

**О.Н. Васильева, А.В. Быков,
И.В. Митин, А.М. Салецкий**

ОПТИКА. СБОРНИК ЗАДАЧ

Рекомендовано Федеральным учебно-методическим объединением в системе высшего образования по укрупненной группе специальностей и направлений подготовки 03.00.00 «Физика и астрономия» в качестве учебного пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки уровня бакалавриата «Прикладные математика и физика»(03.03.01), «Физика»(03.03.02), «Радиофизика» (03.03.03), специалитета по специальностям «Астрономия» (03.05.01) и «Фундаментальная и прикладная физика» (03.05.02)».



Москва
Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
2022

УДК 535
ББК 22.34
В 19

В а с и л ь е в а О. Н., Б ы к о в А. В., М и т и н И. В., С а л е ц к и й А. М. **Оптика. Сборник задач** / Учебное пособие. – М.: Физический факультет МГУ, 2022, 380 с.

ISBN 978-5-8279-0225-6

Учебное пособие «Оптика. Сборник задач» написано на основе многолетнего опыта проведения занятий по общей физике на физическом факультете МГУ и является составной частью серии учебно-методических разработок кафедры общей физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Учебное пособие, является заключительной третьей частью модуля «Семинарские занятия» серии «Университетский курс общей физики» (первая часть — «Разработка семинарских занятий», вторая — «Методика решения задач»).

Настоящее пособие предназначено для преподавателей, а также студентов высших учебных заведений, и имеет целью помочь преподавателям организовать свою работу, а студентам – овладеть основными методами и приобрести навыки решения задач по разделу «Оптика» курса общей физики.

Рецензент: д. ф.-м. н., профессор *В.А. Макаров*

Подписано в печать 28.04.2022

Формат 60х90/16. Объем 23,75. Тираж 200 экз.

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
119991, Москва, Ленинские горы, д.1, стр. 2

ISBN 978-5-8279-0225-6

© Физический факультет МГУ
им. М.В. Ломоносова, 2022 г.
© Коллектив авторов, 2022 г.

УНИВЕРСИТЕТСКИЙ КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

(Предисловие редактора инновационного учебно-методического комплекса)

В настоящее время физика все более глубоко проникает во все области современной науки и техники, появляются ее новые отрасли. В связи с этим возникает проблема подготовки квалифицированных кадров ученых-физиков. Существенную роль в такой подготовке играет преподавание общего курса физики. Для решения этой проблемы на физическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова создан инновационный учебно-методический комплекс (ИУМК) «Университетский курс общей физики», обеспечивающий организационную и содержательную целостность системы подготовки, методов и средств обучения общей физике.

ИУМК «Университетский курс общей физики» создан на основе многолетнего опыта преподавания физики студентам физического факультета Московского университета. Курс охватывает все разделы общей физики. Отличительной особенностью данного курса является то, что в нем в методическом отношении осуществлено единство основных форм обучения физике: лекции, лабораторные работы и семинары. В системе университетского образования теоретический материал излагается в основном в лекционных курсах, а умение решать задачи отрабатывается на семинарских занятиях. Развитие навыков эксперимента и анализа его результатов происходит в процессе занятий в общем физическом практикуме. В связи с этим, каждый раздел курса состоит из шести пособий: «Лекции», «Лекционный эксперимент», «Лабораторный практикум», «Разработка семинарских занятий», «Методика решения задач» и «Сборник задач».

Каждая глава пособия «Лекции» содержит материал базового уровня, соответствующего программе курса, и отражает современные тенденции и технологии физического образования. Цель авторов данного курса – представить общую физику в виде, используемом активно работающими в науке физиками.

Лекции по каждой теме сопровождаются демонстрацией основных физических экспериментов, описание которых представлено в пособии «Лекционный эксперимент». Большая часть описанных экспериментов разработана на кафедре общей физики физического факультета им. М.В. Ломоносова. В тексте пособия имеется

также ряд ссылок на авторские свидетельства на изобретения в области лекционных экспериментов, полученные сотрудниками кафедры. Описание классических опытов и экспериментальных установок, представленное в пособии «Лекционный эксперимент», увеличивает ценность и привлекательность курса.

Для установления единого уровня сложности задач и широты охвата материала на семинарах служит пособие «Разработка семинарских занятий», предназначенное для преподавателя. В данном пособии описаны основные принципы проведения семинара. Рассматривается порядок подачи учебного материала, включающий проверку теоретической подготовки студента, обсуждение метода решения задачи, анализ физического смысла результата, разбор характерных ошибок.

Все формы занятий предполагают значительную самостоятельную внеаудиторную работу студентов. Пособием, позволяющим самостоятельно развивать умение решать физические задачи, является «Методика решения задач». Весь материал пособия разбит на главы. Разбор задач всех глав проводится по единой схеме, причем каждую главу можно прорабатывать независимо от других. Пособие содержит также задачи с решениями повышенной сложности для студентов, желающих более глубоко освоить курс общей физики. Для самостоятельной работы студентов предназначен «Сборник задач», в котором представлены наиболее характерные и типичные задачи.

Неотъемлемой частью курса общей физики служит лабораторный практикум. Материалы пособия «Лабораторный практикум» достаточны для самостоятельной подготовки к выполнению работ. В связи с этим в пособии имеется как общее теоретическое введение, так и более подробное изложение теории к каждой лабораторной работе. Кроме того, для каждой работы сформулированы цель и идея эксперимента, дано описание установки и подробное изложение последовательности проведения эксперимента и обработки результатов. Представленные в пособии лабораторные работы являются результатом работы нескольких поколений преподавателей кафедры общей физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Первые лабораторные работы составили содержание двухтомника «Физический практикум» под редакцией В.И. Ивероновой, вышедшего в свет в 1967 г. В последние годы разработаны и введены в действие новые современные лабораторные работы с использованием современных экспериментальных методов ис-

следования физических процессов. Более 50% лабораторных работ являются автоматизированными с управлением компьютером. В каждом семестре студент выполняет 12 лабораторных работ, причем 60-70% являются обязательными для всех студентов, а остальные распределяются с учетом их пожеланий.

Для повышения эффективности усвоения сути изучаемых физических явлений и законов в тематических лабораториях без расхода времени на ознакомление со стандартной технологией измерений в ИУМК введен раздел «Введение в технику эксперимента», состоящий из двух частей: «Лекции» и «Практикум». Лекции посвящены краткому изложению общих принципов проведения физических измерений, теории ошибок и статистической оценки достоверности полученных результатов, а также основных требований к оформлению полученной информации в виде графиков, номограмм и таблиц. В практической части представлены описания лабораторных работ начального цикла, в которых на сравнительно простых физических явлениях студент знакомится с наиболее распространенными приборами, с методами измерений и с правильной обработкой их результатов, основами анализа погрешностей измерений и правилами представления результатов с учетом его точности.

Курс предназначен не только для физиков, но может быть полезен для будущих инженеров, химиков и биологов.

Все пожелания и замечания по пособиям курса будут с благодарностью приняты и рассмотрены на кафедре общей физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

А.М. Салецкий

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	7		
		Задачи	Ответы, решения
§ 1. Геометрическая оптика и простые опти- ческие системы.....	8		156
§ 2. Электромагнитные волны оптического диапазона. Уравнения Максвелла.....	29		187
§ 3. Преобразования Фурье в оптике.....	39		201
§ 4. Интерференция монохроматического света	45		212
§ 5. Интерференция монохроматического света в тонких пленках. Полосы равной толщины и равного наклона	53		225
§ 6. Интерференция квазимонохроматического света.....	62		239
§ 7. Интерференция света от протяженных источников	69		254
§ 8. Дифракция Френеля.....	75		267
§ 9. Дифракция Фраунгофера	85		289
§ 10. Спектральные приборы. Многоволновая интерференция.....	95		306
§ 11. Дисперсия света.....	106		324
§ 12. Оптические явления на границе раздела ди- электриков. Формулы Френеля.....	114		340
§ 13. Оптика анизотропных сред. Кристалло- оптика.....	123		359
§ 14. Поляризация света.....	136		375
§ 15. Тепловое излучение.....	150		395
Приложения			402
Литература			407

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие написано на основе многолетнего опыта проведения занятий по общей физике на физическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова и является составной частью серии учебно-методических пособий кафедры общей физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова «Университетский курс общей физики»

Предлагаемое пособие является заключительной, третьей частью модуля «Оптика. Семинарские занятия» этой серии (первая часть – «Разработка семинарских занятий» [1], вторая – «Методика решения задач» [2]). В пособии рассматриваются, в первую очередь, наиболее характерные и типичные задачи. Сборник содержит около 750 задач (для более 50% из них приведены решения) по разделу «Оптика» курса общей физики и предназначен для самостоятельной работы студентов.

Представленный сборник задач является четвертным задачником, созданным и изданным сотрудниками кафедры общей физики МГУ имени М.В. Ломоносова. До этого изданы «Механика. Сборник задач» [3], «Молекулярная физика и термодинамика. Сборник задач» [4] и «Электричество и магнетизм. Сборник задач» [5]. В этой связи структура данного издания аналогична структуре изданным задачникам.

Содержание «Сборника задач» разделено на 15 тем с максимальной привязкой к действующему тематическому плану семинаров по молекулярной физике и термодинамике. Каждой теме предшествуют краткие теоретические сведения, в конце сборника приведены справочные таблицы.

Авторы выражают благодарность рецензенту пособия В.А. Макарову. Авторы заранее признательны также всем, кто способствует улучшению в дальнейшем этого учебно-методического пособия.

§1. Геометрическая оптика и простые оптические системы

- *Закон отражения света:* на неподвижной границе раздела двух однородных изотропных сред падающий луч 1, отраженный луч 1' и нормаль OZ к отражающей поверхности в точке падения 0 лежат в одной плоскости; угол падения θ_1 равен углу отражения θ_0 (рис. Т1.1):

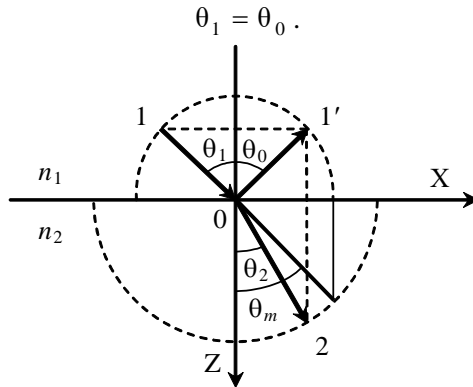


Рис. Т1.1. Отражение и преломление света на границе раздела двух сред с показателями преломления $n_1 < n_2$.

- *Закон преломления света на границе раздела двух сред:* на границе раздела двух однородных изотропных сред с показателями преломления n_1 и n_2 падающий луч 1, преломленный луч 2 и нормаль OZ к поверхности в точке падения 0 лежат в одной плоскости; угол падения θ_1 и угол преломления θ_2 связаны соотношением:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 .$$

- Предельный угол полного внутреннего отражения θ_m :

$$\theta_m = \arcsin \frac{n_1}{n_2} .$$

- Инвариант Аббе для сферической преломляющей поверхности радиусом R (параксиальное приближение):

$$n_1 \left(\frac{1}{x_{S_1}} - \frac{1}{R} \right) = n_2 \left(\frac{1}{x_{S_2}} - \frac{1}{R} \right) \text{ или } \frac{n_2}{x_{S_2}} - \frac{n_1}{x_{S_1}} = \frac{n_2 - n_1}{R} ,$$

где n_1 и n_2 – показатели преломления сред, $x_{S_{1,2}}$ – координаты сопряженных точек S_1 (предмет) и S_2 (изображение), отсчитываемые от вершины поверхности O (в параксиальном приближении) (рис. Т1.2).

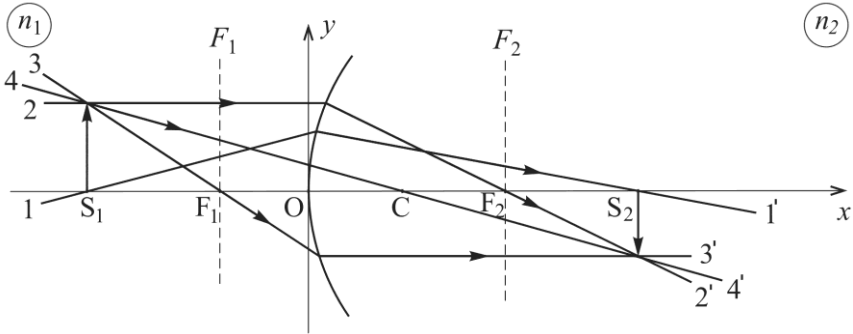


Рис. Т1.2. Преломление лучей на сферической границе раздела двух сред ($n_2 > n_1$), где F_1 – передний фокус, F_2 – задний фокус системы.

- Оптическая сила сферической преломляющей поверхности:

$$\Phi = (n_2 - n_1)/R.$$

- Фокусные расстояния сферической преломляющей поверхности:

$$f_1 = -\frac{n_1}{\Phi}, \quad f_2 = \frac{n_2}{\Phi}.$$

- Формула Ньютона:

$$F_1 S_1 \cdot F_2 S_2 = f_1 f_2 \quad \text{или}$$

$$(x_{S_1} - f_1) \cdot (x_{S_2} - f_2) = f_1 f_2.$$

- Формула сферического зеркала:

$$\frac{1}{x_{S_2}} + \frac{1}{x_{S_1}} = \frac{2}{R}.$$

- Фокусное расстояние сферического зеркала f (рис. Т1.3):

$$x_F \equiv f = R/2.$$

- Формула тонкой линзы:

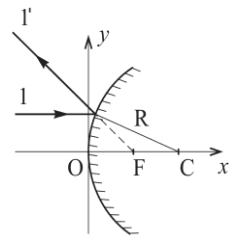


Рис. Т1.3. Отражение света от сферической поверхности радиуса R .

$$\frac{n_2}{x_{S_2}} - \frac{n_1}{x_{S_1}} = \Phi,$$

где Φ – оптическая сила тонкой линзы, n_1 и n_2 – показатели преломления сред слева и справа от линзы.

Когда линза находится в однородной среде ($n_1 = n_2$), формула приводится к виду:

$$\frac{1}{x_{S_2}} + \frac{1}{x_{S_1}} = \frac{1}{f},$$

где f – фокусное расстояние линзы.

- Оптическая сила тонкой линзы:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{n - n_1}{R_1} + \frac{n_2 - n}{R_2},$$

где n – показатель преломления материала линзы, R_1 и R_2 – радиусы сферических поверхностей. Если по обе стороны от линзы показатели преломления сред одинаковы ($n_1 = n_2 \equiv n_0$), то

$$\Phi = (n - n_0) \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

- Оптическая сила толстой линзы:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n} \Phi_1 \Phi_2 = (n - n_0) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{(n - n_0)^2 d}{n R_1 R_2},$$

где Φ_1 и Φ_2 – оптические силы преломляющих поверхностей линзы, d – её толщина, n – показатель преломления материала линзы, n_0 – показатель преломления среды, в которой находится линза (если по обе стороны от линзы показатели преломления сред одинаковы).

- Формула центрированной оптической системы:

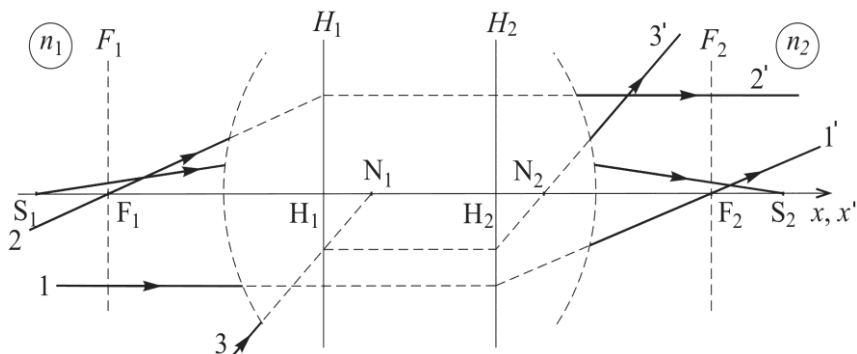


Рис. Т1.4. Схема центрированной оптической системы, где H_1 и H_2 – главные, F_1 и F_2 – фокальные плоскости (точки H_1, H_2, F_1, F_2 – их пересечения с главной оптической осью). N_1 и N_2 – узловые точки.

$$\frac{n_2}{x'_{S_2}} - \frac{n_1}{x_{S_1}} = \Phi \quad \text{или} \quad \frac{f'}{x'_{S_2}} + \frac{f}{x_{S_1}} = 1,$$

где
$$\Phi = \frac{n_2}{f'} = -\frac{n_1}{f}$$

– оптическая сила системы, n_1 и n_2 – показатели преломления сред слева и справа от крайних преломляющих поверхностей оптической системы соответственно;

$$f' \equiv x'_{F_2}, \quad f \equiv x_{F_1}$$

– заднее и переднее фокусные расстояния системы;

x -координаты точек с индексом 1 (S_1 и F_1) отсчитываются от главной точки H_1 , а x' - координаты точек с индексом 2 (S_2 и F_2) отсчитываются от главной точки H_2 .

- Соотношение между фокусными расстояниями оптической системы:

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n_2}{n_1}.$$

- Координаты узловых точек N_1 и N_2 :

$$x_{N_1} = x_{F_1} + x'_{F_2}, \quad x'_{N_2} = x'_{F_2} + x_{F_1}.$$

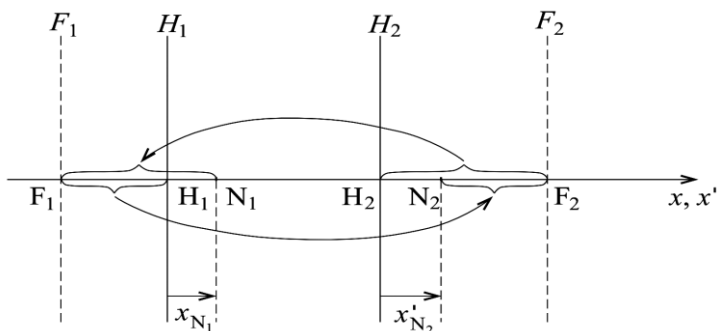


Рис. Т1.5. Положения узловых точек N_1 и N_2 оптической системы.

