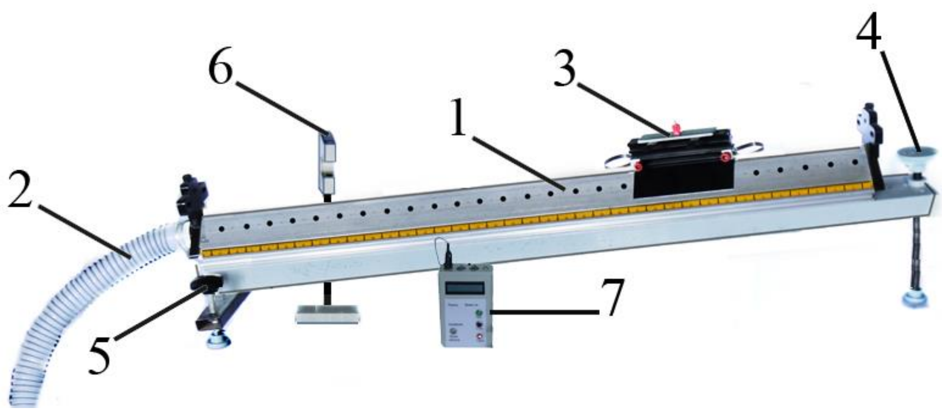
ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ
МЕХАНИКА

Задача №102

КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА ВДОЛЬ СКАМЬИ С ВОЗДУШНОЙ ПОДУШКОЙ



Москва – 2022

Цель работы

Изучение равноускоренного поступательного движения.

Идея эксперимента

Изучение равноускоренного движения проводится на примере движения тела по наклонной плоскости. Использование скамьи с воздушной подушкой позволяет практически полностью устранить трение между движущимся телом и поверхностью наклонной плоскости.

Теоретическое введение. Основные определения

В реальном мире, который и является предметом изучения физики, связи между явлениями, материальными объектами столь разнообразны, что их принципиально невозможно описать во всех деталях. Так же как человек в повседневной жизни пользуется построенными им моделями поведения, общения, модельными (общими) представлениями о происходящих событиях, так и физика при анализе реального мира создает и использует модели физической действительности. При создании моделей принимаются только существенные для данного круга явлений и объектов свойства и связи.

Созданию моделей предшествует формирование понятий, относящихся к объекту исследования. Например, для обозначения физических тел, размеры которых несущественны в условиях данной задачи, вводится понятие «***материальная точка***».

Тело отсчета – тело, относительно которого рассматривается движение других тел.

Система отсчета – это совокупность тела отсчета, связанной с ним системы координат и часов, синхронизованных в каждой точке пространства.

Система координат – совокупность трех некомпланарных осей, пересекающихся в одной точке с указанием масштаба на них. Декартова система координат – это прямоугольная система координат, оси которой – три взаимно перпендикулярные прямые линии, пересекающиеся в одной точке – начале системы координат.

Часы – прибор для измерения времени, принцип действия которого основан на сравнении длительности исследуемого временного интервала с длительностью выбранного за эталон периодического процесса.

Радиус-вектор – вектор, начало которого лежит в начале системы координат, а конец – в той точке, где в данный момент находится материальная точка.

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \{x, y, z\},$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ – орты системы координат – $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$; x, y, z – координаты материальной точки в выбранной системе координат.

Закон движения – зависимость радиус-вектора от времени или в проекциях на оси координат – координат материальной точки от времени.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = \{x(t), y(t), z(t)\}$$

Траектория – воображаемая линия в пространстве, по которой движется материальная точка.

Путь – длина траектории от начальной до конечной точки движения.

Перемещение материальной точки $\Delta\mathbf{r}(t)$ – вектор, начало которого находится в начальной, а конец – в конечной точке движения.

