

## Лабораторная работа 106

# ИЗУЧЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА МАКСВЕЛЛА

### Цель работы

*Анализ поступательно-вращательного плоского движения твердых тел и измерение момента инерции осесимметричного твердого тела.*

### Идея эксперимента

Использование маятника Максвелла для анализа плоского движения твердого тела и проверки закона сохранения механической энергии.

### Теоретическое введение

В классической механике все три закона сохранения – закон сохранения импульса, закон сохранения момента импульса, закон сохранения механической энергии – являются теоремами, которые доказываются на основе трех законов Ньютона. Рассмотрим каждый из законов сохранения.

Для определенности введем понятия *изолированной* и *замкнутой* систем тел.

*Замкнутой* называется такая система тел, для которой векторная сумма всех внешних сил равна нулю.

*Изолированной* называется такая система тел, на которую внешние силы не действуют.

**Закон сохранения импульса.** Рассмотрим систему взаимодействующих между собой материальных точек с массами  $m_i$ . В силу третьего закона Ньютона для сил взаимодействия двух материальных точек с номерами  $i$  и  $j$  можно записать  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ . Пусть на систему действуют внешние силы. Тогда для материальной точки с номером  $i$  уравнение движения будет иметь вид

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{F}_i + \sum \mathbf{F}_{ij}, \quad (1)$$

где вектор  $\mathbf{v}_i$  — скорость материальной точки.

Просуммируем эти уравнения по  $i$  и учтем, что  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ . В результате получим:

$$\sum m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum \mathbf{F}_i, \quad (2)$$

или

$$\frac{d\mathbf{P}_\Sigma}{dt} = \sum \mathbf{F}_i,$$

где  $\mathbf{P}_\Sigma = \sum m_i \mathbf{v}_i$  — суммарный (полный) импульс системы точек в выбранной системе отчета.

В частном случае, когда система тел является замкнутой ( $\sum F_i = 0$ ):

$$\sum m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = 0,$$

или

$$\sum m_i \mathbf{v}_i = \text{const}. \quad (3)$$

Соотношение (3) выражает **закон сохранения импульса** системы материальных точек:

*суммарный импульс замкнутой системы тел сохраняется*, т.е. не изменяется во времени.

**Закон сохранения момента импульса.** Обозначим момент импульса системы материальных точек относительно некоторой точки  $O$  через  $\mathbf{L}$ , а радиус-вектор  $i$ -й материальной точки — через  $\mathbf{r}_i$ .

Аналогично тому, как это было сделано выше, возьмем за основу уравнение движения (3.1) материальной точки

$$\mathbf{L} = \sum m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i. \quad (4)$$

Умножим левую и правую части уравнения (1) векторно на  $\mathbf{r}_i$  и просуммируем по  $i$ . Учитывая, что

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = 0,$$

получим

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i. \quad (5)$$

Воспользуемся тем, что

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{v}_i + \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}. \quad (6)$$

Первая сумма справа в (6) равна нулю, так как  $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i$ . Сле-

довательно,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M},$$

где

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \quad (7)$$

— суммарный момент внешних сил относительно точки  $O$ .

В результате получаем закон изменения момента импульса:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}. \quad (8)$$

В случае, когда момент внешних сил равен нулю,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0,$$

или

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \text{const}. \quad (9)$$

Таким образом, *суммарный момент импульса системы тел относительно некоторой точки пространства сохраняется (не изменяется во времени), если суммарный момент всех внешних сил относительно этой же точки равен нулю* (закон сохранения импульса).

Рассмотрим систему материальных точек, обладающую осевой симметрией, которая вращается вокруг неподвижной оси, например, совпадающей с осью  $z$ :  $\boldsymbol{\omega} = \{0, 0, \omega\}$ . В этом случае можно записать:

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)) = \sum_i m \rho_i^2 \boldsymbol{\omega}, \quad (10)$$

где  $\rho_i$  — расстояние от  $i$  — точки до оси вращения. Таким образом,

$$\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega}, \quad (11)$$

где  $J = \sum m_i \rho_i^2$  – момент инерции системы материальных точек.

**Закон сохранения механической энергии.** Если материальная точка массой  $m$  находится в поле действия силы, которая может быть представлена в виде градиента от некоторой скалярной функции  $U(x, y, z)$ :

$$\mathbf{F} = -\text{grad}U = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}, \quad (12)$$

а других сил нет, то наряду с кинетической энергией  $mv^2/2$  вводится потенциальная энергия  $U$ , при этом будет сохраняться полная энергия  $E = mv^2/2 + U$ . Для доказательства этого утверждения запишем уравнение движения этой материальной точки (второй закон Ньютона).

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\text{grad}U(\mathbf{r}). \quad (13)$$

Умножим обе части уравнения (13) скалярно на  $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$  и проинтегрируем. Учитывая, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \ddot{\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{v}} \mathbf{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) dt = \frac{\mathbf{v}_2^2}{2} - \frac{\mathbf{v}_1^2}{2} \quad (14)$$

и

$$\int_{r_1}^{r_2} \text{grad}U d\mathbf{r} = \int_{U(r_1)}^{U(r_2)} dU = U(r_2) - U(r_1), \quad (15)$$

получим:

$$\frac{mv_2^2}{2} + U(r_2) = \frac{mv_1^2}{2} + U(r_1). \quad (16)$$

Соотношение (16) выражает закон сохранения механической энергии для рассматриваемого случая. Условием потенциальности поля сил, т.е. условием выполнения (12), является равенство нулю работы по замкнутому пути. Потенциальная функция  $U(r)$  определена с точностью до константы. Эту неоднозначность можно устранить, если задать определенное значение  $U$  в некоторой точке поля.

Примером потенциального поля является поле силы тяжести вблизи поверхности Земли. В этом случае, если определить ось  $OZ$

по вертикали вверх, то потенциальная энергия:

$$U(z) = mgz. \quad (17)$$

В этом случае получим:

$$F_x = 0, F_y = 0, F_z = -mg. \quad (18)$$

Если тело вращается вокруг некоторой оси, проходящей или не проходящей через тело, то отдельные элементы тела при этом будут иметь различные скорости и различные перемещения.