- Оптическая сила Φ системы, состоящей из двух оптических систем с общей оптической осью:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n} \Phi_1 \Phi_2,$$

где Φ_1 и Φ_2 – оптические силы первой и второй систем соответственно, d – расстояние от задней главной плоскости первой системы до передней главной плоскости второй системы (в случае двух тонких линз – расстояние между ними), n – показатель преломления среды между системами.

- Координаты главных точек x_H и x'_H системы, состоящей из двух оптических систем:

$$x_H = \frac{d}{n} \cdot \frac{\Phi_2}{\Phi}, \quad x'_H = -\frac{d}{n} \cdot \frac{\Phi_1}{\Phi},$$

где x_H – координата передней главной плоскости системы, отсчитываемая от передней главной плоскости первой системы, x'_H – координата задней главной плоскости системы, отсчитываемая от задней главной плоскости второй системы.

У тонкой линзы её главные плоскости совпадают с плоскостями линзы (и проходят через оптический центр линзы).

- Координаты вершин O_1 и O_2 толстой линзы, отсчитываемые от её главных точек H_1 и H_2 соответственно:

$$x_{O_1} = -\frac{d}{n} \cdot \frac{\Phi_2}{\Phi}, \quad x'_{O_2} = \frac{d}{n} \cdot \frac{\Phi_1}{\Phi}.$$

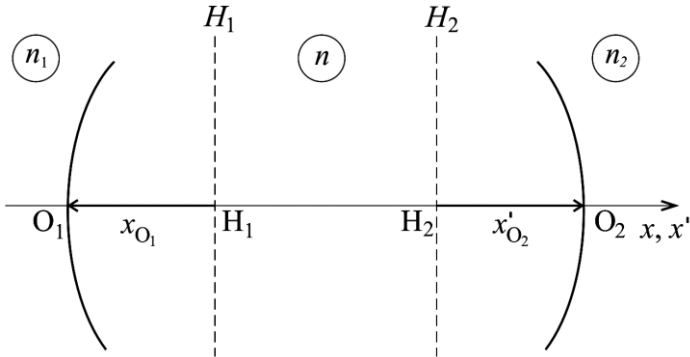


Рис. Т1.6. Схематическое представление толстой линзы.

- Коэффициент линейного (поперечного) увеличения k тонкой линзы и сферического зеркала:

$$k = \left| \frac{y_2}{y_1} \right| = \left| \frac{x_{S_2}}{x_{S_1}} \right|,$$

где y_1 – высота предмета, y_2 – высота изображения, $x_{S_{1,2}}$ – расстояния до линзы (или до вершины сферического зеркала) от предмета и изображения соответственно.

1.1. Стоящий на берегу озера человек видит Солнце и его отражение от гладкой поверхности воды. Угол между лучами, идущими от Солнца и его отражения равен $\alpha = 30^\circ$. На какое расстоя-

ние L от берега надо отойти человеку, чтобы отражение пропало? Считать поверхность берега горизонтальной, а высоту расположения глаз равной $h = 1,5$ м.

1.2. Человек ростом $h_0 = 1,8$ м стоит перед висющим вертикально зеркалом на расстоянии $L = 2$ м от него. Глаза находятся на высоте $\Delta h = 0,1$ м от макушки. а) При каком минимальном размере x зеркала он будет видеть себя во весь рост? б) Каковы при этом координаты верхнего x_v и нижнего x_n краев зеркала? в) Какая часть отражения пропадет, если поставить на его место человека ростом $h_1 = 1,5$ м?

1.3. В стороне от плоского зеркала CD в точке A стоит первый человек. Второй человек из точки B идет по направлению к плоскому зеркалу по прямой, проходящей перпендикулярно через середину зеркала. Все размеры указаны на рис. 1.1. а) Какое расстояние l пройдет второй человек до того момента, когда они увидят друг друга в зеркале? б) Какое кратчайшее расстояние x и в каком направлении должен пройти второй человек, чтобы увидеть первого в зеркале? в). Оба человека стоят на месте. На какой угол $\Delta\varphi$ надо повернуть зеркало относительно точки D , чтобы они увидели друг друга в зеркале?

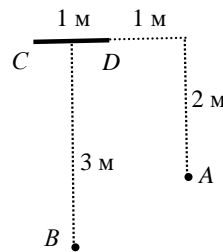


Рис. 1.1. Расположение зеркала CD и точек A и B .

1.4. Два плоских зеркала расположены под углом α друг к другу. Между ними находится точечный источник света. Изображение источника в первом зеркале находится на расстоянии $a_1 = 6$ см от источника, а во втором зеркале – на расстоянии $a_2 = 8$ см от источника. Расстояние между изображениями источника $l = 10$ см. Найти угол α между зеркалами.

1.5. Два небольших плоских зеркала расположены на одинаковых расстояниях друг от друга и от источника света. Каким должен быть угол α между зеркалами, чтобы луч после двух последовательных отражений а) возвращался к источнику; б) вернулся к источнику по пройденной ранее траектории?

1.6. Два зеркала образуют двугранный угол $\alpha < \pi$. На одно из зеркал под углом φ к нормали падает луч света, лежащий в плоскости, перпендикулярной ребру двугранного угла. Определить угол

отклонения θ этого луча от первоначального направления после отражения от обоих зеркал.

1.7. Два плоских зеркала образуют двугранный угол $\alpha < \pi$. Луч света, перпендикулярный ребру двугранного угла отражается последовательно от обоих зеркал. Систему зеркал поворачивают вокруг ребра на угол β вокруг оси, лежащей в плоскости обоих зеркал. На какой угол ψ от своего первоначального направления отклонится после этого отраженный луч?

1.8. Два плоских зеркала образуют двугранный угол $\alpha = \pi/n$, где n – целое число. Точечный источник света S находится между зеркалами. Определить число N изображений источника в зеркалах.

1.9. Два плоских зеркала образуют двугранный угол $\alpha = 2\pi/a$, где a – любое число, больше 2. Точечный источник света S находится между зеркалами и равноудален от них. Определить число N изображений источника в зеркалах.

1.10. Точка A находится между тремя плоскими зеркалами (рис. 1.2). В каком направлении должен выходить луч из точки A , чтобы после последовательного отражения в зеркалах он вернулся в исходную точку?

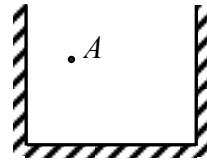


Рис. 1.2. Расположение зеркал и точки A .

1.11. В каком направлении нужно пустить луч света из точки A , находящейся внутри зеркального ящика, чтобы он попал в точку B , отразившись по одному разу от всех четырех стенок (рис. 1.3)? Точки A и B находятся в одной плоскости, перпендикулярной стенкам ящика.

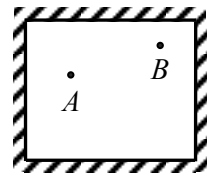


Рис. 1.3. Расположение точек A и B в зеркальном ящике.

1.12. Показать, что произвольный луч света, последовательно отразившись от трех взаимно перпендикулярных плоских зеркал, пойдет в строго противоположном направлении.

1.13. Луч света параллельный оптической оси вогнутого сферического зеркала радиусом R и отстоящий от неё на расстоянии a , и после отражения пересекает оптическую ось в точке фокуса. При каком соотношении между a и R можно считать, что фокусное расстояние зеркала f равно $R/2$ с относительной ошибкой менее 1%?

1.14. Доказать, что для сферических зеркал произведение расстояний от фокуса до точечного источника и его изображения (s_1 и s_2 соответственно) равно квадрату фокусного расстояния f зеркала.

1.15. Показать, что коэффициент линейного увеличения k вогнутого сферического зеркала равен отношению расстояний от изображения b и предмета a до зеркала.

1.16. Предмет высотой $h = 0,04$ м находится на расстоянии $a = 0,20$ м от вогнутого зеркала с радиусом кривизны $R = 0,30$ м. Найти высоту H изображения предмета.

1.17. Вогнутое зеркало дает действительное изображение предмета с увеличением $k_1 = 5$. Если переместить предмет на некоторое расстояние вдоль главной оптической оси, то изображение переместится вдоль оси на такое же расстояние. Найти коэффициент увеличения k_2 при новом положении предмета.

1.18. Расстояние от точечного источника света до вогнутого зеркала равно $d = 2R$, где R – радиус кривизны зеркала. Источник находится на главной оптической оси зеркала. На каком расстоянии b от зеркала находится его изображение? Построить ход лучей.

1.19. На вогнутое сферическое зеркало падает луч AB , пересекающий главную оптическую ось зеркала в точке E . Отраженный от зеркала луч BD пересекает ту же ось в точке L (рис. 1.4). Найти построением положение фокуса зеркала.

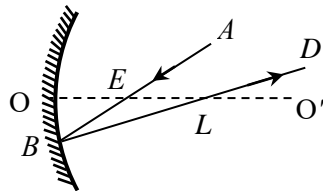


Рис. 1.4. Отражение луча в сферическом зеркале.

1.20. Найти построением ход луча после отражения в вогнутом и выпуклом сферических зеркалах (рис. 1.5), где F – фокус зеркала, OO' – оптическая ось).

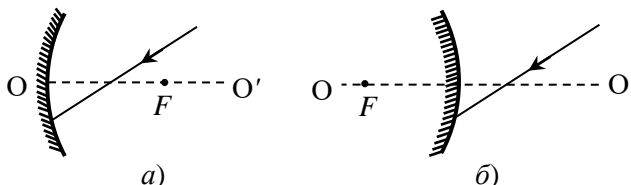


Рис. 1.5. Отражение луча в вогнутом (а) и выпуклом (б) сферических зеркалах.

1.21. Точка S' является изображением точечного источника света S в сферическом зеркале, оптическая ось которого OO' (рис. 1.6). Найти построением положение сферического зеркала и его фокуса F .

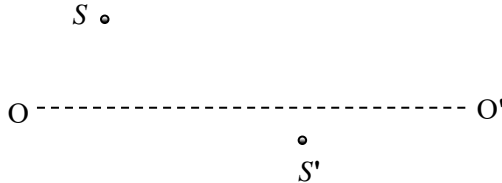


Рис. 1.6. Положение главной оптической оси OO' сферического зеркала, источника света S и его изображения S' .

1.22. Построить изображение стрелки AB длиной $l = f/2$ в вогнутом сферическом зеркале с фокусным расстоянием f . Начало стрелки находится на оптической оси зеркала на расстоянии $2f$ от его полюса (рис. 1.7). Стрелка наклонена под углом $\alpha = 30^\circ$ к оптической оси зеркала.

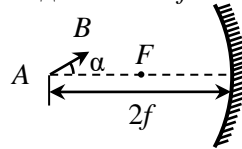


Рис. 1.7. Расположение стрелки и сферического зеркала.

1.23. Параллельный пучок лучей падает перпендикулярно на непрозрачный экран с круглым отверстием диаметром $d = 4$ см. На расстоянии $a = 16$ см за экраном расположено выпуклое сферическое зеркало с радиусом кривизны $R = 64$ см, главная оптическая ось которого совпадает с осью пучка. Отраженный от зеркала пучок света образует на экране светлое кольцо вокруг отверстия. Определить диаметр D этого кольца.

1.24. Тонкий карандаш длиной $l = 6$ см расположен вдоль главной оптической оси выпуклого сферического зеркала. Изображение его ближайшего к зеркалу конца находится от зеркала на расстоянии $a_1 = 20$ см, а дальнего – на расстоянии $a_2 = 24$ см. Определить фокусное расстояние f зеркала.

1.25. Точечный источник света находится на главной оптической оси вогнутого сферического зеркала радиусом $R = 80$ см. Расстояние от источника до зеркала $a = 60$ см. На каком расстоянии x от вогнутого зеркала следует поместить плоское зеркало, чтобы лучи света после отражения от вогнутого зеркала и затем от плоского снова собрались в точке нахождения источника? Изменится ли

ответ задачи, если лучи сначала будут отражаться от плоского зеркала, а потом от вогнутого?

1.26. Выпуклое и вогнутое сферические зеркала одинакового радиуса кривизны R находятся на расстоянии $2R$ друг от друга. В какой точке A на общей оптической оси зеркал следует поместить точечный источник света, чтобы лучи после отражения сначала в выпуклом зеркале а затем в вогнутом вернулись в точку A ?

1.27. Какую форму должна иметь зеркальная поверхность, чтобы падающий на нее пучок параллельных лучей после отражения фокусировался в точку?

1.28. Человек стоит на берегу пруда глубиной $H = 1$ м. Камень, лежащий на дне, он видит под углом $\varphi = 60^\circ$ относительно нормали к поверхности воды. На каком расстоянии h от поверхности воды находится изображение камня, если показатель преломления воды равен $n = 1,33$?

1.29. Короткий стержень опущен одним концом в прозрачную жидкость с показателем преломления n под углом α . Наблюдатель смотрит сверху почти вертикально, и ему кажется, что погруженная в жидкость часть стержня отклонена от остающейся над поверхностью на угол β (рис. 1.8). Определить этот угол. При каком угле наклона стержня α угол смещения β будет максимальным?

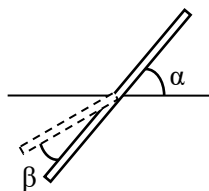


Рис. 1.8. Стержень, опущенный в жидкость.

1.30. На поверхности водоема глубиной $H = 3$ м плавает фанерный круг радиуса $r = 0,5$ м. Над центром круга на некоторой высоте h расположен точечный источник света. Показатель преломления воды n . Чему равен радиус R тени на дне водоема? Какой максимальный радиус теневого пятна можно получить, меняя высоту h источника света над центром круга.

1.31. Луч света падает под углом i на боковую грань равнобедренной стеклянной призмы с преломляющим углом при вершине θ . Призма находится в воздухе, показатель преломления стекла n . На какой угол φ отклонится луч от своего первоначального направления, выйдя из другой боковой грани призмы?

1.32. Луч света входит в стеклянную призму под углом $\alpha = \pi/6$ и выходит из призмы в воздух под углом $\gamma = \pi/3$. Угол

отклонения от его первоначального направления равен $\varphi = \pi / 4$. Найти преломляющий угол θ призмы.

1.33. Луч света входит в прозрачную призму с преломляющим углом при вершине θ . Показатель преломления материала призмы n . Показать, что угол отклонения луча призмой от своего первоначального направления будет минимальным (угол наименьшего отклонения луча призмой φ_{\min}), если угол падения луча на призму будет равен углу его выхода из призмы. Получить соотношение, связывающее φ_{\min} с преломляющим углом призмы θ .

1.34. В каких пределах может изменяться угол отклонения луча φ призмой из оптического стекла флинта ($n = 1,8$) с преломляющим углом $\theta = 60^\circ$?

1.35. Определить преломляющий угол θ стеклянной ($n = 1,5$) призмы, если угол наименьшего отклонения луча призмой равен преломляющему углу.

1.36. Каким должен быть показатель преломления n материала призмы, чтобы угол наименьшего отклонения луча призмой был равен преломляющему углу?

1.37. Луч скользит вдоль боковой грани призмы, сечение которой имеет форму равнобедренного треугольника. Показатель преломления материала призмы $n = 1,6$. При каком предельном преломляющем угле θ_{\min} призмы преломленные лучи претерпят полное отражение на второй боковой грани призмы?

1.38. Призма с преломляющим углом $\theta = 60^\circ$ сделана из оптического стекла с показателем преломления $n = 1,75$. При каком угле падения α луча света на одну из граней призмы его выход через вторую грань становится невозможным?

1.39. Сечение стеклянной призмы имеет вид равнобедренного треугольника. Одна из равных граней призмы посеребрена. Луч света падает перпендикулярно поверхности непосеребренной грани призмы и после двух отражений выходит через основание призмы перпендикулярно ему. Определить преломляющий угол θ призмы.

1.40. Луч света падает на плоскопараллельную пластинку толщиной d из стекла с показателем преломления n под углом φ относительно нормали к поверхности пластинки. На какое расстояние x в перпендикулярном направлении сместится луч, пройдя пла-

стинку? Какое максимальное смещение луча можно получить, меняя угол падения луча на пластинку?

1.41. На лежащую на горизонтальной поверхности монету поставили тонкостенный цилиндрический стакан с жидкостью. При каком показателе преломления n монета при наблюдении через боковую стенку станет невидимой?

1.42. Можно ли что-нибудь увидеть через две смежные грани стеклянного кубика? Показатель преломления стекла $n = 1,5$.

1.43. Каким должен быть внешний радиус R изгиба световода, сделанного из прозрачного материала с показателем преломления n , чтобы при диаметре световода d свет, вошедший в световод перпендикулярно плоскости его поперечного сечения, распространялся, не выходя через боковую поверхность наружу?

1.44. Собирающая тонкая линза с фокусным расстоянием f установлена так, что расстояние между предметом и его действительным изображением равно $l = 6,25f$. Найти расстояния a и b от предмета до линзы и от линзы до изображения соответственно.

1.45. Собирающая тонкая линза дает четкое изображение предмета высотой H_1 . Не меняя положения экрана и предмета, линзу перемещают к экрану и находят другое четкое изображение предмета высотой H_2 . Определить высоту предмета h .

1.46. Чему равно минимально возможное расстояние l_{\min} между предметом и его изображением для тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием f ?

