

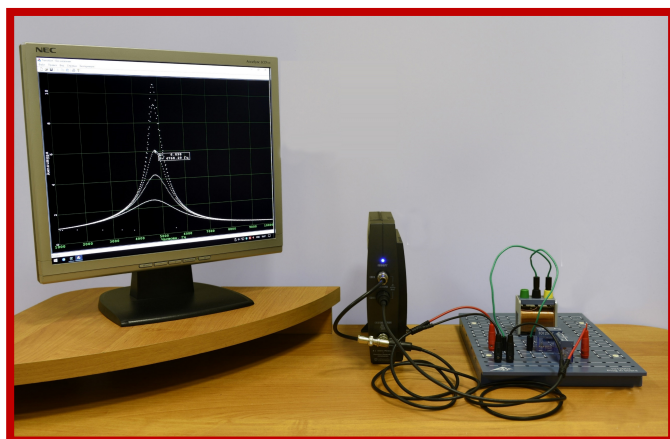
**В.М. Буханов, И.В. Митин, Г.М. Николадзе,
А.М. Салецкий, Д.Э. Харабадзе**

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Лабораторный практикум

Часть 2

Цепи переменного тока



Москва
Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
2024

УДК 537
ББК 22.33

Коллектив авторов: Буханов В.М., Митин И.В., Николадзе Г.М.,
Салецкий А.М., Харабадзе Д.Э.

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ. Лабораторный практикум.
Часть 2. Цепи переменного тока. Уч.-метод. пособие. – М.: Физический
факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2024. – 68 с.

Пособие содержит описание лабораторных работ по дисциплине «Физика» и предназначен в помощь студентам, выполняющим лабораторные работы по разделу «Электричество и магнетизм». Представлены три лабораторные работы: «Изучение явления резонанса в колебательном контуре», «Колебания в связанных контурах» и «Исследование переходных процессов в LR -, LC - и LRC -цепях». Каждая работа содержит краткое изложение теории изучаемых явлений, описание экспериментальной установки, и методику проведения экспериментов и обработки результатов. Для студентов физических специальностей университетов.

Рецензент: канд. физ.- мат наук, доцент. *А.В. Быков*

Подписано в печать 12.08.2024 г.
Формат 60x90/16. Объем 4,25 п. л. Тираж 50 экз.

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

© Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2024 г.
© Коллектив авторов, 2024 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
Лабораторная работа 2.1. ИЗУЧЕНИЕ ЯВЛЕНИЯ РЕЗОНАНСА В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ	6
Цель работы. Идея эксперимента	6
Теория	6
Эксперимент	19
<i>Экспериментальная установка (19). Проведение эксперимента (22).</i>	
Основные итоги	30
Контрольные вопросы	31
Литература	31
Лабораторная работа 2.2. КОЛЕБАНИЯ В СВЯЗАННЫХ КОНТУРАХ	32
Цель работы. Идея эксперимента	32
Теория	32
Эксперимент	39
<i>Экспериментальная установка (39). Проведение эксперимента (42).</i>	
Основные итоги	46
Контрольные вопросы	46
Литература	46
Лабораторная работа 2.3. ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В RC-, RL и RLC-ЦЕПЯХ	48
Цель работы. Идея эксперимента	48
Теория	48
Эксперимент	59
<i>Экспериментальная установка (59). Проведение эксперимента (60).</i>	
Основные итоги	67
Контрольные вопросы	67
Литература	67

ВВЕДЕНИЕ

Переменным током называется электрический ток, который изменяется по величине и направлению во времени. Синусоидальный ток изменяется во времени по гармоническому закону.

В общем случае цепь переменного тока характеризуется тремя параметрами: **источником переменного тока**, **активным сопротивлением** R , **индуктивностью** L и **емкостью** C .

Рассмотрим цепи переменного тока с этими элементами.

1. **Цепь переменного тока с активным сопротивлением** (рис. 2.1). В цепи действует напряжение $U = U_0 \sin \omega t$.

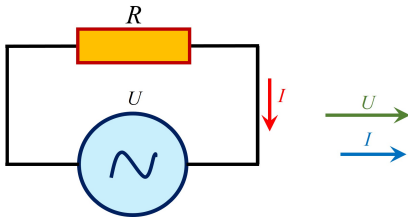


Рис. 2.1. Электрическая схема и векторная диаграмма для цепи с активным сопротивлением

Согласно закону Ома для участка цепи сила тока равна

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_0 \sin \omega t}{R} = I_0 \sin \omega t.$$

То есть в цепи переменного тока с **активным сопротивлением фазы тока и напряжения совпадают** (рис. 2.1).

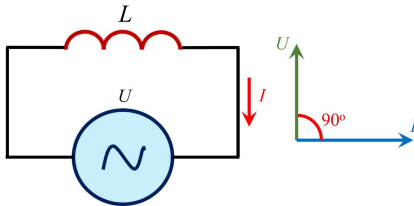


Рис. 2.2. Электрическая схема и векторная диаграмма для цепи с индуктивным элементом

2. Рассмотрим цепь переменного тока с идеальной ($R=0$) катушкой с **индуктивностью** L (рис. 2.2). При подаче синусоидального напряжения на катушку L в ней протекает ток

$$I = I_0 \sin \omega t. \quad (2.1)$$

В катушке возникает переменное магнитное

поле и наводится ЭДС самоиндукции

$$E_s = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d(I_0 \sin \omega t)}{dt} = -I_0 L \omega \cos \omega t. \quad (2.2)$$

Согласно закону Ома для цепи, при $R = 0$

$$U = -E_s, \quad (2.3)$$

где U – мгновенное значение напряжения на источнике переменного тока, включенного в цепь.

С учетом (2.2) получаем:

$$E_S = I_0 L \omega \cos \omega t = I_0 X_L \cos \omega t = U_0 \cos \omega t = U_0 \sin(\omega t + 90^\circ), \quad (2.4)$$

где $I_0 \omega L = U_0$ – амплитудное значение напряжения, X_L – индуктивное сопротивление.

В соответствии с (2.4) в цепи с индуктивной нагрузкой ток отстает по фазе от напряжения на $90^\circ (\pi/2)$ (см. рис. 2.2).

3. Цепь переменного тока с конденсатором (рис. 2.3).

Под действием синусоидального напряжения $U = U_0 \sin \omega t$ в цепи с емкостным элементом протекает ток

$$\begin{aligned} I &= \frac{dq}{dt} = C \frac{dU}{dt} = C \frac{d(U_0 \sin \omega t)}{dt} = U_0 C \omega \cos \omega t = U_0 C \omega \sin(\omega t + 90^\circ) = \\ &= \frac{U_0}{X_C} \sin(\omega t + 90^\circ) = I_0 \sin(\omega t + 90^\circ), \quad (2.5) \end{aligned}$$

где C – емкость, q – заряд конденсатора, X_C – емкостное сопротивление

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}, \quad (2.6)$$

Из выражения (2.5) следует, что на емкостном элементе ток опережает по фазе напряжение на $90^\circ (\pi/2)$ (рис. 2.3).

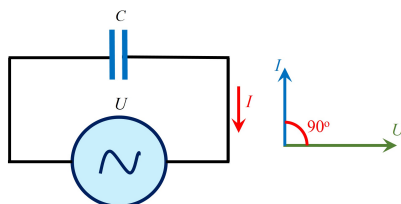


Рис. 2.3. Электрическая схема и векторная диаграмма для цепи с емкостным элементом

Лабораторная работа 2.1

ИЗУЧЕНИЕ ЯВЛЕНИЯ РЕЗОНАНСА В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

Цель работы

Экспериментальное изучение явления резонанса в последовательном и параллельном колебательных RLC- контурах. Исследование зависимости амплитуды напряжения на различных элементах колебательного контура от частоты напряжения на источнике электродвижущей силы.

Идея эксперимента

Колебательный контур подключается к источнику гармонического напряжения. Плавно изменяя частоту, получают амплитудные и фазовые кривые для различных элементов колебательного контура.

Теория

Рассмотрим электрический контур, состоящий из конденсатора C , катушки индуктивности L и резистора R , подключенных к источнику питания последовательно (рис. 2.4, а) или параллельно (рис. 2.4, б). При этом в качестве источника питания используется либо генератор переменного напряжения $E(t) = E_0 \cdot \sin \omega t$ (рис. 2.4, а), либо генератор переменного тока $I(t) = I_0 \cdot \sin \omega t$ (рис. 2.4, б).

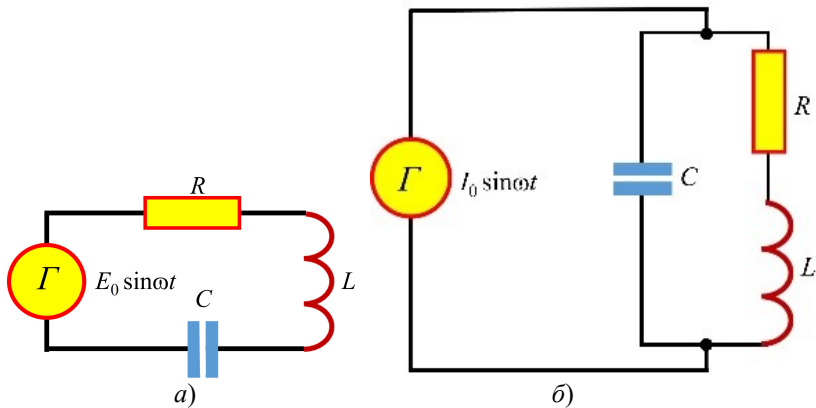


Рис. 2.4. Электрические схемы последовательного (а) и параллельного (б) контуров

Последовательный колебательный контур

Рассмотрим последовательный колебательный контур (рис. 2.4, а). Записывая закон Кирхгофа для такой цепи, получим уравнение вынужденных колебаний в контуре:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = E_0 \cdot \sin \omega t . \quad (2.7)$$

где I – сила тока в контуре; q – заряд конденсатора; E_0 – амплитуда напряжения источника, ω – частота напряжения источника. Так как сила тока $I = \frac{dq}{dt}$, то уравнение (2.7) можно записать в виде:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E_0 \cdot \sin \omega t . \quad (2.8)$$

Разделим обе части уравнения на L и введем обозначения:

$$\frac{R}{2L} = \delta, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2, \quad (2.9)$$

где ω_0 – собственная частота колебательного контура в отсутствие затухания, δ – коэффициент затухания колебаний.

С учетом (2.9) уравнение (2.8) может быть преобразовано к виду:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{E_0}{L} \cdot \sin \omega t . \quad (2.10)$$

Решение такого дифференциального уравнения представляет собой суперпозицию свободных затухающих колебаний

$$q_{\text{затух}}(t) = q_{0\text{затух}} \cdot e^{-\delta t} \sin(\omega_{\text{затух}} t + \varphi)$$

на частоте $\omega_{\text{затух}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ и вынужденных колебаний $q_{\text{вын}}(t)$ на частоте ω источника.

После полного затухания свободных колебаний в системе установятся только вынужденные колебания¹:

$$q_{\text{вын}}(t) = q_0 \sin(\omega t - \varphi_0). \quad (2.11)$$

¹ Строгое решение подобных дифференциальных уравнений разбирается в математических курсах, ниже будет рассмотрено решение уравнения с помощью метода векторных диаграмм.

где

$$q_0 = \frac{E_0}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}}, \quad (2.12)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (2.13)$$

Используя выражение (2.11) для q , можно найти закон изменения силы тока в цепи

$$I = \frac{dq}{dt} = q_0\omega \cos(\omega t - \theta) = q_0\omega \sin(\omega t - \Delta\varphi), \quad (2.14)$$

где $\Delta\varphi = \varphi_0 - \pi/2$ – разность фаз напряжения на источнике и силы тока в цепи, а

$$\operatorname{tg} \Delta\varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega\delta} = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (2.15)$$

С учетом (2.12) и (2.14) для зависимости амплитуды силы тока в цепи от частоты ω получаем:

$$I_0 = q_0\omega = \frac{\omega E_0}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}. \quad (2.16)$$

Для $\omega = 0$ амплитуда тока $I_0 = 0$. С ростом частоты амплитуда тока I_0 возрастает и достигает максимального значения

$(I_0)_{\max} = \frac{E_0}{2\delta L} = \frac{E_0}{R_{\max}}$ для $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$, а разность фаз $\Delta\varphi$ равна

нулю. Дальнейшее увеличение частоты вызывает уменьшение I_0 , и при $\omega \rightarrow \infty$ амплитуда тока $I_0 \rightarrow 0$. Графики зависимости $I_0(\omega)$ для двух различных значений активного сопротивления представлены на рис. 2.5. Зависимость $I_0(\omega)$ получила название *амплитудно-частотной характеристики* контура.

Из рис. 2.5 видно, что чем меньше R , тем меньше коэффициент затухания δ и тем больше I_0 .

На рис. 2.6 приведены зависимости разности фаз $\Delta\varphi$ между ЭДС и током в цепи от частоты ω . При малых частотах разность фаз близка к $-\pi/2$, при больших частотах разность фаз стремится к $+\pi/2$ (напряжение опережает ток по фазе на $\pi/2$). При частоте $\omega = \omega_0$ разность фаз равна нулю. Из рис. 2.6 видно, что чем меньше

R , тем быстрее изменение φ вблизи частоты $\omega = \omega_0$. В предельном случае $R = 0$ фаза изменяется скачком при $\omega = \omega_0$.

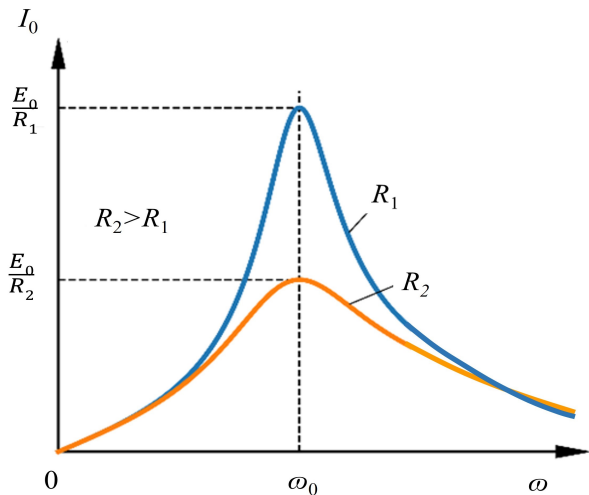


Рис. 2.5. Зависимость I_0 от частоты ω для двух значений R .

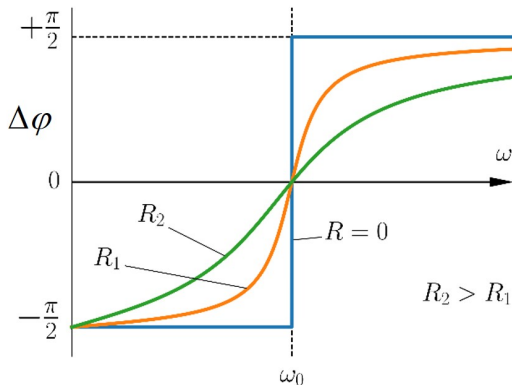


Рис. 2.6. Зависимость $\Delta\varphi$ от частоты ω для двух значений R .

Что касается зависимости напряжения на конденсаторе $U_C = \frac{q}{C}$ от частоты ω , с учетом соотношения $q = \int Idt$ и формулы (2.11) имеем:

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int I_0 \sin(\omega t - \theta) dt = -\frac{I_0}{\omega C} \cos(\omega t - \theta) = U_{C_0} \sin(\omega t - \varphi_C), \quad (2.17)$$

где

$$U_{C_0} = \frac{E_0}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad (2.18)$$

– амплитуда напряжения на конденсаторе, $\varphi_C = \varphi + \pi/2$ – разность фаз между ЭДС и напряжением на конденсаторе.