В качестве примера рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной горизонтальной оси. Начало координат выберем на оси вращения тела. Ось  $OY$  направим вдоль оси вращения, радиус-вектор  $i$ -го элемента обозначим через  $\mathbf{r}_i$ , при этом  $\mathbf{r}_i = \mathbf{d}_i + \boldsymbol{\rho}_i$ , где  $\mathbf{d}_i$  — вектор, параллельный оси, а  $\boldsymbol{\rho}_i$  — перпендикулярен оси. Будем предполагать, что на  $i$ -й элемент этого тела помимо силы тяжести, равной  $\Delta m_i \mathbf{g}$  ( $\mathbf{g} = \{0, 0, -g\}$ ), действует сила  $\mathbf{F}_i$ , направленная по прямой, соединяющей эту точку с осью. Кроме того, предположим, что между  $i$ -м и  $j$ -м элементами действует сила взаимодействия  $\mathbf{F}_{ij}$ , причем  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$  и  $\mathbf{F}_{ij} \uparrow \uparrow (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ , т. е. сила взаимодействия — внутренняя сила. Запишем уравнение движения  $i$ -го элемента

$$\Delta m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \Delta m_i \mathbf{g} + \mathbf{F}_i + \sum_j \mathbf{F}_{ij}. \quad (19)$$

Умножив скалярно левую и правую части на  $d\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i dt$ , получим  $\dot{\mathbf{v}}_i \mathbf{v}_i dt = d(v_i^2/2)$ ,  $\mathbf{g} d\mathbf{r}_i = -gdz_i$ ,  $\mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i = 0$ , так как  $\mathbf{F}_i \perp d\mathbf{r}_i$ . Если суммировать по всем элементам, то появятся пары:

$$\mathbf{F}_{ij} d\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_{ji} d\mathbf{r}_j = \mathbf{F}_{ij} (\boldsymbol{\omega} dt \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)) = \boldsymbol{\omega} dt ((\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij}) = 0.$$

Таким образом, после интегрирования по  $d\mathbf{r}_i$  и суммирования отдельных уравнений (19) получим:

$$\sum \Delta m_i \frac{v_i^2}{2} + \sum \Delta m_i gz_i = \text{const}. \quad (20)$$

Выразим скорость  $v_i$  через вектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega} = (0, \omega, 0)$  и радиус-вектор  $\mathbf{r}_i$ :  $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i$ . Учитывая, что  $\boldsymbol{\omega} \perp \boldsymbol{\rho}_i$ , полу-

чим  $v_i^2 = \omega_i^2 \rho_i^2$ . Таким образом,

$$\sum \Delta m_i \frac{v_i^2}{2} = \frac{1}{2} J \omega^2, \quad (21)$$

где  $J = \sum \Delta m_i \rho_i^2$  — момент инерции тела относительно рассматриваемой оси.

Второе слагаемое в левой части (20) можно преобразовать, введя координаты центра масс:

$$x_c = \frac{\sum \Delta m_i x_i}{\sum \Delta m_i}, \quad y_c = \frac{\sum \Delta m_i y_i}{\sum \Delta m_i}, \quad z_c = \frac{\sum \Delta m_i z_i}{\sum \Delta m_i}. \quad (22)$$

В результате получим закон сохранения механической энергии в виде

$$\frac{1}{2} J \omega^2 + mgz_c = \text{const}, \quad (m = \sum \Delta m_i). \quad (23)$$

В качестве другого примера рассмотрим силу, возникающую при смещении элемента тела из положения равновесия ( $z = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$ ) и линейно зависящую от смещения  $x$ :

$$F = -kx. \quad (24)$$

Потенциальная энергия равна работе силы при перемещении тела из данного положения в положение, потенциальная энергия которого принимается равной нулю:

$$U(x) = -\int_x^0 F(x) dx = \frac{kx^2}{2} \quad (25)$$

При записи (25) потенциальная энергия равной нулю при  $x = 0$ .

В этом случае закон сохранения механической энергии будет иметь вид:

$$m \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2} kx^2 = \text{const}. \quad (26)$$

Таким образом, *механическая энергия системы тел сохраняется неизменной, если суммарная работа всех внешних сил и сил трения внутри системы равна нулю* (закон сохранения механической энергии).

## Маятник Максвелла.

Маятник Максвелла (см. рис. 1) состоит из тонкого металлического стержня АВ с симметрично закрепленным на нем диском С. К концам стержня прикреплены нити, другими концами закрепленные на неподвижной планке DE. Нити тщательно, виток к витку, наматываются на стержень (от его концов к диску), и в верхнем положении маятник закрепляется с помощью фиксатора.

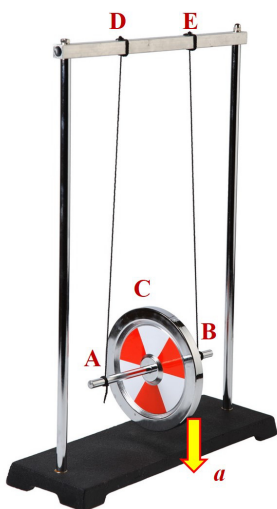


Рис. 1. Принципиальная схема маятника Максвелла.

После освобождения из верхнего положения маятник начинает движение под действием силы тяжести и сил со стороны нитей: поступательное – вниз и вращательное – вокруг оси АВ. В нижней точке вращение продолжается по инерции, нить наматывается на стержень, а маятник начинает подниматься. Достигнув верхней точки, маятник снова начинает движение вниз и т. д. Такой характер движения (вверх-вниз) в чем-то схож с колебаниями груза на пружине. Поэтому это устройство и получило название маятника Максвелла.

В движении маятника Максвелла можно выделить три временные стадии: спуск, удар и подъем. На рис. 2 (а, б) схематически представлены зависимости скорости и ускорения оси маятника.

Силы, действующие на маятник, могут быть условно разделены на силы длительного действия (при спуске и подъеме) и силы кратковременного действия (удар). В первом случае эти силы не изменяются во времени, во втором – резко возрастают и убывают.

Отметим, что удар маятника в нижней точке отличается от удара, например, шарика о плиту. Если кинетическая энергия падающего тела (шарика) на первой стадии удара полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации, то при ударе маятника Максвелла кинетическая энергия его вращения (которая

гораздо больше, чем кинетическая энергия поступательного движения перед ударом) практически не изменяется.

В связи с тем, что полное аналитическое решение за весь цикл движения маятника сложно и нецелесообразно, в эксперименте исследуются плоское движение и удар. Теоретически стадии движения рассматриваются отдельно, и, кроме того, используются предположения, которые упрощают решение задачи. Силы, действующие на маятник, могут быть условно разделены на силы длительного действия (при спуске и подъеме) и силы кратковременного действия (удар).

