

Лабораторная работа 106М

ИЗУЧЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА МАКСВЕЛЛА

Цель работы

Анализ поступательно-вращательного плоского движения твердых тел и измерение момента инерции осесимметричного твердого тела.

Идея эксперимента

Использование маятника Максвелла для анализа плоского движения твердого тела и проверки закона сохранения механической энергии.

Теоретическое введение

В классической механике все три закона сохранения – закон сохранения импульса, закон сохранения момента импульса, закон сохранения механической энергии – являются теоремами, которые доказываются на основе трех законов Ньютона. Рассмотрим каждый из законов сохранения.

Для определенности введем понятия *изолированной* и *замкнутой* систем тел.

Замкнутой называется такая система тел, для которой векторная сумма всех внешних сил равна нулю.

Изолированной называется такая система тел, на которую внешние силы не действуют.

Закон сохранения импульса. Рассмотрим систему взаимодействующих между собой материальных точек с массами m_i . В силу третьего закона Ньютона для сил взаимодействия двух материальных точек с номерами i и j можно записать $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$. Пусть на систему действуют внешние силы. Тогда для материальной точки с номером i уравнение движения будет иметь вид

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{F}_i + \sum \mathbf{F}_{ij}, \quad (1)$$

где вектор $\mathbf{v}_i$ — скорость материальной точки.

Просуммируем эти уравнения по i и учтем, что $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$. В результате получим:

$$\sum m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum \mathbf{F}_i , \quad (2)$$

или

$$\frac{d\mathbf{P}_\Sigma}{dt} = \sum \mathbf{F}_i ,$$

где $\mathbf{P}_\Sigma = \sum m_i \mathbf{v}_i$ — суммарный (полный) импульс системы точек в выбранной системе отчета.

В частном случае, когда система тел является замкнутой ($\sum \mathbf{F}_i = 0$):

$$\sum m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = 0 ,$$

или

$$\sum m_i \mathbf{v}_i = \text{const} . \quad (3)$$

Соотношение (3) выражает **закон сохранения импульса** системы материальных точек:

суммарный импульс замкнутой системы тел сохраняется, т.е. не изменяется во времени.

Закон сохранения момента импульса. Обозначим момент импульса системы материальных точек относительно некоторой точки O через $\mathbf{L}$, а радиус-вектор i -й материальной точки — через $\mathbf{r}_i$.

Аналогично тому, как это было сделано выше, возьмем за основу уравнение движения (3.1) материальной точки

$$\mathbf{L} = \sum m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i . \quad (4)$$

Умножим левую и правую части уравнения (1) векторно на $\mathbf{r}_i$ и просуммируем по i . Учитывая, что

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = 0 ,$$

получим

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i . \quad (5)$$

Воспользуемся тем, что

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{v}_i + \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}. \quad (6)$$

Первая сумма справа в (6) равна нулю, так как $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i$. Следовательно,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M},$$

где

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \quad (7)$$

— суммарный момент внешних сил относительно точки O .

В результате получаем закон изменения момента импульса:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}. \quad (8)$$

В случае, когда момент внешних сил равен нулю,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0,$$

или

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \text{const}. \quad (9)$$

Таким образом, *суммарный момент импульса системы тел относительно некоторой точки пространства сохраняется (не изменяется во времени), если суммарный момент всех внешних сил относительно этой же точки равен нулю* (закон сохранения импульса).

Рассмотрим систему материальных точек, которая вращается вокруг неподвижной оси, например, совпадающей с осью z : $\boldsymbol{\omega} = \{0, 0, \omega\}$. В этом случае можно записать:

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)) = \sum_i m \rho_i^2 \boldsymbol{\omega}, \quad (10)$$

где ρ_i — расстояние от i — точки до оси вращения. Таким образом,

$$\mathbf{L} = J \boldsymbol{\omega}, \quad (11)$$

где $J = \sum m_i \rho_i^2$ — момент инерции системы материальных точек.

Закон сохранения механической энергии. Если материальная точка массой m находится в поле действия силы, которая может быть представлена в виде градиента от некоторой скалярной функции $U(x,y,z)$:

$$\mathbf{F} = -\text{grad}U = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}, \quad (12)$$

а других сил нет, то наряду с кинетической энергией $mv^2/2$ вводится потенциальная энергия U , при этом будет сохраняться полная энергия $E = mv^2/2 + U$. Для доказательства этого утверждения запишем уравнение движения этой материальной точки (второй закон Ньютона).

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\text{grad}U(\mathbf{r}). \quad (13)$$

Умножим обе части уравнения (13) скалярно на $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ и проинтегрируем. Учитывая, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \ddot{\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v} dv = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) dt = \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \quad (14)$$

и

$$\int_{r_1}^{r_2} \text{grad}U d\mathbf{r} = \int_{U(r_1)}^{U(r_2)} dU = U(r_2) - U(r_1), \quad (15)$$

получим:

$$\frac{mv_2^2}{2} + U(r_2) = \frac{mv_1^2}{2} + U(r_1). \quad (16)$$

Соотношение (16) выражает закон сохранения механической энергии для рассматриваемого случая. Условием потенциальности поля сил, т.е. условием выполнения (12), является равенство нулю работы по замкнутому пути. Потенциальная функция $U(\mathbf{r})$ определена с точностью до константы. Эту неоднозначность можно устранить, если задать определенное значение U в некоторой точке поля.

