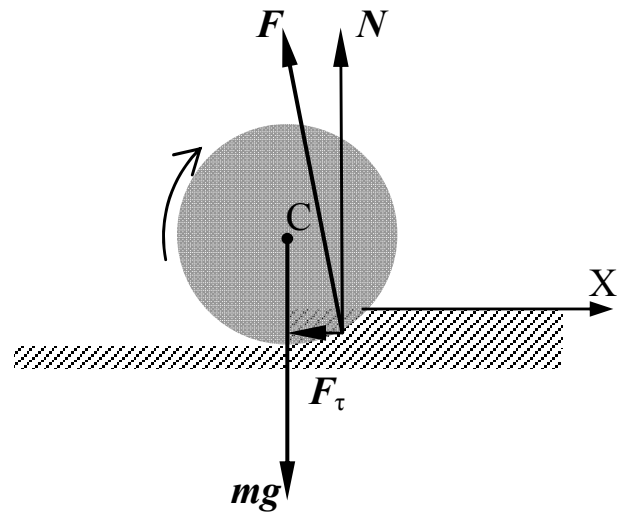


Рис. 4.1. Силы, действующие на катящийся цилиндр при наличии неупругих деформаций.

мальной реакции опоры, поэтому его принято называть моментом трения качения, а плечо этой силы  $k$  относительно оси, проходящей через центр масс – коэффициентом трения качения:

$$M_{\text{тк}} = kN . \quad (4.6)$$

Заметим, что коэффициент трения качения, в отличие от коэффициента трения скольжения, имеет размерность длины.

Для определения тангенциальной составляющей силы реакции опоры  $F_{\tau}$  запишем уравнение вращательного движения шара (цилиндра) относительно оси, проходящей через центр масс и второй закон Ньютона в проекции на горизонтальную ось X:

$$J_0 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -M_{\text{тк}} + RF_{\tau} , \quad (4.7)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -F_{\tau} . \quad (4.8)$$

Из системы уравнений (4.4), (4.7) и (4.8) получаем дифференциальное уравнение относительно угла поворота  $\varphi$ :

$$\left( J_0 + mR^2 \right) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -M_{\text{тк}} \quad (4.9)$$

и связь тангенциальной составляющей силы реакции опоры с моментом трения качения:

$$F_{\tau} = \left( \frac{mR}{J_0 + mR^2} \right) M_{\text{тк}} . \quad (4.10)$$

**Вязкое (внутреннее) трение.** Если движение происходит в присутствии смазки, то в зоне контакта нет скачка скорости при переходе от одного тела к другому. Нет скачка скорости и вблизи тела, если оно движется в вязкой (жидкой или газообразной) среде. Силы сопротивления, возникающие в этом случае, называются **силами вязкого (внутреннего) трения**  $F_{\text{в}}$ .

При малой величине скорости  $v$  движения тела относительно среды

$$F_{\text{в}} = -\eta v , \quad (4.11)$$

где  $\eta$  – коэффициент вязкого (внутреннего) трения.

Сила вязкого трения покоя равна нулю:  $F_{\text{вп}} = 0$ .

Сила вязкого трения, действующая на тело, направлена противоположно скорости этого тела относительно среды.

## Лабораторная работа 4.1

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА СИЛЫ СУХОГО ТРЕНИЯ

### Цель работы

Целью работы является изучение основных закономерностей сухого трения.

### Идея эксперимента

Идея эксперимента состоит в определении коэффициента силы сухого трения из анализа направления перемещения тела при взаимодействии с движущейся шероховатой рейшиной.

### Теоретическое введение

Рассмотрим особенности движения бруска, лежащего на горизонтальном столе, если его перемещение происходит под действием движущейся вдоль оси  $X$  рейшины (рис. 4.2). Найдем связь коэффициента трения  $\mu$  между бруском и линейкой с углом между вектором скорости бруска и перпендикуляром к линейке.

