

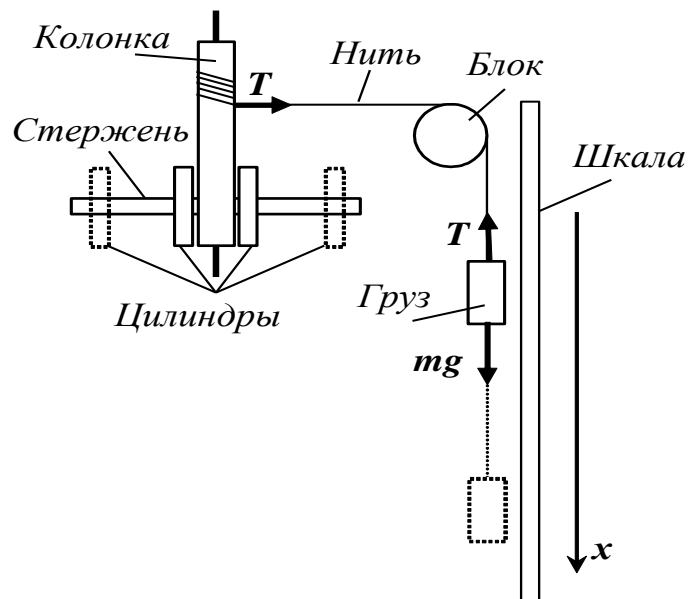


Лабораторный практикум  
по ФИЗИКЕ

МЕХАНИКА

Задача № 105

ПРОВЕРКА ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ  
МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ



МОСКВА 2016

Впервые подобная задача описана в пособии «Новые задачи практикума по механике» (издательство Московского университета, 1983). Авторы задачи: Белянкин А.Г., Устинова А.В.

В дальнейшем задача неоднократно модернизировалась, а ее описание представлено во всех последующих изданиях практикума по механике.

Настоящее издание описания переработано (авторы: Баранов А.Н., Митин И.В.).

# Задача №105

## Проверка закона сохранения момента количества движения

### Теория

Закон сохранения момента количества движения (импульса) для системы тел является следствием 2-го и 3-го законов Ньютона в инерциальной системе отсчета. Для системы тел, способной вращаться вокруг некоторой неподвижной оси он заключается в том, что *момент импульса системы тел относительно этой оси остается неизменным, если сумма моментов внешних сил относительно той же оси равна нулю.*

Этот закон можно применять и при наличии момента внешних сил, но при условии, что время действия момента сил мало (импульс момента внешних сил существенно меньше момента импульса системы). Примером таких «мгновенных» сил являются силы, возникающие при выстрелах, или при «мгновенном» изменении конфигурации системы тел.

Для абсолютно твердого тела момент импульса  $L$  относительно неподвижной оси равен

$$L = J \cdot \omega,$$

где  $J$  – момент инерции тела относительно той же оси,  $\omega$  - угловая скорость вращения.

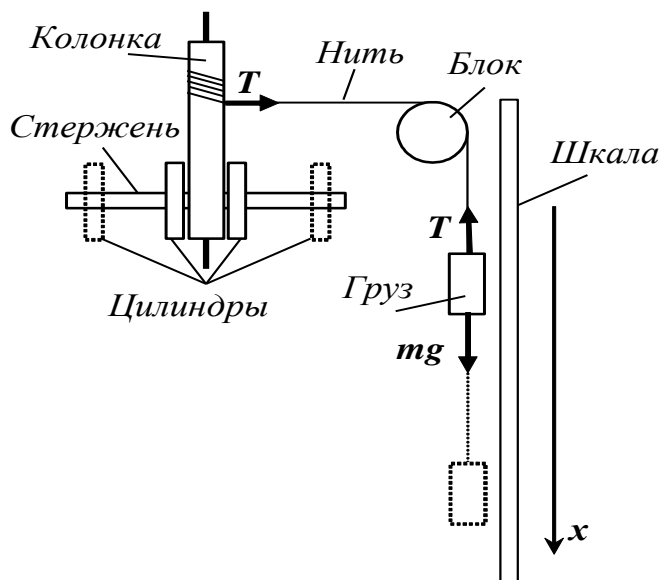


Рис. 1. Схематичное представление механической системы с изменяющимся моментом инерции

Рассмотрим движение системы тел, у которой в процессе движения может изменяться момент инерции (рис. 1). Цилиндрическая колонка может вращаться с малым трением вокруг вертикальной оси. В нижней части колонки находится горизонтально расположенный стержень, по которому могут свободно перемещаться два массивных цилиндра, при этом изменяется момент инерции системы. Для осуществления вращения в верхней части колонки на нее намотана нить, переброшенная через дополнительный блок. На конце нити подвешен груз массой  $m$ . В исходном состоянии нить намотана на колонку, груз

переброшенная через дополнительный блок. На конце нити подвешен груз массой  $m$ . В исходном состоянии нить намотана на колонку, груз

удерживается в верхнем положении, а цилиндры находятся на минимальном расстоянии от оси вращения.