Примером потенциального поля является поле силы тяжести вблизи поверхности Земли. В этом случае, если определить ось OZ по вертикали вверх, то потенциальная энергия:

$$U(z) = mgz. \quad (17)$$

В этом случае получим:

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = -mg. \quad (18)$$

Если тело вращается вокруг некоторой оси, проходящей или не проходящей через тело, то отдельные элементы тела при этом будут иметь различные скорости и различные перемещения.

В качестве примера рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной горизонтальной оси. Начало координат выберем на оси вращения тела. Ось OY направим вдоль оси вращения, радиус-вектор i -го элемента обозначим через $\mathbf{r}_i$, при этом $\mathbf{r}_i = \mathbf{d}_i + \mathbf{\rho}_i$, где $\mathbf{d}_i$ — вектор, параллельный оси, а $\mathbf{\rho}_i$ — перпендикулярен оси. Будем предполагать, что на i -й элемент этого тела помимо силы тяжести, равной $\Delta m_i \mathbf{g}$ ($\mathbf{g} = \{0, 0, -g\}$), действует сила $\mathbf{F}_i$, направленная по прямой, соединяющей эту точку с осью. Кроме того, предположим, что между i -м и j -м элементами действует сила взаимодействия $\mathbf{F}_{ij}$, причем $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ и $\mathbf{F}_{ij} \uparrow\uparrow (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$, т. е. сила взаимодействия — внутренняя сила. Запишем уравнение движения i -го элемента

$$\Delta m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \Delta m_i \mathbf{g} + \mathbf{F}_i + \sum_j \mathbf{F}_{ij}. \quad (19)$$

Умножив векторно левую и правую части на $d\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i dt$, получим $\dot{\mathbf{v}}_i \mathbf{v}_i dt = d(v_i^2/2)$, $\mathbf{g} d\mathbf{r}_i = -g dz_i$, $\mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i = 0$, так как $\mathbf{F}_i \perp d\mathbf{r}_i$. Если суммировать по всем элементам, то появятся пары:

$$\mathbf{F}_{ij} d\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_{ji} d\mathbf{r}_j = \mathbf{F}_{ij} (\boldsymbol{\omega} dt \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)) = \boldsymbol{\omega} dt ((\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij}) = 0.$$

Таким образом, после интегрирования по $d\mathbf{r}_i$ и суммирования отдельных уравнений (19) получим:

$$\sum \Delta m_i \frac{v_i^2}{2} + \sum \Delta m_i g z_i = \text{const}. \quad (20)$$

Выразим скорость v_i через вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = (0, \omega, 0)$ и радиус-вектор $\mathbf{r}_i$: $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\rho}_i$. Учитывая, что $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{\rho}_i$, получим $v_i^2 = \omega_i^2 \rho_i^2$. Таким образом,

$$\sum \Delta m_i \frac{v_i^2}{2} = \frac{1}{2} J \omega^2, \quad (21)$$

где $J = \sum \Delta m_i \rho_i^2$ — момент инерции тела относительно рассматриваемой оси.

Второе слагаемое в левой части (20) можно преобразовать, введя координаты центра масс:

$$x_c = \frac{\sum \Delta m_i x_i}{\sum \Delta m_i}, \quad y_c = \frac{\sum \Delta m_i y_i}{\sum \Delta m_i}, \quad z_c = \frac{\sum \Delta m_i z_i}{\sum \Delta m_i}. \quad (22)$$

В результате получим закон сохранения механической энергии в виде

$$\frac{1}{2} J \omega^2 + mgz_c = \text{const}, \quad (m = \sum \Delta m_i). \quad (23)$$

В качестве другого примера рассмотрим силу, возникающую при смещении элемента тела из положения равновесия ($z = \text{const}$, $y = \text{const}$) и линейно зависящую от смещения x :

$$F = -kx. \quad (24)$$

Потенциальная энергия равна работе силы при перемещении тела из данного положения в положение, потенциальная энергия которого принимается равной нулю:

$$U(x) = - \int_x^0 F(x) dx = \frac{kx^2}{2} \quad (25)$$

При записи (25) потенциальная энергия равной нулю при $x = 0$.

В этом случае закон сохранения механической энергии будет иметь вид:

$$m \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2} kx^2 = \text{const}. \quad (26)$$

Таким образом, *механическая энергия системы тел сохраняется неизменной, если суммарная работа всех внешних сил и сил трения внутри системы равна нулю* (закон сохранения механической энергии).

Маятник Максвелла.



Рис. 1. Принципиальная схема маятника Максвелла.

Маятник Максвелла (см. рис. 1) состоит из тонкого металлического стержня АВ с закрепленным посередине диском С. К концам стержня прикреплены нити, другими концами закрепленные на неподвижной планке DE. Нити тщательно, виток к витку, наматываются на стержень (от его концов к диску), и в верхнем положении маятник закрепляется с помощью фиксатора. После освобождения из верхнего положения маятник начинает движение под действием силы тяжести и сил со стороны нитей: поступательное – вниз и вращательное – вокруг оси АВ. В нижней точке вращения продолжается по инерции, нить наматывается на стержень, а маятник начинает подниматься. Достигнув верхней точки, маятник снова начинает движение вниз и т. д. Такой характер движения (вверх-вниз) в чем-то схож с колебаниями груза на пружине. Поэтому это устройство и получило название маятника Максвелла.