**Движение бруска без проскальзывания относительно рейшины.** При движении бруска по поверхности столика в горизонтальной плоскости на него действуют силы нормальной реак-

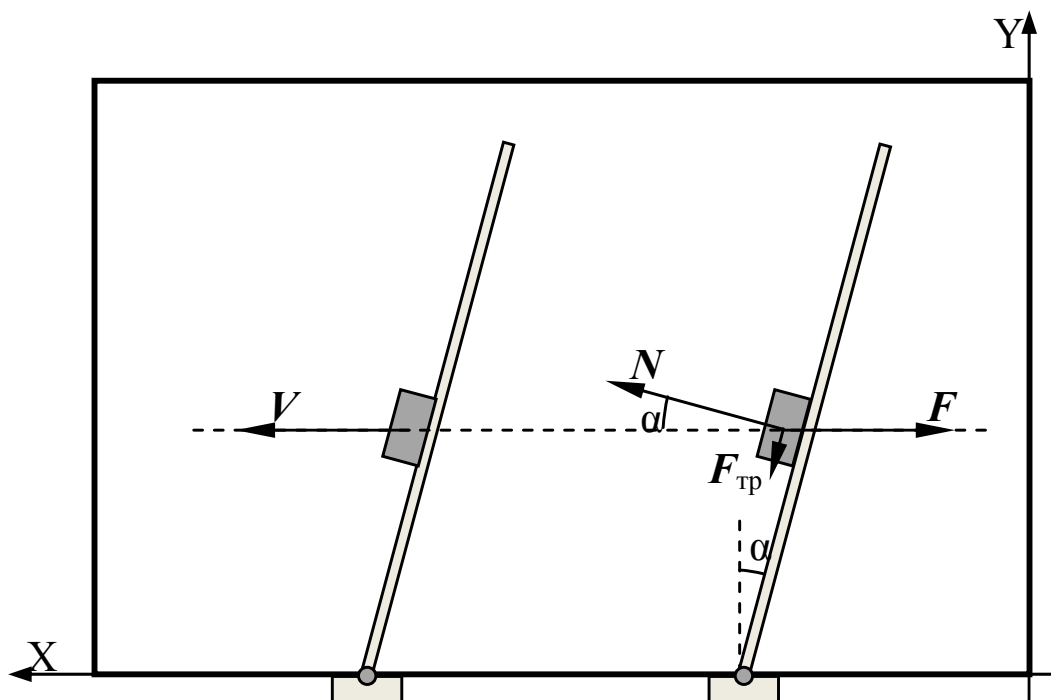


Рис. 4.2. Силы, действующие на брусок при движении без проскальзывания относительно рейшины.

ции  $N$  и трения  $F_{\text{тр}}$  со стороны линейки, а также сила трения скольжения  $F$  со стороны горизонтальной поверхности, направленная противоположно скорости бруска  $V$  (см. рис. 4.2).

Вертикальные силы – сила тяжести и сила нормальной реакции столика на рисунке не указаны. Выберем инерциальную лабораторную систему отсчета, связанную со столиком. Направим оси  $X$  и  $Y$  декартовой системы координат параллельно сторонам поверхности столика так, как показано на рис. 4.2. Если брусок движется без проскальзывания относительно рейсшины, его скорость и ускорение совпадают со скоростью и ускорением рейсшины. В этом случае сила трения скольжения  $F$ , действующая на брусок со стороны бумаги, лежащей на горизонтальной поверхности столика, направлена вдоль оси  $X$  (рис. 4.2).

Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси  $X$  и  $Y$  выбранной системы координат:

$$ma = N \cos \alpha - F + F_{\text{тр}} \sin \alpha , \quad (4.1.1)$$

$$0 = N \sin \alpha - F_{\text{тр}} \cos \alpha . \quad (4.1.2)$$

В соответствии с законом Амонтона – Кулона модуль силы трения покоя удовлетворяет неравенству:

$$F_{\text{тр}} \leq \mu N . \quad (4.1.3)$$

Как видим (в соответствии с (4.1.3)), отношение модуля силы трения  $F_{\text{тр}}$  к модулю силы нормальной реакции рейсшины  $N$  не зависит от ускорения бруска при отсутствии его проскальзывания относительно рейсшины и определяется только углом между вектором скорости (ускорения) бруска и нормалью к линейке рейсшины. Решая совместно уравнение (4.1.2) и неравенство (4.1.3), получаем:

$$\mu \geq \text{tg} \alpha . \quad (4.1.4)$$

В случае достижения силой трения покоя максимального значения тангенс угла  $\alpha = \alpha_0$  равен значению коэффициента трения между бруском и линейкой:

$$\mu = \text{tg} \alpha_0 . \quad (4.1.5)$$

**Движение бруска с проскальзыванием относительно рейсшины.** В случае движения бруска с проскальзыванием относительно рейсшины направление его скорости  $V$  не совпадает с направлением скорости рейсшины – осью  $X$  (см. рис. 4.3).

Рассмотрим случай движения бруска с постоянным по направлению ускорением. На рис. 4.3 обозначен угол  $\beta$  между направлением скорости (ускорения) бруска и нормалью к линейке рейшины. В рассматриваемом случае угол  $\beta$  не изменяется в процессе движения. Выберем лабораторную систему отсчета, связанную со столиком, ось  $X'$  декартовой системы координат которой направлена вдоль направления движения бруска, а ось  $Y'$  – перпендикулярно этому направлению (см. рис. 4.3).

Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси  $X'$  и  $Y'$  выбранной системы координат:

$$ma = N \cos \beta - F + F_{\text{тр}} \sin \beta, \quad (4.1.6)$$

$$0 = N \sin \beta - F_{\text{тр}} \cos \beta. \quad (4.1.7)$$

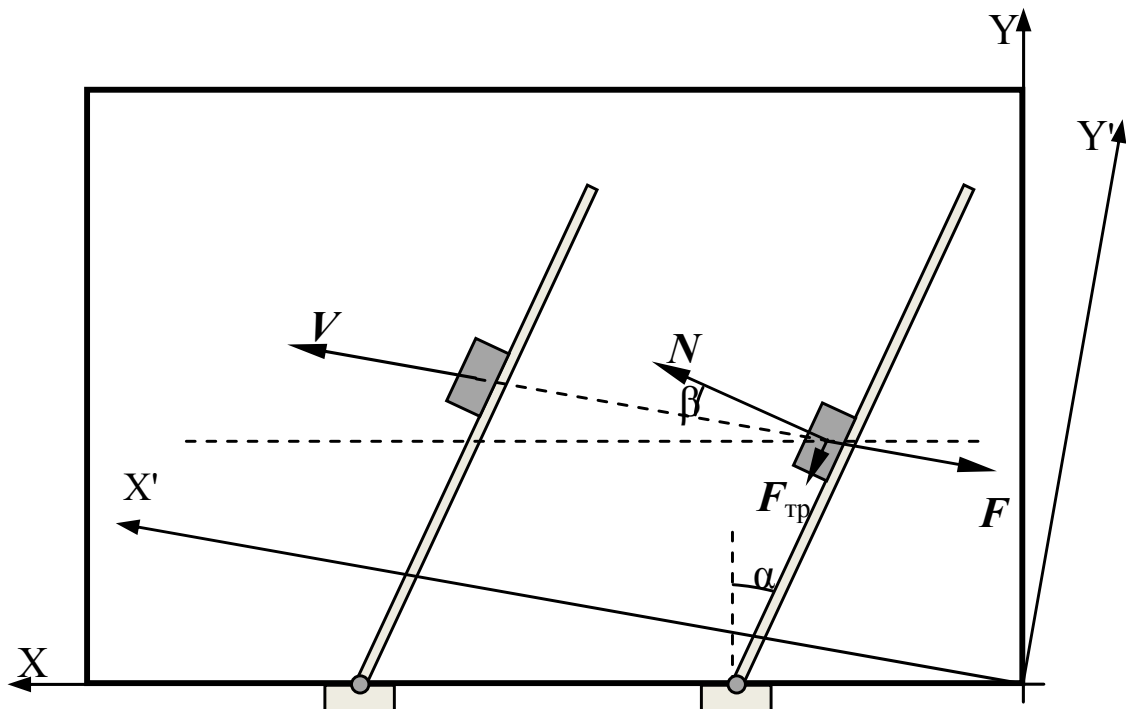


Рис. 4.3. Силы, действующие на брусок при движении с проскальзыванием относительно рейшины.

В соответствии с законом Амонтона – Кулона модуль силы трения скольжения определяется выражением:

$$F_{\text{тр}} = \mu N. \quad (4.1.8)$$

Из уравнения (4.1.7) получаем:

$$F_{\text{тр}} = N \operatorname{tg} \beta. \quad (4.1.9)$$

Подставляя (4.1.9) в закон Амонтона – Кулона (4.1.8), находим искомое выражение для коэффициента трения скольжения:

$$\mu = \operatorname{tg} \beta. \quad (4.1.10)$$



Заметим, что при движении бруска с изменяющимся по направлению ускорением полученное выражение (4.1.10) для коэффициента трения становится несправедливым. При выполнении работы необходимо убедиться в том, что движение бруска происходит вдоль прямой.

### Экспериментальная установка

Экспериментальная установка (см. рис. 4.4) состоит из *столика 1*, с закрепленным (с помощью *зажима 3*) на его поверхности *листом бумаги 2*, *рейсшины 4* и набора *брусков 5*, изготовленных

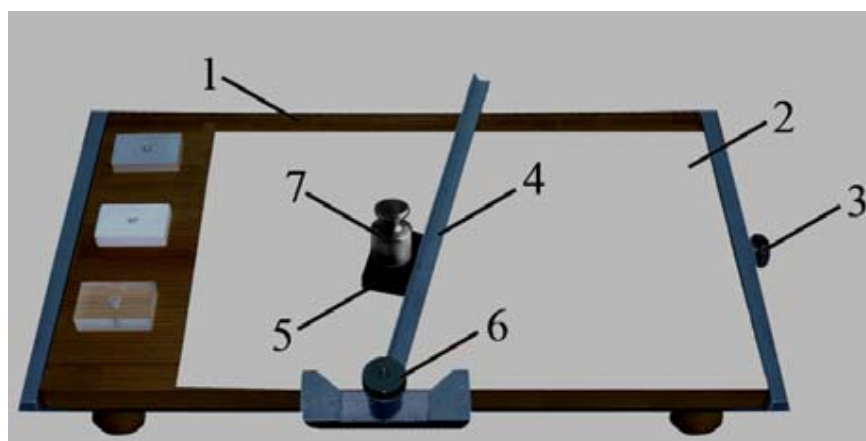


Рис.4.4. Экспериментальная установка.

из различных материалов. По горизонтальной поверхности столика может двигаться рейсшина, угол наклона которой  $\alpha$  (рис. 4.2) легко изменять с помощью *винта 6*. Вплотную к линейке рейсшины помещают один из брусков, и начинают перемещать рейсшину так, что ее скорость направлена вдоль одной из сторон поверхности столика. При этом, в зависимости от угла наклона линейки рейсшины, брусок может двигаться либо со скоростью рейсшины, оставаясь неподвижным относительно нее, либо двигаться с проскальзыванием относительно линейки. Вес бруска можно изменять с помощью дополнительного *груза 7*.

### Проведение эксперимента

На горизонтальной поверхности столика с помощью специального зажима закрепляют чистый лист бумаги для того, чтобы в дальнейшем можно было отмечать перемещение бруска относительно столика и линейки рейсшины. Рейсшину устанавливают на столике, максимально сдвинув вправо. Вплотную к линейке рейсшины, как показано на рис. 4.4, на столик кладут один из брусков.