1.47. Предмет находится на расстоянии l от экрана. Между ними помещают тонкую собирающую линзу. Четкое изображение предмета наблюдается при двух положениях линзы, расстояние между которыми равно d . Определить фокусное расстояние линзы.

1.48. Предмет находится на расстоянии $l = 0,9$ м от экрана. Между ними помещают тонкую собирающую линзу, которая при одном положении дает на экране увеличенное изображение предмета, а при другом – уменьшенное. Отношение размеров изображений $\eta = 4$. Определить фокусное расстояние f линзы.

1.49. Фокусное расстояние собирающей тонкой линзы $f = 5$ см. Точечный источник света находится на главной оптической оси линзы на расстоя-

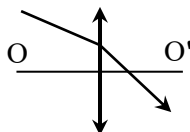


Рис. 1.9. Ход луча через собирающую линзу.

нии $a = 6$ см от неё. Линзу разрезали пополам и половинки раздвинули на расстояние $2d = 1$ см симметрично относительно оси. Найти расстояние S между двумя изображениями точки.

1.50. На рис.1.9 показано прохождение луча через тонкую собирающую линзу в однородной изотропной среде. OO' -главная оптическая ось. Найти построением положение фокусов. Использовать параксиальное приближение.

1.51. На рис. 1.10 изображен луч AB , прошедший через тонкую рассеивающую линзу, находящуюся в воздухе. Построить па-

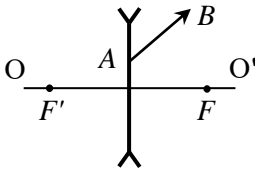


Рис. 1.10. Ход луча AB после рассеивающей лин-

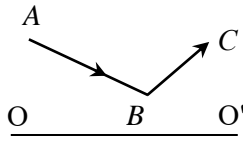


Рис. 1.11. Ход луча до и после тонкой линзы.

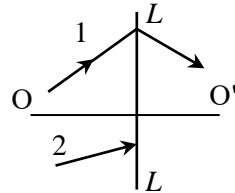


Рис. 1.12. Ход лучей 1 и 2 относительно линзы LL .

дающий на линзу луч. OO' – главная оптическая ось, F и F'' – главные фокусы линзы. Использовать параксиальное приближение.

1.52. На рис. 1.11 показаны главная оптическая ось OO' тонкой линзы и ход лучей AB до линзы и BC после неё. Найти построением положение главных фокусов F и F'' линзы.

1.53. Найти построением ход луча 2 за тонкой линзой LL , находящейся в однородной среде, если известны положение линзы, её оптической оси OO' и ход луча 1 (рис. 1.12).

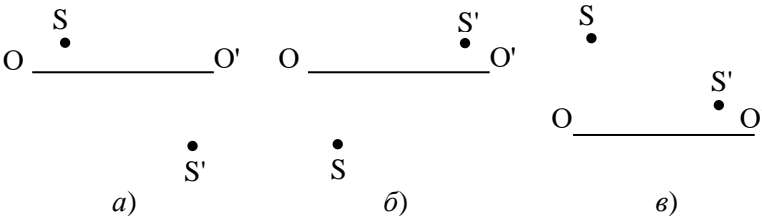


Рис. 1.13. Положение главной оптической оси OO' тонкой линзы, источника света S и его изображения S' .

1.54. На рис. 1.13 а) б) в) показаны источника света S и его изображения S' относительно главной оптической оси OO' тонкой

линзы в однородной среде. Найти построением положение линзы и ее фокусов для каждого случая.

1.55. Найти построением положение источника света S , если известны направления двух вышедших из источника лучей после их преломления в тонкой линзе, находящейся в однородной среде (рис. 1.14). Один из лучей пересекается с главной оптической осью OO' линзы в её фокусе F .

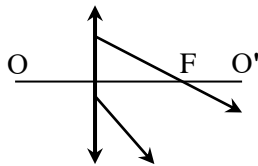


Рис. 1.14. Ход двух лучей после собирающей линзы.

1.56. Две собирающие тонкие линзы с фокусными расстояниями $f_1 = 20$ см и $f_2 = 40$ см установлены соосно, расстояние между ними $d = 150$ см. Предмет высотой $l = 2$ см находится на расстоянии $a = 25$ см от первой линзы. На каком расстоянии b от второй линзы получится изображение предмета после прохождения лучей через обе линзы? Определить высоту L полученного изображения.

1.57. При изготовлении двухлинзового объектива фотокамеры была использована тонкая рассеивающая линза с фокусным расстоянием $f_1 = 5$ см, которая находилась на расстоянии $l = 45$ см от пленки. Где необходимо поместить тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием $f_2 = 8$ см, чтобы на пленке получалось резкое изображение удаленных предметов?

1.58. На систему из трех тонких линз падает параллельный пучок лучей. Собирающая (1) и рассеивающая (2) линзы с фокусными расстояниями $f_1 = 10$ см и $f_2 = 20$ см находятся на расстоянии $d = 15$ см друг от друга (рис. 1.15). На каком расстоянии a от рассеивающей линзы нужно поместить вторую собирающую линзу (3) с фокусным расстоянием $f_3 = 10$ см, чтобы выходящий из системы пучок лучей оставался параллельным?

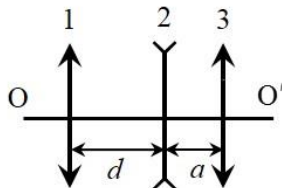


Рис. 1.15. Расположение тонких линз.

1.59. Фокусное расстояние объектива микроскопа $f_{об} = 3$ мм, а окуляра $f_{ок} = 5$ см. Предмет находится на расстоянии $a = 3,1$ мм от объектива. Определить увеличение k микроскопа, если: а) изобра-

жение, даваемое микроскопом, рассматривать с расстояния наилучшего зрения $d_0 = 25$ см; б) глаз человека аккомодирован на бесконечность, то есть из окуляра выходят параллельные пучки лучей.

1.60. Микроскоп имеет объектив с фокусным расстоянием $f_1 = 1$ см и окуляр с фокусным расстоянием $f_2 = 3$ см; расстояние между ними $d = 20$ см. На каком расстоянии a от объектива должен находиться предмет, чтобы даваемое микроскопом изображение, находилось на расстоянии $d_0 = 25$ см от глаза?

1.61. Фокусные расстояния объектива и окуляра трубы Галилея равны $f_1 = 45$ см и $f_2 = 5$ см. При замене линз в трубе на две собирающие получилась труба Кеплера с тем же увеличением, что у трубы Галилея. Найти фокусные расстояния f_3 и f_4 собирающих линз.

1.62. Зрительная труба с фокусным расстоянием объектива $f = 24$ см установлена на бесконечность. После того как окуляр трубы передвинули на некоторое расстояние, стали четко видны предметы, удаленные от объектива на расстояние $d = 6$ м. На какое расстояние l был передвинут окуляр?

1.63. Фокусное расстояние двояковыпуклой линзы из оптического стекла с показателем преломления $n = 1,6$ равно $f = 10$ см. Найти фокусное расстояние этой линзы, если её поместить в бензол, показатель преломления которого $n_1 = 1,5$?

1.64. Тонкая стеклянная линза с оптической силой $\Phi = 5$ дптр при погружении в прозрачную жидкость становится рассеивающей с фокусным расстоянием $f = 100$ см. Определить показатель преломления жидкости n_2 , если показатель преломления стекла линзы $n_1 = 1,5$.

1.65. Двояковыпуклая стеклянная линза с одинаковыми радиусами кривизны поверхностей имеет в воздухе фокусное расстояние f_1 , а в воде f_2 . Чему равны фокусные расстояния f' и f'' линзы, если она расположена на границе воздуха и воды? Показатель преломления воды $n = 4/3$.

1.66. Наблюдатель смотрит на маленькую рыбку, плавающую в тонкостенном сферическом аквариуме радиуса R ,

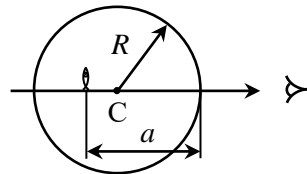


Рис. 1.16. Рыбка в сферическом аквариуме.

заполненном водой (показатель преломления воды $n = 4/3$). Глаз человека и рыбка находятся на прямой, проходящей через центр аквариума (рис. 1.16). Расстояние от рыбки до ближайшей к наблюдателю стенки аквариума равно a . На каком расстоянии b от этой же стенки находится изображения рыбки? С каким максимальным линейным увеличением k_{\max} можно наблюдать рыбку?

1.67. Показать, что оптическая сила Φ центрированной системы из двух тонких линз с оптическими силами Φ_1 и Φ_2 , находящихся в воздухе на расстоянии d друг от друга, может быть найдена по формуле: $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - d\Phi_1\Phi_2$.

1.68. Из плоскопараллельной стеклянной пластинки изготовили три тонкие линзы (рис. 1.17). Фокусное расстояние сложенных вместе линз 1 и 2 равно $-f_{01}$, а сложенных вместе линз 2 и 3 равно $-f_{02}$. Определить фокусные расстояния f_1, f_2, f_3 каждой из линз.

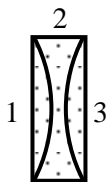


Рис. 1.17. Три тонких линзы.

1.69. Две тонкие собирающие линзы с фокусными расстояниями $f_1 = 20$ см и $f_2 = 15$ см, будучи прижаты вплотную друг к другу, дают четкое изображение предмета на экране, если предмет находится на расстоянии $a = 15$ см от первой линзы. На какое расстояние x нужно передвинуть экран, чтобы на нем получилось четкое изображение предмета, если вторую линзу отодвинуть от первой на $l = 5$ см?

1.70. Плоская поверхность тонкой плоско-вогнутой линзы с фокусным расстоянием f посеребрена. Точечный источник света расположен на главной оптической оси линзы на расстоянии $a_1 > |f|$ от ее вогнутой поверхности. Где будет находиться изображение источника? Построить ход лучей.

1.71. У двояковыпуклой тонкой линзы радиусы кривизны поверхностей равны R_1 и R_2 , при этом поверхность с радиусом кривизны R_1 посеребрена. Найти фокусное расстояние f полученного таким образом зеркала.

1.72. Плоско-выпуклая тонкая линза из материала с показателем преломления n , у которой посеребрена плоская сторона, имеет фокусное расстояние f_1 . Каким будет фокусное расстояние f_2 этой же линзы, если у неё посеребрить не плоскую, а выпуклую сторо-

ну? Свет в обоих случаях падает с непосеребренной стороны линзы.

1.73. В лежащее горизонтально вогнутое сферическое зеркало налито немного воды (рис. 1.18). Оказалось, что такая оптическая система при некотором положении источника S дает два его действительных изображения S_1 и S_2 на расстояниях $b_1 = 54$ см и $b_2 = 36$ см от зеркала (рис. 1.18). Определить радиус кривизны зеркала R и расстояние a от него до источника S . Показатель преломления воды $n = 4/3$.

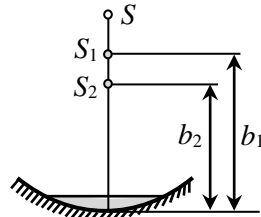


Рис. 1.18. Источник S над вогнутым сферическим зеркалом с налитой в него водой.

1.74. Центрированная оптическая система состоит из двух систем с оптическими силами Φ_1 и Φ_2 . Вывести формулы для координат главных точек такой системы: $x_H = \frac{d}{n} \cdot \frac{\Phi_2}{\Phi}$, $x_{H'} = -\frac{d}{n} \cdot \frac{\Phi_1}{\Phi}$,

где x_H – координата передней главной плоскости системы, отсчитываемая от передней главной плоскости первой системы, $x_{H'}$ – координата задней главной плоскости системы, отсчитываемая от задней главной плоскости второй системы, Φ – оптическая сила системы, d – расстояние от задней главной плоскости первой системы до передней главной плоскости второй системы, $n = n_2/n_1$ – относительный показатель преломления среды между первой и второй системами.

1.75. Показать, что для фокусного расстояния центрированной оптической системы, находящейся в воздухе и состоящей из двух подсистем, справедливо соотношение: $|f| = |f_1 f_2| / \Delta$, где f_1 и f_2 – передние фокусные расстояния подсистем, Δ – расстояние от заднего фокуса первой подсистемы до переднего фокуса второй подсистемы.

1.76. Определить положение передней H и задней H' главных плоскостей и переднего F и заднего F' фокусов находящейся в воздухе стеклянной линзы (показатель преломления стекла $n = 1,5$) толщиной $d = 3,5$ см, если:

а) передняя поверхность линзы – выпуклая (радиус кривизны $R_1 = 13$ см), а задняя – плоская;

б) обе поверхности линзы выпуклые с радиусами кривизны $R = 13$ см;

в) передняя поверхность линзы – выпуклая ($R_1 = 6,5$ см), задняя – вогнутая ($R_2 = 13$ см);

г) передняя поверхность линзы – вогнутая ($R_1 = 6,5$ см), задняя – выпуклая ($R_2 = 13$ см).

1.77. Какой должна быть толщина двояковыпуклой кварцевой линзы с одинаковыми радиусами кривизны поверхностей $R = 5$ см, чтобы в воздухе линза была телескопической (её фокусное расстояние $f = \infty$)? Показатель преломления кварца $n = 1,54$.

1.78. Толстая линза изготовлена из материала с показателем преломления n имеет форму шара радиуса R . Определить фокусные расстояния линзы, а также положения её главных плоскостей и фокусов. При каком показателе преломления n фокусы линзы будут находиться внутри неё?

1.79. Преломляющие поверхности выпукло-вогнутой линзы, находящейся в воздухе, являются концентрическими сферами. Большой радиус кривизны равен R , толщина линзы d , показатель преломления n . Определить положение главных плоскостей и фокусное расстояние f линзы. Собирающей или рассеивающей является такая линза?

1.80. Радиус кривизны сферической поверхности стеклянной плоско-выпуклой линзы равен $R = 20$ см, толщина линзы $d = 3$ см, показатель преломления стекла $n = 1,5$. На каком расстоянии l от ближайшей поверхности линзы будет находиться изображение предмета, расположенного на расстоянии $s = 60$ см от линзы со стороны: а) выпуклой поверхности; б) плоской поверхности?

1.81. На рис. 1.19 показаны главная оптическая ось OO' толстой линзы, положение её передней главной плоскости H и ход луча 1 до и после линзы. Найти построением поло-

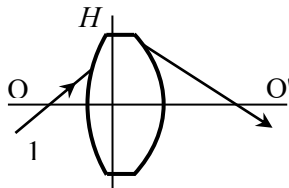


Рис. 1.19. Ход луча 1 через толстую линзу.

жение фокусов F , F' и задней главной плоскости H' линзы.

1.82. Две одинаковые плоско-выпуклые стеклянные линзы имеют радиус кривизны сферических поверхностей $R = 5$ см, толщину $d = 2,5$ см, показатель преломления стекла $n = 1,52$. Линзы прижаты вплотную друг к другу, при этом выпуклая поверхность одной линзы касается плоской поверхности другой. Определить оптическую силу Φ системы линз в воздухе.

1.83. Оптическая система состоит из двух стеклянных шаров (показатель преломления стекла $n = 1,5$), радиусы которых $R_1 = 5$ см и $R_2 = 1$ см. Шары находятся в воздухе. Каким должно быть расстояние l между центрами шаров, чтобы система была телескопической, если объективом является больший шар?

1.84. На систему одинаковых прозрачных шариков (радиус R , показатель преломления $n=2$), установленных вплотную друг к другу, падает плоская электромагнитная волна. Найти положение изображения, полученного в данной системе, если число шариков равно $N = 2013$. Сферическими aberrациями пренебречь.

1.85. Найти построением положение фокусов и главных

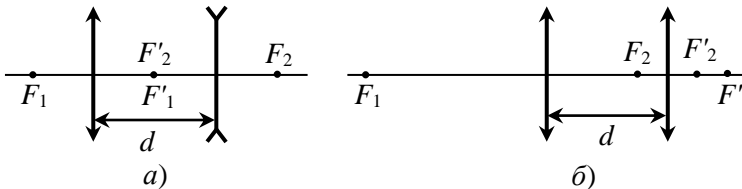


Рис. 1.20. Взаимное расположение линз в системах.

плоскостей центрированных оптических систем из двух тонких линз, находящихся в воздухе на расстоянии d друг от друга. Положение фокусов F_1 , F'_1 и F_2 , F'_2 линз известно (рис. 1.20 а, б):

$$a) f_1 = -f_2 = d / 2 ;$$

$$b) f_1 = 1,5 d , f_2 = d / 4 .$$

1.86. На рис. 1.21 показаны оптическая ось OO' и передний фокус F центрированной оптической системы в воздухе, а также сопряженные точки S и S' . Найти построением положение главных плоско-

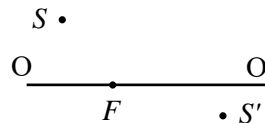


Рис. 1.21. Положение сопряженных точек S и S' в оптической системе.

стей H , H' и заднего фокуса F' системы.

1.87. Построить изображение предмета AB в центрированной оптической системе, у которой известно положение фокусов F , F' и главных плоскостей H , H' , для двух случаев (рис. 1.22 а, б). Система находится в воздухе.

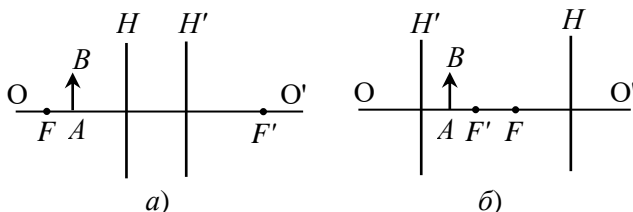


Рис. 1.22. Расположение предмета AB в оптической системе.

