Лабораторный практикум
по ФИЗИКЕ

МЕХАНИКА

Задача № 101

ИЗУЧЕНИЕ ДИНАМИКИ ПРОСТЕЙШИХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ МАШИНЫ АТВУДА

МОСКВА 2025

Задача 101

ИЗУЧЕНИЕ ДИНАМИКИ ПРОСТЕЙШИХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ МАШИНЫ АТВУДА

Цель работы

Изучение законов равноускоренного движения

Идея эксперимента

Изучение законов равноускоренного движения производится с помощью машины Атвуда, на которой можно получать различные, не слишком большие (по сравнению с ускорением свободного падения) ускорения.

Теоретическое введение

Экспериментальная установка, получившая название машины Атвуда, представляет собой вращающийся с малым трением легкий блок, через который перекинута тонкая легкая нить с грузами массой m_1 и m_2 (рис. 1.5).

Выберем систему координат так, как показано на рис. 1.5, и изобразим действующие на тела системы силы: силы тяжести и силы, действующие со стороны нитей.

Выберем следующую модель системы. Грузы будем считать материальными точками, подвешенными на невесомой и нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый абсолютно твердый цилиндрический блок. Грузы движутся вертикально, нить не проскальзывает относительно блока, сопротивления воздуха и трения в оси блока нет.

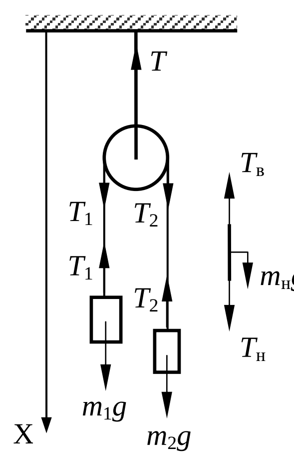

Рис. 1.5. Силы, действующие на грузы, блок и участок нити

Запишем уравнения движения двух грузов в проекции на ось X и уравнение кинематической связи, являющееся следствием нерастяжимости нити:

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1, \tag{1.20}$$
$$m_2 a_2 = m_2 g - T_2, \tag{1.21}$$
$$a_1 + a_2 = 0. \tag{1.22}$$
Здесь a_1 и a_2 – проекции ускорений грузов на ось X, T_1 и T_2 – модули сил, действующих на грузы со стороны нити.

Установим связь между модулями сил T_1 и T_2. Сначала докажем постоянство модуля силы натяжения нити вдоль всей ее длины в условиях данной задачи. Для этого выделим мысленно прямолинейный участок нити произвольной длины (см. рис. 1.5) и запишем уравнение его движения в проекции на ось X:
$$m_н a_н = T_н - T_в + m_н g, \tag{1.23}$$
где $m_н$ – масса выделенного участка нити, $a_н$ – проекция его ускорения на ось X, $T_н$ и $T_в$ – модули сил натяжения, действующих на выделенный участок нити со стороны нижнего и верхнего примыкающих к нему участков нити.

Поскольку нить по условию задачи невесома (т.е. $m_н = 0$), то из (1.23) следует, что модуль силы натяжения нити постоянен вдоль прямолинейного участка нити. Следовательно, сила, приложенная к грузу со стороны нити и сила натяжения нити в верхней части прямолинейного участка (у блока) равны по модулю.

Запишем уравнение вращательного движения блока вместе с примыкающим к нему участком нити относительно оси, проходящей через центр блока и направленной за плоскость чертежа (рис. 1.5):
$$J \frac{d\omega}{dt} = T_1 R - T_2 R - M_{тр}, \tag{1.24}$$
Здесь J – момент инерции блока вместе с примыкающим к нему участком нити относительно выбранной оси, ω– угловая скорость вращения блока, $M_{тр}$ – момент сил трения, действующих в оси блока.

Поскольку блок и нить невесомы (т.е. J=0), нет трения в оси блока (т.е. $M_{тр}$=0) и силы сопротивления воздуха, то в соответствии с (1.24) модули сил натяжения нити слева и справа от блока равны. Следовательно, равны и силы натяжения нити, приложенные к грузам:
$$T_1 = T_2. \tag{1.25}$$
Решим полученную систему уравнений (1.20) – (1.22), (1.25) относительно ускорений грузов:
$$a_1 = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}, \qquad a_2 = -g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = -a_1. \tag{1.26}$$

Формулу (1.26) для a_1 и a_2 можно обобщить и записать в виде:

$$a = a_1 = g \cdot \frac{\Delta m}{m} \tag{1.27}$$

где $\Delta m = m_1 - m_2$ - разность масс тел системы;

$m = m_1 + m_2$ - суммарная масса тел системы.