Процесс движения системы можно разбить на три стадии. После освобождения груз равноускоренно опускается вниз, колонка, имеющая наименьший момент инерции  $J_1$ , вращается с ускорением под действием момента силы натяжения нити. Угловая скорость  $\omega_1$  линейно растет (первая стадия). В нижнем положении, когда нить полностью размотана, специальный механизм освобождает цилиндры, которые «мгновенно» перемещаются по горизонтальному стержню от оси (на рис. 1 цилиндры показаны штриховой линией). В результате момент инерции колонки увеличивается до  $J_2$ , а угловая скорость «мгновенно» уменьшается до  $\omega_2$  (вторая стадия). В дальнейшем колонка, сохраняя направление движения, вращается уже равнозамедленно до остановки. При этом груз поднимается на высоту, которая меньше, чем первоначальная (третья стадия).

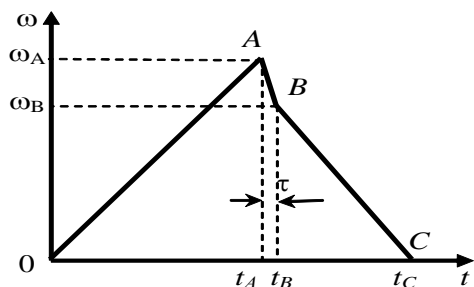


Рис. 2. Зависимость угловой скорости колонки от времени

Изменение угловой скорости вращения системы со временем показано на рис. 2. Все три стадии представлены участками  $OA$ ,  $AB$  и  $BC$  соответственно. Увеличению момента инерции системы соответствует участок  $AB$ . На этой стадии между горизонтальным стержнем и разлетающимися цилиндрами действуют силы, являющиеся внутренними для системы. Продолжительность  $\tau$  этой стадии

мала, момент внешней силы (натяжения нити) не успевает заметно изменить момент количества движения колонки. Применяя закон сохранения момента импульса на этой стадии, можно записать:

$$J_1 \cdot \omega_A = J_2 \cdot \omega_B, \quad (1)$$

где  $\omega_A$  и  $\omega_B$  – угловые скорости вращения колонки в нижнем положении груза на нити непосредственно перед разлетом цилиндров и сразу после разлета соответственно.

Все величины, входящие в (1), могут быть определены в ходе проведения экспериментов, что позволяет проверить справедливость закона сохранения момента количества движения.

**Угловые скорости**  $\omega_1$  и  $\omega_2$  можно рассчитать по результатам эксперимента при равноускоренном (или равнозамедленном) движении груза. В этом случае из формулы

$$h = \frac{at^2}{2}$$

для ускорения груза получаем:

$$a = \frac{2h}{t^2}. \quad (2)$$

Если груз опускается из верхней точки, то его скорость  $v$  в нижней точке будет равна

$$v = at = \frac{2h}{t}. \quad (3)$$

Аналогично, если при движении из нижней точки груз поднимается на высоту  $h$  за время  $t$ , то его скорость  $v$  в начальный момент находится по той же формуле (3).

Для нахождения угловой скорости  $\omega$  вращения колонки воспользуемся уравнением кинематической связи:

$$v = \omega r,$$

где  $r$  – радиус колонки, на которую намотана нить.

В итоге получим:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{2h}{r \cdot t}. \quad (4)$$

Таким образом, измерив в эксперименте расстояние  $h$ , на которое опускается или поднимается груз, и время движения  $t$ , по формуле (4) можно рассчитать соответствующие угловые скорости в нужной точке.

**Момент инерции** колонки можно найти из анализа движения системы при опускании и подъеме груза.

Пусть вертикальная ось  $Ox$  направлена вниз.

#### **А. Движение вниз.**

Запишем уравнения поступательного движения груза (в проекции на ось  $Ox$ ):

$$ma = mg - T;$$

и вращательного движения колонки:

$$J\varepsilon = Tr - M_{тр},$$

где  $r$  – радиус колонки;  $T$  – сила натяжения нити;  $M_{тр}$  – момент силы трения, возникающей при вращении колонки.

Уравнение кинематической связи имеет вид:

$$a = \varepsilon r.$$

(обратим внимание, что ускорения  $a$  и  $\varepsilon$  положительны).

Исключая из системы  $T$  и  $\varepsilon$ , получим:

$$(J + mr^2) \cdot a_{вниз} = mgr^2 - M_{тр} \cdot r, \quad (5)$$

где  $a_{вниз}$  – ускорение при движении груза вниз.

#### **Б. Движение вверх.**

В этом случае уравнения поступательного движения груза останутся тем же самым:

$$ma = mg - T,$$

а в уравнении вращательного движения колонки момент силы натяжения нити следует записать с противоположным знаком:

$$J\varepsilon = -Tr - M_{тр}.$$

Так как ускорение  $a$  по-прежнему положительно, а угловое ускорение  $\varepsilon$  отрицательно, то уравнение кинематической связи следует записать в виде

$$a = -\varepsilon r.$$

Подставляя  $\varepsilon$  из уравнения кинематической связи в уравнение вращательного движения и меняя знаки, получим:

$$J \frac{a}{r} = Tr + M_{тр}$$

Исключая из системы  $T$ , получим уравнение:

$$(J + mr^2) \cdot a_{\text{вверх}} = mgr^2 + M_{тр} \cdot r. \quad (6)$$

где  $a_{\text{вверх}}$  - ускорение, с которым груз поднимается вверх.