ма находится в воздухе.

1.88. Для центрированной оптической системы известно положение её фокусов F , F' и главных плоскостей H , H' . Найти построением положение изображения S' точки S для следующих относительных расположений точек S , F , F' , H , H' : а) $F'H'SHF$; б) $H'SF'FH'$; в) $FSHH'F'$.

1.89. Заданы положения главных плоскостей H и H' и фокусов F и F' некоторой оптической системы (рис. 1.23). Найти построением положение узловых точек N и N' .

1.90. Определить положение главных плоскостей H и H' , фокусов F и F' , а также фокусные расстояния f и f' оптической системы, состоящей из двух тонких линз с фокусными расстояниями $f_1 = 5$ см и $f_2 = -5$ см, расположенных в воздухе на расстоянии $d = 10$ см друг от друга.

1.91. С одной стороны двояковыпуклой симметричной тонкой линзы из стекла (показатель преломления $n = 1,5$) находится вода (показатель преломления воды $n_1 = 1,33$), с другой – воздух. Радиусы кривизны поверхностей линзы $R = 20$ см. Найти положение главных плоскостей, фокусов и узловых точек системы.

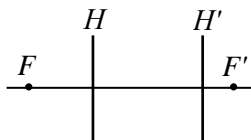


Рис. 1.23. Расположение фокусов F , F' и главных плоскостей H , H' системы.

§2. Электромагнитные волны оптического диапазона. Уравнения Максвелла

- Уравнения Максвелла в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

где \mathbf{E} и \mathbf{D} , \mathbf{H} и \mathbf{B} – напряженность и индукция соответственно электрического и магнитного полей, ρ и \mathbf{j} – плотности несвязанного электрического заряда и тока проводимости.

- Уравнения Максвелла для вакуума:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

- Волновые уравнения для векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в вакууме:

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta \mathbf{H} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0,$$

где $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ – скорость света в вакууме.

- Уравнения бегущей плоской электромагнитной волны для векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \varphi),$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \varphi),$$

где E_0 и H_0 – амплитуды векторов E и H , ω – круговая частота, $k = \frac{\omega}{c} N$ – волновой вектор, N – единичный вектор волновой нормали.

- Волновое число k :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

где λ – длина волны.

- Уравнения бегущей плоской электромагнитной волны для векторов E и H в комплексной форме:

$$E(\mathbf{r}, t) = \tilde{E}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k}r)],$$

$$H(\mathbf{r}, t) = \tilde{H}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k}r)].$$

- Связь векторов E , H и k :

$$[\mathbf{k}, E] = \frac{\omega}{\varepsilon_0 c^2} H,$$

$$[\mathbf{k}, H] = -\omega \varepsilon_0 E.$$

- Связь мгновенных значений модулей векторов E и H :

$$\sqrt{\varepsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H.$$

- Уравнения плоской стоячей электромагнитной волны:

$$E(z, t) = e_x E_0 \cos(kz) \cos(\omega t),$$

$$H(z, t) = e_y H_0 \sin(kz) \sin(\omega t),$$

где e_x и e_y – орты декартовой системы координат.

- Объемная плотность энергии w электромагнитного поля в плоской бегущей волне в вакууме:

$$w = \varepsilon_0 E^2 = \mu_0 H^2.$$

Среднее за период T значение объемной плотности энергии поля равно:

$$\langle w \rangle_T = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{\mu_0 H_0^2}{2}.$$

- Плотность потока энергии в поле электромагнитной волны (вектор *Пойнтинга* S):

$$S = [E, H].$$

- Интенсивность I светового излучения:

$$I = \langle \mathbf{S} \rangle_T = c \cdot \langle w \rangle_T .$$

- Плотность потока импульса \mathbf{G} в поле электромагнитной волны в вакууме:

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{S}}{c} .$$

2.1. В поле плоской световой волны с частотой $\omega = 3,14 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ амплитуда магнитной индукции $B_0 = 10^{-6} \text{ Тл}$. Найти длину волны λ и амплитуду напряженности электрического поля E_0 .

2.2. Плоская световая волна с частотой ω распространяется в вакууме в направлении, составляющем углы α , β и γ с осями декартовой системы координат OX , OY и OZ . Найти разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний векторов напряженности электрического поля \mathbf{E} волны в точках с координатами x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2 и z_2 .

2.3. Составить уравнение плоской волны в вакууме, нормаль к волновому фронту которой параллельна направляющему вектору $\mathbf{a} = \{3, 0, 4\}$. Какой вид принимает это уравнение для гармонической волны с частотой ω ?

2.4. Точечный источник сферических световых волн находится на прямой между точками с радиус-векторами \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , в которых амплитуды вектора напряженности электрического поля равны E_{01} и E_{02} . Найти радиус-вектор \mathbf{r}_0 точки, в которой расположен источник света.

2.5. Электрический пробой в воздухе наступает, если напряженность электрического поля достигает величины $E_0 = 3 \text{ МВ/м}$. При какой минимальной интенсивности I_{\min} плоской электромагнитной волны можно наблюдать появление искры в воздухе?

2.6. Оценить среднюю мощность $\langle P \rangle$, при которой лазерный луч диаметром $d = 1 \text{ мм}$ вызывает электрический пробой газа, если потенциал ионизации газа $U = 10 \text{ В}$. Частота лазерного излучения $\nu = 4,8 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$.

2.7. Найти амплитуды напряженностей электрического E_0 и магнитного H_0 полей в плоской линейно-поляризованной волне, если её интенсивность $I = 10 \text{ Вт/м}^2$.

2.8. Оценить амплитуду магнитной индукции B_0 в пучке лазерного излучения с интенсивностью $I = 0,1 \text{ Вт/см}^2$.

2.9. Амплитуда вектора напряженности электрического поля плоской линейно-поляризованной световой волны в вакууме $E_0 = 200 \text{ В/м}$. Определить амплитуду напряженности магнитного поля H_0 и среднюю за период плотность потока энергии $\langle S \rangle_T$ в поле волны.

2.10. Оценить мощность P излучения Солнца, если вблизи поверхности Земли интенсивность солнечного света $I \approx 0,1 \text{ Вт/см}^2$. Радиус земной орбиты $R_{\text{орб}} \approx 1,5 \cdot 10^8 \text{ км}$. Считать, что Солнце излучает изотропно.

2.11. Шар радиусом $R = 0,2 \text{ м}$, находящийся в вакууме, облучается плоской электромагнитной волной с амплитудой вектора напряженности электрического поля $E_0 = 200 \text{ В/м}$. Найти энергию W , падающую на шар за время $\Delta t = 1 \text{ мин}$. Длина волны $\lambda \ll R$.

2.12. Показать, что для плоской электромагнитной волны, распространяющейся в вакууме в направлении оси OX , у которой вектор \mathbf{E} направлен вдоль оси OY , справедливы соотношения:

$$\partial B_z / \partial t = -\partial E_y / \partial x, \quad \partial E_y / \partial t = -c^2 \partial B_z / \partial x.$$

2.13. Электрическая компонента плоской бегущей электромагнитной волны описывается уравнением:

$$\mathbf{E}(x,t) = e_y E_0 \cos(\omega t - kx).$$
 Найти $\partial B_z / \partial t$ и $\partial B_z / \partial x$.

2.14. Вектор напряженности электрического поля плоской световой волны в вакууме изменяется по закону:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(z,t) = e_x E_0 \cos(\omega t - kz),$$
 где e_x – единичный орт вдоль оси координат OX . По какому закону изменяется магнитная компонента поля $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$?

2.15. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна, магнитная составляющая которой изменяется по закону $\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathbf{H}(x,t) = e_z H_0 \sin(\omega t - ky)$, где e_z – единичный орт вдоль оси координат OZ . Найти электрическую компоненту волны $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$.

2.16. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна, электрическая составляющая которой изменяется по закону:

$$\mathbf{E}(x,t) = e_y E_0 \sin(\omega t - kx),$$
 где e_y – единичный орт вдоль оси OY , $E_0 = 200 \text{ В/м}$, $\omega = 1,5 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$. Найти вектор \mathbf{H} в точке с координатой $x = 10 \text{ м}$ в момент времени $t = 50 \text{ нс}$.

2.17. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна, электрическая составляющая которой меняется по закону:

$E(z, t) = e_x E_0 \cos [\omega(t - z/c)]$. Найти вектор Пойнтинга S этой волны.

2.18. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна с частотой $\nu = 10^8$ Гц и амплитудой электрической составляющей $E_0 = 100$ мВ/м. Найти среднее за период колебаний значение модуля плотности тока смещения $\langle j_{\text{см}} \rangle$.

2.19. Интенсивность плоской электромагнитной волны с частотой ω , которая распространяется в вакууме, равна I . Найти амплитудное значение плотности тока смещения j_0 для этой волны.

2.20. Опыт Винера, экспериментально подтвердивший образование стоячих световых волн, заключался в следующем (рис. 2.1). На плоское металлическое зеркало MM направлялся по нормали монохроматический свет. Отраженный от зеркала пучок света интерферировал с падающим, в результате чего получалась стоячая световая волна. Под малым углом φ к поверхности зеркала располагалась стеклянная пластинка с тонким светочувствительным слоем эмульсии. После проявления на пластинке возникала система параллельных тёмных полос (O_1, O_2, O_3), соответствующих местам максимального выделения серебра. Определить угол φ между зеркалом и фотопластинкой, если при длине волны $\lambda = 550$ нм расстояние между полосами на поверхности пластинки составило $l = 0,5$ мм.

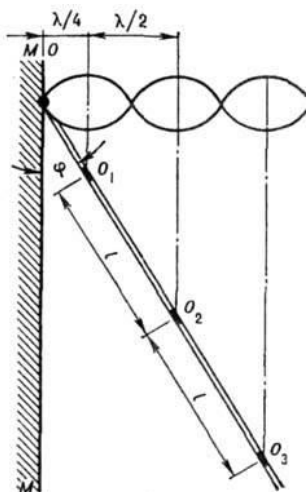


Рис. 2.1. Схема опыта Винера.

2.21. В вакууме навстречу друг другу распространяются две линейно поляризованные волны, электрические составляющие которых изменяются по закону: $E_1(r, t) = e_y E_0 \cos(\omega t - kx)$, $E_2(r, t) = e_y E_0 \cos(\omega t + kx)$, где e_y — единичный орт вдоль оси OY . Найти закон изменения $B(r, t)$.

2.22. Найти закон изменения магнитной составляющей $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ плоской электромагнитной волны в вакууме, если её электрическая составляющая меняется по закону: $E(z, t) = e_x E_0 \sin(kz) \cos(\omega t)$.

2.23. Найти закон изменения магнитной составляющей $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ плоской электромагнитной волны в вакууме, если её электрическая составляющая меняется по закону: $E(z, t) = e_y E_0 \cos(kz) \cos(\omega t)$.

2.24. Найти закон изменения электрической составляющей $E(\mathbf{r}, t)$ плоской стоячей электромагнитной волны в вакууме, если её магнитная составляющая меняется по закону: $B(z, t) = e_x B_0 \cos(kz) \sin(\omega t)$.

2.25. В вакууме вдоль оси ОХ установилась стоячая электромагнитная волна, электрическая составляющая которой равна $E = E_0 \cos kx \cos \omega t$. Найти проекцию на ось ОХ вектора Пойнтинга $S_x(x, t)$ и ее среднее за период колебаний значение $\langle S \rangle$.

2.26. В вакууме вдоль оси ОХ распространяются две плоские одинаково поляризованные электромагнитные волны, электрические составляющие которых описываются уравнениями: $E_1 = E_0 \cos(\omega t - kx)$ и $E_2 = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$. Найти среднее за период колебания значение плотности потока энергии $\langle S \rangle$.

2.27. В вакууме распространяются две плоские электромагнитные волны: одна – вдоль оси X, другая вдоль оси Y: $E_1 = E_0 \cos(\omega t - kx)$ и $E_2 = E_0 \cos(\omega t - ky)$, где вектор E_0 параллелен оси Z. Найти среднее значение плотности потока энергии $\langle S \rangle$ в точках плоскости $y = x$.

2.28. В вакууме вдоль оси X установилась стоячая электромагнитная волна с электрической составляющей $E = E_y = E_0 \cos kx \cos \omega t$. Найти плотности энергии электрической $w_{\text{эл}}(x, t)$ и магнитной $w_{\text{магн}}(x, t)$ составляющих и плотность потока энергии $S(x, t)$. Определить плотность полной энергии w волны в моменты времени $t = 0; T/8; T/4$, где T – период колебаний, а также полную энергию W , заключенную в области длиной $\lambda/4$ от узла до пучности E_y при площади сечения пучка σ .

2.29. Найти мощность P пучка с гауссовым распределением интенсивности: $I(x,y) = I_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{a^2}\right)$, где I_0 – интенсивность на оси пучка.

2.30. Найти энергию W светового импульса с распределением мощности: $P(t) = P_0 \exp(-t^2 / \tau^2)$.

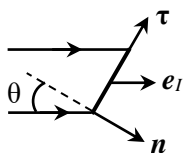


Рис. 2.1. Падение световой волны на непрозрачную пластину.

2.31. Плоская световая волна с интенсивностью I_0 падает под углом θ к нормали на непрозрачную пластину площадью σ и частично отражается от нее (рис. 2.1). Коэффициент отражения пластины равен R . Найти силу f , действующую на пластину, и её проекции на нормаль n к пластине, на плоскость пластины τ и на направление падения волны.

2.32. При падении световой волны с интенсивностью $I_0 = 1$ Вт/см² на пластинку под углом $\theta = 45^\circ$ половина энергии зеркально отражается, а другая половина поглощается. Чему равно давление p света на поверхность пластинки?

2.33. Лазерный импульс длительностью $\tau = 0,13$ мс с энергией $W = 10$ Дж падает нормально на плоскую поверхность с коэффициентом отражения $\rho = 0,5$. Найти среднее значение давления $\langle p \rangle$ лазерного импульса на поверхность, если диаметр светового пятна на поверхности $d = 10$ мкм.

2.34. Короткий световой импульс с энергией $W = 7,5$ Дж падает под углом $\theta = 30^\circ$ на пластинку с коэффициентом отражения $\rho = 0,6$. Найти импульс P , переданный пластинке.

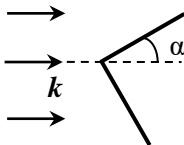


Рис. 2.2. Падение световой волны на прямой двугранный угол.

2.35. На пути плоской электромагнитной волны с амплитудой напряженности электрического поля E_0 расположен прямой двугранный угол, образованный перпендикулярными друг другу квадратными пластинами со стороной a . Волновой вектор k волны составляет угол α с поверхностью верхней пластины. Коэффициент отражения пластин

равен r . Определить силу F_I , действующую на двугранный угол в направлении падения волны.

2.36. Какое давление p оказывает на идеальное плоское зеркало изотропное электромагнитное излучение с объемной плотностью энергии w_0 ?

2.37. Найти силу давления параллельного пучка световых лучей (с объемной плотностью энергии w) на зеркальный конус, если коэффициент отражения его поверхности равен R . Основанием конуса является круг радиуса a , угол между образующей и основанием конуса равен α (рис. 2.3).

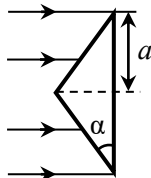


Рис. 2.3. Падение световых лучей на конус.

2.38. Найти силу давления F_I плоской световой волны с объемной плотностью энергии w на зеркальный шар радиуса a , если коэффициент отражения равен R .

2.39. На зеркальный шар радиусом a с коэффициентом отражения R падает пучок световых лучей кругового сечения с объемной плотностью энергии w и радиусом $d < a$, ось симметрии которого проходит через центр шара. Определить силу светового давления F_I на шар.

2.40. Найти силу давления F_I плоской световой волны с объемной плотностью энергии w на сферу радиуса a , если центральная часть сферы (по отношению к падающему пучку) идеально зеркальная, а остальная зачернена (полностью поглощает свет) (рис. 2.5). Край зеркальной зоны (на рисунке точки А и В) виден из центра сферы под углом $\theta = \pi/4$.

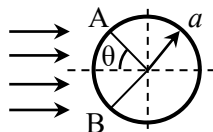


Рис. 2.5. Падение световых лучей на сферу.

2.41. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна с амплитудой вектора напряженности электрического поля $E_0 = 0,5$ В/м. На пути волны располагается полностью поглощающая полусфера радиуса $R = 60$ см, обращенная вершиной в сторону распространения волны (рис. 2.4). Определить силу давления F_I волны на полусферу.

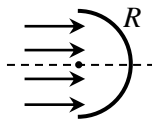


Рис. 2.4. Падение световых лучей на полусферу.

2.42. Найти силу давления F плоской световой волны на шар радиусом R , если интенсивность волны равна I_0 , а поверхность шара рассеивает падающее излучение равномерно по всем направлениям.

2.43. Плоская абсолютно матовая поверхность площадью S с коэффициентом отражения, равным единице, освещается световым потоком интенсивностью I , падающим нормально (термин "абсолютно матовая поверхность" означает, что вероятность отражения одинакова для всех направлений). Найти силу F светового давления на поверхность.

2.44. Свет от точечного изотропного источника мощностью P падает на абсолютно зеркальную пластинку радиусом R . Источник находится над центром пластинки на расстоянии d от нее. Найти силу светового давления на пластинку.

2.45. Небольшое идеально отражающее зеркальце массы $m = 10$ мг подвешено на невесомой нити длиной $l = 10$ см. На какой угол θ отклонится нить, если по нормали к зеркальцу в горизонтальном направлении произвести "выстрел" коротким импульсом лазерного излучения с энергией $W = 13$ Дж.

2.46. Какая мощность лазерного пучка P необходима, чтобы с его помощью удерживать частицу массой m в поле силы тяжести? Считать, что пучок полностью поглощается частицей.