Ускорение тел системы всегда меньше ускорения свободного падения и меняется при изменении соотношения между массами грузов.

Для выбранной системы тел можно учесть влияние массы блока и силы трения в его оси. Система уравнений в этом случае дополняется уравнением вращательного движения блока и уравнением кинематической связи между угловым ускорением блока и ускорением одного из грузов. Очевидно, что силы натяжения нитей слева и справа от блока будут отличаться. Окончательно система уравнений имеет вид

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1, \tag{1.28}$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - T_2, \tag{1.29}$$

$$J\varepsilon = (T_1 - T_2)R - M_{\text{тр}}, \tag{1.30}$$

$$a_1 = -a_2 = a, \tag{1.31}$$

$$a = \varepsilon R, \tag{1.32}$$

где $J = \alpha m_{бл} R^2$ – момент инерции блока, $m_{бл}$ и R – его масса и радиус, α– коэффициент, зависящий от распределения массы (от формы блока), ε– угловое ускорение блока, $M_{\text{тр}}$ – момент силы трения в оси.

Решая систему уравнений (1.28) – (1.32), получаем значение ускорения

$$a = \frac{\Delta m g - M_{\text{тр}} / R}{\alpha m_{бл} + m}. \tag{1.33}$$

Очевидно, что ненулевые значения силы трения в оси и массы блока уменьшают величину ускорения по сравнению с идеальным случаем.

Экспериментальная установка

Машина Атвуда состоит из прикрепленной к массивному основанию вертикальной стойки, на верхнем конце которой имеется система из двух легких *блоков* 1, способных вращаться с малым трением (рис. 1.6). Через блоки перекинута легкая нить, к концам которой прикреплены две одинаковые *платформы* 2, поэтому система находится в равновесии. На эти платформы можно помещать добавочные грузы 3 в виде тонких пластин (*перегрузки*[1]), в результате этого система грузов начнет двигаться с ускорением. Изменяя массу перегрузков, можно изменять и ускорение системы.

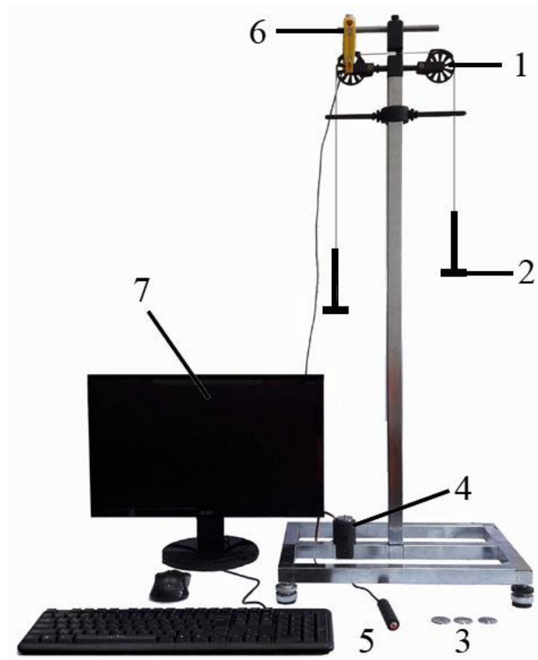

Рис. 1.6. Схема экспериментальной установки.

Система грузов удерживается в состоянии покоя с помощью *электромагнита* 4, притягивающего одну из платформ с грузами при непосредственном контакте. При нажатии на кнопку *системы управления электромагнитом* 5 происходит отключение электромагнита, и платформы с грузами начинают движение.

Измерение зависимости расстояния, пройденного *платформами* 2, от времени, осуществляется автоматически при помощи *фотоэлектрического датчика* 6, помещенного у одного из блоков 1, и программы, установленной на *компьютере* 7. Датчик 6 представляет собой «световые ворота», которые открываются и закрываются при прохождении отдельных непрозрачных «лепестков» блока. Зная радиус блока и число «лепестков», можно по углу поворота блока рассчитать изменение координаты x платформы. Информация о времени срабатывания «световых ворот» передается в установленную на компьютере программу «Машина Атвуда».