Скорость материальной точки – физическая величина, равная отношению перемещения $\Delta\mathbf{r}(t)$ точки за достаточно малый промежуток времени Δt к длительности этого промежутка:

$$\boldsymbol{\upsilon} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{i}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \mathbf{j}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \mathbf{k}\frac{\Delta z}{\Delta t}\ .$$

Ускорение материальной точки – физическая величина, равная отношению изменения скорости $\Delta\boldsymbol{\upsilon}(t)$ точки за достаточно малый промежуток времени Δt к длительности этого промежутка:

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta\boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t} = \mathbf{i}\frac{\Delta \upsilon_x}{\Delta t} + \mathbf{j}\frac{\Delta \upsilon_y}{\Delta t} + \mathbf{k}\frac{\Delta \upsilon_z}{\Delta t}\ .$$

Уравнения кинематической связи **–** уравнения, связывающие кинематические характеристики тел системы.

Первый закон Ньютона. Существуют такие системы отсчета, относительно которых изолированная материальная точка (удаленная от всех остальных тел) движется равномерно и прямолинейно или покоится. Такие системы отсчета называются ***инерциальными.***

Второй закон Ньютона. В инерциальной системе отсчета произведение массы материальной точки на ее ускорение равно сумме всех сил, действующих на эту материальную точку со стороны других тел:

$$m\mathbf{a} = \sum_i \mathbf{F}_i\ .$$

Третий закон Ньютона. Силы взаимодействия двух материальных точек:

1) равны по модулю,

2) противоположны по направлению,

3) направлены вдоль прямой, соединяющей материальные точки,

4) парные и приложены к разным материальным точкам,

5) одной природы.

Уравнение движения – второй закон Ньютона, записанный в векторной форме или в проекциях на оси инерциальной системы отсчета:

$$m\mathbf{a} = \sum_i \mathbf{F}_i \quad \text{или} \quad \begin{cases} ma_x = \sum_i F_{ix}, \\ ma_y = \sum_i F_{iy}, \\ ma_z = \sum_i F_{iz}. \end{cases}$$

Законы динамики – это законы Ньютона и законы, описывающие индивидуальные свойства сил.

Схема эксперимента

Рассмотрим поступательное движение тела (тележки) по наклонной плоскости (рис. 1). На тело действуют сила тяжести (со стороны Земли), сила нормальной реакции опоры и сила трения (со стороны опоры).

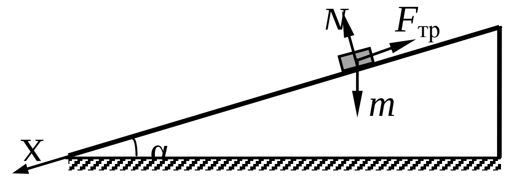


Рис. 1. Силы, действующие на тело.

В лабораторной (инерциальной) системе отсчета направим ось X декартовой системы координат вдоль наклонной плоскости.

При анализе движения тележки ее можно считать абсолютно твердой. Прямолинейное движение твердого тела является поступательным – все точки тела движутся по одинаковым траекториям, с одной и той же скоростью и ускорением. Поэтому достаточно исследовать движение, например, центра масс.

В проекции на ось X уравнение движения центра масс имеет вид:

$$ma = mg\sin\alpha - F_{тр}\,. \tag{1}$$

В настоящей задаче используется воздушная подушка, образуемая при нагнетании воздуха между телом и наклонной плоскостью, на которую тело опирается. В результате контакт между ними пропадает, сила сухого трения между телом и опорой становится практически равной нулю, и остается лишь сила вязкого трения, которая очень мала ввиду малой величины коэффициента вязкости воздуха. Отличительной особенностью вязкого трения является отсутствие трения покоя, благодаря чему тело приходит в движение под действием любой, даже малой, силы.

Поэтому для ускорения тела получим:

$$a = g\sin\alpha\,. \tag{2}$$

В процессе движения ускорение тела не изменяется, такое движение называют **равноускоренным**.