В движении маятника Максвелла можно выделить три временные стадии: спуск, удар и подъем. На рис. 2 (а, б) схематически представлены зависимости скорости и ускорения оси маятника.

Силы, действующие на маятник, могут быть условно разделены на силы длительного действия (при спуске и подъеме) и силы кратковременного действия (удар).

Отметим, что удар маятника в нижней точке отличается от удара, например, шарика о плиту. Если кинетическая энергия падающего тела (шарика) на первой стадии удара полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации, то при ударе маятника Максвелла кинетическая энергия его вращения (которая гораздо больше, чем кинетическая энергия поступательного движения перед ударом) практически не изменяется.

В связи с тем, что полное аналитическое решение за весь цикл движения маятника не представляется возможным, в эксперименте исследуются плоское движение и удар. Теоретически стадии движения рассматриваются отдельно, и, кроме того, используются предположения, которые упрощают решение задачи. Силы, действующие на маятник, могут быть условно разделены на силы длительного действия (при спуске и подъеме) и силы кратковременного действия (удар).

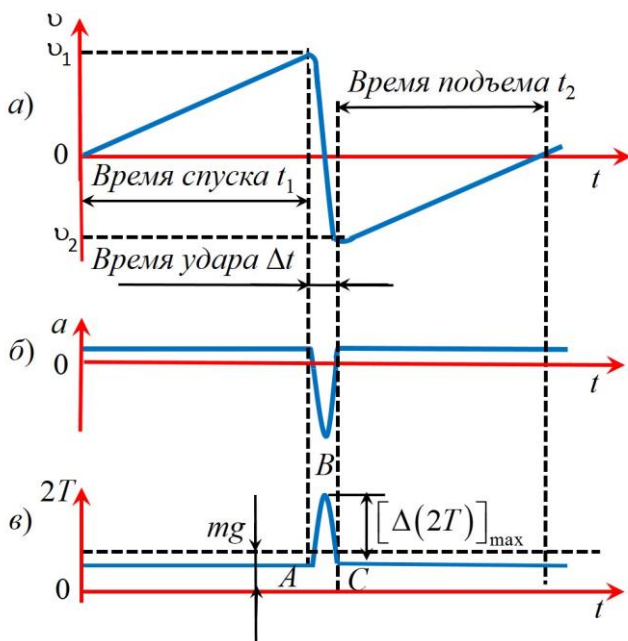


Рис. 2. Схематические зависимости скорости v (а) и ускорения a (б) точек оси маятника, а также силы натяжения нитей T (в) от времени движения маятника.

Отметим, что удар маятника в нижней точке отличается от удара, например, шарика о плиту. Если кинетическая энергия падающего тела (шарика) на первой стадии удара полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации, то при ударе маятника Максвелла кинетическая энергия его вращения (которая

гораздо больше, чем кинетическая энергия поступательного движения перед ударом) практически не изменяется.

В связи с тем, что полное аналитическое решение за весь цикл движения маятника не представляется возможным, в эксперименте исследуются плоское движение и удар. Теоретически стадии движения рассматриваются раздельно, и, кроме того, используются предположения, которые упрощают решение задачи.

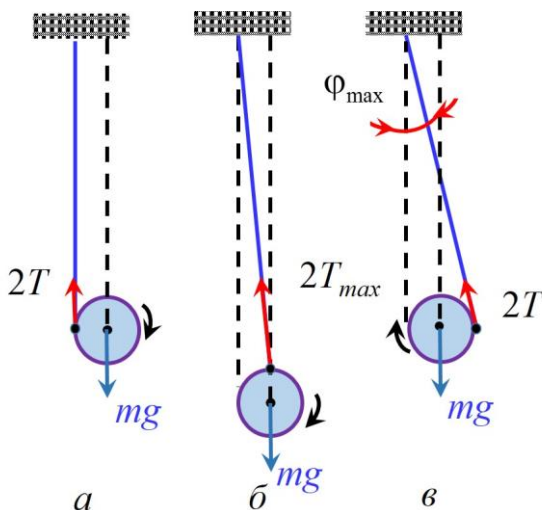


Рис. 3. Три последовательных положения оси маятника: в начале (а), в середине (б) и в конце (в) удара.

Движение маятника происходит под действием силы тяжести и силы натяжения нитей, поэтому устойчивое движение маятника (без раскачивания) возможно, только если нити находятся в вертикальной плоскости (рис. 3). При отклонении нитей от вертикальной плоскости возникают горизонтальные составляющие сил натяжения, возвращающие маятник к положению, когда нити вертикальны. В результате возникают колебания, период которых зависит от длины нитей. Это можно наблюдать во время подъема маятника, когда нити выходят из вертикальной плоскости. Если перед отпусканием маятника нити находятся в вертикальной плоскости, то движение вниз происходит без колебаний (заметим, что при

этом центр масс маятника находится вне плоскости расположения нитей).