§3. Преобразования Фурье в оптике

- Разложение периодической функции в ряд Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t),$$

где
$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \cos n\omega t \cdot dt;$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \sin n\omega t \cdot dt .$$

- Представление непериодической функции $f(t)$ в виде интеграла Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega ,$$

где
$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt .$$

Интеграл Фурье также можно представить в виде:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(\omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega)) d\omega ,$$

где $f(\omega)$ – спектральная амплитуда или амплитудный спектр, $\varphi(\omega)$ – спектральная фаза или спектр фаз.

- Спектральная амплитуда $f(\omega)$:

$$f(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)} .$$

- Спектральная фаза $\varphi(\omega)$:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{b(\omega)}{a(\omega)} .$$

- Комплексная спектральная амплитуда $F(\omega)$ (Фурье-образ временной функции $f(t)$):

$$F(\omega) \equiv a(\omega) - ib(\omega) = f(\omega) \cdot (\cos \varphi(\omega) - i \sin \varphi(\omega)) = f(\omega) \cdot e^{-i\varphi(\omega)} .$$

- Преобразования Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega;$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

- Спектральная плотность $G(\omega)$:

$$G(\omega) = |F(\omega)|^2 = (F(\omega) \cdot F^*(\omega)) = a^2(\omega) + b^2(\omega) = f^2(\omega).$$

3.1. Найти спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов с длительностью τ и периодом следования T . Амплитуда импульсов равна A (рис. 3.1). Построить график спектра.

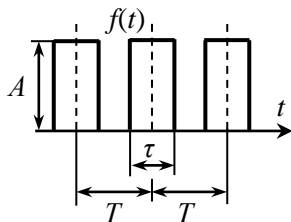


Рис. 3.1. Последовательность прямоугольных импульсов.

3.2. Найти спектр периодически повторяющихся треугольных импульсов (рис. 3.2), форма которых задается функцией: $f(t) = U_0 (1 - t/T)$ при $0 \leq t \leq T$, $f(t) = f(t + T)$.

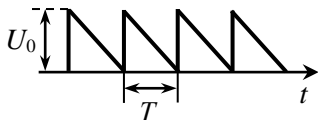


Рис. 3.2. Последовательность пилообразных импульсов.

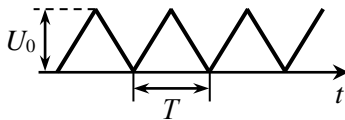


Рис. 3.3. Последовательность треугольных импульсов.

3.3. Найти спектр периодически повторяющихся треугольных импульсов (рис. 3.3), описываемых следующей аналитической функцией:

$$f(t) = \begin{cases} + \frac{2U_0 t}{T} & \text{при } 0 \leq t \leq T/2 \\ - \frac{2U_0 t}{T} & \text{при } T/2 \leq t < T \end{cases}, \quad f(t) = f(t + T).$$

3.4. Найти спектр Фурье временной функции $f(t) = A (1 + m \cos \Omega t) \cdot \cos \omega t$, где $m \ll 1$, $\Omega \ll \omega$.

3.5. Найти спектральный состав одиночного прямоугольного импульса продолжительностью τ с амплитудой U_0 .

3.6. Показать, что если известен спектр $F(\omega)$ сигнала $f(t)$, то спектр $F_\tau(\omega)$ сигнала $f(t - \tau)$, смещенного по времени на $\tau = \text{const}$, имеет вид: $F_\tau(\omega) = F(\omega) \cdot e^{-i\omega\tau}$

3.7. Определить спектр двух прямоугольных импульсов с амплитудой f_0 одинаковой по-

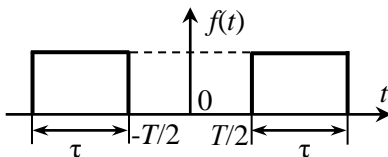


Рис. 3.4. Два прямоугольных импульса.

лярности и длительностью τ каждый. Временной интервал между импульсами равен T (рис. 3.4).

3.8. Найти спектр трёх прямоугольных импульсов с амплитудой f_0 одинаковой полярности и длительностью τ каждый. Временной интервал между импульсами равен T .

3.9. Определить амплитудный спектр $F(\omega)$ последовательности из N прямоугольных импульсов с амплитудой f_0 одинаковой полярности и длительностью τ каждый, следующих с временной периодичностью T .

3.10. Найти спектральную плотность $G_0(\omega)$ случайной последовательности одинаковых волновых цу-

гов $f_0(t) = \sum_{i=1}^N f(t - t_i)$. Спектральную плотность одного цуга $G(\omega)$ считать известной.

3.11. Найти спектр симметричного треугольного импульса с амплитудой f_0 и длительностью τ (рис. 3.5).

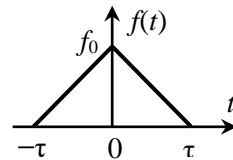


Рис. 3.5. Симметричный треугольный импульс.

3.12. Известен спектр $F(\omega)$ сигнала $f(t)$. Найти спектр $F_{\text{мод}}(\omega)$ сигнала $f_{\text{мод}}(t) = f(t) \cdot \cos \omega_0 t$.

3.13. Найти спектр $F(\omega)$ сигнала $f(t)$ в виде половины периода косинусоиды с частотой ω_0 и амплитудой A (рис. 3.6):

$$f(t) = \begin{cases} A \cdot \cos(\omega_0 t), & |t| < \frac{\tau}{4}, \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{4} \end{cases}, \text{ где } \omega_0 = \frac{2\pi}{\tau}.$$

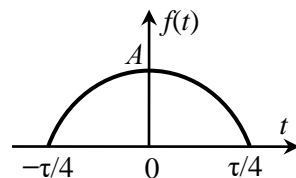


Рис. 3.6. Импульс в виде половины косинусоиды.

3.14. Найти спектр высокочастотного гармонического сигнала $f(t)$ с частотой ω_0 и амплитудой f_0 , длительность которого τ («цуг волн»): $f(t) = \begin{cases} f_0 \cos(\omega_0 t) & \text{при } t \in [-\tau/2, \tau/2], \\ 0 & \text{при } t \notin [-\tau/2, \tau/2]. \end{cases}$

3.15. Рубиновый лазер излучает импульсы с длиной волны $\lambda = 693$ нм. Каждый импульс представляет собой цуг линейно-

поляризованных волн с постоянной амплитудой вектора напряженности электрической компоненты E_0 длительностью $\tau = 10^{-4}$ с с энергией $W = 0,3$ Дж. Поперечное сечение пучка – круг диаметром $d = 5$ мм. Импульсы распространяются в воздухе. Рассчитать спектр частот импульсов $F(\omega)$ и спектральную плотность излучения $G(\omega)$. Оценить основной диапазон длин волн излучения $\Delta\lambda$, объемную плотность энергии w и амплитуду вектора E_0 волн.

3.16. Найти коэффициенты Фурье $a(\omega)$ и $b(\omega)$ экспоненциально затухающей функции $f(t) = f_0 e^{-\delta t}$, где $\delta = \text{const}$ – коэффициент затухания, при $t \geq 0$ в представлении этой функции в виде:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega .$$

Нарисовать графики зависимостей $a(\omega)$ и $b(\omega)$.

3.17. Для функции, описанной в задаче 3.15, найти спектральную плотность излучения $G(\omega)$ и определить ширину частотного диапазона $\Delta\omega$ на половине высоты кривой $G(\omega)$. Нарисовать график зависимости $G(\omega)$.

3.18. Найти комплексную спектральную амплитуду $F(\omega)$ слабо затухающей волны, описываемой функцией:

$f(t) = f_0 e^{-\delta t} \cos \omega_0 t$, где $\delta \ll 1$, при $t \geq 0$ (рис. 3.7). Рассчитать спектральную плотность волны $G(\omega)$.

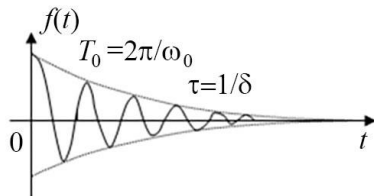


Рис. 3.7. График функции $f(t)$ слабо затухающей волны.

3.19. Определить энергию W_0 , приходящуюся на единицу площади, для слабо затухающей волны, описываемой функцией: $f(t) = f_0 e^{-\delta t} \cos \omega_0 t$ при $t \geq 0$, где $\delta \ll 1$.

3.20. Найти временное представление $f(t)$ функции, которая имеет следующий частотный спектр (рис. 3.8):

$$F(\omega) = \begin{cases} A_0 & \text{при } |\omega - \omega_0| \leq \Delta\omega / 2, \\ 0 & \text{при } |\omega - \omega_0| > \Delta\omega / 2 \end{cases}$$

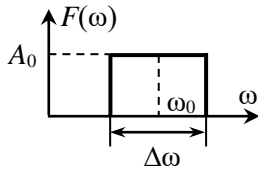


Рис. 3.9. Частотный спектр функции $f(t)$

при $\Delta\omega \ll \omega_0$. Считать, что фазы всех колебаний в момент времени $t = 0$ были одинаковы.

§4. Интерференция монохроматического света

- Основное уравнение двуволновой интерференции:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta,$$

где $\delta = \delta_1 - \delta_2$ – разность фаз интерферирующих волн в точке наблюдения, I_1 и I_2 – их интенсивности.

Если $I_1 = I_2 \equiv I_0$, то $I = 2I_0(1 + \cos \delta)$.

При интерференции двух линейно поляризованных волн, плоскости поляризации которых составляют угол ψ , основное уравнение интерференции принимает вид:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \psi \cos \delta.$$

- Видность (контраст) V интерференционной картины:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где I_{\max} и I_{\min} – максимальное и минимальное значения интенсивности вблизи точки наблюдения.

- Связь оптической разности хода Δ с разностью фаз δ :

$$\delta = k \cdot \Delta,$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число, λ – длина волны света в вакууме.

- Порядок интерференции (или интерференционного максимума) m :

$$m = \frac{\Delta}{\lambda}.$$

- Условие интерференционных максимумов для разности фаз:

$$\delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots, \pm m \cdot 2\pi;$$

здесь и далее: $m = 0, 1, 2, \dots$ – целое число.

- Условие интерференционных минимумов для разности фаз:

$$\delta = \pm \pi, \pm 3\pi, \dots, \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot 2\pi.$$

- Условие интерференционных максимумов для оптической разности хода:

$$\Delta = 0, \pm\lambda, \pm 2\lambda, \dots, \pm m \cdot \lambda .$$

• Условие интерференционных минимумов для оптической разности хода:

$$\Delta = \pm \frac{\lambda}{2}, \pm \frac{3\lambda}{2}, \dots, \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda .$$

• Расстояние между двумя соседними светлыми (или темными) полосами при малых углах сходимости α (ширина интерференционной полосы) Λ :

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\alpha},$$

где λ – длина волны.

4.1. Найти интенсивность I волны, образованной наложением двух линейно поляризованных когерентных волн с интенсивностями I_1 и I_2 , плоскости поляризации которых взаимно перпендикулярны.

4.2. Найти видность V интерференционной картины, полученной при наложении двух когерентных волн с интенсивностями I_1 и $I_2 = 100 I_1$.

4.3. В наблюдаемой на экране интерференционной картине интенсивность в максимумах в $N = 9$ раз больше интенсивности в минимумах. Найти отношение интенсивностей двух линейно поляризованных интерферирующих волн.

4.4. Два точечных диполя 1 и 2, находящихся на малом расстоянии l друг от друга, излучают плоскополяризованные электромагнитные волны одинаковой частоты и амплитуды, у которых направления векторов напряженности электрического поля \mathbf{E} совпадают и перпендикулярны плоскости рис. 4.1. Длина волны излучения λ , колебания излучателя 1 опережают по фазе колебания излучателя 2 на $\alpha_0 = \pi/4$. В каких направлениях (угол θ отсчи-

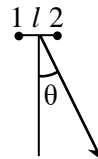


Рис. 4.1. Ориентация угла θ относительно излучателей 1 и 2.

тывается от перпендикуляра к линии соединения излучателей) интенсивность излучения результирующей волны будет максимальна, если: а) $l = \lambda/4$; б) $l = 3\lambda$?

4.5. Две плоские когерентные волны одинаковой интенсивности с длиной волны λ распространяются в вакууме под небольшим углом $\alpha \ll 1$ друг к другу (рис. 4.2). Волны падают на экран Э, установленный так, что их волновые векторы \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 симметричны относительно нормали к экрану. Найти ширину Λ интерференционных полос, наблюдаемых на экране, если волны линейно поляризованы в одном направлении (перпендикулярно плоскости рисунка).

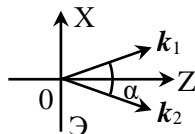


Рис. 4.2. Ориентация волновых векторов интерферирующих волн.

4.6. В условиях задачи 4.5 определить ширину Λ интерференционных полос на экране, если волновой фронт суммарной волны составляет угол θ с плоскостью экрана.

4.7. В схеме Юнга узкая щель S (перпендикулярная плоскости рис. 4.3) служит источником монохроматического света с длиной волны λ . Свет от щели падает на диафрагму с двумя узкими параллельными щелями S_1 и S_2 , расстояние между которыми равно d . Расстояние от диафрагмы до экрана $l \gg d$. Найти распределение интенсивности $I(x)$ на экране. Определить ширину Λ интерференционных полос.

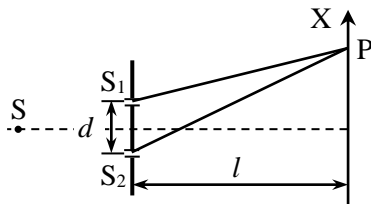


Рис. 4.3. Расположение источника света и щелей в схеме Юнга.

4.8. Найти длину волны λ монохроматического излучения, если в опыте Юнга расстояние между двумя интерференционными максимумами второго порядка равно $\Delta x = 0,2$ см. Расстояние между щелями $d = 0,5$ см, расстояние от щелей до экрана $l = 5$ м.

4.9. Во сколько раз изменится расстояние между соседними темными полосами на экране в опыте Юнга, если зеленый светофильтр, расположенный перед щелями, заменить красным? Длина волны света, пропускаемого зеленым светофильтром, $\lambda_1 = 500$ нм, а красным – $\lambda_2 = 650$ нм.

4.10. Пучок лазерного излучения с длиной волны $\lambda = 630$ нм падает по нормали на диафрагму с двумя узкими щелями, расстояние между которыми $d = 5$ мм. За диафрагмой расположен экран, на котором наблюдается система интерференционных полос. В какую сторону и на какое число полос N сместится интерференционная картина, если одну из щелей перекрыть прозрачной пластинкой толщиной $a = 10$ мкм, изготовленной из оптического стекла с показателем преломления $n = 1,63$?

4.11. В интерференционной установке Юнга на пути одного из лучей находится трубка длиной $l = 7,0$ см с плоскопараллельными стеклянными основаниями. Интерференционная картина наблюдается, когда трубка наполнена воздухом. При замене воздуха в трубке криптоном интерференционная картина смещается на $N = 16$ полос. Вся установка помещена в термостат, поддерживающий постоянную температуру. Наблюдения проводят со светом D -линии натрия ($\lambda = 589,3$ нм). Принимая показатель преломления воздуха равным $n = 1,000292$, определить показатель преломления криптона $n_{\text{кр}}$ ($n_{\text{кр}} > n$). В какую сторону смещаются полосы интерференции при наполнении трубки криптоном?

4.12. На экране, удаленном от двух точечных когерентных точечных источников света на расстояние $l = 2,4$ м, получена система интерференционных полос. Как изменится ширина интерференционных полос, если между источниками и экраном поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием $f = 20$ см? Рассмотреть два случая: а) расстояние от источников до линзы равно $2f = 40$ см; б) источники находятся в передней фокальной плоскости линзы.

4.13. В схеме, предложенной Ллойдом, световая волна, падающая на экран Э непосредственно от узкой щели S , интерферирует с волной, отразившейся от зеркала $З$ (рис. 4.4). Расстояние от щели S до плоскости зеркала $h = 1$ мм, расстояние от щели до экрана $l = 1$ м, длина волны $\lambda = 500$ нм. На каком расстоянии x от центра интерференционной картины будет находиться шестая светлая полоса? Считать, что фаза волны при отражении не меняется.

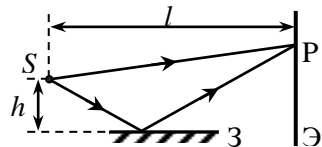


Рис. 4.4. Схема опыта с зеркалом Ллойда.

4.14. В опыте Ллойда (рис. 4.4) на экране (вблизи зеркала) наблюдается система интерференционных полос с периодом Λ . После того, как источник отодвинули от зеркала на расстояние Δh , ширина полос уменьшилась в α раз. Найти длину волны света λ , если расстояние от источника до экрана равно l .

4.15. В интерференционной схеме с зеркалом ограниченной ширины используется точечный монохроматический источник света S с длиной волны $\lambda = 500$ нм и отражающее зеркало $З$ шириной $a = 10$ см (рис. 4.5). Расстояние от источника до плоскости зеркала $h = 5$ мм, расстояние от источника до экрана $l = 1$ м. Центр зеркала расположен на расстоянии $l/2$ от экрана. Найти число N интерференционных полос на экране.

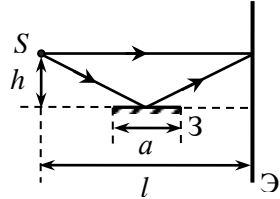


Рис. 4.5. Схема опыта с зеркалом шириной a .