При $\omega = \omega_0$

$$U_{C_0} = \frac{E_0}{\omega_0 C R} \approx \frac{E_0}{\frac{1}{\sqrt{LC}} C R} = E_0 \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = E_0 Q, \quad (2.19)$$

где $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ – *добротность* контура, которая характеризует

потери энергии в контуре: чем меньше потери, тем больше добротность². В соответствии с формулой (2.19) для $\omega = \omega_0$ амплитуда напряжения на конденсаторе в Q раз больше амплитуды ЭДС источника. Такое увеличение амплитуды напряжения на конденсаторе C носит название *резонанса напряжений*. Можно показать, что при $\omega = \omega_0$ амплитуда напряжения на индуктивности $U_{L_0} = L \frac{dI}{dt}$ также будет в Q раз больше E_0 , но при этом напряжение на индуктивности будет в противофазе с напряжением на конденсаторе.

Согласно (2.18), частота ω_C , при которой напряжение на конденсаторе максимально можно найти, решив уравнение $\frac{dU_{C_0}}{d\omega} = 0$. После несложных, но громоздких преобразований получим:

² По определению, добротность $Q = \pi/\theta$, где θ – логарифмический декремент затухания свободных колебаний в контуре. В свою очередь, $\theta = \delta T$, где $T = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ (затухание мало). После несложных преобразований можно получить формулу $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$. Также для добротности часто приводят формулу

$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}$, где W – энергия, запасенная в контуре в начале цикла, ΔW – потери энергии в контуре за период колебаний.

$$\omega_C = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0, \quad (2.20)$$

$$U_{C_0}(\omega_C) = \frac{E_0}{CR \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \quad (2.21)$$

Если $Q \gg 1$, то можно считать, что $\omega_C \approx \omega_0$ и $U_{C_0}(\omega_C) = E_0 Q$.

Таким образом, измеряя напряжение на конденсаторе на резонансной частоте, можно оценить добротность контура Q .

На рис. 2.7 приведен график зависимости амплитуды напряжения на конденсаторе от частоты ЭДС внешнего источника. $U_{C_0} = E_0$ при $\omega = 0$. По мере увеличения частоты U_{C_0} растет, достигая максимального значения $(U_{C_0})_{\max} \approx E_0 Q$ для $\omega = \omega_C \approx \omega_0$, после чего убывает до нуля. Частота ω_C , при которой амплитуда напряжения на конденсаторе максимальна, несколько меньше частоты ω_0 , при которой максимальна амплитуда силы тока.

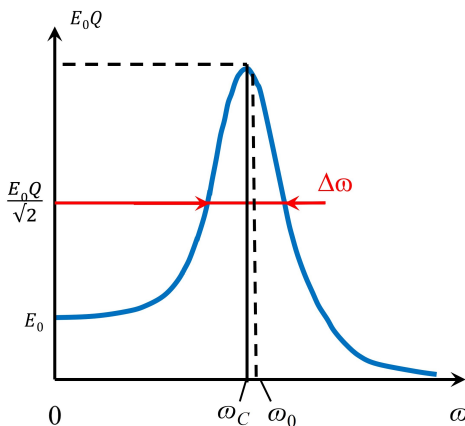


Рис. 2.7. Вид резонансной кривой для напряжения на конденсаторе.

Шириной резонансной кривой $\Delta\omega$ называют интервал частот, при которых амплитуда напряжения отличается от амплитуды напряжения в резонансе не более чем в $\sqrt{2}$ раз. Можно показать, что если $\Delta\omega \ll \omega_0$, то $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$, или $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$.

Таким образом, измерив ширину резонансной кривой, можно также оценить добротность контура Q .

График зависимости разности фаз между напряжением источника ЭДС и напряжением на конденсаторе имеет вид, как на рис. 2.6, только смещен вверх на $\pi/2$, т.к. $\varphi_C = \varphi + \pi/2$. В

резонансе, когда сила тока в цепи и напряжение источника совпадают по фазе, напряжение на конденсаторе отстает по фазе от напряжения источника на $\pi/2$. Напомним, что напряжение на конденсаторе всегда (а не только при резонансе) отстает по фазе от тока через конденсатор на $\pi/2$. В свою очередь, напряжение на индуктивности всегда опережает ток по фазе на $\pi/2$.

Для катушки индуктивности резонансная кривая будет немного отличаться от приведенной на рис. 2.7 для конденсатора:

1) при $\omega = 0$ амплитуда напряжения на катушке $U_L(\omega = 0) = 0$;

2) при $\omega \rightarrow \infty$ амплитуда напряжения на катушке $U_L(\omega \rightarrow \infty) \rightarrow E_0$;

3) частота ω_L , при которой амплитуда напряжения на катушке максимальна, несколько больше частоты ω_0 :

$$\omega_L = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} > \omega_0;$$

4) в вершине резонансной кривой $U_L(\omega = \omega_L) \approx E_0 Q$, т.е. как и на конденсаторе, но фаза смещена на π (в противофазе).

На рис. 2.8 представлены частотные зависимости амплитуд напряжений на конденсаторе, катушке индуктивности и резисторе.

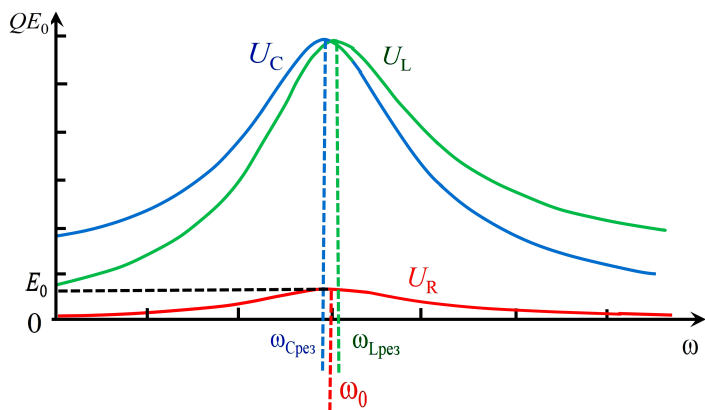


Рис. 2.8. Зависимости амплитуд напряжения на конденсаторе, катушке индуктивности и резисторе от частоты.

Резонансные частоты для различных элементов связаны друг с другом соотношениями:

$$\omega_C \omega_L = \omega_0^2, \quad Q = \frac{\sqrt{\omega_L}}{\sqrt{2(\omega_L - \omega_C)}}.$$

Метод комплексных амплитуд. Векторные диаграммы
Для расчета линейных цепей переменного тока удобен *метод комплексных амплитуд*, суть которого состоит в следующем.

Известно, что любой гармонический сигнал

$$x = x_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (2.22)$$

можно представить в комплексном виде, и тогда

$$x = \text{Im} \left(x_0 e^{i(\omega t + \varphi)} \right) = \text{Im} \left(x_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t} \right) = \text{Im} \left(X_0 e^{i\omega t} \right), \quad (2.23)$$

где i – мнимая единица ($i^2 = -1$), знак Im означает мнимую часть выражения в скобках, $X_0 = x_0 e^{i\varphi}$ – комплексная амплитуда гармонического сигнала.

Представление гармонического сигнала в комплексном виде позволяет упростить анализ процессов, происходящих в цепях переменного тока.

Пусть заряд на обкладках конденсатора изменяется по закону:

$$q(t) = q_0 \sin(\omega t).$$

Тогда сила тока через конденсатор равна

$$I_C(t) = \frac{dq}{dt} = q_0 \omega \cos(\omega t) = q_0 \omega \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Переходя к комплексной форме записи и учитывая, что $q(t) = U_C C$ и $e^{i\pi/2} = i$, получим:

$$U_C(t) = \text{Im} \left(\frac{q_0}{C} U_0 e^{i\omega t} \right) = \text{Im} \left(U_0 e^{i\omega t} \right);$$

$$I_C(t) = \text{Im} \left(U_0 \cdot \omega C \cdot e^{i(\omega t + \pi/2)} \right) = \text{Im} \left(U_0 \cdot i \omega C e^{i\omega t} \right).$$

Введем понятие комплексного сопротивления (или *импеданса*) конденсатора Z_C , равного отношению комплексных амплитуд напряжения и силы тока:

$$Z_C = \frac{U_{\text{КОМП}}}{I_{\text{КОМП}}} = \frac{U_0}{U_0 i \omega C} = \frac{1}{i \omega C} = -\frac{i}{\omega C}. \quad (2.24)$$

Мнимая единица i в (2.24) свидетельствует о разности фаз $\pi/2$ между силой тока и напряжением, т.е. сила тока, протекающего через конденсатор, опережает по фазе на $\pi/2$ напряжение на конденсаторе.

Аналогично можно получить выражения для импеданса других элементов цепи:

$$Z_R = R, \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}, \quad Z_L = i\omega L \quad (2.25)$$

или

$$Z_R = R, \quad Z_C = \frac{1}{\omega C} e^{-i\pi/2}, \quad Z_L = \omega L e^{i\pi/2}. \quad (2.26)$$

В общем случае импеданс может быть представлен в следующем виде:

$$Z = X + iY = |Z| \cdot e^{i\varphi}, \quad (2.27)$$

где X и Y – соответственно *активная* и *реактивная* составляющие комплексного сопротивления; $|Z| = \sqrt{X^2 + Y^2}$ – модуль импеданса; $\varphi = \arctg(Y/X)$ – аргумент импеданса.

Из приведенных формул следует, что импеданс резистора Z_R имеет только активную составляющую, поэтому, разность фаз между током и напряжением равна нулю. Напротив, импедансы конденсатора и индуктивности чисто мнимые, т.е. имеют только реактивную составляющую. В случае конденсатора аргумент импеданса φ_C равен $-\pi/2$, а значит, напряжение на конденсаторе отстает по фазе от тока через него на $\pi/2$. Для индуктивности аргумент импеданса φ_L равен $\pi/2$, и напряжение на катушке индуктивности опережает по фазе протекающий через нее ток на $\pi/2$.

Если в уравнении (2.7) использовать комплексное представление в ходящих в него величин заряда, тока и напряжения, то можно получить соотношение для их комплексных амплитуд:

$$I \cdot (Z_L + Z_R + Z_C) = U_{\text{ист}},$$

$$U_L + U_R + U_C = U_{\text{ист}},$$

где U и I – комплексные амплитуды напряжения и тока в цепи соответственно, $U_{\text{ист}}$ – напряжение источника; Z – комплексное сопротивление (*импеданс*) цепи.

Эти соотношения и законы Кирхгофа позволяют сформулировать следующее правило для расчета импеданса цепи: поставить в соответствие каждому элементу цепи его импеданс, а затем использовать правила расчета суммарного сопротивления цепи для постоянного тока, т.е. при последовательном соединении сопротивления суммируют, при параллельном – суммируются проводимости.

Метод комплексных амплитуд имеет наглядную геометрическую интерпретацию. Каждому комплексному числу $c = a + ib$ можно поставить в соответствие вектор на комплексной плоскости $\mathbf{c} = \{a; b\}$. Длина вектора \mathbf{c} равна модулю числа

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

а угол φ , относительно действительной оси – аргумент числа

$$\varphi = \arctg \frac{b}{a}$$

(положительный угол соответствует повороту вектора против часовой стрелки).

Для геометрического анализа цепей переменного тока на комплексной плоскости строятся векторы напряжений и токов, соответствующие комплексным амплитудам этих величин для каждого элемента схемы. При построении необходимо учитывать, что сумма векторов напряжений вдоль любого контура цепи равна сумме векторов ЭДС (2-й закон Кирхгофа), а диаграмма векторов тока в любом узле должна быть замкнутой – поскольку сумма токов в узле равна нулю (1-й закон Кирхгофа). Когда диаграмма построена, амплитуда и фаза напряжения между любыми двумя точками определяются длиной и углом поворота вектора, соединяющего эти точки. Для простых цепей такие диаграммы строятся и анализируются достаточно легко и весьма наглядны.

В качестве примера рассмотрим построение векторной диаграммы для последовательного RLC - контура (рис. 2.9). Так как импеданс дает информацию о разности фаз между напряжением и током, то значение фазы для какой-либо одной из величин (напряжения или тока для любого элемента схемы) можно выбрать произвольно. В последовательном контуре сила тока одинакова для всех элементов

схемы, поэтому удобно выбрать для ком-плексной амплитуды тока значение фазы равным нулю (вектор \mathbf{I}_0 на рис. 2.9). Тогда векторы \mathbf{U}_R , \mathbf{U}_L и \mathbf{U}_C могут быть легко найдены из соотношений (2.24) и (2.27). В частности, вектор \mathbf{U}_C имеет длину $|\mathbf{U}_C| = |Z_C| \cdot I_0 = \frac{I_0}{\omega C}$ и фазу $\varphi_C = -\pi/2$. Сумма всех векторов $\mathbf{U}_R + \mathbf{U}_L + \mathbf{U}_C$ равна вектору \mathbf{U}_0 , соответствующему амплитуде и фазе напряжения источника ЭДС. Построенная векторная диаграмма позволяет довольно просто получить ранее выведенные формулы (2.15) и (2.16).

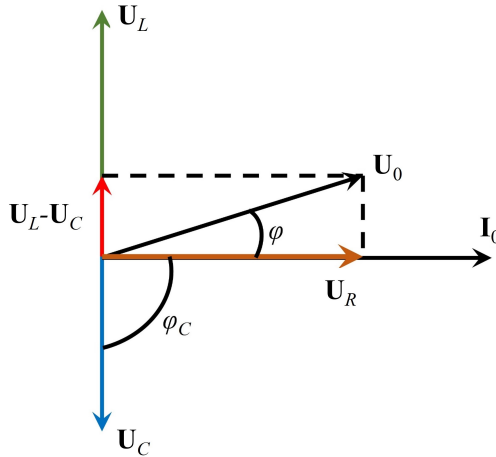


Рис. 2.9. Векторная диаграмма для последовательного контура.

Параллельный колебательный контур

В случае параллельного соединения элементов контура (рис. 2.4,б) импеданс цепи находится по формуле:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R + i\omega L} + i\omega C \quad (2.28)$$

или

$$Z = \frac{R + i\omega L}{1 + i\omega C(R + i\omega L)} = \frac{R + i\omega L}{1 - \omega^2 CL + i\omega CR} \quad (2.29)$$

Умножая числитель и знаменатель (2.29) на $(1 - \omega^2 CL) - i(\omega CR)$, получаем:

$$Z = \frac{R + i\omega [L(1 - \omega^2 CL) - CR^2]}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}. \quad (2.30)$$

Если мнимая часть импеданса равна нулю, т.е.

$$L(1 - \omega^2 CL) - CR^2 = 0 \quad (2.31)$$

то сопротивление цепи имеет только активную составляющую.

Решая уравнение (2.31) относительно ω , получаем:

$$\hat{\omega}^2 = \frac{L - CR^2}{L^2 C} = \omega_0^2 - R^2 \frac{C}{L} \cdot \omega_0^2 \approx \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{Q^2}\right), \quad (2.32)$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – собственная частота незатухающих колебаний в

контуре; $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ – добротность контура.

Можно показать, что в этом случае модуль импеданса максимален и равен

$$Z = \frac{L}{CR} \approx RQ^2. \quad (2.33)$$

При изучении рассматриваемых процессов в схеме, изображенной на рис. 2.4, б, вместо генератора напряжения используется генератор переменного тока $I(t) = I_0 \cdot e^{i\omega t}$, где I_0 – амплитудное значение силы тока. В этом случае значение комплексной амплитуды напряжения находится по формуле:

$$U_0 = Z \cdot I_0 = |Z| \cdot I_0 \cdot e^{i\varphi}, \quad (2.34)$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega[(1 - \omega^2 CL) - CR^2]}{R}$$

– разность фаз между напряжением на контуре и силой тока генератора.

На частоте $\hat{\omega}$ напряжение на контуре максимально: $\hat{U}_0 = \frac{L}{CR} I_0$, а комплексная амплитуда силы тока, протекающего через конденсатор равна (при $Q \gg 1$):

$$\hat{I}_{0C} = \frac{\hat{U}_0}{Z_C} = \frac{L}{CR} \cdot I_0 \cdot i\hat{\omega}C \approx i \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot I_0 \approx iQ \cdot I_0. \quad (2.35)$$

Таким образом, ток через конденсатор, по модулю в Q раз больше тока генератора. Это явление носит название *резонанса токов*. Мнимая единица в (2.35) свидетельствует о том, что при резонансе разность фаз тока через конденсатор и тока генератора равна $\pi/2$.