Ускорения  $a_{\text{вниз}}$  и  $a_{\text{вверх}}$  можно найти по формуле (2), если измерить соответствующие расстояния и время движения.

Будем считать, что момент сил трения  $M_{тр}$  одинаков как при движении груза вниз, так и при движении вверх. В этом случае, вычитая из уравнения (6) уравнение (5), получаем:

$$(J + mr^2) \cdot (a_{\text{вверх}} - a_{\text{вниз}}) = 2M_{тр} \cdot r;$$

или

$$M_{тр} = \frac{(J + mr^2) \cdot (a_{\text{вверх}} - a_{\text{вниз}})}{2r}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (5) или (6), получим:

$$(J + mr^2) \cdot \frac{(a_{\text{вверх}} + a_{\text{вниз}})}{2} = mgr^2.$$

Так как для используемой установки  $J \gg mr^2$ , то момент инерции колонки равен:

$$J = mgr^2 \frac{2}{a_{\text{вверх}} + a_{\text{вниз}}}. \quad (8)$$

Обратим внимание, что если положить момент силы трения равным нулю, то, как следует из (5) и (6), ускорения  $a_{\text{вниз}}$  и  $a_{\text{вверх}}$  будут одинаковы, и (8) приводится к виду:

$$J = \frac{mgr^2}{a}. \quad (8a)$$

Таким образом, если по результатам измерений и последующей обработке экспериментально определяемые ускорения  $a_{\text{вниз}}$  и  $a_{\text{вверх}}$

окажутся примерно одинаковыми, то влияние момента сил трения можно считать пренебрежимо малым.

Подчеркнем, что (8) справедливо только тогда, когда момент инерции в процессе движения вниз-вверх остается неизменным.

### Определение массы цилиндра

Изменение момента инерции системы обусловлено изменением положения двух цилиндров на горизонтальном стержне. Если расстояния от оси вращения до центра масс каждого из цилиндров до и после их перемещения равны  $l_1$  и  $l_2$  соответственно, то в соответствии с теоремой Гюйгенса – Штейнера разность моментов инерции системы равна

$$J_2 - J_1 = 2m_0(l_2^2 - l_1^2),$$

где  $m_0$  – масса каждого из цилиндров.

Измеряя расстояния  $l_1$  и  $l_2$  и используя полученные по формуле (8) оценки для моментов инерции  $J_1$  и  $J_2$ , можно оценить массу цилиндра:

$$m_0 = \frac{J_2 - J_1}{2(l_2^2 - l_1^2)}. \quad (9)$$

### Крутильные колебания

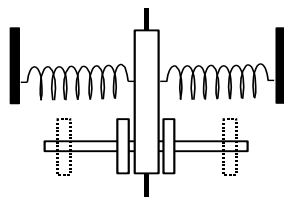


Рис. 3. Устройство крутильного маятника

На колонке имеются специальные гнезда для прикрепления к ней двух пружин (рис. 3). Это позволяет использовать колонку в качестве крутильного маятника (груз  $m$  при этом снимается). Уравнение колебаний такого маятника имеет вид:

$$J \cdot \ddot{\varphi} = -M_{упр}, \quad (10)$$

где  $\varphi$  - угол поворота колонки из положения равновесия; момент силы упругости  $M_{упр}$  пропорционален углу поворота:

$$M_{упр} \sim \varphi.$$

Уравнение (10) есть уравнение колебаний, квадрат частоты  $\omega^2$  которых обратно пропорционален моменту инерции:

$$\omega^2 \sim \frac{1}{J}.$$

Следовательно, квадрат периода колебаний маятника  $T^2$  пропорционален моменту инерции:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{J_1}{J_2}, \quad (11)$$

Измерение периодов колебаний позволяет найти отношение моментов инерции колонки при различном положении цилиндров на горизонтальном стержне.