4.16. В интерференционной схеме с бизеркалом Френеля угол между зеркалами $\varphi = 12'$ (рис. 4.6). Расстояния от ребра бизеркала O до источника света S и экрана \mathcal{E} равны $a = 10$ см и $b = 120$ см соответственно. Источник излучает свет с длиной волны $\lambda = 550$ нм. Определить: а) ширину интерференционных полос; б) число N интерференционных полос на экране.

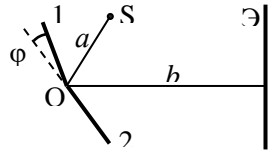


Рис. 4.6. Интерференционная схема с бизеркалами Френеля.

4.17. В интерференционной схеме с бизеркалом Френеля, описанной в задаче 4.16, определить, куда и на какую величину Δx сместится интерференционная картина на экране, если источник S сместить на $\delta l = 1$ мм так, чтобы его расстояние a от ребра бизеркала не изменилось.

4.18. Как изменится интерференционная картина в схеме с бизеркалом Френеля, описанной в задаче 4.16, если расстояние от источника S до ребра бизеркала увеличить в 2 раза? На сколько полос ΔN изменится при этом число интерференционных полос на экране?

4.19. Определить расстояние Δx между центром интерференционной картины и треть-

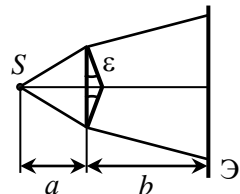


Рис. 4.7. Схема опыта с бипризмой Френеля.

ей светлой полосой в установке с бизеркалом Френеля (рис. 4.6), если $\lambda = 589$ нм, $\varphi = 20'$, $a = 10$ см, $b = 1$ м. Интерферирующие волны падают на экран практически нормально.

4.20. Интерференционная картина получается с помощью бипризмы Френеля с малым преломляющим углом. Источником света с длиной волны λ служит узкая щель, параллельная ребру бипризмы (рис. 4.7). Расстояния от бипризмы до щели S и экрана \mathcal{E} равны a и b соответственно. Показатель преломления бипризмы n . При каком значении преломляющего угла ε бипризмы ширина интерференционных полос на экране будет Λ ? Найти число N полос, наблюдаемых в этом случае.

4.21. Расстояния от стеклянной бипризмы (показатель преломления стекла $n = 1,5$) с преломляющим углом $\varepsilon = 20'$ до узкой щели и до экрана равны соответственно $a = 20$ см и $b = 100$ см (см. рис. 4.7). Найти длину волны света λ , если ширина интерференционных полос на экране $\Lambda = 0,5$ мм.

4.22. Преломляющий угол бипризмы равен $\varepsilon = 10'$, коэффициент преломления $n = 1,5$. Между источником света с длиной волны $\lambda = 589$ нм и бипризмой помещена собирающая линза так, что источник находится в её фокусе. 1) Найти расстояние Δx между соседними темными полосами на экране. 2) Определить максимальное число интерференционных полос N_{\max} , которое может наблюдаться на этой установке при удалении экрана от бипризмы на расстояние $b = 3$ м. Чему равен максимальный порядок интерференции m_{\max} ? 3) На каком минимальном расстоянии b_N от бипризмы надо расположить экран, чтобы было $N = 25$ интерференционных полос?

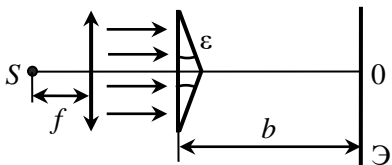


Рис. 4.8. Интерференционная схема с бипризмой Френеля.

4.23. При каком расстоянии b_0 от бипризмы до экрана в установке, описанной в задаче 4.22, будет наблюдаться максимальное число интерференционных полос, если расстояние между вершинами преломляющих углов бипризмы равно $H = 2$ см? Определить это число N_{\max} . При каком расстоянии b_1 от бипризмы до экрана интерференционные полосы не наблюдаются?

4.24. Плоская световая волна ($\lambda = 700$ нм) падает нормально на бипризму из стекла ($n = 1,52$) с преломляющим углом $\varepsilon = 5^\circ$. Пространство за бипризмой полностью заполнено бензолом ($n' = 1,50$). Найти ширину Λ интерференционных полос на экране, расположенном за этой системой.

4.25. Тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием f разрезана пополам, а половинки линзы раздвинуты на малое расстояние h , перекрытое непрозрачным экраном. На расстоянии $a > f$ перед билинзой на её оси находится точечный источник S монохроматического света с длиной волны λ . Экран для наблюдения интерференционных полос установлен с противоположной стороны билинзы на расстоянии L от неё. Найти ширину Λ интерференционных полос на экране.

4.26. Половинки тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $f = 12$ см раздвинуты на $h = 1,1$ мм. На расстоянии $a = 20$ см перед билинзой находится точечный источник S монохроматического света с длиной волны $\lambda = 610$ нм. Диаметр линзы $D = 3$ см. На каком минимальном расстоянии L_{\min} от билинзы следует установить экран, чтобы на нем наблюдались интерференционные полосы? Определить расстояние Δx между темными полосами на экране при $L = 2L_{\min}$.

4.27. Будут ли наблюдаться интерференционные полосы на экране в опыте с билинзой (линза разрезана пополам, обе половины раздвинуты), если источник света поместить перед линзой на расстоянии меньше фокусного?

4.28. Из тонкой собирающей линзы диаметром $D = 2,5$ см с фокусным расстоянием $f = 50$ см вырезана по диаметру центральная часть шириной $h = 5$ мм, после чего обе половины линзы сдвинуты до соприкосновения. Источник света с длиной волны $\lambda = 500$ нм находится на оси системы в фокальной плоскости линзы. 1) Определить ширину L интерференционных полос на экране. 2) На каком расстоянии l_0 от билинзы следует расположить экран, чтобы на нем наблюдать максимально возможное число интерференционных полос? Определить это число N_{\max} . 3) При каком расстоянии l_1 между линзой и экраном интерференционные полосы полностью исчезнут?

4.29. В установке с билинзой, описанной в задаче 4.28, фокусное расстояние линзы $f = 40$ см, её диаметр $D = 4$ см, ширина вырезанной части $h = 1$ мм, длина волны света $\lambda = 600$ нм. На каком минимальном расстоянии l_{\min} от билинзы следует установить экран, чтобы на нём было $N = 11$ светлых интерференционных полос?

4.30. Из тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $f = 50$ см вырезана центральная часть шириной h , и обе половинки сдвинуты до соприкосновения. Перед билинзой находится точечный источник S монохроматического света с длиной волны $\lambda = 600$ нм. На экране за билинзой наблюдаются интерференционные полосы, расстояние между которыми равно $\Delta x = 0,5$ мм и не зависит от положения экрана. Найти ширину вырезанной части a .

4.31. Тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием f разрезали по диаметру пополам и развели половинки на расстояние h друг от друга, перекрыв зазор между ними непрозрачной пластиной. На получившуюся билинзу падает нормально плоская гармоническая электромагнитная волна с длиной λ . На каком расстоянии b от билинзы следует поставить экран, чтобы ширина интерференционных полос была равна d ? Изобразить схему наблюдения интерференции.

§5. Интерференция монохроматического света в тонких пленках. Полосы равной толщины и равного наклона

- Оптическая разность хода световых волн Δ :

$$\Delta = n \cdot \Delta_0,$$

где Δ_0 – геометрическая разность хода, n – относительный показатель преломления среды.

- Связь оптической разности хода Δ с разностью фаз δ :

$$\delta = k \cdot \Delta,$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число, λ – длина волны света в вакууме.

- Оптическая разность хода Δ в плоскопараллельной пластинке при наблюдении интерференции волн, отраженных от верхней и нижней поверхностей пластинки:

$$\Delta = 2nh \cos \theta' = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta},$$

где h – толщина, n – показатель преломления пластинки, θ – угол падения луча на пластинку, θ' – угол между лучом, идущим внутри пластинки, и нормалью к её поверхности (см. рис. Т5.1).

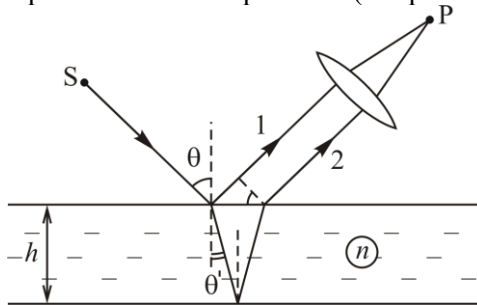


Рис. Т5.1. Схема наблюдения интерференционной картины в отраженном свете в случае плоскопараллельной пластинки.

Разность фаз δ световых колебаний в точке наблюдения Р, с учетом изменения на π фазы волны при отражении на передней поверхности пластинки, равна

$$\delta(\theta) = k \Delta \pm \pi = \frac{4h\pi}{\lambda} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} \pm \pi.$$

- Радиусы r_m колец Ньютона при наблюдении интерференции в отраженном свете от границ воздушного слоя между

стеклянной пластинкой и выпуклой поверхностью линзы с радиусом кривизны R :

$$r_m = \sqrt{mR\lambda / 2},$$

причем кольца светлые, если $m = 1, 3, 5, \dots$, и темные, если $m = 2, 4, 6, \dots$.

- Интерферометр Майкельсона.

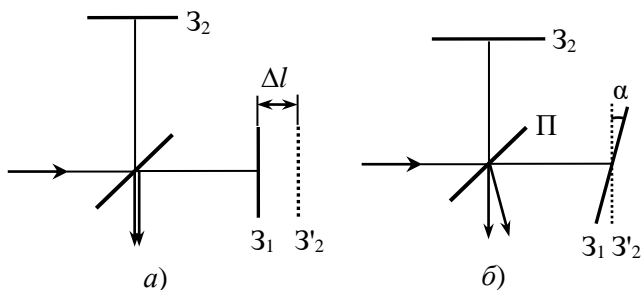


Рис. Т5.2. Оптическая схема интерферометра Майкельсона: а) для получения полос равного наклона; б) для получения полос равной толщины.

На рис. Т5.2 Z_1 и Z_2 – зеркала, Δl – разность длин плеч интерферометра. Когда зеркала установлены перпендикулярно друг другу, а их плечи не равны, можно наблюдать *полосы равного наклона* (а); когда зеркала установлены под малым углом друг к другу, наблюдаются *полосы равной толщины* (б).

5.1. Луч света от точечного источника S падает на плоскопараллельную пластинку толщиной h под углом θ . Показатель преломления пластинки n , длина волны света λ . Интерференционная картина наблюдается в фокальной плоскости линзы (т. P на рис. 5.1). Найти оптическую разность хода Δ между лучами, приходящими в т. P после однократного отражения света от обеих поверхностей пластинки.

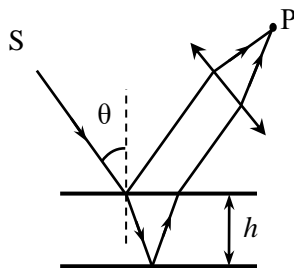


Рис. 5.1. Отражение луча от границы плоскопараллельной пластинки.

5.2. Источник света S находится на расстоянии $H = 1$ м от тонкой слюдяной пластинки толщиной h с показателем преломления $n = 1,4$ (рис. 5.2). На таком же расстоянии от пластинки расположен небольшой экран \mathcal{E} , ориентированный перпендикулярно отраженным лучам. На

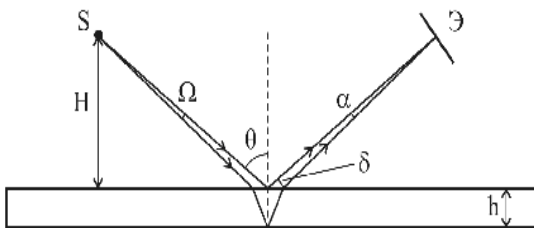


Рис. 5.2. Схема получения интерференционной картины от точечного источника S с помощью тонкой слюдяной пластинки.

экране наблюдаются интерференционные полосы. Угол $\theta = 60^\circ$, длина волны $\lambda = 600$ нм. Найти толщину пластинки h и ширину Δ интерференционных полос, если порядок интерференционной полосы в центре экрана равен $m = 500$.

5.3. Рассеянный монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм падает на тонкую стеклянную пластинку с показателем преломления $n = 1,5$. Угловое расстояние между соседними максимумами, наблюдаемыми в отраженном свете под углами, близкими к $\theta = 45^\circ$, равно $\delta\theta = 3^\circ$. Определить толщину d пластинки.

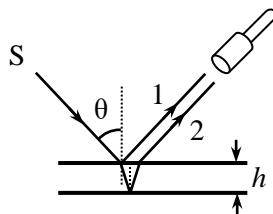


Рис. 5.3. Наблюдение интерференционной картины в отраженном свете.

5.4. С помощью зрительной трубы, установленной «на бесконечность», наблюдают интерференционные полосы на поверхности тонкой плоскопараллельной стеклянной ($n = 1,5$) пластинки толщиной h . Угол наблюдения θ можно изменять в пределах от 0° до 90° (рис. 5.3). Длина волны света $\lambda = 600$ нм. Найти толщину пластинки h , если разность между максимальным m_{\max} и минимальным m_{\min} порядками интерференции равна $\Delta m = 300$.

5.5. Темной или светлой будет в отраженном свете находящаяся в воздухе мыльная пленка ($n = 1,33$), при освещении её нормально падающим световым пучком с длиной волны λ , если толщина пленки не превышает $\lambda/10$?

5.6. На пластинку слюды с показателем преломления $n = 1,6$ падает свет с длиной волны $\lambda = 610$ нм. При каких минимальных

значениях толщины пластинки d интерференционные полосы в отраженном свете исчезают?

5.7. На тонкую мыльную пленку ($n = 1,33$) падает пучок белого света под углом $\theta = 45^\circ$. При какой толщине пленки она наиболее сильно окрашена в зеленый цвет ($\lambda = 550$ нм), если смотреть под углом зеркального отражения?

5.8. На тонкую пленку толщиной $d = 370$ нм падает под углом θ параллельный пучок белого света. Показатель преломления пленки $n = 1,4$. В какой цвет будет окрашен свет, отраженный пленкой, если угол θ равен: а) 30° ; б) 60° ?

5.9. Найти минимальную толщину d пленки с показателем преломления $n = 1,33$, при которой свет с длиной волны $\lambda_1 = 640$ нм испытывает максимальное отражение, а свет с длиной волны $\lambda_2 = 400$ нм практически не отражается. Угол падения света равен $\theta = 30^\circ$.

5.10. На плоскопараллельную слюдяную пластинку с показателем преломления $n = 1,6$, находящуюся в воздухе, падает нормально параллельный пучок белого света. 1) При какой наименьшей толщине $d_{1\min}$ пластинки она будет наиболее прозрачна для света с длиной волны $\lambda_1 = 600$ нм (желтый цвет)? 2) При какой наименьшей толщине $d_{2\min}$ пластинка наиболее прозрачна одновременно для света с длинами волн λ_1 и $\lambda_2 = 500$ нм (голубой цвет)?

5.11. Плоская световая волна с длиной волны $\lambda = 550$ нм падает на поверхность стеклянного клина под углом $\theta = 15^\circ$ к нормали. Показатель преломления стекла $n = 1,5$, угол при вершине клина $\alpha = 1'$. Определить расстояние Λ между двумя соседними темными полосами на поверхности клина при наблюдении интерференции в отраженном свете.

5.12. Для интерференции на стеклянном клине, описанном в задаче 5.11, определить, какое расстояние Δx будет между полосами на экране, установленном нормально к отраженным пучкам?

5.13. Свет с длиной волны $\lambda = 550$ нм от удаленного точечного источника падает нормально на поверхность стеклянного клина ($n = 1,5$). В отраженном свете ширина интерференционных полос на поверхности клина равна $\Lambda = 0,21$ мм. Найти угол α между гранями клина.

5.14. Мыльная пленка, расположенная вертикально, имеет форму клина вследствие стекания жидкости. Наблюдение интерфе-

ренционнй картины ведется в отраженном свете зеленой линии ртутной лампы ($\lambda = 546$ нм) перпендикулярно поверхности пленки. Расстояние между $N = 5$ интерференционными полосами составило $l = 2$ см. Показатель преломления мыльной воды $n = 1,33$. Определить угол α между гранями клина.

5.15. Расположенная вертикально проволочная рамка затянута мыльной пленкой. При наблюдении в отраженном свете через красное стекло ($\lambda_1 = 630$ нм) расстояние между соседними красными полосами равно $\Delta_1 = 3$ мм. Затем красное стекло заменяется на синее ($\lambda_2 = 400$ нм). Определить расстояние Δ_2 между соседними синими полосами. Считать, что за время измерений толщина пленки не изменилась.

5.16. Интерференционные полосы равной толщины наблюдаются в отраженном свете на поверхности воздушного клина между двумя стеклянными пластинками с углом при вершине $\varepsilon = 1'$. Клинь освещается параллельным пучком света с длиной волны $\lambda = 546$ нм, перпендикулярным поверхности одной из пластин (рис. 5.4). Темная или светлая полоса будет наблюдаться вблизи вершины клина? Определить: а) расстояние Δ между двумя соседними полосами; б) расстояние x_k от вершины клина до $k = 10$ -ой темной полосы и толщину h_k клина в этом месте.

5.17. С помощью воздушного клина с углом при вершине α наблюдают полосы равной толщины в отраженном монохроматическом свете. Свет падает на клин нормально. Найти распределение освещенности E в интерференционной картине на поверхности клина. Считать интенсивности световых пучков, отраженных от обеих поверхностей клина, одинаковыми и равными I_0 .

5.18. На стеклянную пластинку положена выпуклой стороной плоско-выпуклая линза. При нормальном падении на плоскую границу линзы света с длиной волны λ радиус k -го темного кольца равен r_k . Определить радиус кривизны R выпуклой поверхности линзы.