График зависимости силы тока через конденсатор от частоты имеет характерный вид резонансной кривой (см. рис. 2.5). Аналитическое выражение этой зависимости не приводится вследствие его громоздкости. Отметим, что для оценки добротности контура с параллельным соединением элементов можно воспользоваться формулой $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$. Кроме того, значение добротности можно оценить по отношению токов на частоте резонанса. Разность фаз также зависит от частоты тока и равна нулю при частоте резонанса $\hat{\omega}$.

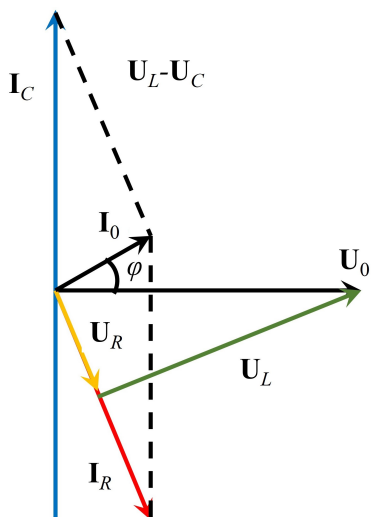


Рис. 2.10. Векторная диаграмма для параллельного контура

Вектор тока I_R , на данном участке цепи, сонаправлен с вектором U_R , а вектор тока генератора I_0 равен сумме токов I_C и I_R . Такое построение позволяет найти возможные фазовые и амплитудные соотношения для параллельного контура.

На рис. 2.10 приведена векторная диаграмма для параллельного колебательного контура. При ее построении логично положить фазу комплексной амплитуды напряжения на контуре U_0 равной нулю (вектор U_0 на рис. 2.10). Тогда вектор тока I_C через конденсатор будет повернут на угол $\varphi_C = \pi/2$ относительно вектора U_0 , поскольку ток через конденсатор опережает по фазе напряжение на нем на $\pi/2$. При последовательно соединенных резистора R и катушки индуктивности L угол между напряжениями U_R и U_L равен $\pi/2$, а их сумма равна U_0 .

Вектор тока I_R , на данном участке

Обычно у катушек индуктивности $|Z_L| \gg Z_R$, поэтому фазовый угол между U_0 и I_R близок к $-\pi/2$, а между I_C и I_R близок к π . Полный ток I_R по модулю много меньше, чем токи I_C и I_R . При резонансе токов векторы U_0 и I_R сонаправлены (угол φ равен нулю).

Эксперимент

Экспериментальная установка

В состав экспериментальной установки входят (рис. 2.11 и 2.12):

- USB-модуль PClab2000LT;
- блок коммутации;
- элементы схемы (резисторы и конденсаторы), размещаемые на коммутационной плате;
- катушка индуктивности;
- соединительные кабели;
- компьютер.

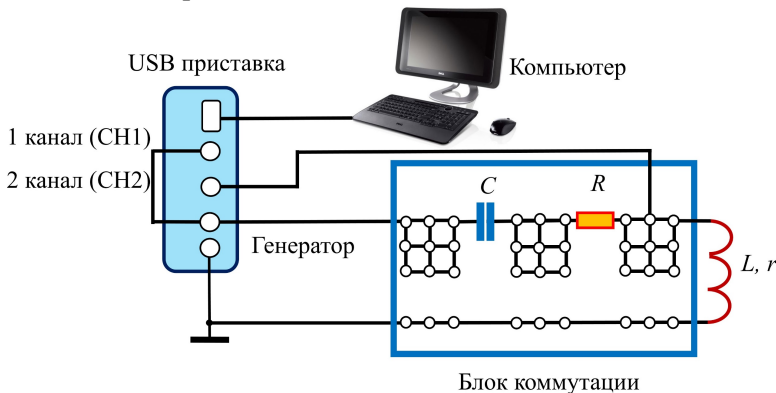


Рис. 2.11. Схема соединения элементов схемы для наблюдения резонанса напряжений в последовательном RLC -контуре (к выходу CH2 подключена катушка индуктивности).

Модуль PClab2000LT является специальной USB-приставкой к компьютеру, позволяющей генерировать электрические сигналы различной формы (в нашем случае гармонические), частоту которых можно изменять в широких пределах от единиц герц до сотен килогерц. Кроме того модуль имеет два входа (**CH1** и **CH2** для измерения напряжения на элементах схемы. Сигнал с генератора (гнездо **GENERATOR** в нижней части) подается на блок

коммутации и на Вход1 (**СН1**) модуля, на Вход2 (**СН2**) модуля подается напряжение с одного из элементов схемы (на рис. 2.11 – с катушки L).

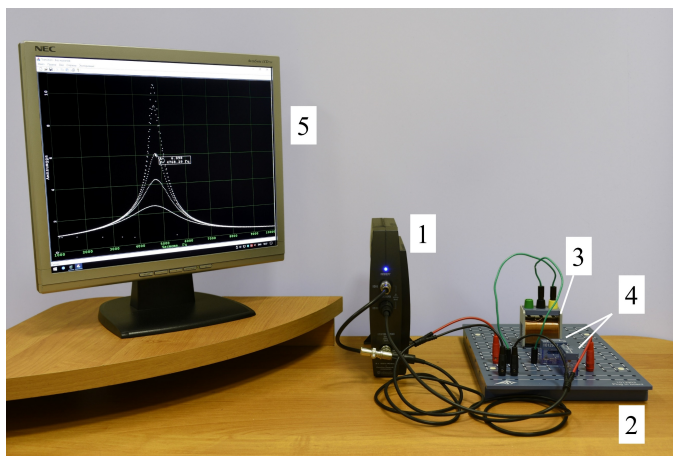


Рис. 2.12. Внешний вид установки: USB модуль PClab2000LT (1); блок коммутации (2); катушка индуктивности (3); R и C элементы контура (4); дисплей ПК (5).

На блоке коммутации собирается колебательный RLC -контур из отдельных элементов: катушки индуктивности, конденсатора и резистора. В набор входят одна катушка и по 3-4 конденсатора и резистора различных номиналов.

Управление работой установки осуществляется программой (значок PClab2000LT на Рабочем столе компьютера). При запуске программы на экране дисплея появляется поле для отображения амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) контура, на котором по вертикали откладывается отношение амплитуд напряжения на **СН2** и **СН1**, а по горизонтали – частота вынуждающего воздействия (в Гц).

В главном меню программы (находится в верхней части экрана) команды управления генераторной и осциллографической частью USB-модуля. При выборе пункта меню «**Эксперимент**» появляется подменю с пунктами:

Начать – запускается осциллограф и генератор с плавно изменяющейся частотой;

Закончить – прекращается работа осциллографа и генератора;

Параметры генератора и осциллографа – открывается диалоговое окно с параметрами приставки, что необходимо для подстройки оптимальных параметров работы.

Параметры отображения данных – открывается диалоговое окно, позволяющее выбрать цвета графиков и фона, что может быть полезно при демонстрации эксперимента с помощью проектора.

Кроме того, в этом подменю есть пункты, предназначенные для управления запоминанием результатов эксперимента:

Запомнить данные – запомнить результаты эксперимента в одну из восьми ячеек,

Отобразить память – отобразить на графике данные, запомненные в одной из восьми ячеек,

Скрыть память – скрыть данные, запомненные в одной из восьми ячеек,

Стереть данные – очистить содержимое одной из 8 ячеек памяти.

При нажатии команды **Начать** сигнал с генератора USB-модуля поступает на собранную схему. Частота генератора плавно меняется в пределах, указанных в диалоговом окне «Параметры генератора и осциллографа». Осциллограф периодически «захватывает» сигналы с входов **СН1** и **СН2**, отображая напряжение на этих входах в дополнительном окошке в правом верхнем углу дисплея. Программа автоматически определяет по осциллограмме амплитуды сигналов и разность фаз между ними (указываются в верхней части окошка). На АЧХ появляется точка, соответствующая заданной частоте. После этого производится следующий «захват» сигналов при другом значении частоты генератора, и процедура обработки повторяется.

В качестве примера на рис. 2.13 приведены амплитудные резонансные кривые для последовательного контура, полученные при измерении напряжения на катушке индуктивности и трех различных значений сопротивления R . При перемещении курсора по экрану появляется измерительная рамка, в которой можно видеть значения амплитуды A и частоты F в точке, на которую указывает курсор.

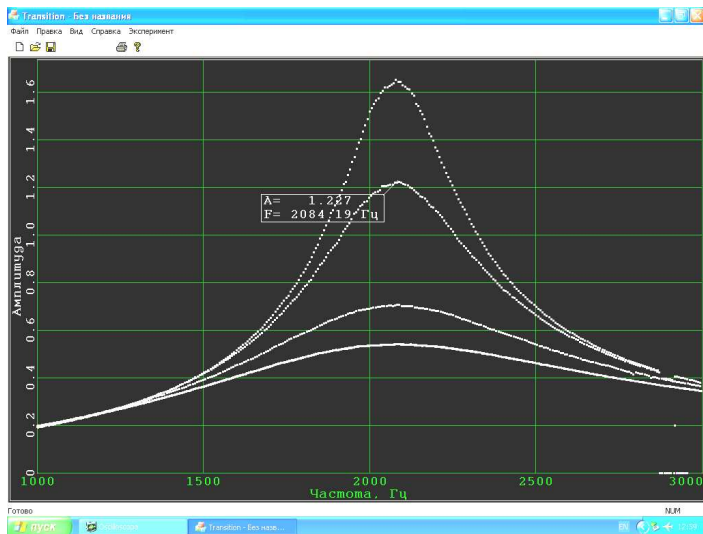


Рис. 2.13. Амплитудные резонансные кривые для последовательного контура, полученные при измерении напряжения на катушке индуктивности при трех значениях сопротивления R .

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Изучение резонанса напряжений в цепи последовательно соединенных L и C (колебательный контур с большой добротностью). Определение неизвестной индуктивности катушки L .

Измерения

1. Соберите электрическую схему согласно рис. 2.14. Последовательно с генератором подключите конденсатор известной емкости C (ее значение запишите в табл. 2.1) и катушку с неизвестными индуктивностью L и собственным сопротивлением обмотки r .

2. Для корректного измерения АЧХ войдите в пункт меню **Эксперимент – Параметры генератора и осциллографа** и задайте:

– **диапазон частот** (начальная и конечная) и **время сканирования по частоте**. Так как резонансная частота контура неизвестна, то первое измерение проводится при параметрах, заданных по умолчанию. В дальнейшем диапазон частот

выбирается таким, чтобы центр резонансной кривой располагался примерно в центре экрана;

– **амплитуда генератора** первоначально задана по умолчанию;

– **чувствительность каналов 1 и 2** (вольт/деление) также первоначально задана по умолчанию.

3. Войдите в пункт меню **Начать**, при этом в правом верхнем углу экрана появится дополнительное окно «осциллографа», в котором отображаются два гармонических сигнала **СН1** и **СН2**.

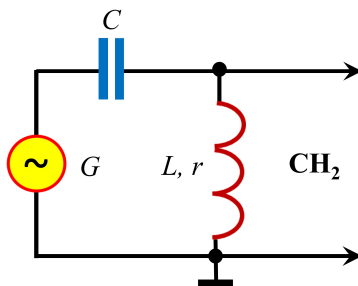


Рис 2.14. Схема соединения элементов колебательного контура для *Упр.1*

Если в процессе измерения (сканирования по частоте) сигнал по какому-либо из каналов «зашкаливает» (синусоида «обрезается»), то следует изменить чувствительность соответствующего канала. Так же следует поступать и в случае очень малой (на уровне шумов) амплитуды сигнала. В противном случае расчет параметров сигналов (частота, амплитуда и начальная фаза), выполняемый программой автоматически, может привести к существенным ошибкам.

При правильно подобранных параметрах эксперимента на экране монитора появится зависимость отношения напряжения на катушке индуктивности $U_{\text{кат}}=U_{\text{СН2}}$ к напряжению генератора $U_{\text{ген}}=U_{\text{СН1}}$ от частоты генератора.

4. Когда будет получено достаточное количество точек, завершите эксперимент. Для этого выберите пункт «**Эксперимент/Запомнить данные/Память 1**», после чего в первой ячейке памяти окажутся данные последнего эксперимента. Эти данные автоматически будут отображаться на графике.

5. Выполните пп. 1-4 для трех номиналов C (например, 0,22, 0,47 и 1 мкФ).

6. . Поменяйте местами катушку и один из конденсаторов и проведите измерения резонансной кривой, подавая на **СН2** напряжение с конденсатора.

Таблица 2.1

Результаты измерений и обработки упражнения 1

C (мкФ)					
$f_{рез}$ (Гц)					
A					
Δf (Гц)					
L (Гн)					
Q					
r (Ом)					

Обработка результатов

1. Поочередно вызывая из памяти (команда **Отобразить память**) результаты измерения резонансных кривых для различных значений C (включая измерения, проведенные в п.б) определите резонансную частоту $f_{рез}$, амплитуду A и ширину резонансной кривой Δf на уровне $0,7A$. Результаты запишите в табл. 2.1.

2. По известному значению емкости C_i и измеренной резонансной частоте ($\omega_{рез}$) рассчитайте индуктивность катушки L_i :

$$L_i = \frac{1}{4\pi^2 f_{рез}^2 \cdot C_i}.$$

3. По ширине резонансной кривой рассчитайте добротность Q колебательного контура:

$$Q_i = \frac{f_{рез}}{\Delta f}.$$

4. По известной емкости C и найденным Q и L рассчитайте сопротивление обмотки катушки r :

$$r_i = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L_i}{C_i}}.$$

5. Для всех величин следует оценить погрешности.

6. Результаты пп. 2-4 записать в табл. 2.1.

Упражнение 2. Изучение резонанса напряжений в цепи последовательно соединенных L , R и C .

2а. Исследование зависимости напряжения на конденсаторе от частоты в последовательной контуре при различных значениях сопротивления.

Измерение

1. Соберите электрическую схему в соответствии с рис. 2.15. Емкость конденсатора $C = 0,47$ мкФ. Сигнал с конденсатора подается на **СН2**.

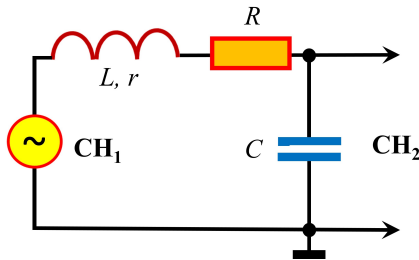


Рис 2.15. Схема соединения для *упр.2, а), б) и в)*.

2. Зарегистрируйте и запомните в памяти компьютера резонансные кривые для четырех резисторов $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 5,1$ Ом, $R_3 = 10$ Ом и $R_4 = 22$ Ом.

Обработка результатов

1. Поочередно вызывая из памяти (команда **Отобразить память**) резонансные кривые для различных значение R определите резонансную частоту $f_{рез}$, амплитуду A и ширину резонансной кривой Δf на уровне $0,7A$. Результаты запишите в табл. 2.2.

2. Для каждого из контуров рассчитайте добротность двумя способами: по ширине резонансной кривой (Q_1) и по отношению амплитуды напряжения в резонансе к амплитуде напряжения генератора (Q_2). Результаты запишите в табл. 2.2. Сравните полученные результаты.

3. Согласно формуле $Q = \frac{1}{R+r} \sqrt{\frac{L}{C}}$

$$\frac{1}{Q} = (R+r)\sqrt{\frac{C}{L}} = r\sqrt{\frac{C}{L}} + \sqrt{\frac{C}{L}}R,$$

т.е. величина $1/Q$ линейно зависит от сопротивления R . Постройте график $\frac{1}{Q}(R)$ и аппроксимируйте его линейной зависимостью

$\frac{1}{Q} = D + BR$ с помощью метода наименьших квадратов. Определите коэффициенты D и B и их погрешности. Рассчитайте индуктивность $L = \frac{C}{B^2}$ и сопротивление катушки $r = D\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Таблица 2.2.