[1] В качестве платформ и перегрузков могут использоваться небольшие карабины с шайбами

Внешний вид окна программы показан на рис. 1.7. Запуск измерений осуществляется нажатием кнопки «*Start*» в верхнем левом углу и последующем нажатием кнопки *системы управления электромагнитом* 5. На экране компьютера в режиме реального времени появляются экспериментальные данные – зависимость координаты x груза (в метрах) от времени t (в секундах). Так как движение является равноускоренным, то зависимость имеет вид параболы. По этим данным программа может рассчитать зависимости скорости и ускорения платформ с грузами от времени, эти графики показываются н экране при нажатии кнопок «*V*» или «*A*» соответственно. Отметим, что, так как расчет ведется по экспериментальным точкам, то графики v(t) и a(t), как правило, сильно «зашумлены».

Для повышения точности расчетов используется метод наименьших квадратов (МНК). Сначала необходимо нажать кнопку «Proc.» и выделить мышкой область с экспериментальными точками, соответствующими *равноускоренному* движению тела. Программа, используя МНК, по выделенным экспериментальным точкам строит параболу вида

$$x = At^2 + Bt + C$$

и находит коэффициенты A, B и C, значения которых появляются в нижней строке (обратите внимание: коэффициенты выражены в основных единицах системы СИ !!!) (см. рис. 1.7).

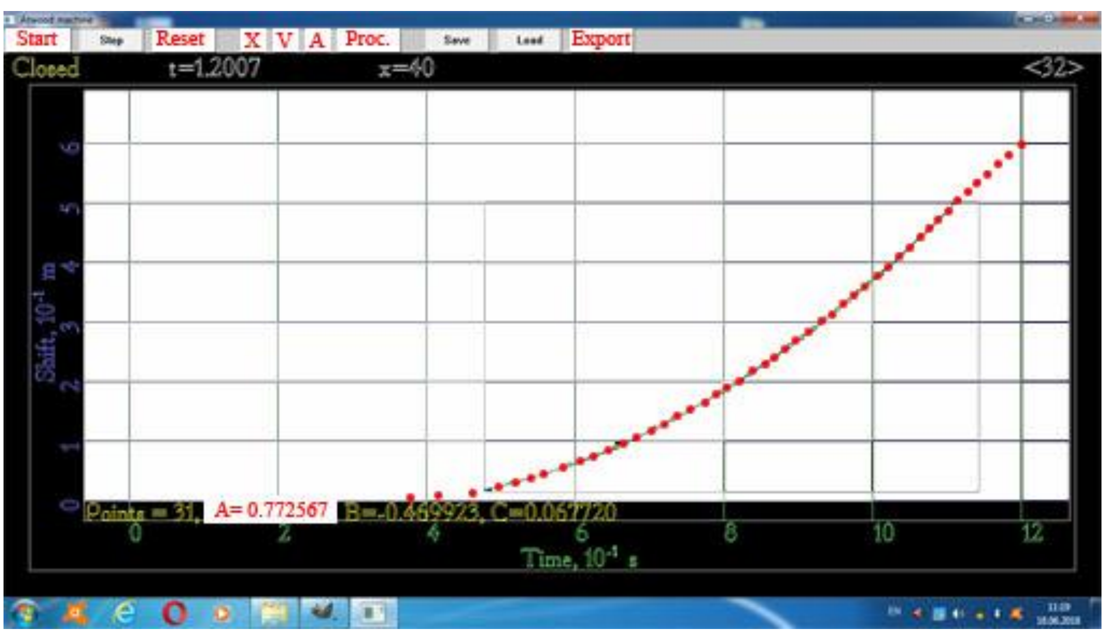

Рис. 1.7. Внешний вид программы «Машина Атвуда».

Так как закон равноускоренного движения имеет вид

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0,$$

то ускорение a груза находится по формуле

$$a = 2A.$$

Для дальнейшего самостоятельного построения графиков и обработки экспериментальных данных имеется возможность кнопкой «*Export*» экспортировать данные в текстовый файл. Для очистки экрана компьютера и проведения нового эксперимента необходимо нажать кнопку «*Reset*».

Проведение эксперимента

Упражнение 1. ***Анализ закона движения и определение ускорения***

Измерения

1. С помощью весов определите массу m_0 двух платформ и связывающей их нити. Результат занесите в табл. 1.1.