## Экспериментальная установка.

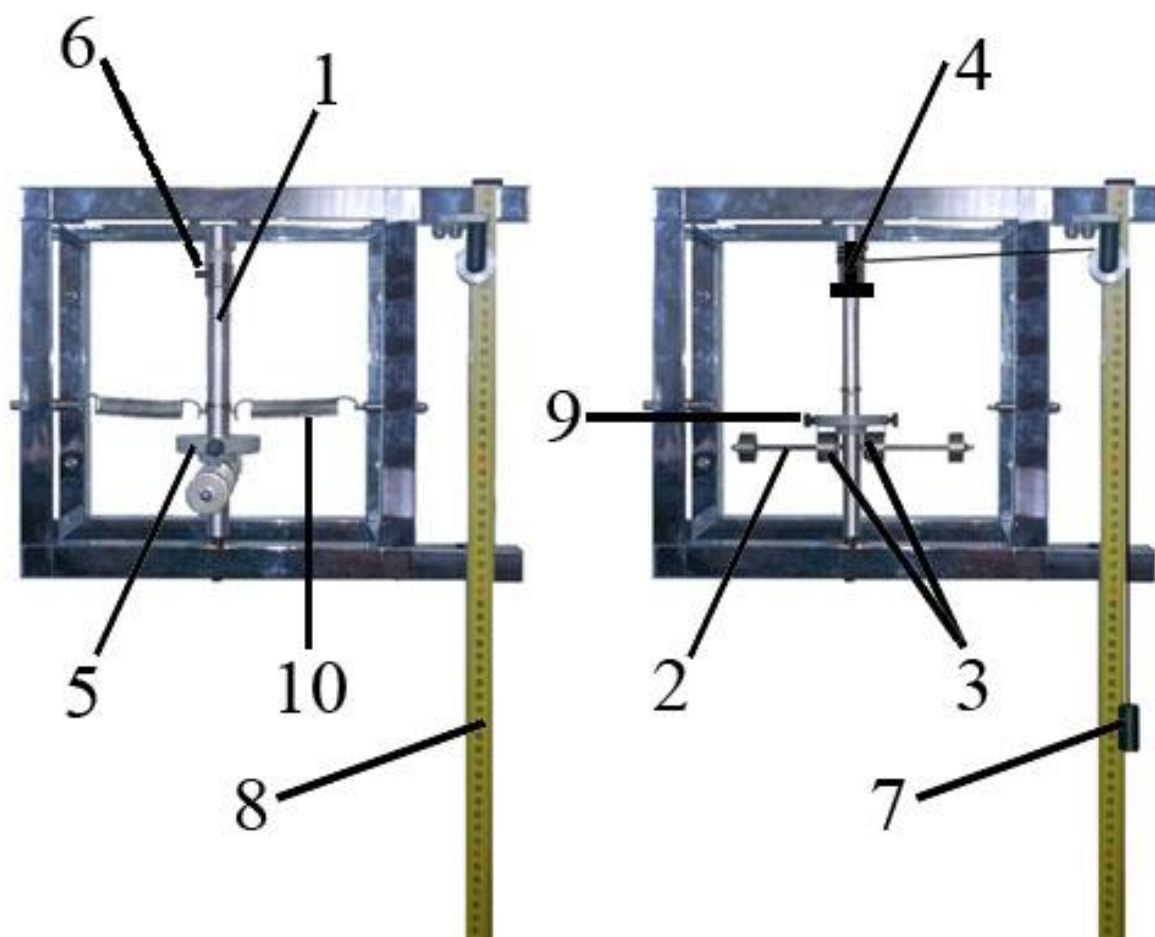


Рис. 4. Схема экспериментальной установки

Схема установки показана на рис. 4. Колонка 1 с закрепленным на ней горизонтальным стержнем 2 может вращаться в подшипниках вокруг вертикальной оси. По стержню могут скользить два цилиндра 3 одинаковой массы. По колонке может перемещаться кольцо с пластинкой 4, соединенное нитями, пропущенными через отверстия в диске 5, с цилиндрами 3. Если подвесить пластинку в верхнем положении на фиксаторе 6, то цилиндры 3 зафиксируются в положении, наиболее близком к оси. Фиксатор 6 изготовлен в виде стерженька, вставленного в отверстие в колонке. На один конец стерженька надевается пластинка 4, к другому концу прикреплена переброшенная через блок нить с грузом 7 массы  $m$  на конце. Нить навивают виток к витку на колонку, охватывая закрепленную на фиксаторе пластинку.

Опускаясь, груз приводит колонку во вращение. В момент, когда груз оказывается в нижнем положении, полностью раскрученная нить смещает стерженек 6, кольцо 4 падает на диск 5, при этом цилиндры 3



освобождаются. Малая сила трения покоя между цилиндрами 3 и стержнем 2 не может удерживать цилиндры, и они под действием центробежной силы (в неинерциальной системе отсчета, связанной со стержнем) очень быстро (мгновенно) соскальзывают к концам стержня. Это увеличивает момент инерции системы и уменьшает, в соответствии с законом сохранения момента количества движения, ее угловую скорость.

После этого нить начинает наматываться на колонку 1, груз 7 поднимается вверх, не доходя, однако, до своего первоначального положения из-за потерь энергии. Эти потери вызваны превращением механической энергии в тепловую при неупругом ударе цилиндров об упоры, наличием сил трения при движении системы и др. По шкале 8 измеряются координаты груза при его опускании и подъеме.

При проведении измерений с неизменным моментом инерции кольцо с пластинкой 4 не используется. Для закрепления цилиндров у оси колонки (момент инерции  $J_1$ ) на диске 5 имеются специальные крепления 9. При измерении с максимальным моментом инерции  $J_2$  цилиндры раздвигают по стержню до упора.

Систему также можно превратить в крутильный маятник. Для этого используются две пружины 10, груз 7 при этом снимают. Один конец пружины закрепляется на колонке, другой - на неподвижной раме. Поворот колонки на небольшой угол приводит к деформации пружин, в результате чего появляется момент сил, пропорциональный углу отклонения, и возникают колебания.