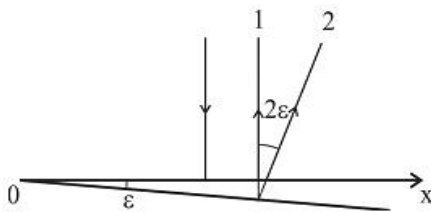


Рис. 5.4. Формирование интерференционной картины в воздушном клине между двумя стеклянными пластинками.

5.19. На стеклянную пластинку положена выпуклой стороной плоско-выпуклая линза с радиусом кривизны сферической поверхности $R = 15$ м. Наблюдение ведется в отраженном свете. Расстояние между 4-м и 25-м кольцами Ньютона равно $\Delta r = 9$ мм. Определить длину волны λ света, падающего нормально на линзу.

5.20. Плоско-выпуклая стеклянная линза соприкасается выпуклой поверхностью со стеклянной пластинкой. Установка освещается нормально падающим белым светом, наблюдение ведется в проходящем свете. При использовании синего светофильтра ($\lambda_1 = 400$ нм) радиус четвертого светлого кольца равен $r_4 = 2,8$ мм. Определить радиус третьего светлого кольца r_3 при замене светофильтра на красный ($\lambda_2 = 630$ нм).

5.21. На стеклянную пластинку положена выпуклой стороной плоско-выпуклая линза. Наблюдение ведется в отраженном свете. Найти расстояние d_2 между третьим и шестнадцатым кольцами Ньютона, если расстояние между вторым и двадцатым кольцами равно $d_1 = 4,8$ мм.

5.22. На стеклянную пластинку положена выпуклой стороной плоско-выпуклая линза с радиусом кривизны сферической поверхности $R = 10$ м, а пространство между линзой и пластинкой заполнено жидкостью. Наблюдение ведется в проходящем свете, длина волны $\lambda = 589$ нм. Определить показатель преломления n жидкости, если радиус третьего светлого кольца равен $r_3 = 3,65$ мм.

5.23. Плоско-выпуклая стеклянная линза соприкасается выпуклой поверхностью со стеклянной пластинкой. Найти фокусное расстояние f линзы, если в отраженном свете радиус третьего темного кольца равен $r = 1,1$ мм. Показатель преломления стекла $n = 1,5$, длина волны света $\lambda = 589$ нм.

5.24. Обращенная выпуклой поверхностью вниз плоско-выпуклая линза закреплена неподвижно. Под линзой на небольшом расстоянии от неё находится стеклянная пластинка, которую можно перемещать по вертикали в направлении, перпендикулярном пластинке. Сверху линзу освещают монохроматическим светом и наблюдают в отраженном свете кольца Ньютона. Что будет происходить с интерференционной картиной, если зазор между линзой и пластинкой: а) увеличивать, б) уменьшать?

5.25. Плоско-выпуклая стеклянная линза с радиусом кривизны сферической поверхности $R = 40$ см соприкасается выпуклой поверхностью со стеклянной пластинкой. При этом в отраженном свете радиус некоторого темного кольца $r = 2,5$ мм. Наблюдая за

данным кольцом, линзу осторожно отодвинули от пластинки на $d = 5,0$ мкм. Каким стал радиус r' этого кольца?

5.26. Плоско-выпуклая стеклянная линза с радиусом кривизны сферической поверхности $R = 10,2$ см лежит на стеклянной пластинке, причем из-за попадания пылинки между выпуклой поверхностью линзы и пластинкой нет контакта. Диаметры пятого и пятнадцатого темных колец Ньютона в отраженном свете равны $d_1 = 0,7$ мм и $d_2 = 1,7$ мм. Определить длину волны λ света.

5.27. Плоскопараллельная стеклянная пластинка лежит на одной из поверхностей двояковыпуклой тонкой стеклянной линзы. При наблюдении колец Ньютона в отраженном свете с длиной волны $\lambda = 589$ нм радиус темного кольца порядка $m = 20$ равен $x_1 = 2$ мм. Когда пластинку положили на другую поверхность линзы, радиус темного кольца того же порядка стал равен $x_2 = 4$ мм. Показатель преломления стекла $n = 1,5$. Определить фокусное расстояние f линзы.

5.28. Две тонкие симметричные стеклянные линзы (двояковыпуклая и двояковогнутая) придвинуты вплотную друг к другу (рис. 5.5). В окрестности точки их соприкосновения в отраженном свете с длиной волны $\lambda = 500$ нм наблюдают интерференционные кольца Ньютона. Найти радиус восьмого темного кольца r_8 , если оптическая сила системы из двух линз равна $\Phi = 5$ дптр. Показатель преломления стекла $n = 1,5$.

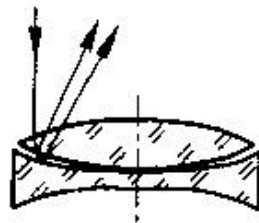


Рис. 5.5. Оптическая система из двух тонких симметричных линз.

5.29. На вершине сферической поверхности плоско-выпуклой стеклянной линзы имеется сошлифованный плоский участок радиуса $r_0 = 3,0$ мм, которым она соприкасается со стеклянной пластинкой. Радиус кривизны выпуклой поверхности линзы $R = 150$ см. Найти радиус шестого светлого кольца Ньютона в отраженном свете с длиной волны $\lambda = 600$ нм.

5.30. Кольца Ньютона получаются между двумя плосковыпуклыми линзами, прижатыми друг к другу своими выпуклыми поверхностями. Наблюдение ведется в отраженном свете. Найти радиус r_m m -го темного кольца, если длина световой волны равна λ , а радиусы кривизны выпуклых поверхностей линз равны R_1 и R_2 .

5.31. Две плоско-выпуклые тонкие стеклянные линзы ($n = 1,5$) соприкасаются своими сферическими поверхностями. При наблюдении колец Ньютона в отраженном свете диаметр пятого светлого кольца равен $d = 1,5$ мм. Найти длину волны λ света, если оптическая сила системы $\Phi = 2,4$ дптр.

5.32. При наблюдении полос равной толщины в интерферометре Майкельсона для смещения интерференционной картины на $N = 500$ полос потребовалось переместить подвижное зеркало на расстояние $\Delta x = 161$ мкм. Определить длину волны λ света.

5.33. Для измерения показателя преломления аммиака в одно из плеч интерферометра Майкельсона поместили цилиндрический сосуд с аммиаком длиной $l = 14$ см. Торцы сосуда закрыты плоскопараллельными стеклами, а разность хода, вызванная ими, в приборе скомпенсирована. При этом интерференционная картина сместилась на $N = 180$ полос. Длина волны света $\lambda = 590$ нм. Найти показатель преломления n аммиака.

5.34. В схеме с интерферометром Майкельсона используется протяженный источник света S с длиной волны $\lambda = 550$ нм (рис. 5.6). Зеркала Z_1 и Z_2 перпендикулярны друг другу, различие плеч интерферометра $h = 1,1$ см. Интерферирующие лучи проходят через линзу L , в фокальной плоскости которой находится экран \mathcal{E} . Фокусное расстояние линзы $f = 1$ м. Найти связь между радиусами r_k интерференционных колец на экране и их номерами k , отсчитываемыми от центрального пятна. Рассчитать радиусы первых трех колец r_1, r_2, r_3 .

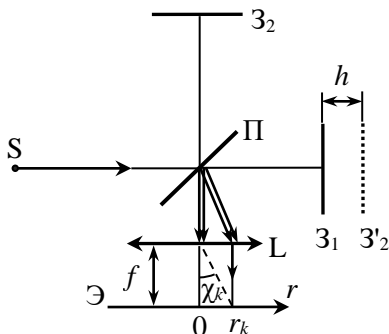


Рис. 5.6. Оптическая схема интерферометра Майкельсона.

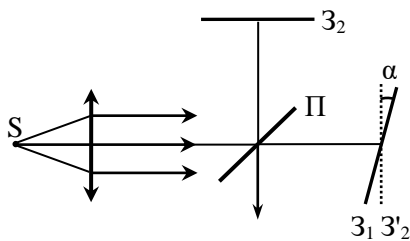


Рис. 5.7. Оптическая схема интерферометра Майкельсона для получения полос равной толщины.

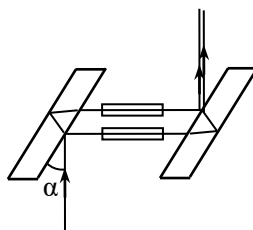


Рис. 5.8. Схема интерферометра Жамена.

света S с длиной волны λ находится в фокусе тонкой собирающей линзы. Плечи интерферометра одинаковы, одно из зеркал повернуто на малый угол α (рис. 5.7). Определить расстояние Λ между интерференционными полосами. На каком расстоянии x_m от центра интерференционной картины находится m -я светлая полоса?

5.36. Интерферометр Жамена состоит из двух одинаковых плоскопараллельных стеклянных пластин (рис. 5.8). При падении пучка света на первую пластину он, отражаясь от её внешней и внутренней поверхностей, расщепляется на два пучка. Интерференция возникает после отражения от второй пластины между пучками, каждый из которых испытал по одному отражению от разных поверхностей пластины. Интерферометр используется для измерения показателей преломления газов, кюветы с которыми помещают на пути лучей между пластинами. Пусть сначала пластины параллельны и пучок света падает на первую пластину под углом $\alpha = 45^\circ$. Если вторую пластину повернуть на угол $\varepsilon = 10'$, то интерференционная картина смещается на $N = 68$ полос. Найти длину волны λ падающего света, если толщина пластин интерферометра равна $h = 1$ см

§6. Интерференция квазимонохроматического света

- Видность V интерференционной картины:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где I_{\max} и I_{\min} – максимальное и минимальное значения интенсивности вблизи точки наблюдения.

- Время когерентности – время, по истечению которого разность фаз волн в некоторой, но одной и той же точке пространства, изменяется на π .

- Связь времени когерентности $\tau_{\text{ког}}$ с частотным диапазоном $\Delta\omega$ (или $\Delta\nu$) квазимонохроматического света:

$$\tau_{\text{ког}} \cong \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta\nu}.$$

- Длина когерентности $l_{\text{ког}}$:

$$l_{\text{ког}} = c\tau_{\text{ког}} = \frac{\lambda_0^2}{\delta\lambda},$$

где λ_0 – средняя длина волны излучения, $\delta\lambda$ – ширина спектра.

- Минимальный порядок $m_{\text{проп}}$ интерференции, при котором пропадает интерференционная картина:

$$m_{\text{проп}} = \frac{l_{\text{ког}}}{\lambda} = \frac{\lambda_0}{\delta\lambda}.$$

- Основное уравнение интерференции квазимонохроматического света (в случае равных интенсивностей $I_1 = I_2 \equiv I_0$ интерферирующих волн):

$$I(\tau) = 2I_0 [1 + |\gamma(\tau)| \cos(\omega_0 \tau + \delta)],$$

где $\delta = \varphi(t) - \varphi(t + \tau)$, $\gamma(\tau)$ – комплексная степень когерентности.

- Комплексная степень когерентности $\gamma(\tau)$:

$$\gamma(\tau) = \frac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(0)}$$

где $\Gamma(\tau) = \langle E_K(t) E_K^*(t + \tau) \rangle_{\Delta T}$ – комплексная функция корреляции,

$\tau = \Delta / c$ – время задержки одной волны относительно другой в точке наблюдения, Δ – оптическая разность хода волн в точке наблюдения.

- Связь видности V с комплексной степенью когерентности $\gamma(\tau)$:

$$V = |\gamma(\tau)|.$$

6.1. Оценить длину когерентности $l_{\text{ког}}$ для: а) белого света с диапазоном длин волн от $\lambda_1 = 400$ нм до $\lambda_2 = 800$ нм; б) излучения гелий-неонового лазера, считая, что спектральная ширина его излучения определяется доплеровским механизмом уширения и составляет $\Delta\nu = 1,2$ ГГц.

6.2. В некоторой интерференционной установке на пути белого света был установлен один раз красный, а другой раз зеленый светофильтр. У обоих светофильтров полоса пропускания $\Delta\lambda$ одинакова. В каком свете – красном или зеленом – число различимых интерференционных полос будет больше и во сколько раз? Длина волны красного света $\lambda_1 = 640$ нм, зеленого – $\lambda_2 = 540$ нм.

6.3. При измерении длины волны достаточно узкой красной линии кадмия ($\lambda = 6438,4$ Å методом двухволновой интерференции А. Майкельсону удалось наблюдать интерференционные полосы при разности хода вплоть до $\Delta = 5 \cdot 10^5 \lambda$. Оценить ширину $\Delta\lambda$ этой линии.

6.4. Светофильтр на входе интерферометра Майкельсона пропускает свет с длиной волны $\lambda = 550$ нм. При этом в поле зрения на выходе отчетливо наблюдаются $N = 110$ интерференционных полос. Определить полосу пропускания $\Delta\lambda$ светофильтра.

6.5. Бизеркало Френеля освещается белым светом от точечного источника. Какой вид имеет интерференционная картина? Оценить максимальный порядок m_{max} наблюдаемых полос.

6.6. Найти ширину спектра $\Delta\lambda$ квазимонохроматического излучения, если в опыте Юнга расстояние между первым интерференционным максимумом и центральной полосой равно $x_1 = 0,05$ см, а интерференционные полосы пропадают на расстоянии $x_2 = 10$ см от центральной полосы. Расстояние между щелями $d = 0,5$ см, расстояние от щелей до экрана $l = 5$ м.

6.7. В интерференционной схеме с бипризмой используется пучок квазимонохроматического света (средняя длина волны λ). Преломляющий угол бипризмы α , показатель преломления n . Определить степень немонохроматичности света $\Delta\lambda/\lambda$, если ширина интерференционной картины на экране равна Δx (меньше, чем в случае монохроматической волны).

6.8. В интерференционной схеме с бипризмой Френеля (преломляющий угол $\varepsilon = 20'$, показатель преломления $n = 1,5$) экран и точечный источник квазимонохроматического света ($\lambda = 600$ нм; $\Delta\lambda = 20$ нм) находятся на одинаковых расстояниях от бипризмы. На каком расстоянии x от центра интерференционной картины на экране интерференционные полосы размываются?

6.9. Из тонкой собирающей линзы (диаметр $D = 2,5$ см, фокусное расстояние $f = 50$ см) вырезана центральная часть шириной $h = 5$ мм, после чего обе половины линзы сдвинуты до соприкосновения. Источник квазимонохроматического света ($\lambda_0 = 500$ нм, $\Delta\lambda = 10$ нм) находится на оси системы в фокальной плоскости линзы. На каком расстоянии l от билинзы следует расположить экран, чтобы на нем наблюдалось максимально возможное число интерференционных полос?

6.10. В интерференционной схеме с бизеркалом Френеля угол между зеркалами $\varphi = 12'$. Расстояния от ребра бизеркала до источника света и экрана равны $a = 10$ см и $b = 120$ см соответственно. Источник излучает квазимонохроматический свет со средней длиной волны $\lambda = 550$ нм. Оценить допустимую немонохроматичность $\Delta\lambda$ света, при которой ширина зоны интерференции на экране будет не уже, чем при наблюдении в монохроматическом свете.

6.11. Свет от далекого точечного источника S падает на фотоприемник Φ – непосредственно и зеркально отразившись от горизонтальной плоскости (рис. 6.1). При вертикальном перемещении источника фотоприемник

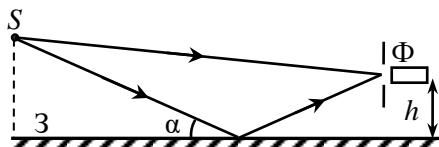


Рис. 6.1. Схема измерения фототока в интерференционной картине от источника света S с использованием плоского зеркала.

регистрирует изменение интенсивности падающего на него света. Оценить максимальный угол α возвышения источника над горизонтом, при котором еще заметны изменения фототока, если перед Φ

установлен светофильтр с полосой пропускания $\Delta\nu = 3 \cdot 10^{11}$ Гц. Входное отверстие ФП находится на высоте $h = 1$ см над отражающей плоскостью.

6.12. Точечный квазимонохроматический источник света S (длина волны $\approx \lambda$, ширина спектра $\Delta\lambda \ll \lambda$) находится на расстоянии h от плоского зеркала (рис. 6.2). На экране, расположенном перпендикулярно зеркалу, наблюдается интерференционная картина, которая пропадает в точке с координатой x_0 . После смещения источника перпендикулярно к зеркалу в точке с координатой $x_1 = x_0 / 5$ наблюдается максимум порядка $m = 2$. На какое расстояние Δh и в какую сторону был смещен источник света?

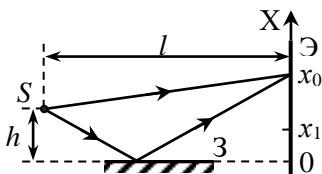


Рис. 6.2. Схема опыта с зеркалом Ллойда.

6.13. В опыте с интерферометром Майкельсона используется квазимонохроматический свет с узким прямоугольным частотным спектром ($\delta\nu \ll \nu_0$) (рис. 6.3). Из интерферометра выходят два линейно поляризованных в одном направлении пучка, с одинаковой интенсивностью I_0 и с оптической разностью хода Δ . Как зависит интенсивность света I на выходе от разности хода Δ пучков в интерферометре? Построить график зависимости $I(\Delta)$.

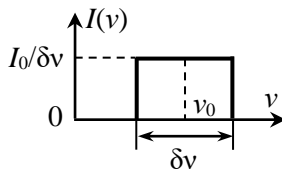


Рис. 6.3. Зависимость интенсивности I источника от частоты ν .

6.14. В схеме Юнга щели S_1 и S_2 освещаются квазимонохроматическим светом ($\delta\lambda \ll \lambda_0$). Найти распределение интенсивности $I(x)$ и видность V интерференционной картины. Определить ширину интерференционной картины ΔX на экране, если расстояние между щелями d , а расстояние от щелей до экрана равно l ($l \gg d$).