Результаты измерений и обработки упражнения 2а

R (Ом)				
$f_{рез}$ (Гц)				
A				
Δf (Гц)				
Q_1				
Q_2				
L (Гн)				
r (Ом)				

Результаты запишите в табл. 2.2. Сравните их с результатами, полученными в *упр. 1*.

2б. Исследование зависимости напряжения на конденсаторе в последовательном контуре от емкости конденсатора.

Измерение

1. Соберите электрическую схему в соответствии с рис. 2.15. Сопротивление $R = 5,1$ Ом. Сигнал с конденсатора подается на **СН2**.

2. Зарегистрируйте и запомните в памяти компьютера резонансные кривые для пяти конденсаторов $C_1 = 0,22$ мкФ, $C_2 = 0,47$ мкФ, $C_3 = 1,0$ мкФ, $C_4 = 2,2$, $C_5 = 4,7$ мкФ.

Обработка результатов

1. Поочередно вызывая из памяти (команда **Отобразить память**) резонансные кривые для различных значений C , определите резонансную частоту $f_{рез}$, амплитуду A и ширину резонансной кривой Δf на уровне $0,7A$. Результаты запишите в табл. 2.3.

2. Для каждого значения конденсатора в контуре рассчитайте добротность двумя способами: по ширине резонансной кривой (Q_1) и по отношению амплитуды напряжения в резонансе к амплитуде напряжения в генератора (Q_2). Результаты запишите в табл. 2.3. Сравните значения Q_1 и Q_2 .

Таблица 2.3.

Результаты измерений и обработки напряжения 2б

C (мкФ)					
$f_{рез}$ (Гц)					
A					
Δf (Гц)					
Q_1					
Q_2					

3. Согласно формуле

$$Q = \frac{1}{R+r} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

добротность Q пропорциональна $1/\sqrt{C}$. Построив график зависимости $Q\left(\frac{1}{\sqrt{C}}\right)$, убедитесь в этом.

2в. Исследование зависимости напряжения на конденсаторе, катушке и резисторе в последовательном контуре при фиксированных значениях номиналов этих элементов.

Измерение

Для фиксированной пары резистор и конденсатор (номиналы выбрать самостоятельно) зарегистрируйте и запомните в памяти компьютера резонансные кривые напряжения на конденсаторе (рис. 2.15), катушке (рис. 2.16) и резисторе (рис. 2.17).

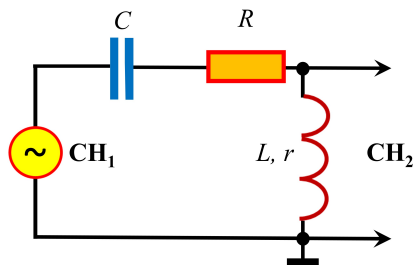


Рис 2.16 Схема соединения для получения резонансной кривой на катушке (упр.2, в).

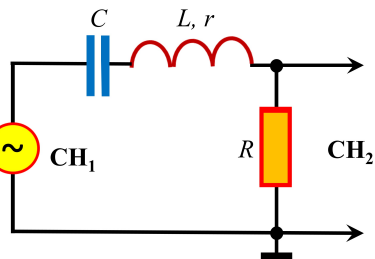


Рис 2.17. Схема соединения для получения резонансной кривой на резисторе (упр.2 в).

Обработка результатов

1. Поочередно вызывая из памяти (команда **Отобразить память**) резонансные кривые, определите резонансную частоту $f_{рез}$, амплитуду A и ширину резонансной кривой Δf на уровне $0,7A$. Результаты запишите в табл. 2.4.

Таблица 2.4.

Результаты измерений и обработки упражнения 2в

Элемент	C	L	R
$f_{рез}$ (Гц)			
A			
Δf (Гц)			
Q_1			
Q_2			

2. Вычислите добротность контура двумя способами: по ширине резонансной кривой (Q_1) и по отношению амплитуды напряжения в резонансе к амплитуде напряжения генератора (Q_2). Результаты запишите в табл. 2.4. Сравните полученные результаты.

3. Сравните значения резонансной частоты, полученные при измерении на разных элементах контура. Проверьте их

соответствие теоретическим формулам (при оценивании коэффициента затухания δ учесть сопротивление r катушки).

$$\omega_C = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0,$$

$$\omega_L = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} > \omega_0,$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

4. Проверьте выполнение формул:

$$\omega_L \cdot \omega_C = \omega_0^2, \quad Q = \frac{\sqrt{\omega_L}}{\sqrt{2(\omega_L - \omega_C)}}.$$

Упражнение 3. Изучение резонанса токов в цепи с L , R и C , включенных параллельно генератору.

Измерение

1. Соберите схему параллельного контура в соответствии с рис. 2.18 (номиналы выбрать самостоятельно). Между генератором и колебательным контуром включите резистор с большим сопротивлением $R_\delta = 1\text{кОм}$. Это позволит считать, что сила тока от генератора остается практически неизменной (не зависит от частоты). Обратите внимание, что в данном эксперименте измеряются не токи (как в теории), а по-прежнему напряжения.

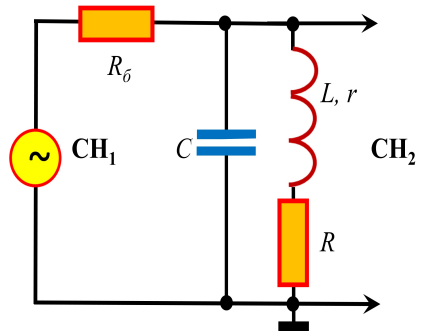


Рис 2.18. Схема соединения для *упр.3*

2. Проведите измерения резонансной кривой. Так как амплитуда сигнала на CH_2 очень мала, измените чувствительность этого канала.

3. Зарегистрируйте и запомните в памяти компьютера резонансные кривые для 2 – 3 различных значений сопротивления R .

Обработка результатов

1. Поочередно вызывая из памяти (команда **Отобразить память**) резонансные кривые для различных значений R , определите резонансную частоту $f_{рез}$, амплитуду A и ширину резонансной кривой Δf на уровне $0,7A$. Результаты запишите в табл. 2.5.

2. Для каждого из контуров рассчитайте добротность двумя способами: по ширине резонансной кривой (Q_1) и по отношению амплитуды напряжения в резонансе к амплитуде напряжения генератора (Q_2). Результаты запишите в табл. 2.5. Сравните полученные результаты. Обратите внимание, что одним из предложенных ранее способов сделать это не удастся (почему?).

Таблица 2.5.

Результаты измерений и обработки упражнения 2а

R (Ом)				
$f_{рез}$ (Гц)				
A				
Δf (Гц)				
Q_1				
Q_2				

3. Вызовите из памяти компьютера на экран все кривые. Дайте объяснение полученным результатам.

Основные итоги работы

В результате проведения лабораторной работы должны быть измерены зависимости амплитуды напряжения на различных элементах в последовательном и параллельном колебательных RLC- контурах от частоты электродвижущей силы внешнего источника.

Контрольные вопросы

1. Какое дифференциальное уравнение, описывает процессы, происходящие в последовательном колебательном контуре.

2. В чем различие между собственными и вынужденными колебаниями?
3. Какой вид имеет амплитудно-частотная характеристика последовательного контура? Как она зависит от активного сопротивления?
4. Чему равен импеданс последовательного контура?
5. Нарисуйте и поясните векторную диаграмму в случае последовательного контура.
6. Чему равен сдвиг по фазе между силой тока в контуре и напряжением на конденсаторе? Как он зависит от частоты?
7. Что называют резонансом напряжений? Резонансом токов? В каких контурах наблюдается каждый из них?
8. Нарисуйте и поясните векторную диаграмму для параллельного контура.
9. Что называют добротностью контура? Как ее оценить по амплитудно-частотной характеристике контура?

Литература

1. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. Учебное пособие. 3-е изд., стер. – СПб: Лань, 2010, §50.
2. Алешкевич В.А. Электромагнетизм. – М. Физматлит, 2014, Лекция 18.

Лабораторная работа 2.2

КОЛЕБАНИЯ В СВЯЗАННЫХ КОНТУРАХ

Цель работы

Изучение установившихся вынужденных колебаний в линейных контурах с индуктивной и емкостной связью.

Идея эксперимента

К генератору переменного тока подключается колебательный контур, другой такой же колебательный контур подключен к осциллографу, на экране которого наблюдают амплитуду электрических колебаний. Эти контуры связаны между собой либо индуктивным (рис. 2.19), либо емкостным образом (рис. 2.20). Коэффициент связи в первом случае меняется изменением расстояния между катушками контуров, во втором – изменением емкости конденсаторов контуров. Строят амплитудно-частотные (АЧХ) характеристики колебательных систем.

Теория

Индуктивно связанные контуры. Физические системы, которые могут обмениваться энергией, называют связанными. Электрические колебательные системы (LC -контуров) могут быть связаны емкостным, индуктивным или гальваническим (через резистор) образом. Возможность обмена энергией не означает, что он обязательно имеет место. При задании специальных начальных условий части системы, способные обмениваться энергией, не участвуют в обмене; в результате в них происходят процессы, характерные для их изолированного состояния. Например, в линейных колебательных системах будут наблюдаться гармонические колебания. Такие колебания без обмена энергией называют нормальными.

Рассмотрим два одинаковых индуктивно связанных LC -контура (рис. 2.19). Активное сопротивление контуров и соединительных проводов R_1 и R_2 обычно мало, поэтому положим в расчетах $R_1 = R_2 = 0$.

Будем считать, что в контурах текут переменные токи I_1 и I_2 , мгновенные направления которых показаны стрелками на рис. 2.19. Эти токи протекают через катушки L_1 и L_2 и создают магнитные поля с индукцией B_1 и B_2 , а значит, магнитные потоки. В случае, когда оси катушек L_1 и L_2 совпадают, а токи I_1 и I_2 в витках катушек

направлены так, как показано на рис. 2.19, магнитное поле между катушками равно суммарному полю $B_1 + B_2$ катушек. Тогда магнитный поток равен $\Phi_1 = L_1 I_1 + L_{12} I_2$ через катушку L_1 и $\Phi_2 = L_2 I_2 + L_{12} I_1$ через катушку L_2 . Изменение токов I_1 и I_2 приведет к изменению магнитных потоков Φ_1 и Φ_2 . т.е. к появлению ЭДС индукции $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$. Следовательно, ЭДС индукции в первом контуре будет равен

$$E_1 = -\left(L_1 \frac{dI_1}{dt} + L_{12} \frac{dI_2}{dt}\right),$$

а во втором –

$$E_2 = -\left(L_2 \frac{dI_2}{dt} + L_{12} \frac{dI_1}{dt}\right).$$

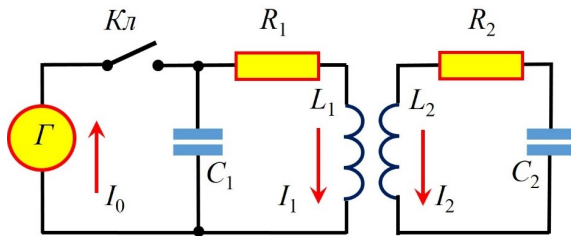


Рис. 2.19. Схема соединения элементов для исследования вынужденных колебаний в индуктивно связанных контурах.

Записав уравнения Кирхгофа для каждого из контуров (рис. 2.19), получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_1} \int I_1 dt &= -\left(L_1 \frac{dI_1}{dt} + L_{12} \frac{dI_2}{dt}\right) \\ \frac{1}{C_2} \int I_2 dt &= -\left(L_2 \frac{dI_2}{dt} + L_{12} \frac{dI_1}{dt}\right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

В случае одинаковых контуров $L_1 = L_2 = L$ и $C_1 = C_2 = C$. Сложим первое и второе уравнения системы (2.36), а затем вычтем второе уравнение из первого. Учитывая, что заряды q_1 и q_2 на конденсаторах C_1 и C_2 равны $q_{1,2} = \int I_{1,2} dt$, получим после преобразования следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}(L + L_{12}) \frac{d^2}{dt^2} [q_1 + q_2] + \frac{1}{C} [q_1 + q_2] &= 0, \\ (L - L_{12}) \frac{d^2}{dt^2} [q_1 - q_2] + \frac{1}{C} [q_1 - q_2] &= 0.\end{aligned}\tag{2.37}$$

Если перейти к новым переменным:

$$\begin{aligned}q^{(+)} &= q_1 + q_2, \\ q^{(-)} &= q_1 - q_2,\end{aligned}$$

то получим систему двух независимых уравнений гармонических колебаний:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 q^{(+)}}{dt^2} + \omega_{H1}^2 q^{(+)} &= 0, \\ \frac{d^2 q^{(-)}}{dt^2} + \omega_{H2}^2 q^{(-)} &= 0.\end{aligned}\tag{2.38}$$

Здесь введены обозначения:

$$\omega_{H1} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + L_{12}/L}}, \quad \omega_{H2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - L_{12}/L}},\tag{2.39}$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Уравнения (2.38) описывают т.н. нормальные колебания (или моды) в индуктивно связанных контурах, показанных на рис. 2.19. Поэтому $q^{(+)}$ и $q^{(-)}$ называются нормальными координатами, а ω_{H1} и ω_{H2} — нормальными частотами. Заряды и токи в связанных контурах могут быть представлены как суперпозиция $q^{(+)}$ и $q^{(-)}$, которые, как следует из уравнений (2.38), в линейных системах изменяются по гармоническому закону. Таким образом, произвольное колебание в таких связанных контурах можно рассматривать как суперпозицию двух нормальных колебаний с нормальными частотами (2.39).

Для возбуждения нормальных колебаний в контурах с индуктивной связью (по аналогии с механическими связанными системами) необходимо выполнение определенных начальных условий; в противном случае мы получим не нормальные колебания, а некоторую их суперпозицию. В случае, когда ω_{H1} и ω_{H2} близки по величине, наблюдают т.н. биения, т.е. колебания с частотой ω_0 и медленно меняющейся (по гармоническому закону) амплитудой.

Итак, система двух связанных контуров имеет две нормальные частоты, следовательно, она должна иметь две резонансные частоты при воздействии на нее внешней ЭДС.

Раздельное наблюдение двух резонансных пиков возможно лишь при определенных условиях.

Степень влияния контуров друг на друга количественно оценивают коэффициентом связи K , который определяется как среднее геометрическое коэффициентов связи первого контура со вторым K_1 и второго контура с первым K_2 :

$$K = \sqrt{K_1 K_2}. \quad (2.40)$$

Коэффициенты связи определяются отношением коэффициентов взаимной индуктивности катушек к их собственным индуктивностям: $K_1 = L_{21}/L_1$ и $K_2 = L_{12}/L_2$. Для одинаковых катушек $L_{12} = L_{21}$ и $L_1 = L_2 = L$, для коэффициента связи K получим:

$$K = L_{12}/L. \quad (2.41)$$

Формулы (2.40) и (2.41) можно обобщить на случай любого типа связи между контурами:

$$K = \frac{X_{св}}{\sqrt{X_1 X_2}}, \quad (2.42)$$

где $X_{св}$, X_1 , X_2 , – реактивное сопротивление связи и реактивные сопротивления элементов контуров того же типа, что и связь (индуктивное или емкостное) соответственно.

Условно степень связи контуров оценивается по коэффициенту (2.42) следующим образом:

очень слабая связь	$K < 0.001$,
слабая связь	$K = 0.01 - 0.05$ (1 – 5%),
сильная связь	$K = 0.05 - 0.90$ (5 – 90%),
очень сильная (жесткая) связь	$K > 0.90$.