Для нахождения закона равноускоренного движения необходимо учесть начальные условия. В качестве таковых выберем координату и скорость тела в начальный момент времени:

$$x(t=0) = x_0\,, \tag{3}$$

$$\upsilon(t=0) = \upsilon_0\,. \tag{4}$$

Тогда, интегрируя (2) по времени с учетом (4), получим закон изменения скорости тела:

$$\upsilon(t) = \upsilon_0 + at\,. \tag{5}$$

Закон равноускоренного движения тела получим, интегрируя (5) с учетом (3):

$$a(t)=x_0+\upsilon_0 t+\frac{at^2}{2}. \tag{6}$$

Исключая из (5) и (6) время, получаем связь скорости с координатой x:

$$\upsilon^2(x)=\upsilon_0^2+2a(x-x_0), \tag{7}$$

где $a=g\sin\alpha$.

Согласно (7), квадрат скорости тела линейно зависит от его координаты x. При этом на графике угол наклона прямой $\upsilon^2(x)$ не будет зависеть от выбранных начальных условий (υ_0, x_0), что позволит определить ускорение тела.

Экспериментальная установка

Скамья с воздушной подушкой представляет собой полую тонкостенную дюралюминиевую *трубу* 1 треугольного сечения, установленную на горизонтальном основании (рис. 2). На концах трубы имеются *регулировочные винты* 4 и 5, позволяющие изменять угол α наклона трубы относительно горизонта. Торцы трубы закрыты заглушками. В одной из заглушек имеется отверстие, соединенное с гибким *шлангом* 2. Через шланг в трубу при помощи компрессора нагнетается воздух, который выходит из нее через множество маленьких отверстий, просверленных в двух гранях трубы, ориентированных вверх. Между трубой и специально изготовленной *тележкой* 3 создается воздушная подушка, благодаря которой тележка «зависает» над скамьей и может перемещаться вдоль нее практически без трения.

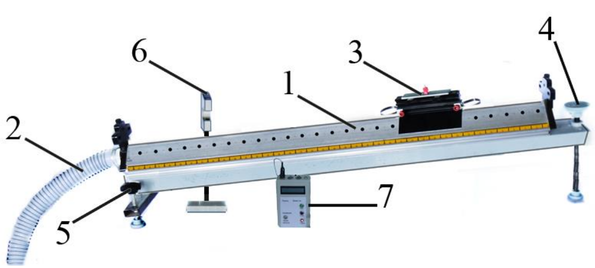


Рис. 2. Экспериментальная установка.

В работе все необходимые регулировки угла наклона осуществляются с помощью *винта* 4 (винты 5 регулировать не следует).

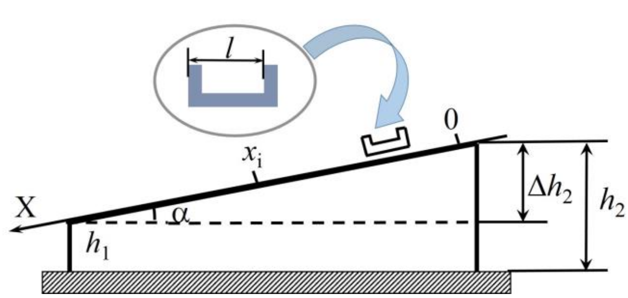


Рис. 3. Схема экспериментальной установки.

Для измерения временных промежутков в задаче используется *датчик времени* 6, сигналы с которого запускают и останавливают *таймер* 7. В датчике излучение от источника падает на приемник – «световые ворота». Если между ними появляется непрозрачный объект, то ворота перекрываются и запускается таймер. Остановка таймера происходит в момент, когда после открытия ворот они повторно перекроются.