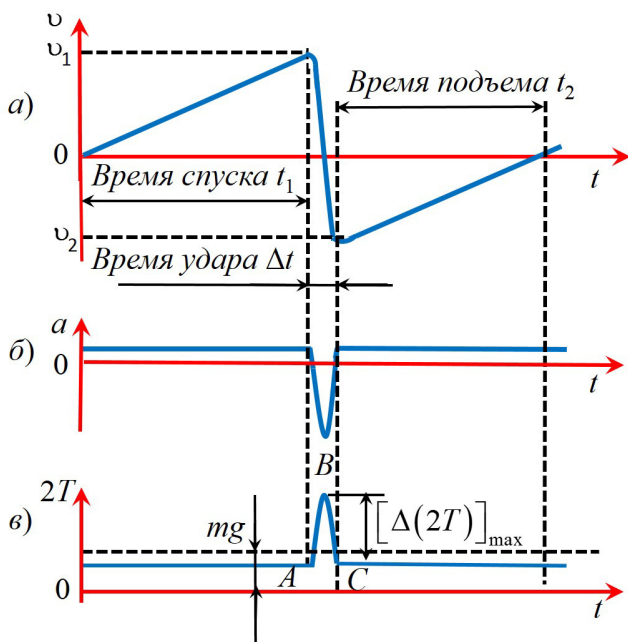


Рис. 2. Схематические зависимости скорости  $v$  (а) и ускорения  $a$  (б) точек оси маятника, а также силы натяжения нитей  $T$  (в) от времени движения маятника.

Движение маятника Максвелла является примером плоского движения, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости. Такое движение складывается



из поступательного движения какой-либо точки тела и вращения тела относительно этой точки. Если в кинематике это может быть любая точка тела, то в динамике удобно выбрать точку, в которой находится центр масс тела. Это позволяет применять теорему о движении центра масс и уравнение моментов в его простейшем (обычном) виде.

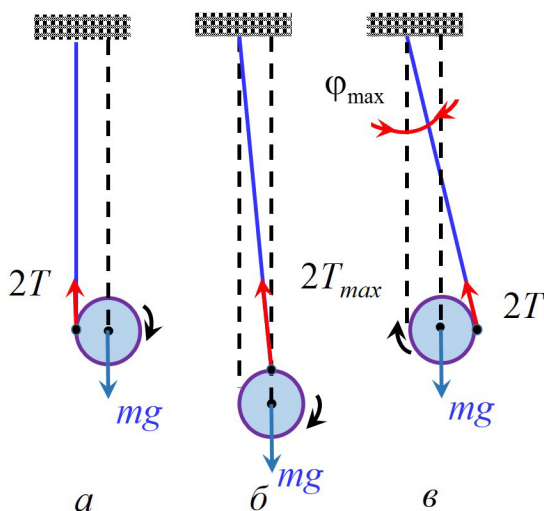


Рис. 3. Три последовательных положения оси маятника: в начале (а), в середине (б) и в конце (в) удара.

Движение маятника происходит под действием силы тяжести и силы натяжения нитей, поэтому устойчивое движение маятника (без раскачивания) возможно, только если нити находятся в вертикальной плоскости (рис. 3). При отклонении нитей от вертикальной плоскости возникают горизонтальные составляющие сил натяжения, возвращающие маятник к положению, когда нити вертикальны. В результате возникают колебания, период которых зависит от длины нитей. Это можно наблюдать во время подъема маятника, когда нити выходят из вертикальной плоскости. Если перед отпусканием маятника нити находятся в вертикальной плоскости, то движение вниз происходит без колебаний (заметим, что при этом центр масс маятника находится вне плоскости расположения

нитей).

Итак, без учета силы сопротивления воздуха и отклонения нитей от вертикали, уравнения движения центра масс маятника Максвелла вниз и вверх в лабораторной системе отсчета одинаковы и имеют вид:

$$ma = mg - 2T, \quad (27)$$

где  $m$  — масса маятника,  $T$  — сила натяжения нити,  $g$  — ускорение свободного падения,  $a$  — ускорение поступательного движения центра масс маятника.

Для записи уравнения вращательного движения (уравнения моментов) выберем ось маятника в качестве «оси моментов», которая движется с ускорением  $a$ . В такой системе отсчета уравнение моментов не будет содержать момента сил инерции\*, т.е.

$$J\varepsilon = 2rT, \quad (28)$$

где  $J$  — момент инерции маятника относительно его оси,  $r$  — радиус стержня маятника,  $\varepsilon$  — угловое ускорение маятника.

Уравнение кинематической связи, являющееся следствием нерастяжимости нитей, имеет вид

$$a = \varepsilon \cdot r, \quad (29)$$

При опускании маятника начальная скорость его центра масс равна нулю, а при подъеме она отлична от нуля. Решая систему уравнений (27) – (29), получим:

$$a = \frac{g}{1 + J/mr^2}. \quad (30)$$

Момент инерции маятника приближенно можно представить в виде  $J \approx \frac{mR^2}{2}$ , где  $R$  — радиус диска. Поскольку радиус диска  $R$

много больше радиуса стержня  $r$ , то величина  $\frac{J}{mr^2} = \frac{R^2}{2r^2} \gg 1$  и ускорение маятника  $a \ll g$ . Следовательно, для суммарной силы натяжения нитей справедливо выражение:

$$2T = m(g - a) \approx mg. \quad (31)$$

---

\* Момент сил инерции равен нулю, т.к. и равнодействующая сил инерции  $m(-a)$  и равнодействующая сил тяжести  $mg$  приложены в центре масс маятника.

На первой стадии движения (спуск) ускорение центра масс равно:

$$a_1 = \frac{2h_1}{t_1^2}, \quad (32)$$

где  $t_1$  – время опускания маятника,  $h_1$  – расстояние, которое он проходит за это время.

Из соотношений (30) и (32) получаем формулу для экспериментального определения момента инерции маятника:

$$J = mr^2(g/a - 1) = mr^2(gt_1^2/2h_1 - 1). \quad (33)$$

Скорость опускания центра масс маятника непосредственно перед его ударом равна

$$v_1 = at_1 = \frac{2h_1}{t_1}. \quad (34)$$

При подъеме маятника вверх после удара (III стадия) он движется равнозамедленно с ускорением  $a$ , направленным так же, как при его движении вниз. Скорость движения центра масс маятника при подъеме определяется уравнением:

$$v = v_2 - at, \quad (35)$$

где  $v_2$  – начальная скорость при движении маятника вверх,  $t$  – время от начала этого движения,  $a$  – модуль ускорения. Движение маятника вверх обусловлено продолжающимся по инерции вращением маятника в нижней точке его траектории. Наматывание при этом вращении нитей на стержень маятника и приводит к его подъему.