Учитывая (2.42), формулы для резонансных (нормальных) частот двух индуктивно связанных контуров (2.39) можно переписать следующим образом:

$$\omega_{p1} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+K}}, \quad \omega_{p2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-K}}. \quad (2.43)$$

Исключив K из этих формул, получим выражение для расчета собственной частоты ω_0 каждого из контуров:

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{2}\omega_{p1}\omega_{p2}}{\sqrt{\omega_{p1}^2 + \omega_{p2}^2}}. \quad (2.44)$$

Как видно из формулы (2.44), с увеличением коэффициента связи различие между резонансными частотами ω_{p1} и ω_{p2} увеличивается. Поскольку в реальных контурах имеются омические потери (активное сопротивление катушки и соединительных проводов), то каждый резонансный пик обладает определенной шириной $\Delta\omega$. Ширина резонансной кривой связана с добротностью Q известным соотношением:

$$\Delta\omega_{1,2} = \omega_{p1,2}/Q_{1,2}. \quad (2.45)$$

На резонансной кривой два пика будут различимы, если разность между резонансными частотами будет больше, чем ширина резонансных пиков

$$\omega_{p2} - \omega_{p1} > \Delta\omega_1, \Delta\omega_2. \quad (2.46)$$

Более детальный анализ показывает, что (2.46) эквивалентно условию:

$$Q_2K > 1, \quad (2.47)$$

где Q_2 – добротность второго контура.

Если $Q_1 = Q_2 = Q$, то при $QK < 1$ два связанных контура ведут себя как один, у которого имеется только одна резонансная частота (т.е. два пика неразличимы).

Контурсы с емкостной связью. Для контуров на рис. 2.20 (с отключенным генератором) запишем уравнения согласно правилам Кирхгофа, подобно тому, как были записаны уравнения (2.36) для индуктивно связанных контуров:

$$\begin{aligned} L_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{C_1} \int I_1 dt + \frac{1}{C_{св}} \int (I_1 - I_2) dt &= 0, \\ L_2 \frac{dI_2}{dt} + \frac{1}{C_2} \int I_2 dt - \frac{1}{C_{св}} \int (I_1 - I_2) dt &= 0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Вновь рассмотрим случай одинаковых контуров, когда $L_1 = L_2 = L$, $C_1 = C_2 = C$, а омическим сопротивлением в цепи пренебрегаем. Сложим первое и второе уравнения системы (2.48), а затем вычтем второе уравнение из первого. Учитывая, что заряды q_1 и q_2 на конденсаторах C_1 и C_2 равны $q_{1,2} = \int I_{1,2} dt$, после преобразований получим следующую систему уравнений:

$$L \frac{d^2}{dt^2} [q_1 + q_2] + \frac{1}{C_1} [q_1 + q_2] = 0, \quad (2.49)$$

$$L \frac{d^2}{dt^2} [q_1 - q_2] + \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_{св}} \right) [q_1 - q_2] = 0.$$

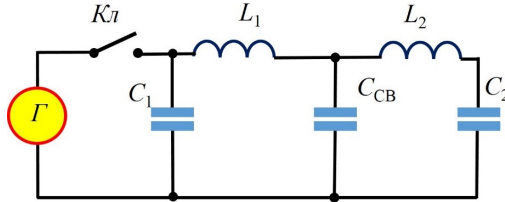


Рис. 2.20. Схема соединения элементов для исследования вынужденных колебаний в контурах с емкостной связью.

В новых переменных:

$$q^{(+)} = q_1 + q_2,$$

$$q^{(-)} = q_1 - q_2$$

получаем систему двух независимых уравнений гармонических колебаний:

$$\frac{d^2 q^{(+)}}{dt^2} + \omega_{H1}^2 q^{(+)} = 0, \quad (2.50)$$

$$\frac{d^2 q^{(-)}}{dt^2} + \omega_{H2}^2 q^{(-)} = 0.$$

Здесь введены обозначения:

$$\omega_{H1} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (2.51)$$

$$\omega_{H2} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2}{LC_{св}}} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{2C}{C_{св}}}.$$

Уравнения (2.50) описывают нормальные колебания в контурах с емкостной связью (рис. 2.20), а формулы (2.51) позволяют рассчитывать нормальные частоты для случая емкостной связи между контурами.

Поскольку система двух связанных контуров имеет две нормальные частоты, то при подключении внешнего генератора гармонического сигнала с изменяющейся частотой (рис. 2.20)

должны наблюдаться два резонанса, когда частота внешнего генератора совпадает с одной из нормальных частот системы.

Рассмотрим вопрос о раздельном наблюдении двух резонансных пиков в случае контуров с емкостной связью. Степень влияния контуров друг на друга оценим по коэффициенту связи K (2.42):

$$K = \frac{X_{\text{св}}}{\sqrt{X_1 X_2}}, \quad (2.52)$$

где $X_{\text{св}} = \frac{1}{\omega C_{\text{св}}}$ – емкостное сопротивление связи, $X_1 = \frac{1}{\omega C_A}$ – реактивное сопротивление в первом контуре того же типа, что сопротивление связи, $X_2 = \frac{1}{\omega C_B}$ – реактивное сопротивление во втором контуре того же типа, что сопротивление связи, где $C_A = \frac{C_1 C_{\text{св}}}{C_1 + C_{\text{св}}}$ и $C_B = \frac{C_2 C_{\text{св}}}{C_2 + C_{\text{св}}}$.

Для двух одинаковых контуров с емкостной связью по формуле (2.52) получим:

$$K = \frac{\sqrt{C_A C_{\text{св}}}}{C_{\text{св}}} = \frac{C}{C + C_{\text{св}}}. \quad (2.53)$$

Оценки степени связи по коэффициенту (2.53) такие же, как и для системы с индуктивной связью.

С учетом формул (2.51) резонансные частоты (совпадающие с нормальными частотами) могут быть рассчитаны по формулам:

$$\begin{aligned} \omega_{p1} = \omega_{H1} &= \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0, \\ \omega_{p2} = \omega_{H2} &= \omega_{H1} \sqrt{1 + \frac{2C}{C_{\text{св}}}} = \omega_0 \sqrt{\frac{1+K}{1-K}}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Согласно (2.54), увеличение коэффициента связи приводит к увеличению разности между резонансными (нормальными) частотами ω_{p1} и ω_{p2} (ω_{H1} и ω_{H2}).

Как и в случае с индуктивной связью, два пика будут различимы, если разность между резонансными частотами будет больше, чем ширина резонансных пиков:

$$\omega_{H2} - \omega_{H1} > \Delta\omega_1, \Delta\omega_2,$$

что соответствует условию:

$$QK > 1, \quad (2.55)$$

где Q – добротность каждого из идентичных контуров.

При $QK < 1$ два связанных контура ведут себя как один, у которого имеется только одна резонансная частота.

Эксперимент

Экспериментальная установка

Блок-схема основных элементов установки представлена на рис. 2.21. Приставка PClab2000LT (USB модуль) соединена с компьютером и с LC - контурами через блок коммутации. Блок позволяет изменять тип связи контуров (индуктивный или емкостной) и подключать поочередно разные $C_{св}$ из набора пяти конденсаторов при емкостной связи.

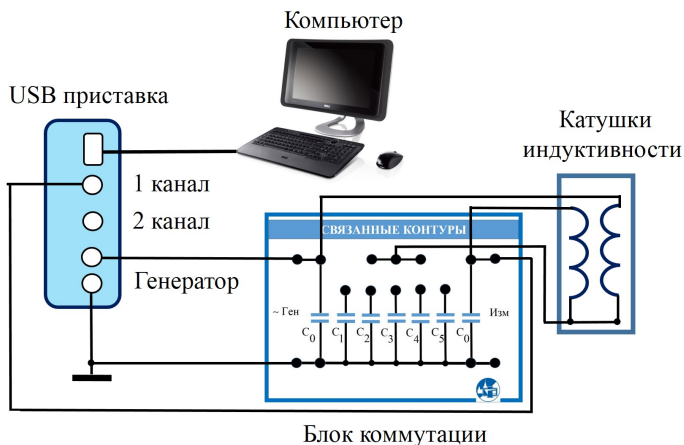


Рис. 2.21. Схема соединения элементов установки для наблюдения резонансов в связанных контурах.

Общий вид установки для изучения вынужденных колебаний в связанных контурах показан на рис. 2.22.

Модуль PClab2000LT представляет собой специальную USB-приставку к компьютеру и позволяет генерировать электрические сигналы различной формы (гармонические, пилообразные и прямоугольные), период (или основную частоту $f = 1/T$) которых можно изменять в широких пределах. Кроме того модуль имеет два входа (**СН1** и **СН2** для измерения напряжения на элементах схемы.

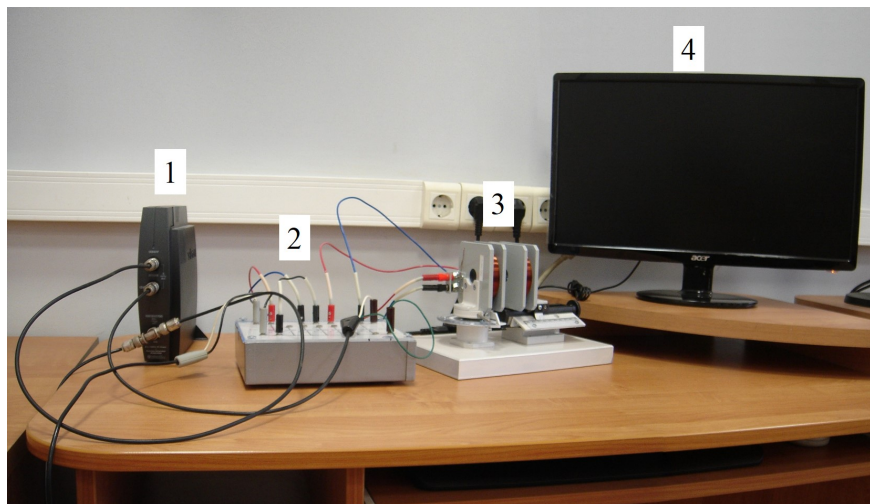


Рис. 2.22. Внешний вид установки для исследования резонансов в связанных контурах: USB приставка PCLab2000LT (1), блок коммутации (2), катушки индуктивности с механизмом изменения расстояния между ними (3), дисплей компьютера (4).

Блок катушек индуктивности (рис. 2.23) состоит из двух катушек (1, 2), которые подключаются к электрической цепи с помощью гнезд 3. Катушки установлены на станине 4. Расстояние между катушками можно изменять с помощью механизма 5 вращением ручки 6; величина смещения регистрируется с помощью шкалы 7. Одна из катушек может поворачиваться относительно вертикальной оси с помощью рычага 8. Угол поворота измеряется по угловой шкале 9.

В этой работе используются гармонические колебания, частоту которых может плавно изменять с заданной скоростью в определенных пределах для вынуждающего воздействия на исследуемую колебательную систему. На рис. 2.24 представлен пример амплитудной резонансной кривой для двух связанных контуров. Рядом с первым пиком в рамке указаны значения амплитуды A и частоты F в точке, на которую наведен курсор.

Перемещая с помощью мыши курсор с прямоугольной рамкой (рис. 2.24) в нужную точку кривой, можно узнать резонансные частоты, амплитуды резонансных пиков и их ширину (например, на уровне 0,7).

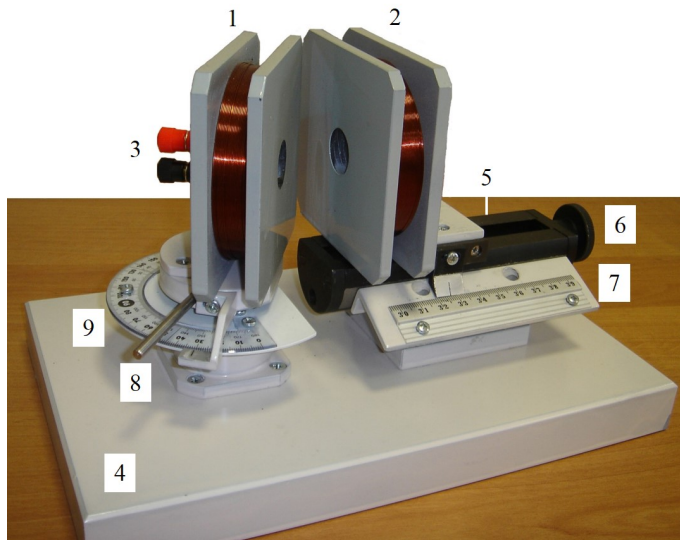
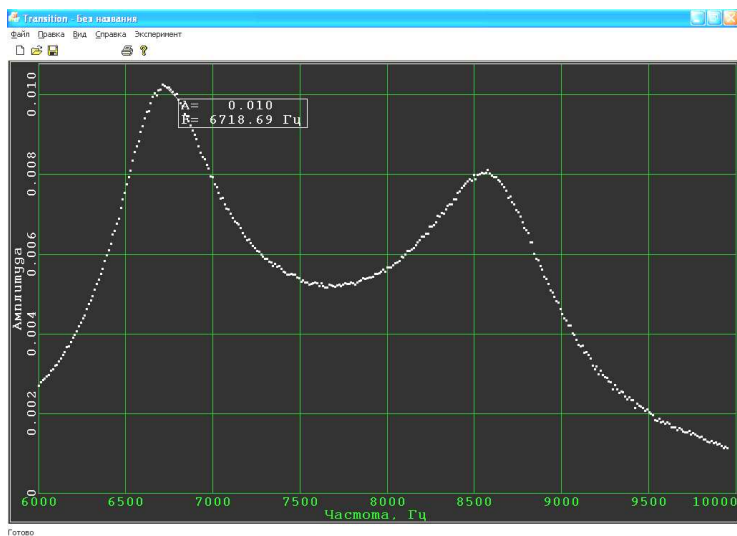


Рис. 2.23. Блок катушек индуктивности.

Рис. 2.24. Амплитудная резонансная кривая (АЧХ) для двух одинаковых индуктивно связанных контуров в *упр 2*.

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Изучение резонанса в уединенном (несвязанном) контуре

Измерение

В данном упражнении используется только один контур

1. Собрать схему в соответствии с рис. 2.25.

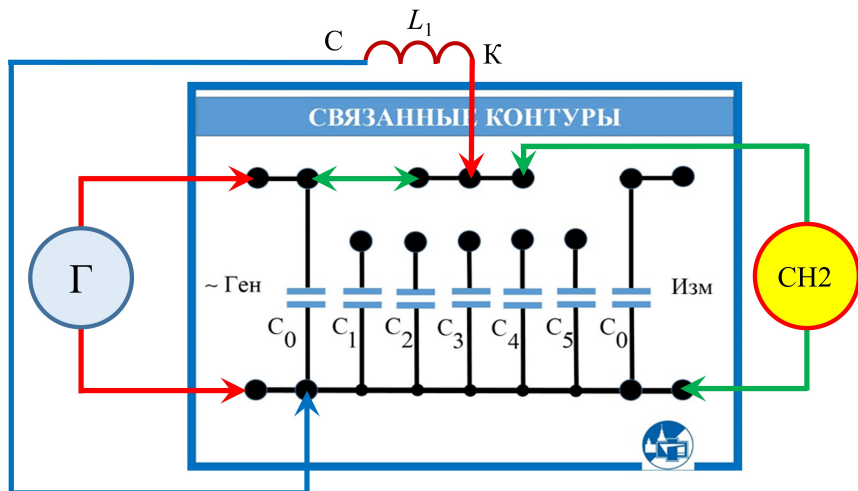


Рис. 2.25. Схема соединений в блоке коммутации для наблюдения АЧХ уединенного контура.

2. Включить компьютер. После его загрузки на экране монитора появится *Рабочий стол*. С помощью мыши поместить курсор на значок *Transition* и двойным нажатием на левую клавишу мыши запустить рабочую программу (если не удастся запустить таким образом, следует нажать правую клавишу и в появившемся меню выбрать команду *Открыть*). На экране дисплея появится координатное поле осциллографа с отсчетом амплитуды в произвольных единицах (слева по вертикали) и частоты генератора (в герцах) по горизонтали.

3. В верхней командной строке курсором выбирается команда *Эксперимент*. После нажатия на нее открывается меню, в котором выбираем команду *Начать*. Нажатием на нее запускаем генератор плавно меняющейся частоты (диапазон сканирования и

его скорость предварительно установлены, но могут быть изменены в случае необходимости третьей строчкой меню).