Итак, без учета силы сопротивления воздуха и отклонения нитей от вертикали, уравнения движения маятника Максвелла вниз и вверх в лабораторной системе отсчета одинаковы и имеют вид:

$$ma = mg - 2T, \quad (27)$$

где m — масса маятника, T — сила натяжения нити, g — ускорение свободного падения, a — ускорение поступательного движения центра масс маятника.

Для записи уравнения вращательного движения (уравнения моментов) выберем ось маятника в качестве «оси моментов», которая движется с ускорением a . В такой системе отсчета уравнение моментов не будет содержать момента сил инерции*, т.е.

$$J\varepsilon = 2rT, \quad (28)$$

где J — момент инерции маятника относительно его оси, r — радиус стержня маятника, ε — угловое ускорение маятника.

Уравнение кинематической связи, являющееся следствием нерастяжимости нитей, имеет вид

$$a = \varepsilon \cdot r, \quad (29)$$

При опускании маятника начальная скорость его центра масс равна нулю, а при подъеме она отлична от нуля. Решая систему уравнений (27) – (29), получим:

$$a = \frac{g}{1 + J/mr^2}. \quad (30)$$

Момент инерции маятника приближенно можно представить в виде $J \approx \frac{mR^2}{2}$, где R — радиус диска. Поскольку радиус диска R

много больше радиуса стержня r , то величина $\frac{J}{mr^2} = \frac{R^2}{2r^2} \gg 1$ и ускорение маятника $a \ll g$. Следовательно, для суммарной силы натяжения нитей справедливо выражение:

$$2T = m(g - a) \approx mg. \quad (31)$$

* Момент сил инерции равен нулю, т.к. и равнодействующая сил инерции $m(-a)$ и равнодействующая сил тяжести mg приложены в центре масс маятника.

На первой стадии движения (спуск) ускорение центра масс равно:

$$a_1 = \frac{2h_1}{t_1^2}, \quad (32)$$

где t_1 – время опускания маятника, h_1 – расстояние, которое он проходит за это время.

Из соотношений (30) и (32) получаем формулу для экспериментального определения момента инерции маятника:

$$J = mr^2(g/a - 1) = mr^2(gt_1^2/2h_1 - 1). \quad (33)$$

Скорость опускания центра масс маятника непосредственно перед его ударом равна

$$v_1 = at_1 = \frac{2h_1}{t_1}. \quad (34)$$

При подъеме маятника вверх после удара (III стадия) он движется равнозамедленно с ускорением a , направленным так же, как при его движении вниз. Скорость движения центра масс маятника при подъеме определяется уравнением:

$$v = v_2 - at, \quad (35)$$

где v_2 – начальная скорость при движении маятника вверх, t – время от начала этого движения, a – модуль ускорения. Движение маятника вверх обусловлено продолжающимся по инерции вращением маятника в нижней точке его траектории. Наматывание при этом вращении нитей на стержень маятника и приводит к его подъему.

Если время подъема маятника до его остановки равно t_2 , то для начальной скорости имеем:

$$v_2 = at_2 = \frac{2h_2}{t_2}, \quad (36)$$

так как ускорение при подъеме маятника связано с расстоянием h_2 , которое проходит его ось до остановки, таким же соотношением, как и при спуске:

$$a_2 = \frac{2h_2}{t_2^2}. \quad (37)$$

Ускорения при спуске и подъеме одинаковы. Высота подъема

h_2 несколько меньше, чем h_1 . Это обусловлено изменением механической энергии маятника за один цикл движения: $\Delta W = mg(h_1 - h_2)$. Уменьшение механической энергии связано как с неупругими процессами в нитях в момент удара, так и с потерями энергии на трение при движении маятника. Поскольку сопротивление воздуха мало, можно считать, что потери энергии происходят главным образом в момент удара и равны уменьшению кинетической энергии маятника: $\Delta W_{\text{мех}} \approx \Delta W_{\text{уд}} = W_{\text{к1}} - W_{\text{к2}}$.

Кинетическая энергия маятника равна:

$$W_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Jv^2}{2r^2} = \frac{mv^2}{2} \left(1 + \frac{J}{mr^2} \right), \quad (38)$$

где $\omega = v/r$ – угловая скорость маятника. Поскольку $J/mr^2 \gg 1$, кинетическая энергия $\frac{mv^2}{2}$, связанная с поступательным движением, мала по сравнению с энергией вращательного движения $\frac{J\omega^2}{2}$. Это обстоятельство является главной особенностью маятника Максвелла.

Кроме того, потери энергии при ударе малы ($\Delta W_{\text{уд}} \ll W_{\text{к}}$), т.е. коэффициент восстановления скорости $K_{\text{в}} = v_2/v_1 \approx 1$. Именно благодаря этому в данной системе можно наблюдать многократное повторение цикла движения вниз – вверх, а сама система называется «маятником».

Теперь рассмотрим удар в нижней точке движения маятника. Явление удара сопровождается, как уже упоминалось, резкими изменениями сил взаимодействия за очень малый промежуток времени. Эти силы сначала нарастают, а затем убывают. Как правило, их зависимость от времени, неизвестна, и применение уравнений движения в явном виде затруднительно.