Если время подъема маятника до его остановки равно  $t_2$ , то для начальной скорости имеем:

$$v_2 = at_2 = \frac{2h_2}{t_2}, \quad (36)$$

так как ускорение при подъеме маятника связано с расстоянием  $h_2$ , которое проходит его ось до остановки, таким же соотношением, как и при спуске:

$$a_2 = \frac{2h_2}{t_2^2}. \quad (37)$$

Ускорения при спуске и подъеме одинаковы. Высота подъема

$h_2$  несколько меньше, чем  $h_1$ . Это обусловлено изменением механической энергии маятника за один цикл движения:  $\Delta W = mg(h_1 - h_2)$ . Уменьшение механической энергии связано как с неупругими процессами в нитях в момент удара, так и с потерями энергии на трение при движении маятника. Поскольку сопротивление воздуха мало, можно считать, что потери энергии происходят главным образом в момент удара и равны уменьшению кинетической энергии маятника:  $\Delta W_{\text{мех}} \approx \Delta W_{\text{уд}} = W_{\text{к1}} - W_{\text{к2}}$ .

Кинетическая энергия маятника равна:

$$W_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Jv^2}{2r^2} = \frac{mv^2}{2} \left( 1 + \frac{J}{mr^2} \right), \quad (38)$$

где  $\omega = v/r$  – угловая скорость маятника. Поскольку  $J/mr^2 \gg 1$ , кинетическая энергия  $\frac{mv^2}{2}$ , связанная с поступательным движением, мала по сравнению с энергией вращательного движения  $\frac{J\omega^2}{2}$ . Это обстоятельство является главной особенностью маятника Максвелла.

Кроме того, потери энергии при ударе малы ( $\Delta W_{\text{уд}} \ll W_{\text{к}}$ ), т.е. коэффициент восстановления скорости  $K_{\text{в}} = v_2/v_1 \approx 1$ . Именно благодаря этому в данной системе можно наблюдать многократное повторение цикла движения вниз – вверх, а сама система называется «маятником».

Теперь рассмотрим удар в нижней точке движения маятника. Явление удара сопровождается, как уже упоминалось, резкими изменениями сил взаимодействия за очень малый промежуток времени. Эти силы сначала нарастают, а затем убывают. Как правило, их зависимость от времени, неизвестна, и применение уравнений движения в явном виде затруднительно.

В теории удара рассматривают суммарный импульс силы:

$$\int_0^{\Delta t} F(t) dt = \Delta(mv) = m(v_2 - v_1), \quad (39)$$

где  $m$  – масса ударяющегося тела,  $v_1$  и  $v_2$  – его скорости до и по-

сле удара,  $F(t)$  – сила, действующая на тело во время удара,  $\Delta t$  – длительность удара.

В нашем случае во время удара происходит резкое увеличение силы натяжения нитей  $2T$ . График изменения этой силы приведен на рис. 3 в. Поскольку скорость маятника при ударе меняет свое направление, изменение импульса –  $m(v_1 + v_2)$  обусловлено импульсом силы  $F(t) = (2T)_{II} - mg$ . Так как при движении маятника вниз и вверх (I и III стадии) сила натяжения нитей мало отличается от веса маятника:  $(2T)_{I,III} \approx mg$  (ускорение  $a_{I,III} \ll g$ ), то можно считать, что  $F(t) \approx (2T)_{II} - (2T)_{I,III} = \Delta(2T)$ .

Таким образом, импульс силы при ударе равен:

$$m(v_1 + v_2) = F_{\text{cp}} \Delta t = \int_0^{\Delta t} \Delta(2T(t)) dt, \quad (40)$$

т.е. определяется площадью под кривой ABCA на рис. 2 в. Поскольку при ударе угловая скорость маятника практически не изменяется (потери энергии малы), можно считать, что во время удара вращение происходит со средней угловой скоростью

$$\omega_{\text{cp}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{v_1 + v_2}{2r}, \quad (41)$$

а время удара равно

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega_{\text{cp}}} = \frac{2\pi r}{v_1 + v_2}. \quad (42)$$

Преобразуя соотношения (40) и (42), получаем выражение для среднего значения силы  $F$ :

$$F_{\text{cp}} = \frac{m(v_1 + v_2)}{\Delta t} = \frac{m(v_1 + v_2)^2}{2\pi r}. \quad (43)$$

Рассмотрим упрощенную картину движения маятника при ударе. Удар начинается в тот момент, когда нити полностью размотались со стержня и заканчивается через пол-оборота маятника, в момент начала нового наматывания нитей. Будем считать нити нерастяжимыми, т.е. пренебрежем дополнительным удлинением  $\delta h$  нитей при ударе (возникающим из-за роста сил натяжения) по сравнению с радиусом  $r$  стержня маятника:

$$\delta h \ll r. \quad (44)$$

При таких предположениях центр масс маятника во время удара совершает движение вниз – вверх по закону:  $h_{\text{цм}} = h_0 - r \sin(\omega_{\text{cp}} t)$ , где  $h_0$  – вертикальная координата центра масс в начале удара, время отсчитывается от момента начала удара. Поэтому сила, действующая на маятник во время удара, равна:

$$F(t) = \Delta(2T) = ma(t) = m \frac{d^2 h_{\text{цм}}}{dt^2} = m \omega_{\text{cp}}^2 r \sin(\omega_{\text{cp}} t), \quad (45)$$

а ее максимальное значение:

$$[F(t)]_{\text{max}} = m \omega_{\text{cp}}^2 r = \frac{m(v_1 + v_2)^2}{4r}, \quad (46)$$

Нетрудно видеть (сравнивая соотношения (43) и (46)), что во время удара максимальное значение силы натяжения нитей в  $\pi/2$  раз превышает среднее значение силы.

Заметим, что поскольку радиус  $r$  стержня маятника мал по сравнению с длиной нитей  $h$ , нити маятника за время удара лишь незначительно отклоняются от вертикальной плоскости:  $\varphi_{\text{max}} \leq 2r/h \ll 1$ , и небольшая горизонтальная проекция силы натяжения  $2T$  не успевает вызвать заметного смещения центра масс маятника по горизонтали (см. рис. 3, где показаны три последовательных положения оси маятника:  $a$  – в начале,  $b$  – в середине и  $v$  – в конце удара). Однако отклонение нитей от вертикальной плоскости, возникающее после удара, приводит к появлению небольшого раскачивания оси маятника во время его подъема (III стадия). Это раскачивание маятника и вибрации системы, возникающие в результате удара, объясняют наблюдаемые в эксперименте осцилляции в зависимости силы натяжения нитей от времени.

### Экспериментальная установка

Фото установки представлено на рис.4. Она состоит из *рамы 1*, прикрепленной к стене, *маятника 2*, который с помощью *нитей 3*, проходящих через продольную щель в *планке 4* закреплен на *стержне 5*. Стержень 5 закреплен на *датчике силы 6*. Расстояния, которые проходит маятник при движении вниз и вверх измеряется

*датчиком положения 7.* В верхнем положении маятник устанавливается в *электромагнитных защелках 8*, управляемых с помощью *пускового устройства 9*. Датчики положения (7) и силы (6) соединены с *компьютером (10)*.