4. На экране отражается процесс построения АЧХ (амплитудной резонансной кривой), который можно прервать нажатием на команду *Завершить* после достижения наибольшей частоты сканирования (или раньше, если основная часть кривой с максимумом уже появилась и далее идет монотонное убывание амплитуды). Результатом в этом упражнении будет осциллограмма с амплитудной резонансной кривой, как на рис. 2.24, но с одним пиком.

5. Перемещая курсор с прямоугольной рамкой на максимум амплитудной кривой, определяем соответствующие значения резонансной частоты и амплитуды. Далее в тексте вместо A и F (указанных в рамке) будем использовать обозначения V и f , общепринятые для напряжения и линейной частоты $f = \omega/2\pi$ (ω – круговая частота).

В максимуме кривой обозначим через f_0 резонансную частоту, а через V_{\max} – амплитуду. Перемещая рамку вдоль резонансной кривой в точки с $0,7V_{\max}$, определяем ширину $\Delta f_{0,7}$ резонансного пика на заданном уровне. Добротность контуров находим по формуле $Q = f_{\max}/\Delta f_{0,7}$. Полученные данные вносим в табл. 2.6.

Таблица 2.6

Характеристики резонансной кривой

Номер измерения	f_0	V_{\max}	$0,7 V_{\max}$	$f_{-0,7}$	$f_{+0,7}$	Δf
1						
2						
3						

Обработка результатов

1. Проведите статистическую обработку результатов по данным для трех кривых. Вычислите средние значения всех величин прямых измерений, а также их среднеквадратичные погрешности. Рассчитайте добротность контура Q .

2. Используя известные f_0 и $C_0 = 0,47$ мкФ определите индуктивность L (по формуле Томпсона $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}}$).

3. Используйте Q , L и C_0 для оценки омического сопротивления R контура по формуле $R = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

4. В отчете следует привести полученные значения f_0 , Q , L и R для уединенного LC контура.

Упражнение 2. Изучение АЧХ индуктивно связанных контуров

1. Установите минимальное расстояние $d_{\min} = 0$ между катушками индуктивности.

2. Соберите схему согласно рис. 2.26.

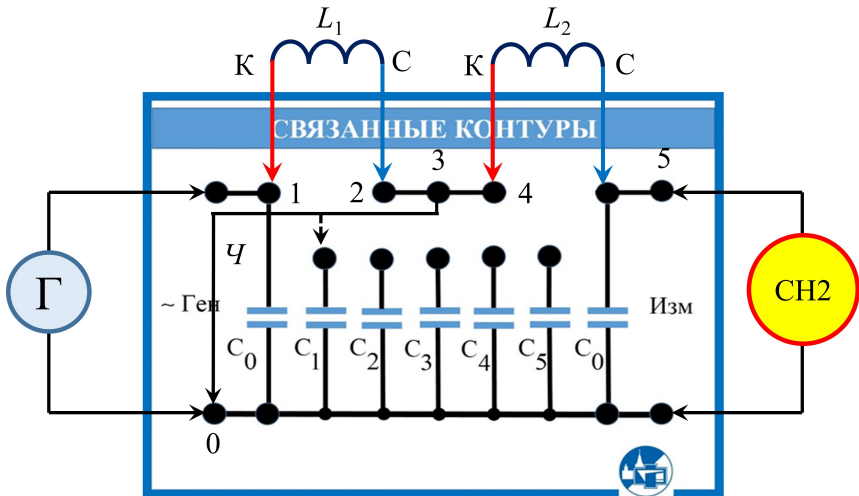


Рис. 2.26. Схема соединений в коммутационном блоке для наблюдения АЧХ индуктивно связанных контуров.

3. Так же, как для уединенного контура, снимите резонансные кривые связанных контуров (при параллельном взаимном положении катушек), изменяя расстояние между ними в диапазоне от $d_{\min} = 0$ до $d_{\max} = 60$ мм (с шагом 5 мм для двугорбых кривых и 10 мм для одnogорбых кривых, образующихся при слиянии максимумов).

Для каждой двугорбой кривой определите частоты максимумов, являющиеся нормальными (собственными) частотами f_{01} и f_{02} системы связанных контуров. Их значения запишите в табл.

2.7. Повторите измерения три раза; найдите средние значения и погрешности измерений для f_{01} и f_{02} .

Таблица 2.7

Частоты f_{01} и f_{02} для различных значений d между катушками

d	0	5	10	15	20	25	30	35	40
f_{01}									
f_{02}									

- Для двугорбых кривых рассчитайте значения f_0 по формуле $f_0 = \frac{\sqrt{2}f_{01}f_{02}}{\sqrt{f_{01}^2 + f_{02}^2}}$ и сравните с результатами *унр. 1*.
- На одном рисунке постройте графики зависимостей $f_{01}(d)$, $f_{02}(d)$ и $f_0(d)$.
- По значениям f_{01} , f_{02} и индуктивности L (*унр. 1*) рассчитайте коэффициент взаимной индукции L_{12} по формулам (2.39) и постройте график зависимости L_{12} от d .
- По формуле (2.41) рассчитайте коэффициент связи и постройте график зависимости K от d .
- Оцените изменение силы связи при увеличении расстояния d между катушками. Проверьте условие (2.45) для раздельного наблюдения пиков на АЧХ.
- В отчет включите полученные значения f_0 , графики из пунктов 5 – 8 и оценки из п. 8.

Упражнение 3. Изучение АЧХ контуров с емкостной связью

Измерение

- Соберите схему согласно рис. 2.27.
- Отодвиньте подвижную катушку на расстояние $d = 60$ мм, а другую катушку поверните на угол $\varphi = 90^\circ$, т.е. установите катушки взаимно перпендикулярно, что обеспечит максимальное ослабление индуктивной связи между контурами. Установите в третьей строке меню диапазон сканирования 6–20 кГц.
- Последовательно проведите запуск сканирования частоты для каждого из пяти конденсаторов связи, переключая последовательно зеленый провод (см. рис. 2.27) на соответствующие контакты $C_1 - C_5$, и измерьте для каждой двугорбой

кривой резонансные частоты f_{01} и f_{02} . Для получения всех кривых на одном рисунке следует производить переключение на очередной конденсатор в момент достижения наибольшей частоты выбранного диапазона сканирования (20 кГц).

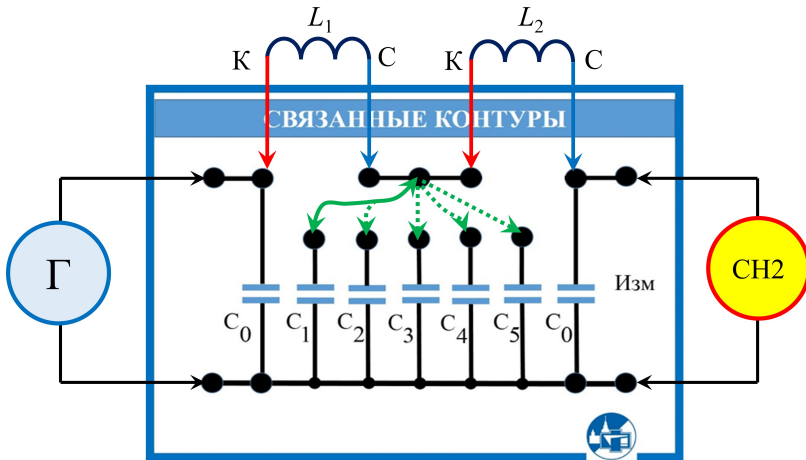


Рис. 2.27. Схема соединений в коммутационном блоке для наблюдения АЧХ контуров с емкостной связью.

Значения f_{01} и f_{02} для разных конденсаторов связи $C_1 \div C_5$, запишите в таблицу 2.8. Повторите процедуру три раза и проведите статистическую обработку результатов.

Таблица 2.8

Частоты f_{01} и f_{02} для различных значений d между катушками

$C_{св}$ (мкФ)	2,04	1,40	0,95	0,31	0,22
f_{01}					
f_{02}					

Обработка результатов

1. Постройте график зависимости $(f_{02})^2 - (f_{01})^2$ от $2/C_{св}$.
2. Постройте на одном рисунке графики зависимости f_{01} и f_{02} от коэффициента связи, рассчитанного по формуле (2.53), и теоретические зависимости, рассчитанные по формуле (2.54).
3. В отчете следует представить график зависимости $(f_{02})^2 - (f_{01})^2$ от $2/C_{св}$ и график зависимости f_{01} и f_{02} от коэффициента связи.

Основные итоги работы

В результате проведения лабораторной работы должны быть измерены амплитудно-частотные характеристики вынужденных колебаний в связанных линейных контурах с индуктивной и емкостной связью.

Контрольные вопросы

1. Что такое последовательный (параллельный) колебательный контур?
2. В чем особенности вынужденных колебаний в последовательном и параллельном колебательных контурах?
3. Какие виды связи известны для электрических контуров?
4. Нарисуйте принципиальные схемы, используемые в упражнениях 1, 2 и 3.
5. Дайте определение нормальных колебаний.
6. Выведите формулы для расчета частоты нормальных колебаний в системе из двух одинаковых контуров с индуктивной и емкостной связью.
7. Напишите формулу для коэффициента индуктивной (емкостной) связи двух контуров.
8. Как связаны нормальные (резонансные) частоты в экспериментах с индуктивной (емкостной) связью с собственной частотой каждого из контуров в отдельности?

Литература

3. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. Учебное пособие. 3-е изд., стер. – СПб: Лань, 2010, §51.
4. Алешкевич В.А. Электромагнетизм. – М.: Физматлит, 2014, Лекция 18.

Лабораторная работа 2.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В RC -, RL - И RCL - ЦЕПЯХ

Цель работы

Экспериментальное изучение переходных процессов в RC , RL и RCL цепях.

Идея эксперимента

Переходные процессы в большинстве случаев являются однократными и кратковременными, поэтому их непосредственное наблюдение затруднительно. Поэтому для исследования переходных процессов коммутация осуществляется многократной и периодической, что достигается питанием цепи от генератора периодических сигналов прямоугольной формы. Передний фронт импульса соответствует включению цепи на постоянное напряжение, а задний уменьшению напряжения источника до нуля. К генератору электрического сигнала подключается одна из цепочек последовательно соединенных элементов: RC , RL или RCL . Наблюдаются временные зависимости напряжений на элементах цепей (R , L или C) и определяются параметры переходных процессов в RC -, RL - и RCL -цепях (времена релаксации, время затухания и частота собственных колебаний).

Теория

Переходные процессы в электрических цепях

Переходный процесс в электрической цепи – это переход из одного стационарного состояния цепи в другое, вследствие мгновенного изменения ее параметров – ЭДС E , емкости C , индуктивности L или сопротивления R (в частности, при замыкании или размыкании электрической цепи).

Стационарное состояние электрической цепи – состояние, в котором не меняются во времени физические величины, определяющие это состояние (заряды на обкладках конденсатора q_C , токи I , напряжения U_R , U_C и U_L).

В исходном стационарном состоянии токи и напряжения в цепи могут быть рассчитаны с помощью законов Ома и правил Кирхгофа для цепей постоянного тока путем решения системы линейных алгебраических уравнений.

После изменения параметров электрической цепи (коммутации) в системе наблюдается процесс, который можно рассматривать как непрерывную последовательность смены стационарных состояний. В этом случае физические величины, определяющие состояние цепи, находятся с помощью законов Ома и правил Кирхгофа для квазистационарных процессов. Основное отличие в использовании этих законов и правил от случая стационарных состояний – это появление в уравнениях ЭДС индукции $E^{\text{инд}}$ на участках цепи, содержащей индуктивность, и тока I_C на участке цепи, содержащей конденсатор.

В результате, для описания таких процессов необходимо решить систему линейных дифференциальных уравнений с учетом начальных условий – значений искомых величин и их первых производных в момент времени сразу после коммутации.

По определению, квазистационарными считаются электромагнитные процессы когда характерное время изменения электромагнитных физических величин гораздо больше времени установления электромагнитного равновесия в электрической цепи.

Локальное условие квазистационарности. Характерное время рассматриваемого процесса τ должно быть гораздо больше, чем характерное время установления локального равновесия, так называемое время диэлектрической релаксации или время релаксации Максвелла τ_M :

$$\tau \gg \tau_M = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma},$$

где ε_0 – электрическая постоянная, ε – относительная диэлектрическая проницаемость, σ – удельная электрическая проводимость.

Нелокальное условие квазистационарности. Чтобы мгновенные значения всех электрических величин в каждой части электрической цепи были такими же, как в случае постоянного тока, необходимо, чтобы время τ было гораздо больше, чем максимальное время τ_{max} распространения электромагнитного возмущения вдоль цепи:

$$\tau \gg \tau_{\text{max}} = \frac{l_{\text{max}}}{v} = \sqrt{\varepsilon \mu} \frac{l_{\text{max}}}{c},$$

где l_{max} – максимальная длина электрической цепи, μ – магнитная проницаемость, v – скорость распространения электромагнитных волн, c – скорость света в вакууме.

В дальнейшем переходные процессы будем считать квазистационарными и токи и напряжения в цепях будут рассчитаны с применением правил Кирхгофа.

Переходные процессы в RC-цепи

Рассмотрим процессы, происходящие в цепи, показанной на рис. 2.28. Начальное состояние цепи: ключ Π замкнут на контакт 2 и конденсатор заряжен до напряжения E_0 . В этом начальном состоянии ток в цепи отсутствует. Затем переведем ключ на контакт 3, отключив батарею ЭДС от цепи. Начнется *процесс разрядки конденсатора C через резистор R* .

По второму правилу Кирхгофа сумма напряжений на резисторе U_R и конденсаторе U_C после переключения Π на контакт 3 в любой момент времени равна нулю:

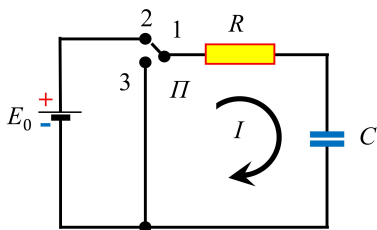


Рис. 2.28. RC-цепь.

$$U_C + U_R = 0.$$

Заряд на конденсаторе равен $q = CU_C$, поэтому сила тока в цепи:

$$I = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU_C}{dt}.$$

Следовательно,

$$U_R = IR = RC \frac{dU_C}{dt}.$$

В результате имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC} U_C = 0, \quad (2.56)$$

которое решим методом разделения переменных:

$$\frac{dU_C}{U_C} = -\frac{dt}{RC}.$$

После интегрирования получаем

$$\ln U_C = -\frac{t}{RC} + \text{const}.$$

Постоянную интегрирования находим из начального условия: $U_C = E_0$ при $t = 0$. Отсюда

$$\text{const} = \ln_0 E.$$

Таким образом, искомая зависимость напряжения на конденсаторе от времени после замыкания ключа на контакт 3:

$$U_C(t) = E_0 \exp(-t/RC). \quad (2.57)$$

Произведение RC имеет размерность времени. Величина $\tau = RC$ называется *временем релаксации*, за время τ напряжение на конденсаторе уменьшается в e раз. Время релаксации является одной из основных характеристик *переходного процесса разряда конденсатора*, определяется только параметрами цепи и не зависит от начальных условий.

Рассмотрим теперь *процесс зарядки конденсатора* C через резистор R . Для запуска этого переходного процесса в схеме на рис. 2.28 следует переключить П с контакта 3 на контакт 2.

По второму правилу Кирхгофа сумма напряжений на резисторе U_R и конденсаторе U_C в любой момент времени будет равна ЭДС источника E_0 :

$$U_C + U_R = E_0.$$

Так как элементы цепи соединены последовательно, сила тока на всех участках цепи одинакова и равна

$$I(t) = I_R = I_C.$$

При этом падение напряжения на резисторе

$$U_R = IR = R \frac{dq}{dt},$$

где q – заряд. Напряжение на конденсаторе $U_C = q/C$.

Таким образом, уравнение относительно заряда на конденсаторе имеет вид

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E_0,$$

или

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{R} = \frac{E_0}{R}. \quad (2.58)$$

Общее решение этого дифференциального неоднородного уравнения (с произвольной постоянной интегрирования): $q = q_1 + q_2$, где q_1 – общее решение однородного уравнения

$$\frac{dq_1}{dt} + \frac{q_1}{\tau} = 0,$$

которое находится методом разделения переменных:

$$q_1 = B \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

Постоянную интегрирования B в формуле находим из начального условия задачи.