2. Используемые в задаче перегрузки имеют примерно одинаковую массу $m_п$. Определив массу m_i каждого из перегрузков, в качестве оценки $m_п$ возьмите среднее арифметическое $\overline{m}_п$, а оценку погрешности массы каждого из перегрузков рассчитайте по формуле

$$S_m = \sqrt{\frac{\sum (m_i - \overline{m}_п)^2}{N - 1}},$$

где N – общее количество перегрузков.

Таблица 1.1

Результаты измерений массы объектов

m_0 (г)									
$m_п$ (г)									
$\overline{m}_п$ (г)					S_m (г)				

3. С помощью электромагнита зафиксируйте левый груз в нижнем положении, а на правый груз положите один из перегрузков. Нажмите кнопку «*Start*» в программе «Машина Атвуда» и кнопку системы

управления электромагнитом 5. Система тел придет в движение, а на экране появится график зависимости $x(t)$.

4. Используя встроенный в программу МНК, определите ускорение $a_{эксп}$ груза. Для этого нажмите кнопку «Proc.», выделите мышкой область с экспериментальными точками и по рассчитанным программой коэффициентам A, B и C найдите искомое ускорение. Результат занесите в таблицу 1.2. в строку n=1, где n – число перегрузков.

Измерение ускорения повторите не менее 3-х раз.

Таблица 1.2

Результаты экспериментов и обработки упр.1 (n – число перегрузков)

n	$a_{эксп}$ (м/с^2)			$\bar{a}_{эксп}$	$S_{\bar{a}}$	$a_{рас}$	$S_{a,рас}$
	a_1	a_2	a_3	м/с^2	м/с^2	м/с^2	м/с^2
1							
2							
3							
4							
5							

5. Повторите измерения п. 3 – 4, постепенно увеличивая число перегрузков (n=2, 3, 4, …).

Обработка результатов

1. Для каждой серии измерений найдите оценку ускорения и оценку случайной погрешности. Считать, что «прибором», измеряющим непосредственно ускорение, является компьютер. Поэтому требуемые оценки находятся по формулам для серии прямых измерений, проведенных в одинаковых условиях:

$$\bar{a}_{эксп} = \frac{\sum a_{эксп,i}}{N}; \qquad S_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{\sum \left(a_{эксп,i} - \bar{a}_{эксп}\right)^2}{N(N-1)}}$$

(здесь N – число измерений в серии).

2. Формула (1.27) для расчета ускорения при отсутствии потерь запишется в виде:

$$a = g\,\frac{n \cdot m_п}{m_0 + n \cdot m_п}. \qquad (1.27а)$$

(здесь n – число перегрузков). Видно, что ускорение тел зависит от n нелинейно.

Зная массы всех тел, рассчитайте по (1.27а) ускорения $a_{рас}$ для каждого числа n перегрузков, оцените погрешности и сравните с результатами экспериментов.

На одних осях постройте графики зависимостей $\overline{a}_{эксп}(n)$ и $a_{рас}(n)$. Сделайте вывод о необходимости учета потерь.

Упражнение 2. ***Измерение ускорения при постоянной общей массе. Определение момента силы трения в оси блока и ускорения свободного падения***

Измерения

1. В этом упражнении используется нечетное ($2N$-1) число перегрузков, которые помещаются на обоих грузах системы. Первоначально разместите на правой платформе N перегрузков, а на левой – N-1 (разность масс равна массе одного перегрузка). Проведите измерение ускорения (не менее трех раз) по описанной выше методике. Результат занесите в таблицу 1.3.

2. Переместите один перегрузок с левой платформы на правую, при этом общая масса системы не изменится, а разность масс станет равной массе трех перегрузков. Вновь проведите измерение ускорения (не менее трех раз).

3. Продолжайте перемещение перегрузков и измерения ускорения, пока все перегрузки не окажутся на одном грузе.

Таблица 1.3

Результаты экспериментов и обработки упр. 2 (Δn – разность числа перегрузков)

Δn	$a_{эксп}$ (м/с^2)			$\overline{a}_{эксп}$	$S_{\overline{a}}$		
	a_1	a_2	a_3	м/с^2	м/с^2		
1							
3							
5							
…							

4. Момент силы трения можно оценить и непосредственно в эксперименте. Если снять все перегрузки, то система будет находиться в равновесии. Опустите одну из платформ вниз к электромагниту (но

без контакта!) и, запустив систему регистрации, слегка толкните платформу рукой вверх. Она придет в движение и через малое время под действием момента силы трения остановится. На экране монитора появится параболическая зависимость.