В теории удара рассматривают суммарный импульс силы:

$$\int_0^{\Delta t} F(t)dt = \Delta(mv) = m(v_2 - v_1), \quad (39)$$

где m – масса ударяющегося тела, v_1 и v_2 – его скорости до и по-

сле удара, $F(t)$ – сила, действующая на тело во время удара, Δt – длительность удара.

В нашем случае во время удара происходит резкое увеличение силы натяжения нитей $2T$. График изменения этой силы приведен на рис. 3 в. Поскольку скорость маятника при ударе меняет свое направление, изменение импульса – $m(\nu_1 + \nu_2)$ обусловлено импульсом силы $F(t) = (2T)_{II} - mg$. Так как при движении маятника вниз и вверх (I и III стадии) сила натяжения нитей мало отличается от веса маятника: $(2T)_{I,III} \approx mg$ (ускорение $a_{I,III} \ll g$), то можно считать, что $F(t) \approx (2T)_{II} - (2T)_{I,III} = \Delta(2T)$.

Таким образом, импульс силы при ударе равен:

$$m(\nu_1 + \nu_2) = F_{cp} \Delta t = \int_0^{\Delta t} 2T(t) dt, \quad (40)$$

т.е. определяется площадью под кривой ABCA на рис. 2 в. Поскольку при ударе угловая скорость маятника практически не изменяется (потери энергии малы), можно считать, что во время удара вращение происходит со средней угловой скоростью

$$\omega_{cp} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2r}, \quad (41)$$

а время удара равно

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega_{cp}} = \frac{2\pi r}{\nu_1 + \nu_2}. \quad (42)$$

Преобразуя соотношения (40) и (42), получаем выражение для среднего значения силы F :

$$F_{cp} = \frac{m(\nu_1 + \nu_2)}{\Delta t} = \frac{m(\nu_1 + \nu_2)^2}{2\pi r}. \quad (43)$$

Рассмотрим упрощенную картину движения маятника при ударе. Удар начинается в тот момент, когда нити полностью разматывались со стержня и заканчивается через пол-оборота маятника, в момент начала нового наматывания нитей. Будем считать нити нерастяжимыми, т.е. пренебрежем дополнительным удлинением δh нитей при ударе (возникающим из-за роста сил натяжения) по сравнению с радиусом r стержня маятника:

$$\delta h \ll r. \quad (44)$$

При таких предположениях центр масс маятника во время удара совершает движение вниз – вверх по закону: $h_{\text{цм}} = h_0 - r \sin(\omega_{\text{cp}} t)$, где h_0 – вертикальная координата центра масс в начале удара, время отсчитывается от момента начала удара. Поэтому сила, действующая на маятник во время удара, равна:

$$F(t) = \Delta(2T) = ma(t) = m \frac{d^2 h_{\text{цм}}}{dt^2} = m \omega_{\text{cp}}^2 r \sin(\omega_{\text{cp}} t), \quad (45)$$

а ее максимальное значение:

$$[F(t)]_{\text{max}} = m \omega_{\text{cp}}^2 r = \frac{m(v_1 + v_2)^2}{4r}, \quad (46)$$

Нетрудно видеть (сравнивая соотношения (43) и (46)), что во время удара максимальное значение силы натяжения нитей в $\pi/2$ раз превышает среднее значение силы.

Заметим, что поскольку радиус r стержня маятника мал по сравнению с длиной нитей h , нити маятника за время удара лишь незначительно отклоняются от вертикальной плоскости: $\varphi_{\text{max}} \leq 2r/h \ll 1$, и небольшая горизонтальная проекция силы натяжения $2T$ не успевает вызвать заметного смещения центра масс маятника по горизонтали (см. рис. 3, где показаны три последовательных положения оси маятника: a – в начале, b – в середине и $в$ – в конце удара). Однако отклонение нитей от вертикальной плоскости, возникающее после удара, приводит к появлению небольшого раскачивания оси маятника во время его подъема (III стадия). Это раскачивание маятника и вибрации системы, возникающие в результате удара, объясняют наблюдаемые в эксперименте осцилляции в зависимости силы натяжения нитей от времени.

Экспериментальная установка

Фото установки представлено на рис.1. Она состоит из *рамы 1*, прикрепленной к стене, *маятника 2*, который с помощью *нитей 3*, проходящих через продольную щель в *планке 4* закреплен на *стержне 5*. Стержень 5 закреплен на *датчике силы 6*. Расстояния, которые проходит маятник при движении вниз и вверх измеряется

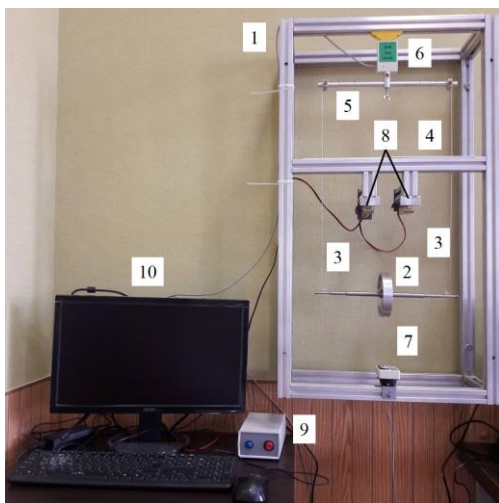


Рис. 4. Экспериментальная установка.