Второе слагаемое q_2 в общем решении – любое частное решение неоднородного уравнения. Если правая часть полного уравнения есть постоянная, то и решение q_2 – тоже величина постоянная. Подставляя q_2 в исходное неоднородное уравнение (2.56), получаем: $q_2 = CE_0$. Тогда полное решение имеет вид:

$$q = B \exp(-t/\tau) + CE_0.$$

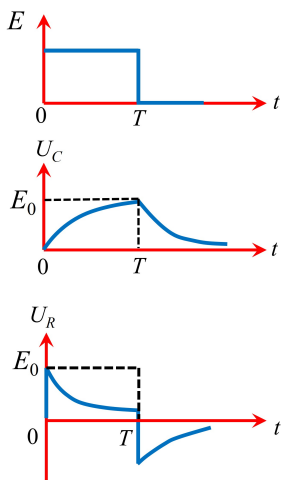


Рис. 2. 29. Зависимости $E_0(t)$, $U_C(t)$, $U_R(t)$ для RC-цепи.

Определяем постоянную интегрирования B , используя начальное условие: при $t = 0$ заряд на конденсаторе $q = 0$. Подставим эти значения в (2.58) и получим, что

$$B = -CE_0.$$

Таким образом, после замыкания ключа

$$q = CE_0[1 - \exp(-t/\tau)],$$

откуда

$$U_C = q/C = E_0[1 - \exp(-t/\tau)], \quad (2.59)$$

и

$$U_R = E_0 \exp(-t/\tau). \quad (2.60)$$

Графики полученных зависимостей $U_C(t)$ и $U_R(t)$ при зарядке (передний фронт, ключ П в положении 2 на рис. 2.28) и разрядке ($E_0 = 0$, ключ

П в положении 3 на рис. 2.28) приведены на рис. 2.29.

Переходные процессы в RL-цепи (рис. 2.30).

Ключ замкнули на контакт 2, после чего начинается процесс установления тока в цепи. Так как все элементы цепи соединены последовательно, сила тока на всех участках цепи одинакова:

$$I(t) = I_R = I_L.$$

Согласно второму правилу Кирхгофа,

$$U_L + U_R = E_0.$$

Напряжение на катушке индуктивности U_L равно взятой с обратным знаком, возникающей в катушке ЭДС самоиндукции. С учетом формул

$$U_R = IR \text{ и } U_L = L \frac{dI}{dt},$$

получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E_0}{L}. \quad (2.61)$$

Это уравнение решаем так же, как уравнение (2.58) для процесса установления тока через конденсатор. Начальное условие: при $t=0$ сила тока в цепи $I=0$. В результате зависимость силы тока в цепи от времени после замыкания ключа имеет вид:

$$I(t) = \left(\frac{E_0}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right) \right) = \frac{E_0}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right),$$

где время релаксации равно $\tau = L/R$. При $t > 0$ сила тока в цепи нарастает, асимптотически стремясь к значению $I_0 = E_0/R$.

Для напряжений U_R и U_L получаем

$$U_R = IR = E_0(1 - \exp(-t/\tau)) \quad (2.62)$$

и

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = E_0 \exp(-t/\tau). \quad (2.63)$$

Рассмотрим теперь процесс в цепи после перевода ключа Π в положение 3 (см. рис.2.30). В цепи протекал установившийся ток $I_0 = E_0/R$.

При переключении Π в положение 3, согласно второму правилу Кирхгофа для цепи последовательно соединенных катушки индуктивности и резистора, выполняется равенство:

$$U_L + U_R = 0.$$

Воспользовавшись выражениями для напряжений на катушке $U_L = L \frac{dI}{dt}$ и резисторе $U_R = IR$, получаем уравнение:

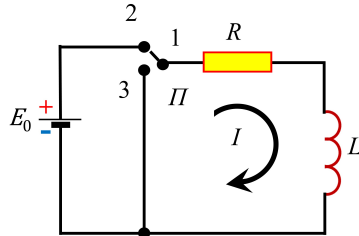


Рис. 2.30. RL-цепь.

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0. \quad (2.64)$$

Решая уравнение (2.64) методом разделения переменных, находим:

$$I(t) = B \exp(-t/\tau),$$

где B – постоянная интегрирования,
 $\tau = \frac{L}{R}$ – время релаксации.

Из начального условия следует, что

$$B = (E_0/R).$$

Окончательно, для искомой зависимости силы тока в цепи от времени после отключения источника напряжения имеем:

$$I(t) = (E_0/R)\exp(-t/\tau),$$

откуда

$$U_R = E_0 \exp(-t/\tau) \quad (2.65)$$

и

$$U_L = E_0 \exp(-t/\tau). \quad (2.66)$$

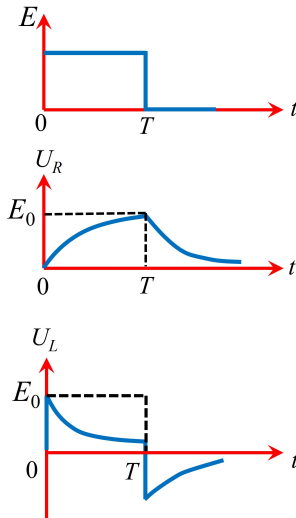


Рис. 2.31. Зависимость $E_0(t)$, $U_L(t)$, $U_R(t)$ для RL -цепочки.

Графики полученных зависимостей $U_L(t)$ и $U_R(t)$ при замыкании ключа П на контакт 2 (подключение источника ЭДС E_0 к электрической схеме на рис. 2.29) и после переключения на контакт 3 (отключение источника ЭДС E_0 от электрической цепи на рис. 2.30) приведены на рис. 2.31.

Переходные процессы в RLC -цепи. Рассмотрим процессы в цепи, показанной на рис. 2.32.

Сначала резистор с сопротивлением R , конденсатор с емкостью C и катушка с индуктивностью L подсоединены последовательно источнику постоянного напряжения с ЭДС E_0 . После того, как конденсатор C будет заряжен, они отключаются от батареи (ключ П переводится из положения 2 в положение 3).

Применяя второе правило Кирхгофа к цепи после перевода ключа в положение 3 и используя выражения для напряжений на резисторе $U_R = IR$, конденсаторе $U_C = \frac{q}{C}$ и катушке $U_L = L \frac{dI}{dt}$, получаем уравнение:

$$RI + \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0,$$

где I – сила тока в цепи, q – заряд конденсатора.

Перепишем полученное уравнение, используя лишь одну переменную q и ее первую производную $\frac{dq}{dt} = I$. Кроме

того, разделим почленно это уравнение на L . В результате для заряда q получим однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Вводя обозначения $\frac{R}{L} = 2\beta$ и $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$, запишем это уравнение в каноническом виде:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \quad (2.67)$$

Параметр β – *коэффициент затухания*, а ω_0^2 – квадрат частоты свободных незатухающих гармонических колебаний при $\beta = 0$.

Будем искать решение уравнения в комплексном виде:

$$\hat{q}(t) = \hat{q}_0 \exp(kt).$$

где \hat{q}_0 – комплексная амплитуда, а k – в общем случае комплексная величина.

Подставляя $\hat{q}(t)$ в (2.67), приходим к алгебраическому уравнению относительно k :

$$k^2 + 2\beta k + \omega_0^2 = 0.$$

Если $\beta^2 \neq \omega_0^2$, то получаем два решения:

$$k_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2},$$

$$k_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

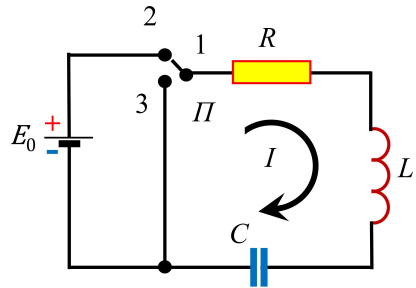


Рис. 3.32. RLC-цепь.

Общее решение однородного уравнения (2.67) – линейная комбинация двух полученных решений с произвольными коэффициентами:

$$\hat{q} = A \exp(k_1 t) + B \exp(k_2 t).$$

Коэффициенты A и B определяются начальными условиями. При этом решение зависит от соотношения параметров β и ω_0 . Если $\beta > \omega_0$, то оба показателя в экспонентах отрицательные, решение будет вещественным и его можно записать в виде:

$$q = e^{-\beta t} \left[A e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + B e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right]. \quad (2.68)$$

Такой процесс называется *апериодическим*.

В частном случае $\beta = \omega_0$ решение имеет вид:

$$q = (A + Bt)e^{-\beta t}. \quad (2.69)$$

При этом описываемый (2.69) процесс называется *критическим апериодическим затуханием*.

Если $\beta < \omega_0$, то в цепи возникают свободные затухающие колебания. Действительно, в этом случае:

$$\hat{q}(t) = \exp(-\beta t) [A_1 \exp(i\omega t) + B_1 \exp(-i\omega t)],$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

Здесь коэффициенты A_1 и B_1 следует понимать как комплексные числа, имеющие вещественную и мнимую части.

Поскольку заряд q является вещественной физической величиной, а вещественная часть комплексного решения также является решением однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными вещественными коэффициентами, то

$$q(e) = \operatorname{Re} q(t) = e^{-\beta t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)], \quad (2.70)$$

где A и B – вещественные коэффициенты, определяемые начальными условиями.

Выражение (2.70) есть закон свободных затухающих колебаний с частотой ω . Заряд на конденсаторе, осциллируя, убывает по экспоненциальному закону и уменьшается в e раз от первоначального за время релаксации $\tau = 1/\beta$. По этой причине β называют *коэффициентом затухания*, а τ – *временем релаксации*.

В выполняемой задаче используются параметры цепи, отвечающие только случаю затухающих колебаний (решение (2.70)) при $\beta < \omega_0$.

Тогда, с учетом (2.70) и $\frac{dq}{dt} = I$,

$$I(t) = e^{-\beta t} \{ \omega [-A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)] - \beta [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \};$$

$$q(0) = E_0 C = A,$$

$$I(0) = \omega B - \beta A = 0,$$

откуда

$$B = (\beta/\omega)A = (\beta/\omega) E_0 C.$$

В итоге находим:

$$q(t) = E_0 C e^{-\beta t} [\cos(\omega t) + (\beta/\omega) \sin(\omega t)].$$

Если ввести обозначение $(\beta/\omega) = \operatorname{tg} \varphi$ и использовать соотношение $U_C = q/C$, то после простых преобразований получим:

$$U_C = E_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (2.71)$$

График зависимости $U_C(t)$ при замыкании ключа П на контакт 2 (на рис. 2.33 источник ЭДС E_0 подключен к электрической цепи) и после переключения на контакт 3 (на рис. 2.32 источник ЭДС E_0 отключен от электрической цепи) приведен на рис. 2.33.

Подводя итоги рассмотрения этого переходного процесса, выделим еще раз наиболее важные формулы:

$$\beta = \frac{R}{2L} - \text{коэффициент затухания в контуре};$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R}{2L}}$$

– частота собственных затухающих колебаний в RLC-контуре,

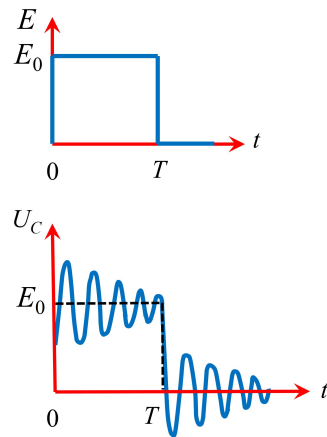


Рис. 2.33. Зависимости $E(t)$, $U_C(t)$ для RLC-цепочки.

$\omega_0 = \frac{1}{LC}$ – частота собственных незатухающих колебаний в контуре при $R = 0$.

Степень затухания в контуре принято характеризовать *логарифми-ческим декрементом затухания* θ , который равен логарифму отношения амплитуд затухающих колебаний (например, напряжения на конденсаторе) в моменты времени t и $t + T$:

$$\theta \equiv \ln \frac{U_C(t)}{U_C(t+T)} = \beta T. \quad (2.72)$$

Если τ – время затухания, а N_e – число полных колебаний (периодов затухающих колебаний), за которое амплитуда уменьшается в $e \cong 2,71$ раз, то:

$$\theta = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{\tau/T} = \frac{1}{N_e}. \quad (2.73)$$

Добротность колебательной системы Q равна с точностью до множителя 2π отношению средней за период энергии системы к средней энергии потерь за тот же период:

$$Q \equiv 2\pi \frac{\langle W \rangle_T}{\langle P \rangle_T T} = 2\pi \frac{E_0 e^{-2\beta t}}{2\beta E_0 e^{-2\beta t} T} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\theta} = \frac{\omega}{2\beta} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (2.74)$$

Эксперимент

Экспериментальная установка

В состав экспериментальной установки для изучения переходных процессов в электрических цепях входят (рис.2.34 и 2.35):

- блок коммутации (1);
- USB-модуль PCSGU250 (2);
- компьютер (3);
- монитор (4);
- элементы схемы (резисторы и конденсаторы), размещаемые на коммутационной плате;
- катушка индуктивности;
- соединительные кабели.

Модуль PCSGU250 является специальной USB-приставкой к компьютеру, позволяющей генерировать электрические сигналы различной формы (в нашем случае –прямоугольной), частоту которых можно изменять в широких пределах от единиц герц до сотен килогерц. Кроме того модуль имеет два входа (**CH1** И **CH2** для измерения напряжения на элементах схемы. Сигнал с генератора (гнездо **GENERATOR** в нижней части) подается на блок коммутации и на Вход1 (**CH1**) модуля; на Вход2 (**CH2**) модуля подается напряжение с одного из элементов схемы (на рис. 2.35 – с катушки L).



Рис. 2.34. Внешний вид установки: коммутационная плата (1), USB-модуль PClab2000LT (2), компьютер (3), дисплей (4).

На коммутационной плате собирается схема из отдельных элементов: катушки индуктивности L , конденсатора C и резистора R . В набор входят одна катушка, 3-4 конденсатора и несколько резисторов различного номинала.

Следует иметь в виду, что в схеме имеется общий для всех основных узлов системы (генератора и измерительных каналов **CH1** и **CH2** USB-приставки) «земляной» провод. Поэтому элементы цепи (R , L или C), на которых измеряется напряжение, должны подключаться к каналу **CH2** так, чтобы один из контактов элемента был на «земле» (см. рис. 2.36, 2.38 и 2.39). Как правило, на коммутационной плате в качестве «земли» выбирают длинный прямой контакт (рис. 2.35). На кабеле, идущем от генератора к

плате, «земля» соответствует более длинному проводу. На кабелях для подключения измерительных каналов **CH1** и **CH2** «земля» синего цвета.

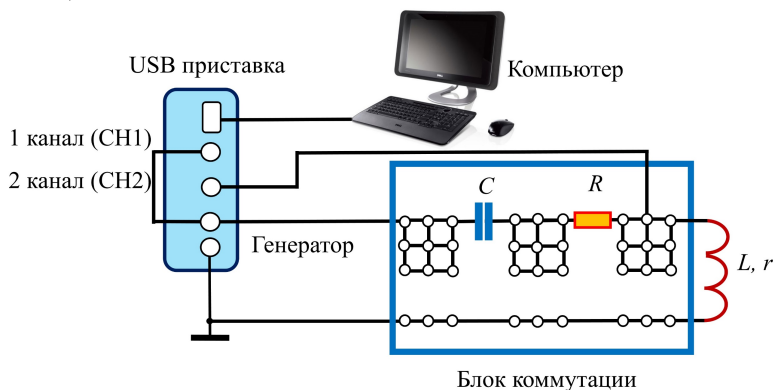


Рис. 2.35. Схема соединения элементов установки для наблюдения переходных процессов в RLC-цепи.