## Эксперимент.

При проведении экспериментов чрезвычайно важно фиксировать в рабочей тетради результаты **прямых** измерений. В настоящей работе прямо измеряемыми величинами являются **времена** опускания и поднятия груза (измеряются секундомером) и **координаты** груза, определяемые непосредственно по размещенной на установке вертикальной шкале.

В экспериментах необходимо проводить измерения для трех различных движений:

- 1) с неизменяющимся малым моментом инерции  $J_1$  колонки (цилиндры расположены максимально близко к оси);
- 2) с неизменяющимся большим моментом инерции  $J_2$  колонки (цилиндры расположены максимально далеко от оси);
- 3) с изменяющимся в процессе движения моментом инерции  $J_1$  колонки (опускание с  $J_1$ , подъем с  $J_2$ ).

Введем следующую систему обозначений для **прямо измеряемых** величин:

- $x_{\text{верх}}$  – координата груза в начальном верхнем положении (сохраняется неизменной в процессе измерений);

- $x_{\text{ниж}}$  – координата груза в нижнем положении (сохраняется неизменной в процессе измерений);
- $x_1$  – координата груза в верхнем положении после опускания и подъема с неизменным моментом инерции  $J_1$  колонки;
- $x_2$  – координата груза в верхнем положении после опускания и подъема с неизменным моментом инерции  $J_2$  колонки;
- $x_{12}$  – координата груза в верхнем положении после опускания с моментом инерции  $J_1$  и подъема с моментом инерции  $J_2$  колонки;
- $t_1$  – время опускания груза из начального верхнего  $x_{\text{верх}}$  положения до нижнего  $x_{\text{ниж}}$  положения с моментом инерции  $J_1$  колонки;
- $t_2$  – время опускания груза из начального верхнего  $x_{\text{верх}}$  положения до нижнего  $x_{\text{ниж}}$  положения с моментом инерции  $J_2$  колонки;
- $t_{11}$  – время движения груза из начального верхнего  $x_{\text{верх}}$  положения вниз и вверх до верхнего  $x_1$  положения с моментом инерции  $J_1$  колонки;
- $t_{22}$  – время движения груза из начального верхнего  $x_{\text{верх}}$  положения вниз и вверх до верхнего  $x_2$  положения с моментом инерции  $J_2$  колонки;
- $t_{12}$  – время движения груза из начального верхнего  $x_{\text{верх}}$  положения с моментом инерции  $J_1$  вниз и вверх до верхнего  $x_{12}$  положения с моментом инерции  $J_2$  колонки.

Введем следующую систему обозначений для **косвенно измеряемых** величин<sup>1</sup>:

- $h_0 = (x_{\text{верх}} - x_{\text{ниж}})$  – высота опускания груза (сохраняется неизменной в процессе измерений);
- $h_1 = (x_1 - x_{\text{ниж}})$  – высота подъема груза из нижнего положения с моментом инерции  $J_1$  колонки;
- $h_2 = (x_2 - x_{\text{ниж}})$  – высота подъема груза из нижнего положения с моментом инерции  $J_2$  колонки;
- $h_{12} = (x_{12} - x_{\text{ниж}})$  – высота подъема груза из нижнего положения после изменения момента инерции с  $J_1$  до  $J_2$ ;
- $t_{1\uparrow} = (t_{11} - t_1)$  – время подъема груза из нижнего положения с моментом инерции  $J_1$  колонки;
- $t_{2\uparrow} = (t_{22} - t_2)$  – время подъема груза из нижнего положения с моментом инерции  $J_2$  колонки;
- $t_{12\uparrow} = (t_{12} - t_1)$  – время подъема груза с моментом инерции  $J_2$  после опускания с моментом инерции  $J_1$ .

## Измерения

Все результаты прямых измерений вносятся в табл.1.

1. Измеряют штангенциркулем диаметр колонки и взвешивают груз. Значения радиуса колонки  $r$  и массы груза  $m$  вносят в таблицу 1.

<sup>1</sup> Все формулы для  $h$  написаны из условия, что по шкале  $x_{\text{верх}} - x_{\text{ниж}} > 0$ . В противном случае в формулах для  $h$  знак меняется на противоположный.

2. При полном разматывании нити определяют координату  $x_{\text{ниж}}$  груза в нижнем положении.

3. Цилиндры 3 фиксируют креплением 9 на максимально близком расстоянии от оси (момент инерции  $J_1$ ). Измеряют расстояние  $l_1$  от оси вращения до центра масс цилиндра. Нить аккуратно наматывают на колонку до тех пор, пока координата груза не станет равной некоторой произвольной величине  $x_{\text{верх}}$ . Эта координата будет одной и той же для всех экспериментов.

4. Колонку освобождают. Измеряют секундомером время движения  $t_{11}$  груза вниз-вверх до верхнего  $x_1$  положения (при неизменном моменте инерции  $J_1$  колонки). Одновременно фиксируется и значение  $x_1$ .

Измерения повторяют 3-5 раз.

5. Не изменяя момента инерции, измеряют секундомером время движения  $t_1$  груза только вниз до нижнего  $x_{\text{ниж}}$  положения. При желании можно вновь фиксировать и значение  $x_1$ .

Измерения повторяют 3-5 раз.