Поэтому на тележке имеется специальная насадка с закрепленными на ней двумя тонкими пластинами, расположенными на небольшом расстоянии l друг от друга. Когда тележка проходит мимо датчика времени 6, пластины последовательно перекрывают и открывают световой луч датчика, соответственно запуская и останавливая *таймер* 7. Таким образом, таймер 7 фиксирует время t_1, в течение которого тележка проходит малое расстояние l, равное расстоянию между пластинами (см. вставку на рис. 3). Измеряя время t_1, можно определить среднюю скорость движения на малом участке пути l:

$$\upsilon_i = \frac{l}{t_i}. \qquad (8)$$

Поскольку расстояние между пластинами мало, можно считать, что средняя скорость υ_i на интервале времени t_i мало отличается от мгновенной скорости тележки в точке траектории с координатой x_i.

Проведение эксперимента

Упражнение 1. **Юстировка скамьи с воздушной подушкой и определение ее параметров.**

1. С помощью *регулировочного винта* 4 установить скамью горизонтально (α=0). Для этого включить компрессор, аккуратно установить тележку на скамью и, вращая регулировочный винт, добиться, чтобы тележка не перемещалась по скамье. Устанавливая тележку в разные положения на скамье, убедиться, что тележка остается неподвижной в любом месте[1]. Убедиться также, что отсутствует перекосы скамьи в какую-то либо сторону.

2. Оценить точность установки горизонтального положения. Для этого, вращая регулировочный винт, определить пределы изменения высоты h_2, при которых тележка будет оставаться неподвижной. Учесть, что шаг резьбы регулировочного винта 4 равен 1 мм (один оборот винта изменяет высоту на 1 мм).

[1] Так как у скамьи может быть небольшой прогиб, добиться покоя в любом месте затруднительно. Поэтому действуйте разумно.

3. Измерить линейкой длину основания L между регулировочными винтами, расстояние l (см. рис. 3) между пластинами, определить с помощью весов массу M тележки. Для оценки случайной погрешности измерения каждой величины провести трижды. Результаты записать в табл. 1.

Таблица 1

Параметры установки

X	1	2	3	$\overline{X}$	$S_{\overline{X}}$	$\sigma_{\text{сист}}$	$\sigma_{\text{сумм}}$
L(м)							
l(м)							
M(г)							

Обработка результатов

Вычислить средние арифметические значения величин $\overline{L}, \overline{l}, \overline{M}$ и их выборочные стандартные отклонения (оценку случайной погрешности) по формулам

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i , \qquad , S_{\overline{X}} = \sqrt{\frac{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n(n-1)}} \tag{9}$$

где $X = L, l, M$.

С учетом систематической погрешности $\sigma_{\text{сист}}$ (для линейки считать ее равной половине цены деления, для электронных весов – единице последнего разряда) найти суммарную погрешность каждой величины по формуле

$$\sigma_{\text{сумм}} = \sqrt{S_{\overline{X}}^2 + \sigma_{\text{сист}}^2} . \tag{10}$$

Упражнение 2. **Анализ закона движения и определение ускорения тележки.**

Измерения

1. С помощью регулировочного винта установить скамью в наклонное положение, увеличив высоту h_2 на Δh_2 = 3 мм (три полных оборота регулировочного винта [2]).
2. Установить в начало скамьи тележку, придерживая ее рукой.

ВНИМАНИЕ! В последующих экспериментах тележку следует устанавливать в одно и то же начальное положение!

[2] Погрешность определения высоты Δh_2 считать равной $S_{\Delta h2}$=0,1 мм

3. Установить датчик времени на расстояние 20 см от начала скамьи (координата датчика x_1= 0,2 м).

4. Освободить тележку и измерить время t_1 ее прохождения мимо датчика. Повторить измерения 3 раза. Полученные значения записать в табл. 2.