Прижимая упор рейсшины к столику, передвигают рейсшину вдоль столика так, чтобы брусок скользил по бумаге, подталкиваемый линейкой. В процессе движения три раза отмечают карандашом положение центра бруска, останавливая его. Необходимо при этом придерживать брусок рукой, чтобы карандаш не изменял его положение. Если отмеченные точки лежат на одной прямой, то полученная прямая используется для дальнейшей обработки. Если точки не лежат на одной прямой, повторяют эксперимент, стараясь осуществлять движение бруска максимально равномерно. Заметим, что отмечать можно не только положение центра бруска, но и любого его угла.

**Упражнение 1. Определение коэффициента трения из значения максимальной силы трения покоя.**

### *Измерение*

В первом упражнении следует определить коэффициент трения между поверхностью линейки и поверхностями брусков, сделанных из различных материалов, определяя угол  $\alpha_0$ , при котором происходит переход от движения бруска по бумаге без проскальзывания вдоль линейки рейсшины к движению с проскальзыванием вдоль линейки.

На столике закрепляют лист чистой бумаги и проводят прямую линию, параллельную ребру столика (оси  $X$  на рис. 4.2). Сдвигают рейсшину по столику вправо. Вплотную к линейке на бумагу кладут один из брусков, как показано на рис. 4.4. Угол  $\alpha$  между линейкой и осью  $Y$  (рис. 4.2) вначале должен быть достаточно мал, чтобы при перемещении рейсшины не было проскальзывания бруска относительно линейки. Изменяя угол  $\alpha$ , находят его значение  $\alpha = \alpha_0$ , при котором начинается скольжение бруска вдоль линейки рейсшины. Для определения  $\operatorname{tg}\alpha_0$  рекомендуется построить прямоугольный треугольник (с катетами  $a$  и  $b$ ), причем длину катета  $b$ , прилежащего к углу  $\alpha_0$ , рекомендуется выбрать равной  $b = 20$  см. Затем измерить линейкой длину другого катета  $a$  и занести значение в табл.4.1.

## Экспериментальные данные

$\alpha = \alpha_0$		$b$	$\sigma_b$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$\bar{a}$	$\sigma_a$	$\mu = a/b$	$\sigma_\mu$
Брусок № 1	С грузом									
	Без груза									
Брусок № 2	С грузом									
	Без груза									

Эксперимент повторить не менее трех раз.

Аналогичные измерения проводят, изменив вес бруска. С этой целью на брусок устанавливается дополнительный перегрузок. Результаты измерений заносят в таблицу 4.1.

## Обработка результатов

1. Вычислить среднее значение катета  $\bar{a}$ , противолежащего к углу  $\alpha_0$ :

$$\bar{a} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n . \quad (4.1.11)$$

2. В качестве оценки случайной погрешности прямо измеренной величины  $a$  принимается выборочное стандартное отклонение среднего арифметического:

$$S_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{n=1}^N (a_n - \bar{a})^2} . \quad (4.1.12)$$

Поскольку катет  $b$  измерялся однократно, то  $S_b = 0$ .

3. Рассчитать коэффициент трения:

$$\mu = \frac{\bar{a}}{b} . \quad (4.1.13)$$

4. Выборочное стандартное отклонение  $S_\mu$  случайных ошибок для коэффициента трения определяется выражением:

$$S_{\mu} = \sqrt{\left(\frac{\partial \mu}{\partial a}\right)_{\bar{a}, \bar{b}}^2 S_{\bar{a}}^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial b}\right)_{\bar{a}, \bar{b}}^2 S_{\bar{b}}^2}. \quad (4.1.14)$$

5. Стандартное отклонение систематических ошибок рассчитывается по формуле:

$$\sigma_{\text{сист}\mu} = \sqrt{\left(\frac{\partial \mu}{\partial a}\right)_{\bar{a}, \bar{b}}^2 \sigma_{\text{сист}a}^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial b}\right)_{\bar{a}, \bar{b}}^2 \sigma_{\text{сист}b}^2}. \quad (4.1.15)$$

6. В предположении о независимости случайных и систематических погрешностей для величины стандартного отклонения суммарной погрешности справедлива формула:

$$\sigma_{\mu} = \sqrt{S_{\mu}^2 + \sigma_{\text{сист}\mu}^2}. \quad (4.1.16)$$

Значение коэффициента трения  $\mu$  и оценки погрешностей измерений заносят в табл. 4.1.