6. Цилиндры раздвигают на максимальное расстояние от оси (момент инерции  $J_2$ ). Измеряют расстояние  $l_2$  от оси вращения до центра масс цилиндра. Проводят измерения в соответствии с пунктами 3-4, измеряя  $t_{22}$ ,  $x_2$  и  $t_2$  соответственно.

7. Проводят аналогичные измерения в случае, когда в нижней точке происходит перемещение цилиндров и изменение момента инерции. Для этого надо намотать нить на колонку так, как указано в описании экспериментальной установки.

Измерения проводят в соответствии с пунктами 3-4, измеряя  $t_{12}$  и  $x_{12}$ . Обращаем внимание, что проводить измерение времени опускания груза не требуется: оно уже было измерено ранее в п.4.

8. Определяют периоды колебаний  $T_1$  и  $T_2$  крутильного маятника. Для этого снимают груз и, прикрепив две пружины, создают колебательную систему (см. описание установки). Измеряют времена  $t_{N1}$  и  $t_{N2}$ , за которое система с моментами инерции  $J_1$  и  $J_2$  совершает  $N$  колебаний ( $N \approx 10-15$ ). Измерения повторяют 3-5 раз.

Таблица 1.

Результаты прямых измерений и их обработки.

	Номер эксперимента, $i$				
	1	2	3	4	5
$x_1$ , м					
$x_2$ , м					
$x_{12}$ , м					
$t_{11}$ , с					
$t_1$ , с					
$t_{22}$ , с					
$t_2$ , с					
$t_{12}$ , с					

$t_{N1}, \text{ с}$					
$t_{N2}, \text{ с}$					
$r \pm \sigma, \text{ м}$					
$m \pm \sigma, \text{ кг}$					
$x_{\text{верх}} \pm \sigma, \text{ м}$					
$x_{\text{ниж}} \pm \sigma, \text{ м}$					
$l_1 \pm \sigma, \text{ м}$					
$l_2 \pm \sigma, \text{ м}$					
$\langle x_1 \rangle \pm \sigma, \text{ м}$					
$\langle x_2 \rangle \pm \sigma, \text{ м}$					
$\langle x_{12} \rangle \pm \sigma, \text{ м}$					
$\langle t_{11} \rangle \pm \sigma, \text{ с}$					
$\langle t_1 \rangle \pm \sigma, \text{ с}$					
$\langle t_{22} \rangle \pm \sigma, \text{ с}$					
$\langle t_2 \rangle \pm \sigma, \text{ с}$					
$\langle t_{12} \rangle \pm \sigma, \text{ с}$					
$\langle t_{N1} \rangle \pm \sigma, \text{ с}$					
$\langle t_{N2} \rangle \pm \sigma, \text{ с}$					

## Обработка

Все результаты обработки результатов прямых измерений вносятся в табл.1, результаты косвенных измерений – в табл.2.

### Прямые измерения

1) По результатам  $N$  прямых измерений, проведенных в одинаковых условиях, рассчитывают оценки значений координат грузов  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_{12}$  по формуле среднего арифметического:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

Рассчитывают оценки случайных погрешностей  $S_{\langle x \rangle}$  средних арифметических для тех же координат по формуле:

$$S_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2}{N \cdot (N - 1)}}.$$

Рассчитывают оценку систематической погрешности при измерении с помощью шкалы с ценой деления  $\Delta=1$  мм (считается, что максимальная приборная погрешность шкалы равна цене деления) :

$$\sigma_{\text{сист}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta}{3}\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{\sqrt{12}}\right)^2} \approx \frac{\Delta}{2}$$

(здесь  $\frac{\Delta}{3}$  - оценка приборной погрешности;  $\frac{\Delta}{\sqrt{12}}$  - оценка погрешности округления).

По такой же формуле оценивают систематические погрешности однократно измеряемых координат  $x_{\text{верх}}$  и  $x_{\text{ниж}}$ , а также величин  $l_1$  и  $l_2$ .

Рассчитывают оценку суммарной погрешности для каждой из координат  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_{12}$ :

$$\sigma_{\text{сум.м}} = \sqrt{(S_{\langle x \rangle})^2 + (\sigma_{\text{сист}})^2}.$$

Результаты обработки прямых измерений заносят в табл.1.

2) Аналогичным образом получают оценки погрешностей прямо измеренных времен движения  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_{11}$ ,  $t_{22}$ ,  $t_{12}$ ,  $t_{N1}$  и  $t_{N2}$ . В качестве оценки систематической погрешности следует взять оценку субъективной погрешности при измерениях ручным секундомером:

$$\sigma_{\text{сист}} = \sigma_{\text{суб}} = 0,3 \text{ с.}$$

Так как субъективная погрешность довольно велика, то, скорее всего, случайной погрешностью при измерении времени можно будет пренебречь.