По описанной выше методике проведите измерение ускорения (оно будет отрицательным!) не менее 5 раз. Результаты запишите в таблицу 1.4.

Затем опустите вниз вторую платформу и повторите измерения, толкая её вверх. Полученные при этом ускорения могут отличаться (и иногда существенно!) от измеренных ранее. Если это так, то постарайтесь найти этому объяснение.

5. Приведем еще один экспериментальный способ оценивания момента силы трения. На одну из платформ системы, находящейся в состоянии покоя (без перегрузков) будем помещать легкие самодельные перегрузки (например, сделанные из бумаги). Определите массу $m_{\text{пер}1}$ таких перегрузков, при которых система придет в движение. Повторите эксперимент, помещая легкие перегрузки на другой груз, и найдите $m_{\text{пер}2}$, которая может не совпасть с предыдущим измерением (почему?). Запишите результаты в таблицу 1.4.

Таблица 1.4

Результаты экспериментов и обработки упр. 2 при отсутствии перегрузков

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="5">$a_{эксп}$ (м/с^2)</td><td>$\bar{a}_{зат}$</td><td>$S_{\bar{a}}$</td></tr>
<tr><td>a_1</td><td>a_2</td><td>a_3</td><td>a_4</td><td>a_5</td><td>м/с^2</td><td>м/с^2</td></tr>
<tr><td>↑</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>↓</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="7">$0{,}5*(\bar{a}_{зат\uparrow}+\bar{a}_{зат\downarrow}) =$ ± м/с^2</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="7">$(\bar{a}_{зат\uparrow}-\bar{a}_{зат\downarrow}) =$ ± м/с^2</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">$m_{\text{пер}1}=$ г</td><td colspan="2">$m_{\text{пер}2}=$ г</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Обработка результатов

1. По описанной в Упр. 1 методике для каждой серии измерений найти оценку ускорения и оценку погрешности. Запишите результаты в таблицу 1.3

2. Формула (1.33) для расчета ускорения с учетом потерь запишется в виде:

$$a = \frac{\Delta n \cdot m_{\text{п}} g - M_{\text{тр}} / R}{\alpha m_{бл} + m_0 + (2N - 1) m_n}. \qquad (1.33а)$$

(здесь ($2N$-1) – общее число перегрузков, Δn – разность числа перегрузков; параметры блоков считать известными и равными: α=0,3, $m_{бл}$=0,0175 кг, R=0,025 м).

Из (1.33а) следует, что ускорение грузов линейно зависит от разности Δn числа перегрузков, так как общая масса системы остается неизменной.

Постройте график зависимости ускорения $a(\Delta n)$.

Используя МНК[2], найдите уравнение прямой в виде

$$a = C \cdot \Delta n + D,$$

наилучшим образом проходящей по экспериментальным точкам. Найденные по МНК значения коэффициентов C и D и погрешности S_C и S_D запишите в таблицу 1.5 (размерности укажите самостоятельно).

Таблица 1.5

Результаты обработки упр. 2 при использовании МНК

$C \pm S_C$ [ ]	
$D \pm S_D$ [ ]	
$g \pm S_C$ [ ]	
$M_{\text{тр}} \pm S_{M\text{тр}}$ [ ] п.2	
$M_{\text{тр}} \pm S_{M\text{тр}}$ [ ] п.3	
$M_{\text{тр}} \pm S_{M\text{тр}}$ [ ] п.4	

По наклону этой прямой, задаваемого коэффициентом

$$C = \frac{m_{\text{п}} g}{\alpha m_{бл} + m_0 + (2N - 1) m_n}, \qquad (1.34)$$

получите оценку для ускорения свободного падения g:

$$g = \frac{C \cdot [\alpha m_{бл} + m_0 + (2N - 1) m_n]}{m_{\text{п}}}. \qquad (1.35)$$

Так как ускорение $g(m_{бл}, m_0, m_n, C)$ является косвенно измеряемой величиной, то для оценки погрешности S_g используйте формулу

[2] Для применения МНК использовать формулы из пособия [6] или воспользоваться программой обработки экспериментальных данных МНК на сайте кафедры общей физики по адресу: http://genphys.phys.msu.ru/rus/ofp/.

$$S_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial m_{бл}} \cdot S_{m_{бл}}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial m_0} \cdot S_{m_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial m_n} \cdot S_{m_n}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial C} \cdot S_C\right)^2}\ .$$

Коэффициент

$$D = \frac{-M_{\text{тр}} / R}{\alpha m_{бл} + m_0 + (2N-1) m_n},$$

равен координате точки пересечения прямой с вертикальной осью, т.е. ускорению системы при Δn=0. Зная D<0, получите оценку для момента силы трения $M_{\text{тр}}$

$$M_{\text{тр}} = |D| \cdot [\alpha m_{бл} + m_0 + (2N-1) m_n] \cdot R\ ,$$

Оценку погрешности $S_{M\text{тр}}$ проведите аналогично оценке S_g.