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Исследование процессов заряда и разряда конденсатора. Определение постоянной времени RC-цепочки

Измерение

1. Соберите электрическую схему в соответствии с рис. 2.36, используя конденсатор с известной емкостью C_1 и резистор с известным сопротивлением R_1 . Подключите контакты канала 1 (**CH1**) к контактам генератора G, а канала 2 (**CH2**) – к контактам конденсатора C_1 .

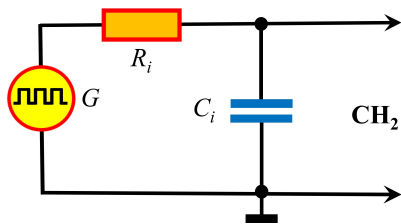


Рис. 2.36. Электрическая схема для исследования процессов заряда и разряда конденсатора.

2. Запустите на компьютере рабочую программу. На экране дисплея появятся два окна: окно модуля PCSGU250 в виде координатного поля двухлучевого осциллографа и кнопок управления генераторной и осциллографической

частью системы (это окно надо свернуть, но не закрывать) и основное рабочее окно **Meandr** (рис. 2.37).

В верхней строке окна **Meandr** находятся рабочие команды: RUN, STOP, MEASURE, SELECT, APPROX.EXP., APPROX.OSC., PARAMETERS.

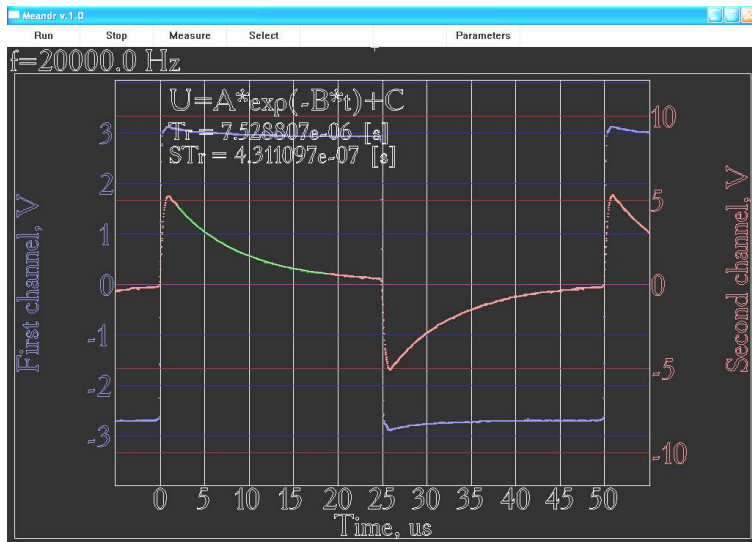


Рис. 2.37. Координатное поле двухлучевого осциллографа и кнопки управления генераторной и осциллографической частью USB приставки.

3. При нажатии команды **RUN** запускается эксперимент: на RC-цепочку подается последовательность электрических импульсов прямоугольной формы с заданной амплитудой напряжения и частотой следования, значение которой показано под строкой команд (первоначально амплитуда $A = 3$ В и частота $f = 20$ 000 Hz).

При нажатии на кнопку **PARAMETERS** появляется дополнительное окно управления параметрами генератора. Переключая частоту следования сигналов (окно **General** в левой части), добейтесь такого режима, чтобы регистрируемый сигнал имел форму, указанную в теоретической части описания (рис. 2.28 для RC-цепочки).

На мониторе появляется осциллограмма с меандром (синяя линия по каналу **CH1**), который подается на RC -цепочку, и две кривые – напряжения на конденсаторе (красная линия по каналу **CH2**) – на переднем фронте и заднем фронте импульса. После нажатия команды **SELECT** появляется курсор в виде желтой вертикальной линии, перемещая которую с помощью мыши при нажатой правой клавише, «засвечивают» тот участок графика, который будет обрабатываться (красная линия после засветки становится желтой).

4. После выбора участка кривой запускают обработку, нажимая команду **APPROX.EXP**. На мониторе появляются результаты аппроксимации по формуле

$$U = A \cdot \exp(-t/\tau),$$

и выводятся значение τ и погрешности (белые буквы и цифры на рис. 2.36). Эту процедуру последовательно применяют к кривым на переднем и заднем фронтах импульса. Данные о значении напряжения A до которого был заряжен конденсатор к моменту прекращения зарядки (достижения заднего фронта импульса) и началу разрядки, приводятся только для ознакомления и дальше не используются. Основным результатом являются значения τ и $\delta\tau$ (время релаксации и погрешность его определения) (рис. 2.36), которые записываются в табл. 2.9. Значок \uparrow в табл. 2.9 (и последующих таблицах) относится к заряду конденсатора после прихода переднего фронта импульса; значок \downarrow относится к разряду конденсатора после прихода заднего фронта импульса.

Таблица 2.9.

Результаты измерений и обработки процессов заряда и разряда конденсатора в RC -цепочке для различных сопротивлений

Номер резистора	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
$\tau\uparrow$						
$\delta\tau\uparrow$						
$\tau\downarrow$						
$\delta\tau\downarrow$						
$R\uparrow = \tau\uparrow/C_1$						
$R\downarrow = \tau\downarrow/C_1$						
$R_i \pm \delta R_i$						

Сравните результаты измерения τ по двум фронтам сигнала объясните различие между $\tau\uparrow$ и $\tau\downarrow$.

5. Выполните пп. 3,4 с другими резисторами (R_2, R_3, R_4) и заполните соответствующие строки табл. 2.9. Для одного из резисторов поменяйте местами резистор и конденсатор в схеме на рис. 2.36 и снимите выходной сигнал с резистора (вид сигнала для этого случая представлен на рис. 2.37). Сравните результаты измерения τ (например, $\tau\uparrow$) для двух схем измерения сигнала.

6. Затем установите в схему известный резистор R_1 и вместо известного конденсатора C_1 поочередно подключайте остальные конденсаторы C_2, C_3 и C_4 (выходной сигнал снимается с конденсаторов). Результаты запишите в табл. 2.10.

7. Установите вместо резистора R_1 резистор R_4 , имеющий максимальное номинальное сопротивление. Не подключайте в цепь никакого конденсатора, но оставьте подключенным канал 2 - **CH2** (в схеме на рис. 2.36 установите резистор R_7 и удалите конденсатор). При выборе частоты $f=20000$ Гц на экране появится характерная картина заряда конденсатора. В данном случае заряжается входная емкость $C_{\text{вх}}$ измерительного канала. Определите из измерений характерное время τ для цепочки R_4 - $C_{\text{вх}}$.

Таблица 2.10

Результаты измерений и обработки процессов заряда и разряда конденсатора в RC-цепочке для различных емкостей

Номер конденсатора	C_2	C_3	C_4	C_5
$\tau\uparrow$				
$\delta\tau\uparrow$				
$\tau\downarrow$				
$\delta\tau\downarrow$				
$C\uparrow = \tau\uparrow/R_5$				
$C\downarrow = \tau\downarrow/R_5$				
$C_i \pm \delta C_i$				

Обработка результатов

1. Рассчитайте $R_i\uparrow$ и $R_i\downarrow$ по формуле $R_i\uparrow = \tau/C$. Оцените случайную и систематическую погрешности R_i (считать, что

погрешность задания номинальных значений R_1 и C_1 равна 2%). Результаты запишите в табл. 2.9.

2. Аналогично оцените емкости конденсаторов C_i . Результаты запишите в табл. 2.10.

3. По измерениям характерного времени τ для цепочки R_7 - $C_{\text{вх}}$ получите оценку входной емкости $C_{\text{вх}}$ измерительного канала. Сравните с рассчитанными емкостями остальных конденсаторов. Примите решение, следует ли в дальнейшем при расчетах учитывать емкость $C_{\text{вх}}$.

Упражнение 2. Исследование переходных процессов в RL -цепочках. Определение времени релаксации и индуктивности катушек.

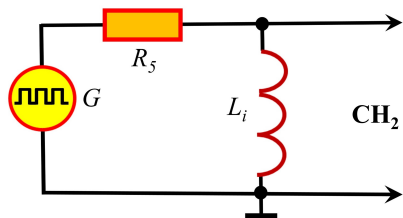


Рис. 2.38. Электрическая схема для исследования процесса установления тока при подключении и отключении ЭДС к RL -цепочке

Измерение

1. Соберите электрическую схему в соответствии с рис. 2.38, используя катушку индуктивности L и один из резисторов (R_1 , R_2 или R_3) и При сборке схемы подключите контакты канала 1 (CH1) к контактам генератора G , а канала 2 (CH2) - к контактам катушки L (используются крайние выводы катушки 1 и 3).

Таблица 2.11.

Результаты измерений и обработки изменений напряжения на индуктивности в RL -цепочке для различных резисторов

Номер резистора	R_1	R_2	R_3
$\tau \uparrow$			
$\delta\tau \uparrow$			
$\tau \downarrow$			
$\delta\tau \downarrow$			
$L \uparrow = \tau \uparrow / R_5$			
$L \downarrow = \tau \downarrow / R_5$			
$L_i \pm \delta L_i$			

2. В соответствии с методикой *Упр.1* проведите измерения времени релаксации $\tau=L/R$ для всех резисторов. Результаты запишите в табл. 2.11.

3. Для одного из резисторов поменяйте местами резистор и катушку и снимите выходной сигнал с резистора. Сравните результаты измерения τ для двух схем регистрации сигнала

Обработка результатов

1. Рассчитайте $L_i\uparrow$ и $L_i\downarrow$ по формуле $L_i = \tau/R_i$.
2. Вычислите средние значений $L_i\uparrow$ и $L_i\downarrow$: $L_i = (L_i\uparrow + L_i\downarrow)/2$ и погрешности их определения δL_i .
3. Результаты измерений запишите в табл. 2.11.

Упражнение 3. Изучение затухающих колебаний в RLC-цепи. Определение периода колебаний, логарифмического декремента затухания и добротности цепи.

Измерение

1. Соберите электрическую схему в соответствии с рис. 2.39, используя конденсатор C_1 и катушку индуктивности L . В качестве резистора r здесь выступает активное сопротивление катушки, которое необходимо определить. При сборке схемы подключите контакты канала 1 (**CH1**) к контактам генератора G , а канала 2 (**CH2**) – к контактам конденсатора C_1 .

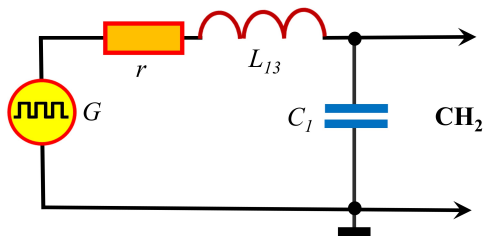


Рис. 2.39. Электрическая схема к *упр.3*.

2. Запустите про-грамму командой **RUN** и, выбирая частоту f следования импульсов, получите на экране картину затухающих колебаний на переднем и заднем фронтах (рис. 2.40). Если наблюдается «зашкаливание» затухающих колебаний, то следует уменьшить амплитуду входного сигнала: нажмите кнопку

PARAMETERS и в правой части экрана выберите в окне **Generator** амплитуду 1-2 В.

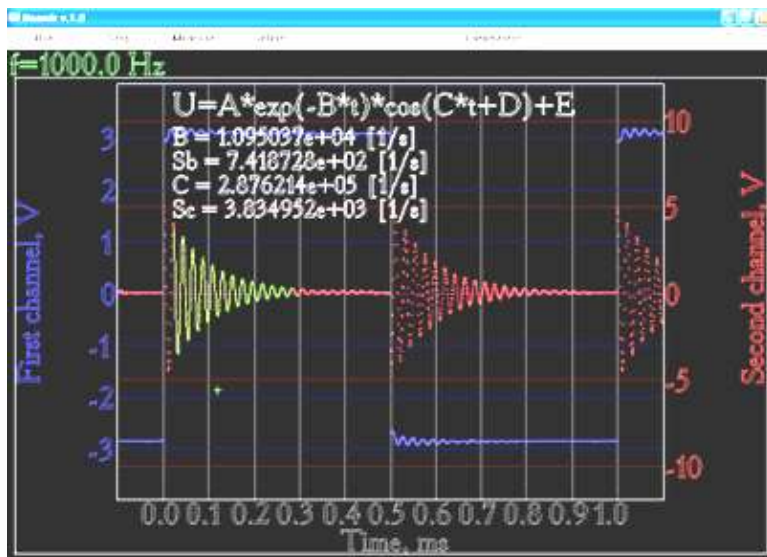


Рис. 2.40. Скриншот меандра и затухающих колебаний на переднем и заднем фронтах

3. Командой **SELECT** «засветите» характерный участок затухающих колебаний (5-7 периодов) на любом из фронтов (переднем или заднем).

4. Нажмите кнопку **APPROX.OSC** и дождитесь появления результатов аппроксимации по формуле

$$U = A \cdot \exp(-Bt) \cdot \cos(Ct + D) + E.$$

На экран монитора выводятся значения только коэффициентов

$$B = \beta = \frac{r}{2L}, \quad C = \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{r}{2L}\right)^2}.$$

Запишите значения β и ω и погрешности в табл. 2.12.

5. Проведите аналогичные измерения с конденсаторами C_2 , C_3 и C_4 .

Таблица 2.12.

**Результаты измерений и обработки результатов изучения
затухающих колебаний в RLC-цепи**

Номер конденсатора	C_1	C_2	C_3	C_4
$\beta \uparrow$				
$\beta \downarrow$				
$\omega \uparrow$				
$\omega \downarrow$				
$\omega_i \pm \delta\omega_i$				
$\beta_i \pm \delta\beta_i$				
$T_i \pm \delta T_i$				
$T_i^2 \pm \delta(T_i^2)$				
$L_i \pm \delta L_i$				
$r_i \pm \delta r_i$				
$\theta_i \pm \delta\theta_i$				
$Q_i \pm \delta Q_i$				
$Q_{\text{теор}} \pm \delta Q_{\text{теор}}$				

Обработка результатов

1. Сравните полученные для каждой цепочки значения β и ω . Если $\beta \ll \omega$, то

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Постройте график зависимости $1/\omega^2(C)$, аппроксимируйте его линейной функцией и получите оценку индуктивности L катушки. Сравните с результатами *Упр. 2*.

2. В формуле для коэффициента затухания $\beta = r/(2L)$ сопротивление r – это активное сопротивление катушки индуктивности, которое не должно зависеть от емкости конденсаторов. Однако, вследствие высокой частоты колебаний, за счет скин-эффекта сопротивление r катушки зависит от частоты ω . Рассчитайте активное сопротивление r катушки и постройте график зависимости r от ω .

3. Для каждой цепочки рассчитайте логарифмический декремент затухания и добротность контура по формулам:

$$\theta = \beta T = \frac{2\pi\beta}{\omega}, \quad Q = \frac{\pi}{\theta} = \frac{\omega}{2\beta}.$$

Оцените погрешности, результаты запишите в табл. 2.12.

4. Рассчитайте добротность цепочек по формуле $Q = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}}$ и сравните с результатами, полученными в п. 3.

Основные итоги работы

В результате проведения лабораторной работы должны быть исследованы процессы заряда и разряда конденсатора, определены постоянные времени RC-цепочки; изучены процессы установления тока при подключении и отключении ЭДС к RL-цепочке и определены время релаксации и индуктивности катушек; исследованы затухающие колебания в RLC-цепи и определены период колебаний, логарифмический декремент затухания и добротность цепи.

Контрольные вопросы.

1. Что называют переходными процессами?
2. Какие процессы относят к квазистационарным
4. Запишите закон изменения напряжения на конденсаторе в RC-цепи в зависимости от времени.
5. Запишите закон изменения напряжения на катушке индуктивности в RL-цепи в зависимости от времени.
6. Запишите уравнение переходного процесса для RLC-цепи.
7. Запишите аperiodические решения уравнения переходного процесса в RLC-цепи.
8. Запишите решение уравнения переходного процесса в RLC-цепи.
9. Как оценить логарифмический декремент затухания?
10. Как оценить добротность колебательной системы?

Литература

1. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. Учебное пособие. 3-е изд., стер.– СПб: Издательство «Лань», 2010, §§ 50, 51.