Таблица 2

Экспериментальные данные

<table>
<tr><td rowspan="2">x,
м</td><td rowspan="2">n</td><td colspan="3">$\Delta h_2 = 3$ мм</td><td colspan="3">$\Delta h_2 = 6$ мм</td><td colspan="3">$\Delta h_2 = 9$ мм</td></tr>
<tr><td>t,
с</td><td>$\bar{t}$,
с</td><td>$S_{\bar{t}}$,
с</td><td>t,
с</td><td>$\bar{t}$,
с</td><td>$S_{\bar{t}}$,
с</td><td>t,
с</td><td>$\bar{t}$,
с</td><td>$S_{\bar{t}}$,
с</td></tr>
<tr><td rowspan="3">0,2</td><td>1</td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">0,4</td><td>1</td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">0,6</td><td>1</td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">0,8</td><td>1</td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">1,0</td><td>1</td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

5. Переместить датчик на 20 см ($x_2 = x_1 + 0{,}2$ м) и повторить измерения в соответствии с п.4. В дальнейшем проводить измерения, каждый раз перемещая датчик на 20 см. Результаты измерений записать в табл. 2.

6. Повторить пп. 3 – 5, при $\Delta h_2 = 6$ мм и $\Delta h_2 = 9$ мм (соответственно 6 и 9 полных оборотов регулировочного винта). Результаты записать в табл. 2.

Обработка результатов

1. Для каждого цикла измерений вычислить среднее арифметическое значение времени прохождения $\bar{t}$ и рассчитать случайную погрешность $S_{\bar{t}}$ среднего арифметического по формулам (9)

Результаты вычислений записать в табл. 2.

2. Для каждого из проведенных измерений вычислить скорость

$$\upsilon = \frac{l}{\bar{t}}$$

и квадрат скорости υ^2.

3. Рассчитать погрешность (стандартное отклонение) для квадрата скорости по формуле для косвенных измерений

$$S_{\upsilon^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \upsilon^2}{\partial l}\right)^2 \cdot S_l^2 + \left(\frac{\partial \upsilon^2}{\partial t}\right)^2 \cdot S_{\bar{t}}^2}\,. \qquad (11)$$

После преобразований формулу (11) можно записать в виде

$$S_{\upsilon^2} = 2\upsilon^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_{l,\text{сумм}}}{\bar{l}}\right)^2 + \left(\frac{S_{\bar{t}}}{\bar{t}}\right)^2} \qquad (12)$$

(учтена и систематическая погрешность для l, найденная в упр. 1).

Результаты вычислений в пп. 2, 3 записать в табл. 3.

Таблица 3

Вычисленные значения скорости и квадрата скорости

x, (м)	$\Delta h_2 = 3$ мм			$\Delta h_2 = 6$ мм			$\Delta h_2 = 9$ мм		
	υ, (м/с)	υ^2, (м^2/с^2)	S_{υ^2}, (м^2/с^2)	υ, (м/с)	υ^2, (м^2/с^2)	S_{υ^2}, (м^2/с^2)	υ, (м/с)	υ^2, (м^2/с^2)	S_{υ^2}, (м^2/с^2)
0,2									
0,4									
0,6									
0,8									
1,0									

4. В соответствии с соотношением (7) зависимость $\upsilon^2(x)$ является линейной:

$$\upsilon^2(x) = 2ax + \left(\upsilon_0^2 - 2ax_0\right). \qquad (13)$$

Для трех значений Δh_2 на одних осях построить графики зависимостей υ^2 от x с указанием погрешностей υ^2. Провести обработку результатов, используя формулы метода наименьших квадратов - МНК [6] для модели

$$y = Ax + B. \qquad (14)$$

Записать в табл.4 найденные с помощью МНК значения коэффициентов A и B и оценки погрешностей σ_A и σ_B.

Из (13)-(14) следует, что наклон A найденной по МНК прямой (коэффициент при x) равен $2a$. Тогда для ускорения получим:

$$a = \frac{A}{2}; \qquad \sigma_a = \frac{\sigma_A}{2}.$$

Результаты записать в табл. 4.