Коэффициент трения определяют для всех брусков, входящих в комплект установки.

## **Упражнение 2. Определение коэффициента трения и значения силы трения скольжения.**

### *Измерения*

Во втором упражнении следует определить коэффициенты трения при скольжении брусков вдоль линейки.

На столике закрепляют чистый лист бумаги. Угол  $\alpha$  между линейкой и осью  $Y$  (рис. 4.2) устанавливают несколько бóльшим, чем угол  $\alpha_0$ , определенный для различных брусков в первом упражнении. Убеждаются, что все бруски скользят вдоль линейки рейшины при ее перемещении по столику. Вплотную к линейке рейшины, предварительно сдвинутой по столику вправо, кладут один из брусков. Остро оточенным карандашом сквозь просверленное в бруске отверстие отмечают на бумаге первоначальное положение центра бруска. Медленно сдвигают рейшину влево по столику так, чтобы брусок двигался по бумаге прямолинейно. Чтобы убедиться в прямолинейности траектории, брусок в процессе движения два раза останавливают и, придерживая его рукой, отмечают положение центра бруска. Если отмеченные точки лежат на одной прямой, то полученная прямая используется для дальнейшей обработки. Если точки не лежат на одной прямой, повторяют экс-

перимент, стараясь осуществлять движение бруска максимально равномерно. После этого на бумаге строят угол  $\beta$  между перемещением центра бруска и нормалью к поверхности линейки (см. рис. 4.3) и определяют коэффициент трения  $\mu = \operatorname{tg}\beta$ , измеряя катеты соответствующего треугольника (как в *упражнении 1*). Результаты всех измерений заносят в табл.4.2.

Таблица 4.2.

**Экспериментальные данные**

$\alpha > \alpha_0$		$b$	$\sigma_b$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$\bar{a}$	$\sigma_a$	$\mu = a/b$	$\sigma_\mu$
$\alpha = \alpha_1$										
Брусок № 1	С грузом									
	Без груза									
Брусок № 2	С грузом									
	Без груза									
$\alpha = \alpha_0$		$b$	$\sigma_b$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$\bar{a}$	$\sigma_a$	$\mu = a/b$	$\sigma_\mu$
$\alpha = \alpha_2$										
Брусок № 1	С грузом									
	Без груза									
Брусок № 2	С грузом									
	Без груза									

Коэффициенты трения скольжения следует измерить при двух различных углах  $\alpha$ , больших чем  $\alpha_0$ .

Аналогичные измерения проводят, изменив вес бруска. С этой целью на брусок устанавливается дополнительный перегрузок. Результаты измерений заносят в табл.4.2.

### *Обработка результатов*

Далее следует вычислить среднее значение катета  $\bar{a}$ , значение коэффициента трения  $\mu$  и оценки погрешностей измерений в соответствии с пп. 1 – 6 упражнения 1.

После проведения всех расчетов необходимо проанализировать полученные в первом и втором упражнениях результаты, сравнить их и сформулировать краткие выводы, записав их в тетради.

### **Основные итоги работы**

*В результате выполнения работы должны быть определены коэффициенты трения двух материалов двумя способами из значений максимальной силы трения покоя и значения силы трения скольжения.*

### **Контрольные вопросы**

1. Что такое сила трения?
2. Какие силы трения вам известны?
3. Причины возникновения сил трения покоя и скольжения.
4. Зависит ли коэффициент трения скольжения от массы тела?
5. Зависит ли коэффициент трения скольжения от скорости тела?