Схема маятника Максвелла представлена на рис.5. Он состоит из алюминиевого диска с радиусом  $r_1 = 50$  мм и толщиной  $S = 20$  мм на стальной оси, которая имеет три секции с диаметрами

$$d_2 = 2r_2 = 9 \quad \text{мм,}$$

$$d_3 = 2r_3 = 7 \quad \text{мм,}$$

$$d_4 = 2r_4 = 5 \quad \text{мм,}$$

длина каждой секции  $l = 25$  мм. Такое устройство маятника Максвелла позволяет получать три значения отношения

$$\frac{R}{r}.$$

На обоих концах каждой секции просверлены тонкие поперечные отверстия (2 мм) для крепления нитей. На концах каждой нити имеется петля, которая вставляется в отверстие и закрепляется на оси (как показано на рис.5).

Для проведения эксперимента и обработки результатов работы используется компьютерная программа «Цифровая лаборатория». После запуска программы на экране монитора появится главное меню. В этом меню следует выбрать два датчика: *датчик положения* (рис. 6) и

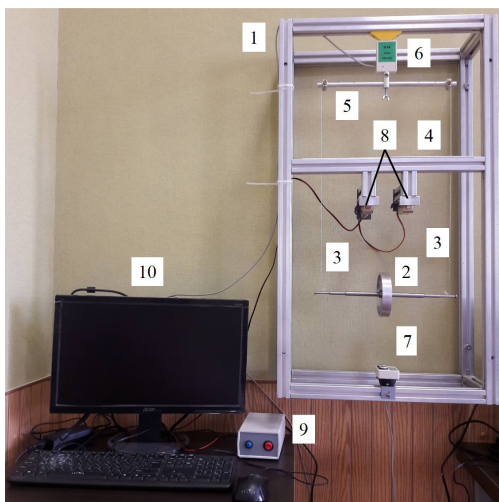


Рис. 4. Экспериментальная установка.

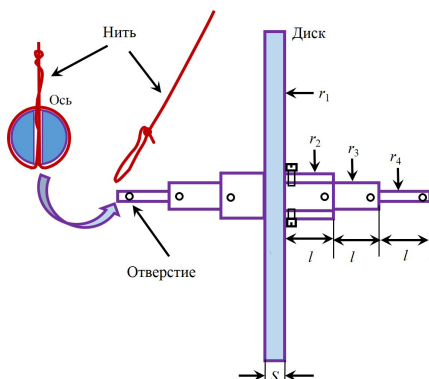


Рис. 5. Схема маятника Максвелла.

**датчик силы** (рис. 7). Для выбранного датчика с помощью кнопки установите нулевое показание (рис.8). Программа готова к измерению.

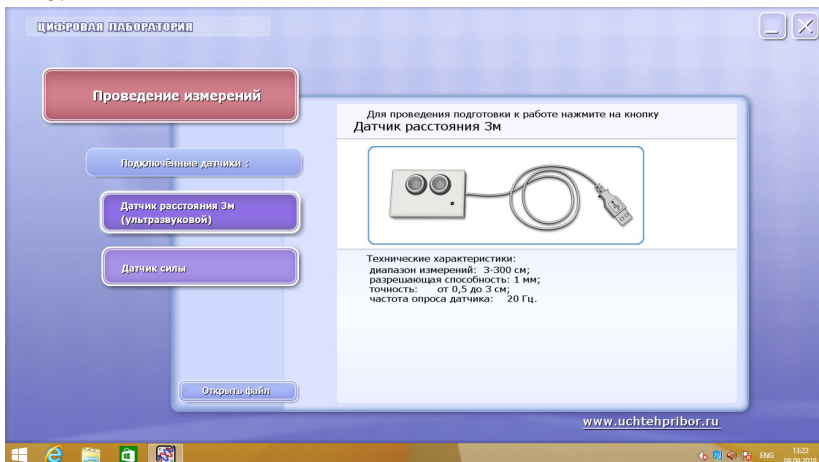


Рис. 6. Включение датчика положения.



Рис. 7. Включение датчика силы.

Для проведения измерений необходимо закрепить маятник в электромагнитных защелках. Для этого тщательно, виток к витку навивают нити на ось, следя за тем, чтобы сохранялось горизон-



тальное положение оси при натянутых нитях. Намотку производят до тех пор, пока ось маятника не окажется на уровне защелок. По-

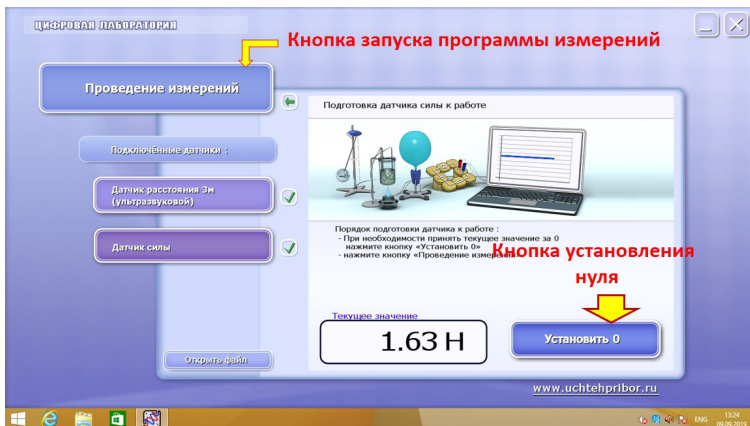


Рис. 8. Установка нуля для датчика и запуск измерений.

сле этого вставить снизу ось в защелки (рис. 9). Для управления работой пускового устройства (защелок) включить в сеть пусковое устройство. Защелки будут удерживать ось. Установка готова к измерениям.

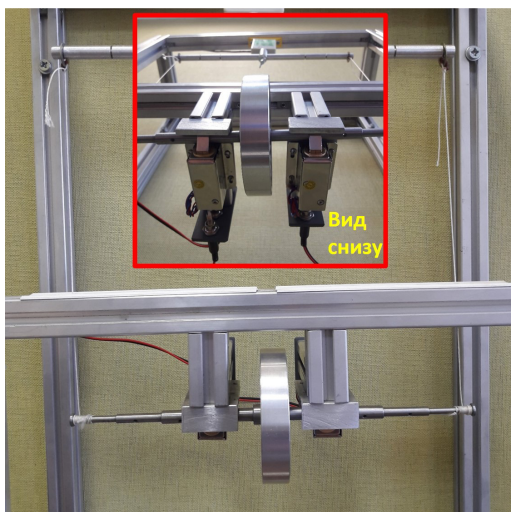


Рис. 9. Установка Маятника Максвелла в защелки.