го диска с радиусом $r_1 = 50$ мм и толщиной $S = 20$ мм, который надет на стальную ось, которая имеет три секции с радиусами $r_2 = 9$ мм, $r_3 = 7$ мм, $r_4 = 5$ мм, длина каждой секции $l = 25$ мм. Такое устройство маятника Максвелла позволяет получать три значения

отношения $\frac{R}{r}$.

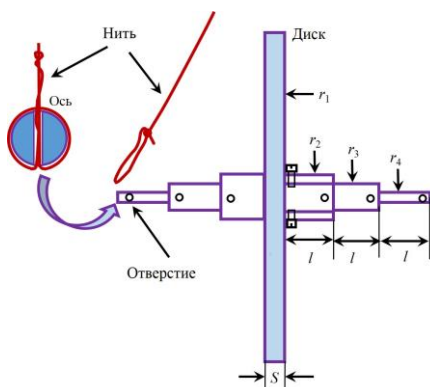


Рис. 5. Схема маятника Максвелла.

датчиком положения 7. Для движения маятника из верхнего положения, он устанавливается в электромагнитных защелках 8, управляемых с помощью пускового устройства 9. Датчики положения (7) и силы (6) соединены с компьютером (10).

Схема маятника Максвелла представлена на рис.5. Он состоит из алюминиево-

На обоих концах каждой секции просверлены тонкие поперечные отверстия (2 мм) для крепления нитей. На концах каждой нити имеется петля, которая вставляется в отверстие и закрепляется на оси (как показано на рис.5).

Для проведения эксперимента и обработки результатов работы используется компьютерная программа «Цифровая лаборатория». По-

сле запуска программы на экране монитора появится главное меню. В этом меню следует выбрать два датчика: **датчик положения** (рис. 6) и **датчик силы** (рис. 7). Для выбранного датчика с помощью кнопки установите нулевое показание (рис.8). Программа готова к измерению.



Рис. 6. Включение датчика положения.



Рис. 7. Включение датчика силы.

Для проведения измерений необходимо закрепить маятник в электромагнитных защелках. Для этого тщательно, виток к витку навивают нити на ось, следя за тем, чтобы сохранялось горизонтальное положение оси при натянутых нитях. Намотку производят

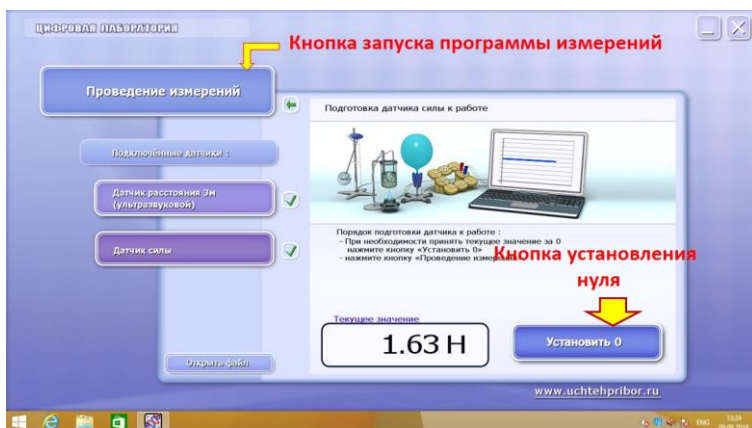


Рис. 8. Установка нуля для датчика и запуск измерений.

до тех пор, пока ось маятника не окажется на уровне защелок. После этого вставить снизу ось в защелки (рис. 9). Для управления работой пускового устройства (защелок) включить в сеть пусковое устройство. Защелки будут удерживать ось. Установка готова к измерениям.

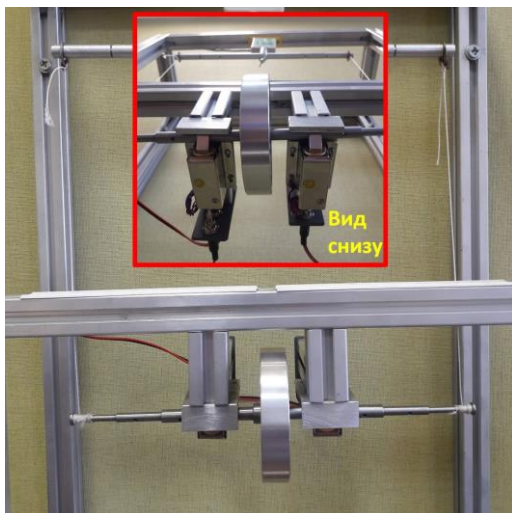


Рис. 9. Установка Маятника Максвелла в защелки.

Убедившись, что установка готова к измерениям, нажмите на кнопку проведение измерений (рис.8). После этого нажмите последовательно на кнопку старт на экране компьютера и кнопку «пуск» на пусковом устройстве. После окончания измерения нажмите на кнопку «стоп». Для просмотра графика зависимости

координаты маятника от времени и силы от времени с помощью кнопки «масштаб» выбираете нужный масштаб. Окно просмотра можно двигать, нажав на левую кнопку «мыши» (курсор при этом должен быть на окне просмотра). Вид наблюдаемых зависимостей координаты маятника от времени и силы от времени показан на рис. 10.