3. Обработку результатов измерений в Упр.2, п.4 проведем следующим образом. Так как при измерениях не использовались перегрузки, то в (1.33) следует положить Δm=0, тогда

$$a_{зат} = \frac{-M_{\text{тр}} / R}{\alpha m_{бл} + m}\ . \qquad (1.33а)$$

Но если в эксперименте при изменении направления движения тел получались различные значения ускорения $a_{зат\uparrow}$ и $a_{зат\downarrow}$, то это можно объяснить небольшим различием масс платформ $\Delta m_{плат} \neq 0$ (существенно меньшей массы одного перегрузка). Тогда в (1.33) следует сохранить $\Delta m_{плат}$, но при изменении направления движения эта величина будет менять знак. Нетрудно сообразить, что в левую часть формулы (1.33а) следует поставить среднее арифметическое:

$$\frac{a_{зат\uparrow} + a_{зат\downarrow}}{2} = \frac{-M_{\text{тр}} / R}{\alpha m_{бл} + m}, \qquad (1.33б)$$

что позволит найти $M_{\text{тр}}$. В свою очередь, определив разность ускорений $(a_{зат\uparrow} - a_{зат\downarrow})$, можно найти … (что?).

4. Обработка результатов измерений в Упр.2, п.5 проводится следующим образом. В этом случае ускорение тел равно нулю, поэтому (1.33) для двух случаев запишутся в виде:

$$a_1 = \frac{\Delta m_{плат} g + m_{пер1} g - M_{\text{тр}} / R}{\alpha m_{бл} + m} = 0\ . \qquad (1.33в)$$

$$a_2 = \frac{-\Delta m_{плат} g + m_{пер2} g - M_{\text{тр}} / R}{\alpha m_{бл} + m} = 0\ . \qquad (1.33г)$$

Складывая уравнения, получим:

$$\frac{\left(m_{пер\,1} + m_{пер\,2}\right)g}{2} = \frac{M_{\text{тр}}}{R},$$

что вновь позволит оценить момент силы трения $M_{\text{тр}}$.

5. Сравнить полученные тремя способами значения момента силы трения. Сделать выводы.

Основные итоги работы

На основании проведенных экспериментов и выполненных расчетов должно быть показано, что движение системы тел под действием постоянной силы является равноускоренным, а также проанализировано влияние момента силы трения в оси блока и массы блока на точность определения ускорения.

Контрольные задания и вопросы

1. Какие системы отсчета называют инерциальными? Сформулировать первый закон Ньютона.
2. Сформулировать второй закон Ньютона.
3. Сформулировать третий закон Ньютона.
4. Груз подвешен на весомой нити. Как при этом изменяется сила натяжения нити?
5. Как экспериментально оценить момент силы трения в оси?
6. Как изменится система уравнений, если учесть массу блока?

Литература

1. А. Н. Матвеев. Механика и теория относительности. – М. Изд. дом «Оникс 21 век», 2003. – 432 с. Гл. 1, 2.
2. В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев. Механика. – М.: Изд. центр «Академия», 2004. – 480 с. Лекции 1 – 3.
3. С. П. Стрелков. Механика. – СПб.: «Лань», 2005. – 560 с. Гл. 1, 2.
4. Д. В. Сивухин. Общий курс физики. В пяти томах. Т. 1. Механика. – М.: ФИЗМАТЛИТ / МФТИ, 2005. – 559 с. Гл. 1, 2.
5. В. С. Русаков, А. И. Слепков, Е. А. Никанорова, Н. И. Чистякова. Механика. Методика решения задач. Учебное пособие. М.: Физический факультет МГУ, 2010. – 368 с. Гл. 1, 2.
6. Митин И. В., Русаков В. С. Анализ и обработка экспериментальных данных. Учебно-методическое пособие для студентов младших курсов. – М.: МГУ. 2002, гл.V.