Убедившись, что установка готова к измерениям, нажмите на кнопку проведения измерений (рис.8). После этого нажмите последовательно на кнопку старт на экране компьютера и кнопку «пуск» на пусковом устройстве. После окончания измерения нажмите на кнопку «стоп». Вид наблюдаемых зависимостей

координаты маятника от времени и силы от времени показан на рис. 10.

Для просмотра графика зависимости координаты маятника от времени и силы от времени с помощью кнопки «масштаб» и регуляторов выбираете нужный масштаб. Окно просмотра можно двигать, нажав на левую кнопку «мыши» (курсор при этом должен быть на окне просмотра).

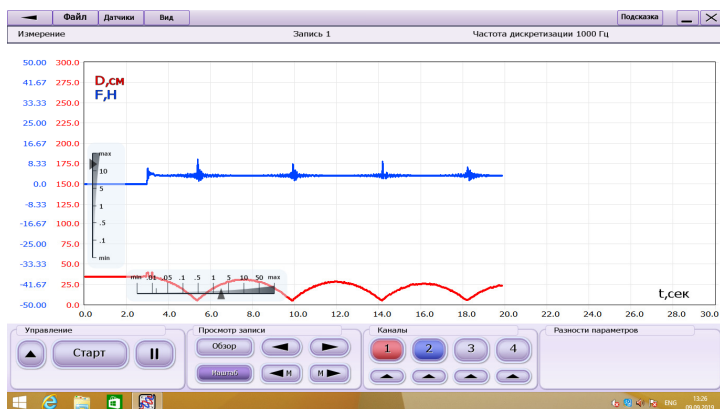


Рис. 10. Графики зависимости сил и координаты от времени.

Для получения информации о движении маятника Максвелла курсор мышки устанавливается на точке кривой, и после нажатия на правую кнопку «мыши» на экране появляется вертикальная линия, высвечиваются время и измеренное значение координаты или силы (или одновременно координаты и силы, если выбрано два датчика) (рис. 11). Одновременно на экране может быть не более двух измеренных значений. Для того, чтобы получить третье измерение следует убрать одно из предыдущих, нажав на крестик вблизи соответствующей вертикальной черты (см рис.11). При измерении в двух точках на экране появляется разность параметров

Кнопка «файл» позволяет записать полученные данные в файл, который можно использовать для последующей обработки результатов. Файл можно записать в трех форматах: record, excel, text. Форматы excel и text позволяют обрабатывать результаты, используя соответствующие программы (например, excel). Формат

record позволяет открыть файл программой «цифровая лаборатория».

На экране монитора также есть кнопка «помощь». Нажав на нее, можно получить дополнительную информацию.

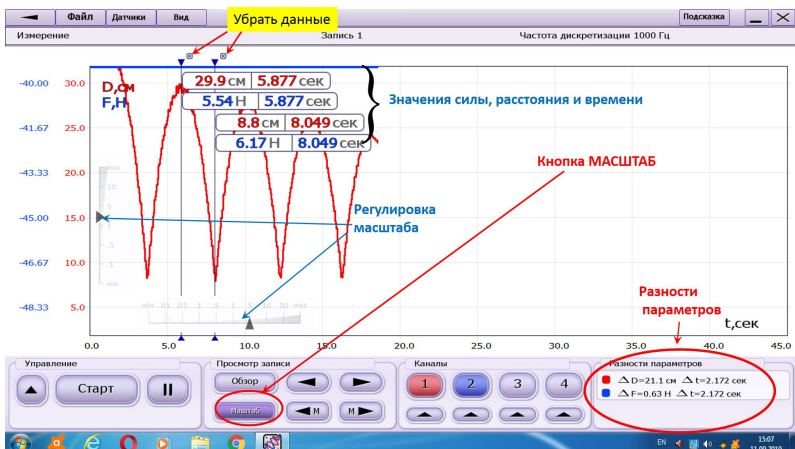


Рис. 11. Графики зависимости сил и координаты и определенные параметры

Важно, чтобы при движении вниз и вверх ось маятника не перекашивалась, нити навивались от места крепления по направлению к диску. Если эти условия нарушаются, необходимо прекратить движение маятника, а затем повторить опыт.

По окончании измерений стержень маятника фиксируется в верхнем положении (в защелках), при этом нити не должны быть натянуты.

## Проведение эксперимента

### Подготовка установки к проведению эксперимента

1. Зафиксируйте защелками маятник в верхнем положении. Убедившись, что нити маятника не натянуты, установите «ноль» датчика силы.

2. Нажмите кнопку «Пуск» на пусковом устройстве и после начала движения маятника остановите его руками в нижнем положении. Показания датчика силы при этом будут соответствовать

весу (силе тяжести) маятника  $mg$ . Запишите показание  $mg$  в тетрадь. Относительную погрешность показаний датчика силы при выполнении расчетов принять равной 1%.

3. При нахождении маятника в нижнем положении установите «ноль» датчика расстояния.

***Установка подготовлена к проведению экспериментов.***

### **Упражнение 1. Определение ускорений и скоростей маятника Максвелла при его спуске и подъеме.**

#### *Измерения*

1. Нажав кнопку «Проведение измерений», перейдите в основное окно программы. Нажмите кнопку «Старт» на экране монитора. Так как маятник находится в нижнем положении, то датчик расстояния должен показывать нулевое значение, а датчик силы – значение силы тяжести маятника. Если это не так, проведите повторно настройку системы.

2. Не прекращая измерений и аккуратно наматывая нить на ось маятника, поднимите маятник в верхнее положение и закрепите его в фиксирующих защелках. Теперь датчик расстояния должен показать максимально возможную координату маятника (запишите ее), а датчик силы – нулевое значение. Остановите измерения, нажав на «Стоп». *Установка готова к работе.*

3. Нажмите кнопку «Старт» на экране монитора и сразу же кнопку «Пуск» на пусковом устройстве. Маятник начинает движение, а на экране появляются графики зависимостей координаты  $x(t)$  и силы  $F(t)$  от времени (см. рис. 10). После того, как маятник совершит 6-8 колебаний вверх-вниз, нажмите кнопку «Стоп».

4. Нажмите кнопку «Обзор». Внимательно рассмотрите получившиеся графики. На графике координаты от времени четко видны моменты удара в нижней точке, координата которой  $x(t_{\text{удар}})$  должна быть равна нулю (отличие от нуля позволит оценить погрешность датчика измерения координаты). В то же время на графике  $F(t)$  в момент удара видны колебания (в отличие от теоретического графика на рис. 2в). Это связано с собственными колебаниями датчика, возникающими вследствие сильного удара, поэтому точное измерение силы удара по графику невозможно. По графику  $x(t)$  можно довольно точно определить для каждой верхней

точки координату маятника  $x_{\text{верх}}$  и силу  $F_{\text{верх}}$ , но точность определения для этой точки момента времени  $t_{\text{верх}}$  будет довольно низкой вследствие пологого участка на графике. Поэтому предлагается следующая модель движения маятника.