### Косвенные измерения

1) По результатам прямых измерений, представленных в табл. 1, рассчитывают оценки значений следующих *косвенно* измеряемых величин:

$h_0 = (x_{\text{верх}} - x_{\text{ниж}})$  – высота опускания груза (сохраняется неизменной в процессе измерений);

$h_1 = (x_1 - x_{\text{ниж}})$  – высота подъема груза из нижнего положения с моментом инерции  $J_1$  колонки;

$h_2 = (x_2 - x_{\text{ниж}})$  – высота подъема груза из нижнего положения с моментом инерции  $J_2$  колонки;

$h_{12} = (x_{12} - x_{\text{ниж}})$  – высота подъема груза из нижнего положения после изменения момента инерции с  $J_1$  до  $J_2$ ;

$t_{1\uparrow} = (t_{11} - t_1)$  – время подъема груза из нижнего положения с моментом инерции  $J_1$  колонки;

$t_{2\uparrow} = (t_{22} - t_2)$  – время подъема груза из нижнего положения с моментом инерции  $J_2$  колонки;

$t_{12\uparrow} = (t_{12} - t_1)$  – время подъема груза с моментом инерции  $J_2$  после опускания с моментом инерции  $J_1$ ;

$T_{1,2} = \frac{t_{N1,2}}{N}$  - периоды колебаний маятников с моментами инерции  $J_1$  и  $J_2$ .

Результаты обработки косвенных измерений заносят в табл.2.

*Замечание.* Так как координата  $x_{\text{ниж}}$  измеряется в статичном положении, то для упрощения расчета погрешностей можно считать ее известной абсолютно точно. В этом случае косвенно измеряемые величины  $h_i$  можно считать независимыми, что облегчит оценивание погрешностей в дальнейшем.

*Таблица 2.*

*Результаты косвенных измерений и их обработки.*

$h_0 \pm \sigma$ , м	
$h_1 \pm \sigma$ , м	
$h_2 \pm \sigma$ , м	
$h_{12} \pm \sigma$ , м	
$t_{1\uparrow} \pm \sigma$ , с	
$t_{2\uparrow} \pm \sigma$ , с	
$t_{12\uparrow} \pm \sigma$ , с	
$T_1 \pm \sigma$ , с	
$T_2 \pm \sigma$ , с	
$a_{1\downarrow} \pm \sigma$ , м/с <sup>2</sup>	
$a_{2\downarrow} \pm \sigma$ , м/с <sup>2</sup>	
$a_{1\uparrow} \pm \sigma$ , м/с <sup>2</sup>	
$a_{2\uparrow} \pm \sigma$ , м/с <sup>2</sup>	
$a_{12\uparrow} \pm \sigma$ , м/с <sup>2</sup>	
$\omega_1 \pm \sigma$ , с <sup>-1</sup>	
$\omega_2 \pm \sigma$ , с <sup>-1</sup>	
$J_1 \pm \sigma$ , кг·м <sup>2</sup>	
$J_2 \pm \sigma$ , кг·м <sup>2</sup>	
$J_1\omega_1 \pm \sigma$ , кг·м <sup>2</sup> с <sup>-1</sup>	
$J_2\omega_2 \pm \sigma$ , кг·м <sup>2</sup> с <sup>-1</sup>	
$m_0 \pm \sigma$ , кг	

2) Рассчитывают по формуле (2) оценки ускорений и их погрешностей:

$$a_{1\downarrow} = \frac{2h_0}{t_1^2} - \text{ускорение груза при движении вниз с моментом инерции } J_1;$$

$$a_{2\downarrow} = \frac{2h_0}{t_2^2} - \text{ускорение груза при движении вниз с моментом инерции } J_2;$$

$$a_{1\uparrow} = \frac{2h_1}{t_{1\uparrow}^2} - \text{ускорение груза при движении вверх с моментом инерции } J_1;$$

$$a_{2\uparrow} = \frac{2h_2}{t_{2\uparrow}^2} - \text{ускорение груза при движении вверх с моментом инерции } J_2;$$

$$a_{12\uparrow} = \frac{2h_{12}}{t_{12\uparrow}^2} - \text{ускорение груза при движении вверх с моментом инерции } J_2$$

после опускания с моментом инерции  $J_1$ .

Сопоставляют друг с другом все пять измеренных ускорений груза ( $a_{1\downarrow}$ ,  $a_{2\downarrow}$ ,  $a_{1\uparrow}$ ,  $a_{2\uparrow}$ ,  $a_{12\uparrow}$ ) и расставляют их в порядке возрастания. Исходя из теоретических представлений, дают объяснение, почему ускорения соотносятся именно таким образом.

3) Рассчитывают по формуле (4) оценки угловых скоростей и их погрешностей:

$$\omega_1 = \frac{2h_0}{r \cdot t_1} - \text{угловая скорость колонки в нижней точке после движения}$$

вниз с моментом инерции  $J_1$ ;

$$\omega_2 = \frac{2h_{12}}{r \cdot t_{12\uparrow}} - \text{угловая скорость колонки в нижней точке после разлета}$$

цилиндров и изменения момента инерции.

4) Рассчитывают по формуле (8) оценки моментов инерции и их погрешностей:

$$J_1 = mgr^2 \frac{2}{a_{1\downarrow} + a_{1\uparrow}} - \text{момент инерции } J_1;$$

$$J_2 = mgr^2 \frac{2}{a_{2\downarrow} + a_{2\uparrow}} - \text{момент инерции } J_2.$$

5) Рассчитывают произведения  $J_1\omega_1$  и  $J_2\omega_2$ .