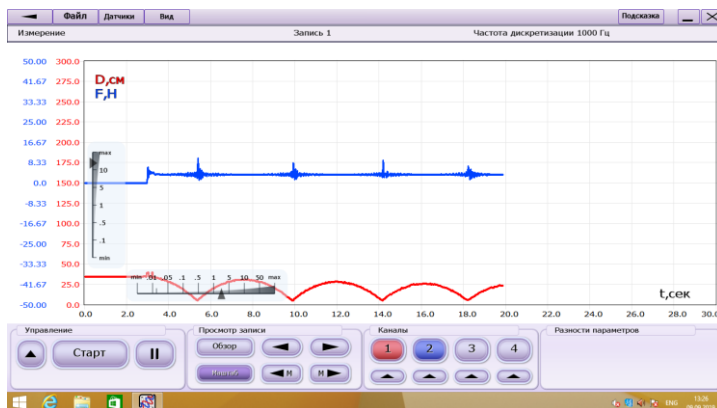


Рис. 10. Графики зависимости сил и координаты от времени.

После нажатия на правую кнопку «мыши» на экране высвечиваются время и измеренное значение координаты или силы (или одновременно координаты и силы, если выбрано два датчика). Одновременно на экране может быть не более двух измеренных значений. Для того, чтобы получить третье измерение следует убрать одно из предыдущих, нажав на крестик вблизи соответствующей вертикальной черты.

Кнопка «файл» позволяет записать полученные данные в файл, который можно использовать для последующей обработки результатов. Файл можно записать в трех форматах: record, excel, text. Форматы excel и text позволяют обрабатывать результаты, используя соответствующие программы (например, excel). Формат record позволяет открыть файл программой «цифровая лаборатория».

На экране монитора также есть кнопка «помощь». Нажав на нее, можно получить дополнительную информацию.

Важно, чтобы при движении вниз и вверх ось маятника не перекашивалась, нити навивались от места крепления по направлению к диску. Если эти условия нарушаются, необходимо прекратить движение маятника, а затем повторить опыт.

По окончании измерений стержень маятника фиксируется в верхнем положении (в защелках), при этом нити не должны быть натянуты.

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Подготовка установки к проведению эксперимента и измерение массы маятника и радиуса стержня.

Измерения

1. Маятник в начале работы зафиксирован в верхнем положении. Убедившись, что нити подвеса не натянуты, установите «ноль» датчика силы.

2. Нажмите кнопку «пуск» и остановите руками маятник в нижнем положении. Показания датчика силы при этом соответствуют весу маятника. Запишите показание в тетрадь. Относительную погрешность датчика силы при выполнении расчетов принять равной 1%.

3. Установите «ноль» датчика расстояния.

Упражнение 2. Определение ускорений и скоростей маятника Максвелла при его спуске и подъеме.

Измерения

1. Зафиксируйте маятник в верхнем положении. Нажав на кнопку «пуск», приведите его в движение. Одновременно нажмите на кнопку «старт» на экране компьютера. После того, как маятник совершит не менее четырех периодов колебаний, нажмите на кнопку «стоп». После выполнения эксперимента зафиксируйте маятник в верхнем положении.

2. По графику зависимости координаты от времени на экране компьютера определите время между первым и вторым, вторым и третьим, третьим и четвертым ударами. Для этого первый курсор устанавливается в точке первого удара, а второй – в точке второго удара. При этом в правом нижнем углу экрана высвечивается из-

меряемый интервал времени.

3. Определите высоту максимального подъема маятника между первым и вторым, вторым и третьим, третьим и четвертым ударами.

4. Результаты измерений запишите в табл. 1.

5. Погрешности измерения расстояний и времени при выполнении дальнейших расчетов примите равными $S_h = 1\text{ мм}$ и $S_t = 0,001\text{ с}$.

Таблица 1

Экспериментальные данные

Процесс	Δt_i , с	h_i , м
1-й спуск		
1-й подъем		
2-й спуск		
2-й подъем		
3-й спуск		
3-й подъем		
...		

Обработка результатов

Значения ускорений маятника при спуске a_1 и подъеме a_2 рассчитайте по формулам (32) и (37). Затем по формулам (34) и (36) определите скорости маятника до и после удара v_1 и v_2 , а также коэффициент восстановления скорости $K_B = v_2/v_1$. Следует учесть, что измеренный интервал времени равен удвоенному времени подъема (спуска) маятника. Результаты вычислений запишите в табл. 2.

Таблица 2

Вычисленные значения ускорений и скоростей и их погрешности

N	a_1 , м/с ²	S_{a_1} , м/с ²	a_2 , м/с ²	S_{a_2} , м/с ²	v_1 , м/с	S_{v_1} , м/с	v_2 , м/с	S_{v_2} , м/с	K_B	S_{K_B}
1										
2										
3										

Проведите оценку погрешностей соответствующих величин по формулам для косвенных измерений:

$$S_{a_i} = \sqrt{\left(\frac{\partial a_i}{\partial h_i}\right)_{t_i}^2 S_{h_i}^2 + \left(\frac{\partial a_i}{\partial t_i}\right)_{h_i}^2 S_{t_i}^2}, \quad (47)$$

$$S_{v_i} = \sqrt{\left(\frac{\partial v_i}{\partial h_i}\right)_{t_i}^2 S_{h_i}^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial t_i}\right)_{h_i}^2 S_{t_i}^2}, \quad (48)$$

$$S_{K_B} = \sqrt{\left(\frac{\partial K_B}{\partial v_1}\right)_{v_2}^2 S_{v_1}^2 + \left(\frac{\partial K_B}{\partial v_2}\right)_{v_1}^2 S_{v_2}^2}. \quad (49)$$

Результаты расчетов запишите в табл. 2.