Так как сила натяжения нити при смене направления движения маятника в верхней точке не изменяется, то ускорения при движении вверх, а затем вниз одинаковы. Следовательно, одинаковы и времена движения вверх и вниз, поэтому следует измерить время от удара до удара и разделить его пополам.

5. По графику зависимости координаты от времени необходимо измерить время от начала движения до 1-го удара, от 1-го удара до 2-го, от 2-го удара до 3-го, и т.д. Для этого, как описано выше, курсор мыши устанавливается на соответствующей точке графика и после нажатия на правую кнопку мыши появляется вертикальная черта, около которой показываются значения времени  $t$ , координаты  $x(t)$  и силы  $F(t)$ . Положение вертикальной черты можно изменять, удерживая нажатой наведенную на нее правую кнопку мыши. Аналогично устанавливается вертикальная черта и на второй точке. При этом в правом нижнем углу экрана высвечивается измеряемый интервал времени  $\Delta t$  и разность координат  $\Delta x$  (см. рис. 11). Так как выбор точек удара осуществляется самостоятельно, то процедуру измерения  $\Delta t$  между ударами следует повторить не менее трех раз для оценки случайной погрешности (курсоры удаляют и вновь устанавливают).

6. Установите курсор мыши на точку, соответствующую максимальной высоте подъема маятника, и определите по графикам высоту  $h$  и силу натяжения нитей  $2T$  вблизи верхней точки. Для оценки случайной погрешности измерения следует повторить не менее трех раз.

Результаты измерений занести в табл. 1\*.

7. Погрешности измерения расстояний и времени при выполнении дальнейших расчетов примите равными  $S_h = 1\text{мм}$  и

---

\* По возможности следует провести измерения  $\Delta t$  и  $h$  и до 1-го удара, но надо иметь в виду, что при срабатывании пускового механизма может иметь место временное запаздывание. При расчете ускорения и скорости следует учесть, что на этом этапе измеряется только время опускания. Измерение силы  $2T$  не производится.

$$S_i = 0,001\text{с.}$$

Таблица 1

**Экспериментальные данные**

| Процесс               | $\Delta t$ ,<br>с | $\langle \Delta t \rangle \pm \sigma_{\Delta t}$ ,<br>с | $h$ ,<br>м | $\langle h \rangle \pm \sigma_h$ ,<br>м | $2T$ ,<br>Н | $\langle 2T \rangle \pm \sigma_{2T}$ ,<br>Н |
|-----------------------|-------------------|---|------------|---|-------------|---|
| До 1-го удара         |                   |   |            |   |             |   |
|                       |                   |   |            |   |             |   |
|                       |                   |   |            |   |             |   |
| От 1-го до 2-го удара |                   |   |            |   |             |   |
|                       |                   |   |            |   |             |   |
|                       |                   |   |            |   |             |   |
| От 2-го до 3-го удара |                   |   |            |   |             |   |
|                       |                   |   |            |   |             |   |
|                       |                   |   |            |   |             |   |
| От 3-го до 4-го удара |                   |   |            |   |             |   |
|                       |                   |   |            |   |             |   |
|                       |                   |   |            |   |             |   |
| ...                   |                   |   |            |   |             |   |
|                       |                   |   |            |   |             |   |
|                       |                   |   |            |   |             |   |

*Обработка результатов*

1. Для каждого участка движения найти:

- среднее арифметическое всех измеряемых величин  $\langle \Delta t \rangle$ ,  $\langle h \rangle$ ,  $\langle 2T \rangle$  по формуле

$$\langle Y \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \quad (Y = \langle \Delta t \rangle, \langle h \rangle, \langle 2T \rangle);$$

- оценку случайной погрешности измеряемых величин по формуле для серии прямых измерений

$$\sigma_{\langle Y \rangle} = \sqrt{\frac{\sum (Y_i - \langle Y \rangle)^2}{n(n-1)}}, \quad (Y = \langle \Delta t \rangle, \langle h \rangle, \langle 2T \rangle);$$

;

- суммарную погрешность измеряемых величин (считать относительные систематические погрешности измерений времени, расстояния и силы равными 1 проценту):

$$\sigma_{\text{сумм}} = \sqrt{(\sigma_{\langle Y \rangle})^2 + (\sigma_{\text{сист}})^2}.$$

Результаты записать в табл. 1.

2. В соответствии с теоретической моделью ускорения центра масс маятника при движении вверх и вниз одинаковы (в пренебрежении силой сопротивления воздуха). В этом случае и времена подъема и опускания в промежутке между соседними ударами будут одинаковыми и равными половине измеренного времени  $\Delta t$  между ударами. Также одинаковыми будут и скорости поступательного движения маятника в нижней точке непосредственно после удара и за мгновение до следующего удара.

3. Рассчитайте ускорения  $a$  и скорости  $v$  в нижней точке для каждого участка (кроме участка до 1-го удара) по формулам:

$$a = \frac{2h}{(\Delta t/2)^2} = \frac{8h}{(\Delta t)^2};$$

$$v = a \frac{\Delta t}{2} = \frac{4h}{\Delta t}.$$

4. Проведите оценку погрешностей  $a$  и  $v$  по формулам погрешности косвенных измерений:

$$\sigma_a = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial a}{\partial h}\right)_{\Delta t, h}\right)^2 \sigma_h^2 + \left(\left(\frac{\partial a}{\partial(\Delta t)}\right)_{\Delta t, h}\right)^2 \sigma_{\Delta t}^2},$$

$$\sigma_v = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial v}{\partial h}\right)_{\Delta t, h}\right)^2 \sigma_h^2 + \left(\left(\frac{\partial v}{\partial(\Delta t)}\right)_{\Delta t, h}\right)^2 \sigma_{\Delta t}^2}.$$

Результаты запишите в таблицу 2.

Таблица 2

### Результаты расчетов

| Процесс | $a$ , | $\sigma_a$ , | $v$ , | $\sigma_v$ , | $K$ | $\sigma_K$ |
|---------|-------|--------------|-------|--------------|-----|------------|
|---------|-------|--------------|-------|--------------|-----|------------|

|                       | м/с <sup>2</sup> | м/с <sup>2</sup> | м/с | м/с |   |   |
|-----------------------|------------------|------------------|-----|-----|---|---|
| До 1-го удара         |                  |                  |     |     | - | - |
| От 1-го до 2-го удара |                  |                  |     |     |   |   |
| От 2-го до 3-го удара |                  |                  |     |     |   |   |
| От 3-го до 4-го удара |                  |                  |     |     |   |   |
| ...                   |                  |                  |     |     |   |   |

5. Для каждого удара найдите отношение потенциальных энергий до и после удара:

$$K = \frac{W_{\text{после}}}{W_{\text{до}}} = \frac{h_{\text{после}}}{h_{\text{до}}}.$$

6. Сравните рассчитанные значения ускорений и скоростей для различных этапов движения и сделайте выводы.