5. Для трех значений Δh_2 рассчитать значения ускорения по теоретической формуле $a = g\sin\alpha$. Т.к. угол α мал, то $\sin\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\Delta h_2}{L}$, в итоге

$$a_{\text{теор}} = g\sin\alpha = \frac{g\cdot\Delta h_2}{L}.$$

Погрешность $a_{\text{теор}}$ оценивается по формуле погрешности косвенной переменной:

$$S_{a\text{теор}} = a_{\text{теор}}\cdot\sqrt{\left(\frac{S_{\Delta h2}}{\Delta h_2}\right)^2 + \left(\frac{S_L}{L}\right)^2}.$$

Результаты записать в табл. 4. и сравнить с найденными экспериментально.

Таблица 4.

Вычисленные значения параметров движения

Δh_2 (мм)	A (м/с^2)	σ_A (м/с^2)	B (м^2/с^2)	σ_B (м^2/с^2)	a (м/с^2)	σ_a (м/с^2)	$a_{\text{теор}}$ (м/с^2)	$S_{a\text{теор}}$ (м/с^2)
3								
6								
9								

6. Построить на одних осях графики зависимости $a(\Delta h_2)$ и $a_{\text{теор}}(\Delta h_2)$. Сделать выводы.

Упражнение 3. **Проверка независимости ускорения тележки от ее массы.**

Измерения

1. Установить высоту Δh_2 = 6 мм (6 полных оборотов регулировочного винта).
2. Установить на тележку дополнительный груз массой m_1 (взвесить на весах) и провести цикл измерений по определению ускорения тележки (аналогично упр. 2).
3. Повторить измерения для дополнительного груза массой m_2 .Результаты записать в таблицу, аналогичную табл. 2.

Обработка результатов

1. Аналогично обработке результатов в упр.2, найти ускорения и оценить погрешность для тележек массой (M+m_1) и (M+m_2). Результаты записать в таблицу, аналогичную табл. 3. и в табл. 5 (в первой строке указываются значения ускорения для тележки без дополнительных грузов).

Таблица 5.

Вычисленные значения ускорения

$M+m_i$ (г)	a (м/с^2)	σ_a (м/с^2)	$a_{теор}$ (м/с^2)	$S_{a теор}$ (м/с^2)

2. Проанализировать полученный результат и сделать вывод о зависимости ускорения от массы тележки.

Основные итоги работы

В результате выполнения работы определяется, является ли движение тела вдоль наклонной плоскости равноускоренным, а ускорение - не зависящим от массы.

Контрольные задания и вопросы

1. Какие системы отсчета называют инерциальными? Сформулировать первый закон Ньютона.
2. Сформулировать второй закон Ньютона.
3. Сформулировать третий закон Ньютона.
4. Тело скользит по наклонной плоскости (угол α) при наличии силы трения (коэффициент трения скольжения μ). Найти его ускорение.
5. Тело, находящееся у основания гладкой наклонной плоскости (угол α), толкают вверх с начальной скоростью v_0. Записать закон движения тела и закон изменения его скорости.
6. Какую информацию можно получить по найденному при обработке по МНК коэффициенту B? Зависит ли его значение от Δh_2? Почему?

Литература

1. А. Н. Матвеев. Механика и теория относительности. – М. Изд. дом «Оникс 21 век», 2003. – 432 с. Гл. 1, 2.
2. В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев. Механика. – М.: Изд. центр «Академия», 2004. – 480 с. Лекции 1 – 3.
3. С. П. Стрелков. Механика. – СПб.: «Лань», 2005. – 560 с. Гл. 1, 2.
4. Д. В. Сивухин. Общий курс физики. В пяти томах. Т. 1. Механика. – М.: ФИЗМАТЛИТ / МФТИ, 2005. – 559 с. Гл. 1, 2.
5. В. С. Русаков, А. И. Слепков, Е. А. Никанорова, Н. И. Чистякова. Механика. Методика решения задач. Учебное пособие. М.: Физический факультет МГУ, 2010. – 368 с. Гл. 1, 2.
6. Митин И. В., Русаков В. С. Анализ и обработка экспериментальных данных. Учебно-методическое пособие для студентов младших курсов. – М.: МГУ. 2002, гл.V.