Так как в косвенно измеряемые величины  $J_i$  и  $\omega_i$  входят одни и те же прямо измеряемые величины (например,  $r$  и  $t_i$ ), то оценивать погрешность произведения  $J_i\omega_i$  по формуле косвенных измерений нельзя. Для оценки погрешности произведений формулы следует путем подстановки преобразовать к виду, чтобы в них входили прямо измеряемые величины:

$$J_1\omega_1 = mgr^2 \frac{2}{a_{1\downarrow} + a_{1\uparrow}} \cdot \frac{2h_0}{r \cdot t_1} = mgr^2 \frac{2}{\frac{2h_0}{t_1^2} + \frac{2h_1}{t_{1\uparrow}^2}} \cdot \frac{2h_0}{r \cdot t_1} =;$$

$$= mgr \frac{1}{\frac{h_0}{t_1^2} + \frac{h_1}{(t_{11} - t_1)^2}} \cdot \frac{2h_0}{t_1}.$$

$$J_2 \omega_2 = mgr^2 \frac{2}{a_{2\downarrow} + a_{2\uparrow}} \cdot \frac{2h_{12}}{r \cdot t_{12}} = mgr^2 \frac{2}{\frac{2h_0}{t_2^2} + \frac{2h_2}{t_{2\uparrow}^2}} \cdot \frac{2h_{12}}{r \cdot t_{12}} =$$

$$= mgr \frac{1}{\frac{h_0}{t_2^2} + \frac{h_2}{(t_{22} - t_2)^2}} \cdot \frac{2h_{12}}{t_{12}}.$$

При оценивании погрешностей можно считать, что основной вклад вносит субъективная погрешность при измерении временных интервалов. Поэтому в приведенных выше формулах погрешностями высот  $h$  можно пренебречь и вычислять частные производные только по временным переменным  $t_1, t_2, t_{11}, t_{22}$ , и  $t_{12}$ .

6) Рассчитывают по формуле (9) оценку массы цилиндра и ее погрешность:

$$m_0 = \frac{J_2 - J_1}{2(l_2^2 - l_1^2)}. \quad (9)$$

7) Проводят сравнение полученных в экспериментах значений моментов количества движения системы тел при двух различных конфигурациях. Для этого на оси значений  $J\omega$  (рис. 5) отмечают полученные оценки  $J_1\omega_1$  и  $J_2\omega_2$  и оценки погрешностей. По наличию или отсутствию пересечения областей делают выводы о справедливости закона сохранения в данном эксперименте.

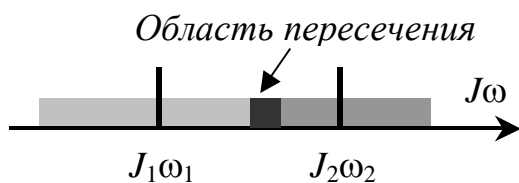


Рис. 5. Графическое представление результатов сравнения (п. 7)

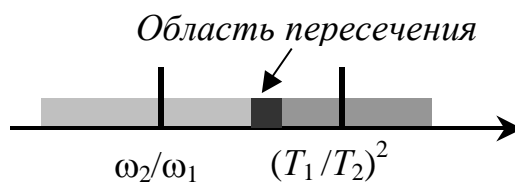


Рис. 6. Графическое представление результатов сравнения (п. 8)

8) Проверяют закон сохранения момента импульса на основе крутильных колебаний. Для этого вычисляют отношения  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$  и  $\frac{J_1}{J_2} = \frac{T_1^2}{T_2^2}$  и оценивают погрешности. На оси числовых значений (рис. 6) отмечают полученные оценки указанных величин и оценки погрешностей. По наличию



или отсутствию пересечения областей делают выводы о справедливости закона сохранения в данном эксперименте.

## **Основные итоги работы.**

В результате выполнения работы:

- должны быть экспериментально определены моменты количества движения системы тел при двух ее конфигурациях в случаях ускоренного и колебательного движений. Сделаны выводы о справедливости закона сохранения момента количества движения.

- проведено сравнение ускорений груза при его движении в различных условиях эксперимента. Дано соответствующее объяснение.

- определена масса цилиндров на горизонтальной оси колонки. Проведено сравнение с табличным значением.

## **Литература**

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.1. Механика. Глава V .М., Физматлит, 2005.

2. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Механика. М., Изд. Центр «Академия», 2004.

## **Контрольные вопросы и задания**

1. Как формулируется закон сохранения момента количества движения относительно неподвижной оси?

2. При каких условиях закон сохранения момента количества движения относительно неподвижной оси справедлив и при наличии момента внешних сил?

3. Получите уравнение (7) для нахождения момента силы трения.

4. Как соотносятся ускорения груза при движении вниз и вверх при неизменном моменте инерции в случае наличия и отсутствия момента силы трения?

5. Как зависит ускорение груза при движении вверх (и вниз) от момента инерции системы?

6. Каким образом можно найти массу цилиндров, расположенных на горизонтальном стержне?