7. Сравните силу натяжения нитей  $2T$  в верхних точках с силой тяжести  $mg$  и сделайте выводы.

8. Проведите по экспериментальному графику (с датчика силы) измерения максимальной силы натяжения  $(2T)_{\text{max}}^{\text{экс}}$  при 1-м и 2-м ударах.

### **Упражнение 2. Определение времени удара и максимального увеличения силы натяжения нитей.**

В данном и последующих упражнениях измерения не проводятся, осуществляется только обработка полученных в *Упр.1* экспериментальных данных.

1. Рассчитайте для 1-го и 2-го ударов время удара  $\tau$  и максимальное увеличение силы натяжения  $[\Delta(2T)]_{\text{max}}$  по формулам (42) и (46):



$$\tau = \frac{2\pi r}{v_1 + v_2};$$

$$[\Delta(2T)]_{max} = \frac{m(v_1 + v_2)^2}{4r}.$$

2. Оцените погрешности по формулам погрешности косвенных измерений.

3. Вычислите отношение максимальной силы натяжения нити к силе тяжести:

$$P_{расч} = \frac{(2T)_{max}}{mg} = \frac{[\Delta(2T)]_{max} + mg}{mg} = \frac{[\Delta(2T)]_{max}}{mg} + 1.$$

Результаты запишите в табл. 3.

Таблица 3

| Процесс  | $\tau$ , с | $\sigma_\tau$ , с | $\Delta(2T)_{max}$ , Н | $\sigma_{\Delta(2T)v}$ , Н | $P_{расч}$ | $P_{эксп}$ |
|----------|------------|-------------------|------------------------|----------------------------|------------|------------|
| 1-й удар |            |                   |                        |                            |            |            |
| 2-й удар |            |                   |                        |                            |            |            |

3. По результатам измерения максимальной силы натяжения  $(2T)_{max}^{эксп}$  при 1-м и 2-м ударах найдите отношение этих величин к силе тяжести  $P_{эксп}$  и сравните с результатами расчетов.

### Упражнение 3. Определение момента инерции маятника Максвелла.

1. Для расчета момента инерции маятника используется формула (33)

$$J_{эксп} = mr^2 \left( \frac{g}{a} - 1 \right).$$

При расчетах следует учесть, что радиус  $r$  стержня маятника, на которую наматывается нить, небольшой – всего несколько миллиметров. А нить также имеет толщину. Поэтому необходимо измерить штангенциркулем диаметр оси без нити, а затем с намотан-

ной на нее нитью. И сделать из результатов измерений правильный вывод.

Можно поступить по другому. По смыслу величина  $r$  является коэффициентом пропорциональности в уравнении кинематической связи между угловым  $\Delta\varphi$  и линейным  $\Delta h$  перемещениями маятника:  $\Delta h = r \Delta\varphi$ .

Поддерживая нити в натянутом состоянии, определите линейное перемещение  $\Delta h$  оси маятника при сматывании со стержня (или наматывании на стержень) целого числа  $n$  витков нити. Для больших значений  $n=20-30$  угловое перемещение  $\Delta\varphi=2\pi n$  можно определить достаточно точно, наблюдая за перемещением карандашной метки, сделанной на диске маятника.

2. Форма маятника Максвелла довольно сложна для точного расчета момента инерции. Поэтому следует получить оценку момента инерции из упрощенной модели маятника, считая его диском массой  $M_{\text{диск}}$  с осью массой  $M_{\text{ось}}$ . Общая масса  $M$  определена из силы тяжести, найденной в Упр.1.

Для расчета моментов инерции как диска, так и оси можно воспользоваться формулой

$$J_{\text{диск(ось)}} = \frac{m_{\text{диск(ось)}} r_{\text{диск(ось)}}^2}{2}.$$

В модели маятника следует учесть, что диск сделан из дюралюминия (плотность  $\rho_{\text{ал}} \approx 2,8 \text{ г/см}^3$ ), а ось – из стали (плотность  $\rho_{\text{ст}} \approx 7,8 \text{ г/см}^3$ ).

Ось маятника можно считать длинным тонким цилиндром, необходимо измерить его длину и оценить среднее значение диаметра. У диска необходимо измерить диаметр и оценить толщину. Так как на установке задана масса всего маятника, то, пользуясь результатами измерений и оценок, а также известными плотностями материалов, необходимо оценить массы диска  $M_{\text{диск}}$  и оси  $M_{\text{ось}}$ .

Оценить моменты инерции диска  $J_{\text{диск}}$  и оси  $J_{\text{ось}}$ . Рассчитать момент инерции  $J_{\text{расч}}$  всего маятника.

3. Сравните полученный результат с найденным по экспериментальным данным.

#### Упражнение 4. Проверка закона сохранения механической

## энергии.

1. По формуле (38)

$$W_{кин} = \frac{mv^2}{2} \left( 1 + \frac{J}{mr^2} \right)$$

рассчитайте кинетическую энергию маятника после 1-го и 2-го ударов.

2. Зная по результатам эксперимента высоту подъема маятника после 1-го и 2-го ударов, рассчитайте потенциальную энергию в верхней точке

$$W_{пот} = mgh.$$

3. Сравните полученные значения кинетической и потенциальной энергий и сделайте выводы.

## Основные итоги работы

В результате выполнения работы определяются и сравниваются:

- ускорения центра масс маятника между ударами;
- скорости центра масс маятника до и после удара;
- сила натяжения нитей в верхних точках и сила тяжести;
- момент инерции тела маятника по результатам эксперимента и по упрощенной модели.
- кинетическая энергия сразу после удара и потенциальная энергия в верхней точке.

## Контрольные вопросы

1. Дайте определение плоского движения.
2. Что такое центр масс системы? Сформулируйте теорему о движении центра масс.
3. Сформулируйте закон изменения импульса.
4. Сформулируйте закон изменения механической энергии.
5. Как изменяется кинетическая энергия системы в момент удара?

6. Получите формулу для вычисления момента инерции маятника Максвелла.

### Литература

1. А. Н. Матвеев. Механика и теория относительности. М. Изд. дом «Оникс 21 век», 2003. Гл. 8.
2. В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Карavaев. Механика. М.: Изд. центр «Академия», 2004. Лекции 12,13
3. И.В. Митин, В.С. Русаков. Анализ и обработка экспериментальных данных. Учебно-методическое пособие для студентов младших курсов. – М.: МГУ. 2002.