5. В соответствии с формулой (30) значения ускорений при спуске и подъеме маятника должны быть одинаковыми. Проверьте совпадение ускорений a_1 и a_2 в пределах погрешностей измерений.

Упражнение 3. Определение времени удара и максимального увеличения силы натяжения нитей.

Как и при выполнении *упр. 2*, в данном упражнении осуществляется обработка полученных экспериментальных результатов.

1. По формулам (42) и (46) рассчитайте время удара Δt и максимальное увеличение силы натяжения нитей во время удара $[\Delta(2T)]_{\max}$.

2. Оцените погрешности полученных результатов по формулам:

$$S_{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta t}{\partial v_1}\right)_{v_2}^2 S_{v_1}^2 + \left(\frac{\partial \Delta t}{\partial v_2}\right)_{v_1}^2 S_{v_2}^2}, \quad (50)$$

$$S_{[\Delta(2T)_{\max}]} = \sqrt{\left(\frac{\partial [\Delta(2T)_{\max}]}{\partial v_1}\right)_{v_2}^2 S_{v_1}^2 + \left(\frac{\partial [\Delta(2T)_{\max}]}{\partial v_2}\right)_{v_1}^2 S_{v_2}^2}. \quad (51)$$

3. Сравните максимальное увеличение силы натяжения нитей

$[\Delta(2T)]_{\max}$ с весом маятника.

4. Запишите в тетрадь максимальное значение силы натяжения нитей определяемое (с помощью датчика силы) по графику, наблюдаемому на экране компьютера. Проведите измерения максимальной силы при первом и втором соударениях. Сравните эти значения с максимальным значением силы $2T_{\max}$, полученным в п.1 данного упражнения.

Упражнение 4. Определение момента инерции маятника Максвелла.

1. С помощью формулы (33) рассчитайте момент инерции маятника J на основании экспериментальных измерений времени спуска и максимальной высоты подъема между первым и вторым ударами маятника.

2. Оцените погрешность полученного результата по формуле:

$$S_J = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial J}{\partial h_1}\right)\right)_{t_1}^2 S_{h_1}^2 + \left(\left(\frac{\partial J}{\partial t_1}\right)\right)_{h_1}^2 S_{t_1}^2}. \quad (52)$$

Упражнение 5. Проверка закона сохранения механической энергии.

1. По формуле (38), используя найденное значение скорости перед вторым ударом и вычисленное значение момента инерции маятника, определите кинетическую энергию маятника перед вторым ударом.

2. Рассчитайте потенциальную энергию маятника в верхней точке между первым и вторым ударами.

3. Сравните полученные значения кинетической и потенциальной энергий и сделайте вывод о сохранении механической энергии на рассматриваемом интервале времени.

4. Повторите пп. 1 – 3 данного упражнения на интервале времени между вторым и третьим ударами, а также третьим и четвертым ударами.

В завершение работы, рассчитанные в *упр. 1 – 3* значения всех физических величин: ускорения, скорости, коэффициента восстановления скорости, момента инерции и максимального увели-

чения силы натяжения нитей, а также оценки ошибок их определения представьте в виде таблицы (см. табл. 5).

Таблица 5

Результаты обработки экспериментальных данных

$a_1 \pm S_{a_1}$, м/с ²	$a_2 \pm S_{a_2}$, м/с ²	$v_1 \pm S_{v_1}$, м/с ²	$v_2 \pm S_{v_2}$, м/с ²

$J \pm S_J$, кг·м ²	$K_B \pm S_{K_B}$	$\Delta t \pm S_{\Delta t}$, с	$[\Delta(2T)]_{\max} \pm S_{[\Delta(2T)]_{\max}}$, Н

Основные итоги работы

В результате выполнения работы определяются скорости и ускорения маятника Максвелла на двух различных стадиях его движения (спуск и подъем). Кроме того, экспериментально и теоретически определяется максимальная сила натяжения нитей во время удара, а также момент инерции маятника. Проводится проверка закона сохранения механической энергии.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение плоского движения.
2. Что такое центр масс системы? Сформулируйте теорему о движении центра масс.
3. Сформулируйте закон изменения импульса.
4. Сформулируйте закон изменения механической энергии.
5. Как изменяется кинетическая энергия системы в момент удара?
6. Получите формулу для вычисления момента инерции маятника Максвелла.

Литература

1. А. Н. Матвеев. Механика и теория относительности. М. Изд. дом «Оникс 21 век», 2003. Гл. 8.
2. В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев. Механика. М.: Изд.

центр «Академия», 2004. Лекции 12,13

3. И.В. Митин, В.С. Русаков. Анализ и обработка экспериментальных данных. Учебно-методическое пособие для студентов младших курсов. – М.: МГУ. 2002.