6.15. В задаче 6.13 рассчитать комплексную степень когерентности $\gamma(\tau)$, где $\tau = \Delta / c$ – время задержки одной волны относительно другой в точке наблюдения, Δ – оптическая разность хода волн в точке наблюдения. Использовать временной подход при описании интерференции квазимонохроматического света.

6.16. Плоская квазимонохроматическая волна (длина волны $\approx \lambda$) падает нормально на непрозрачную диафрагму с двумя узкими

щелями, при этом на экране наблюдается система интерференционных полос. Одну из щелей перекрывают стеклянной пластинкой толщиной h (показатель преломления n). Найти минимальную ширину спектра $\Delta\lambda$ источника, при которой в центре экрана картина окажется размытой.

6.17. Полосы равного наклона наблюдаются в отраженном свете при падении света от точечного источника на плоскопараллельный воздушный слой между двумя стеклянными пластинками. Наблюдение ведется с помощью зрительной трубы, перпендикулярной пластинкам. Средняя длина волны света $\lambda_0 = 500$ нм, толщина воздушного зазора $h = 10$ мкм. Какая картина будет наблюдаться в поле зрения трубы, если степень монохроматичности света $\lambda/\Delta\lambda$ равна: а) 30; б) 1000?

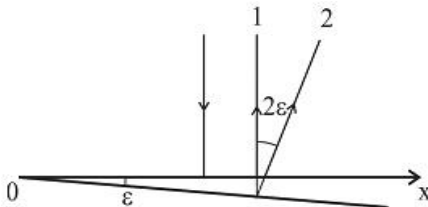


Рис. 6.4. Формирование интерференционной картины в воздушном клине между двумя стеклянными пластинками.

6.18. Для задачи 5.4 оценить допустимую некогерентность $\delta\lambda$ источника, при которой все интерференционные полосы будут достаточно четкими.

6.19. Интерференционные полосы равной толщины наблюдаются на поверхности воздушного клина между двумя стеклянными пластинками с углом при вершине $\epsilon = 1'$ (рис. 6.4). Полосы получаются в свете зеленой линии ртути ($\lambda_0 = 546,1$ нм, $\delta\lambda = 0,01$ нм). Определить: 1) максимальное число N полос, которые можно было бы увидеть, если бы размеры клина не были ограничены; 2) расстояние x от вершины клина до последней наблюдаемой полосы и толщину h клина в этом месте.

6.20. Интерференционные полосы равной толщины наблюдаются в отраженном свете при нормальном падении плоской волны на воздушный клин между двумя стеклянными пластинками. Наблюдение ведется с помощью зрительной трубы, перпендикулярной пла-

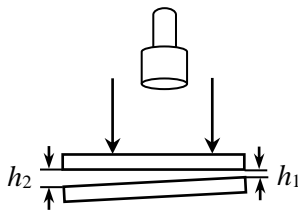


Рис. 6.5. Наблюдение интерференционной картины на воздушном клине.

стинкам (рис. 6.5). Зазоры между краями пластиной $h_1 = 30$ мкм, $h_2 = 60$ мкм. Средняя длина волны света $\lambda_0 = 600$ нм. Какая картина будет наблюдаться в поле зрения трубы, если степень монохроматичности света $\lambda/\Delta\lambda$ равна: а) 500; б) 130?

6.21. Свет от удаленного источника с длиной волны $\lambda = 5500 \text{ \AA}$ падает на поверхность стеклянного клина под углом $\varphi = 15^\circ$. Показатель преломления стекла $n = 1,5$, угол при вершине клина $\alpha = 1'$. На каком расстоянии x от вершины клина интерференционные полосы, наблюдаемые в отраженном свете, исчезнут, если степень немонохроматичности света $\delta\lambda/\lambda = 0,01$?

6.22. Расположенная вертикально проволочная рамка затянута мыльной пленкой (показатель преломления $n = 1,33$), которая образует клин вследствие стекания жидкости. При освещении пленки падающим нормально зеленым светом с длиной волны $\lambda_0 = 530$ нм и степенью монохроматичности $\lambda/\Delta\lambda = 1000$ на верхней части пленки наблюдаются в отраженном свете интерференционные полосы равной толщины. Оценить толщину пленки h в месте пропадания полос.

6.23. При освещении прозрачной клиновидной пластинки нормально падающим квазимонохроматическим зеленым светом ($\lambda_1 = 550$ нм) на половине длины пластинки наблюдаются интерференционные полосы равной толщины. На какой части Δ/l пластинки будут наблюдаться полосы, если осветить красным светом ($\lambda_2 = 530$ нм), степень монохроматичности которого $\lambda/\Delta\lambda$ в 1,2 раза больше, чем у зеленого света?

6.24. В опыте с интерферометром Майкельсона используется свет от источника, спектр излучения которого – две узкие линии (λ_1 и λ_2) с равными интенсивностями. Из интерферометра в одном направлении выходят два пучка с одинаковой интенсивностью I_0 и с оптической разностью хода Δ . Как зависит интенсивность света I на выходе интерферометра от разности хода Δ , если оба пучка линейно поляризованы в одном направлении? Нарисовать график зависимости $I(\Delta)$. Рассчитать видность V интерференционной картины.

6.25. В интерферометре Майкельсона использовалась желтая линия натрия (средняя длина волны $\lambda_{\text{ср}} = 589,3$ нм), состоящая из двух компонент. Найти разность длин волн $\Delta\lambda$ этих компонент, если контраст интерференционной картины был минимален у полос с

номера $N_1 = 490$, $N_2 = 1470$ и т.д., а максимален у центральной полосы и полос с номерами $N_3 = 980$, $N_4 = 1960$ и т.д.

6.26. В установке для наблюдения колец Ньютона плоско-выпуклая линза может перемещаться в направлении, перпендикулярном пластине. Как будет меняться резкость колец при перемещении линзы, если они наблюдаются в отраженном свете желтой линии натрия, состоящей из двух компонент с длинами волн $\lambda_1 = 589,0$ нм и $\lambda_2 = 589,6$ нм?

6.27. В интерферометре Майкельсона использовалась оранжевая линия ртути, состоящая из двух компонент с длинами волн $\lambda_1 = 576,97$ нм и $\lambda_2 = 579,03$ нм. При перемещении одного из зеркал интерференционная картина периодически исчезала. Найти перемещение Δl зеркала между двумя последовательными появлениями наиболее четкой картины.

6.28. В опыте с интерферометром Майкельсона используется квазимонохроматический свет, спектр которого – две узкие линии λ_1 и λ_2 ($\Delta\lambda \ll \lambda_1, \lambda_2$) одинаковой интенсивности и одинаковой ширины $\delta\lambda$ ($2\delta\lambda < \Delta\lambda$) каждая. Из интерферометра выходят два пучка с одинаковой интенсивностью I_0 , линейно поляризованных в одном направлении. Как зависит интенсивность света I на выходе от разности хода Δ пучков в интерферометре? Рассчитать видность V интерференционной картины.

6.29. При наблюдении колец Ньютона в отраженном свете с желтой линией натрия (средняя длина волны $\lambda_{\text{ср}} = 589,3$ нм) Физо наблюдал первое исчезновение интерференционной картины через $m_1 = 490$ колец и далее насчитал $n = 52$ порядка по $\Delta m = 980$ колец в каждом. Зная, что желтая линия натрия состоит из двух компонент с длинами волн λ_1 и λ_2 и считая ширину $\delta\lambda$ и интенсивность I_0 каждой линии одинаковыми, а $\delta\lambda \ll \lambda_2 - \lambda_1$, найти разность длин волн $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ ($\Delta\lambda \ll \lambda_{\text{ср}}$) и ширину $\delta\lambda$ каждой линии.

§7. Интерференция света от протяженных источников

- Апертура интерференции Ω :

$$\Omega \approx \frac{d}{L},$$

где d – база интерференции, L – расстояние от источника до диафрагмы с двумя щелями S_1 и S_2 (для схемы Юнга) (см. рис. Т7.1).

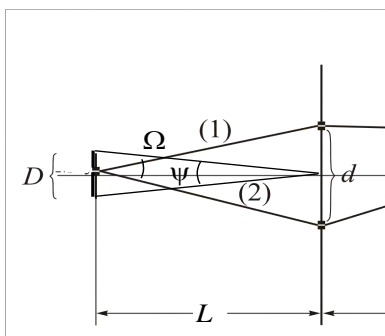


Рис. Т7.1. Схема Юнга в случае протяженного источника.

- Радиус пространственной когерентности r_k :

$$r_k \approx \frac{\lambda}{D} L \approx \frac{\lambda}{\psi},$$

где D – поперечный размер источника, $\psi \approx \frac{D}{L}$ – угловой размер источника, L – расстояние от источника до диафрагмы с щелями, λ – длина световой волны.

- Условие полного размытия интерференционной картины:

$$\frac{Dd}{\lambda L} = 1, \text{ или } \frac{d}{\lambda} \psi = 1, \text{ или } \frac{D\Omega}{\lambda} = 1.$$

- Условие хорошей видности (достаточной отчетливости) интерференционной картины:

$$\frac{Dd}{\lambda L} \leq \frac{1}{2}.$$

7.1. В схеме Юнга узкая щель S , перпендикулярная плоскости рис. 7.1, служит источником монохроматического света с длиной волны λ . В непрозрачной диафрагме B имеются две узкие параллельные щели S_1 и S_2 ,

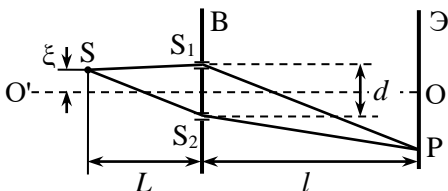


Рис. 7.1. Расположение источника света S и щелей и экрана в схеме Юнга.

расстояние между которыми равно d . Расстояния от источника S до диафрагмы и от диафрагмы до экрана равны L и l ($L, l \gg d$) соответственно. Первоначально щель S находилась на оси симметрии OO' системы, а затем её сдвигают перпендикулярно OO' на расстояние ξ . На какое расстояние x_0 на экране \mathcal{E} сместится при этом максимум нулевого порядка? Как изменится интерференционная картина на экране?

7.2. В схеме Юнга источником монохроматического света с длиной волны λ служит щель ширины D (рис. 7.2). Расстояния от источника до диафрагмы с двумя щелями L и от диафрагмы до экрана l много больше расстояния между щелями d . При каких значениях ширины щели D интерференционная картина остается достаточно контрастной?

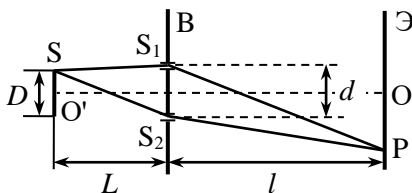


Рис. 7.2. Схема Юнга с протяженным источником.

7.3. В схеме Юнга с протяженным источником, описанной в задаче 7.2, найти распределение интенсивности I на экране в зависимости от поперечного размера источника D . Рассчитать видность V интерференционной картины и построить график зависимости $V(D)$.

7.4. С какого максимального расстояния L_{\max} можно различить глазом две светящиеся точки, расстояние между которыми $D = 5$ см? Диаметр зрачка глаза считать равным $d = 1$ мм. Средняя длина волны света $\lambda = 500$ нм.

7.5. С какого расстояния можно различить две светящиеся точки, расстояние между которыми $D = 5$ см, если использовать подзорную трубу, диаметр входного отверстия которой равен $d = 10$ см? Средняя длина волны света $\lambda = 500$ нм.

7.6. Какого размера D объект на поверхности Луны можно рассмотреть в телескоп с Земли, если диаметр главного зеркала равен

$d = 6$ м? Расстояние от Земли до Луны равно $L = 3,84 \cdot 10^5$ км. Средняя длина волны света $\lambda = 540$ нм.

7.7. На диафрагму с двумя узкими параллельными щелями падают лучи непосредственно от Солнца. При каком расстоянии d между щелями за диафрагмой могут наблюдаться интерференционные полосы, если угловой диаметр Солнца $\psi = 0,01$ рад? Считать, что средняя длина волны солнечного излучения $\lambda = 500$ нм.

7.8. Оценить радиус когерентности r_k излучения (в видимом диапазоне) от звезды Бетельгейзе, если ее угловой размер $\psi = 10^{-8}$ рад. Средняя длина волны света $\lambda = 500$ нм.

7.9. Оценить радиус когерентности r_k прямого солнечного света (средняя длина волны солнечного излучения $\lambda = 500$ нм) на поверхности Земли. Расстояние от Земли до Солнца $L = 1,5 \cdot 10^8$ км, диаметр Солнца $D = 1,4 \cdot 10^6$ км.

7.10. В интерференционной схеме с бизеркалом Френеля угол между зеркалами $\varphi = 12^\circ$ (рис. 7.3). Расстояния от ребра бизеркала до источника света S и экрана \mathcal{E} равны $a = 10$ см и $b = 90$ см соответственно. Источник излучает свет с длиной волны $\lambda = 696$ нм. При какой ширине источника $D_{\text{проп}}$ интерференционные полосы на экране полностью размыты?

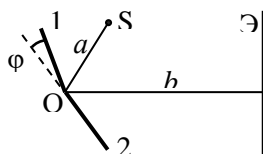


Рис. 7.3. Интерференционная схема с бизеркалами Френеля.

7.11. В интерференционной схеме с бизеркалом Френеля источником света служит узкая щель, параллельная линии пересечения зеркал и находящаяся на расстоянии r от неё. Угол между зеркалами мал и равен ϵ . Экран расположен на расстоянии $b = 9r$ от линии пересечения зеркал. Источник излучает свет с длиной волны λ . При каких значениях ширины щели D картина интерференционных полос на экране достаточно четкая?

7.12. Бипризма Френеля освещается светом с длиной волны $\lambda = 500$ нм, исходящим из узкой щели шириной D (рис. 7.4), перпендикулярной плоскости рисунка. Преломляющий угол бипризмы $\epsilon = 15'$, показатель преломления $n = 1,5$. Расстояние от щели до бипризмы $a = 50$ см, от бипризмы до экрана $b = 400$ см. При каком максимальном значении ширины щели D интерференционная картина на экране ещё до-

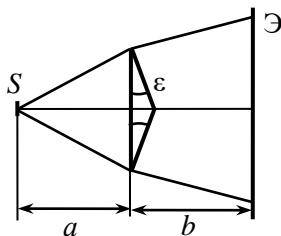


Рис. 7.4. Схема опыта с бипризмой Френеля.

статочно четкая?

7.13. Пучок света с длиной волны $\lambda = 500$ нм приходит от удаленного источника и падает на бипризму из стекла с показателем преломления $n = 1,5$ и с преломляющим углом $\varphi = 10^{-2}$ рад (рис. 7.5). Оценить допустимый угловой размер ψ источника в этом интерференционном опыте, если ширина бипризмы $H = 2$ см, а экран расположен: а) на расстоянии l_0 , обеспечивающем наблюдение максимально возможного числа интерференционных полос; б) на расстоянии $l = 30$ см.

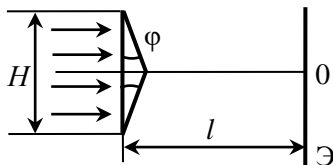


Рис. 7.5. Интерференционная схема с бипризмой Френеля.

7.14. Из тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием f вырезана центральная часть шириной h , а половинки сдвинуты до соприкосновения. Источник света с длиной волны λ находится на оси системы в фокальной плоскости линзы. Экран расположен с противоположной стороны билинзы на расстоянии l от неё, которое меньше того расстояния, при котором можно наблюдать максимальное число интерференционных полос. При каком поперечном размере D источника полосы на экране полностью исчезают?

7.15. Половинки линзы с фокусным расстоянием $f = 12$ см раздвинуты на расстояние $h = 1,1$ мм. Каким должен быть диаметр светящейся нити D в установке с билинзой, чтобы получить отчетливую интерференционную картину? Расстояния от билинзы до нити и экрана равны $a = 50$ см и $l = 480$ см соответственно. Длина волны используемого света $\lambda = 610$ нм.

7.16. В интерференционной схеме с зеркалом Ллойда (рис. 7.6) световая волна, падающая на экран Э непосредственно от щели S , интерферирует с волной, отразившейся от зеркала $З$ (рис. 7.6). Расстояние от щели S до плоскости зеркала $h = 1$ мм, расстояние от щели до экрана $l = 1$ м, длина волны $\lambda = 500$ нм. На каком расстоянии x от полосы нулевого порядка интерференционная картина на экране полностью размыта, если ширина щели $D = 0,01$ мм?

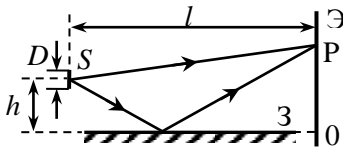


Рис. 7.6. Схема опыта с зеркалом Ллойда.

7.17. Интерференционные полосы равной толщины наблюдаются в отраженном свете на поверхности воздушного клина между двумя стеклянными пластинками с углом при вершине ϵ (рис. 7.7). Полосы получаются в свете зеленой линии ртути ($\lambda = 546,1$ нм, $\delta\lambda = 0,01$ нм). Определить максимально допустимое угловое расхождение $\delta\theta$ лучей, чтобы можно было наблюдать все полосы (при неограниченных размерах клина).

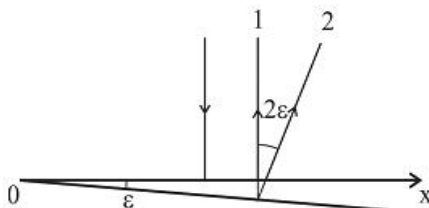


Рис. 7.7. Формирование интерференционной картины в воздушном клине между двумя стеклянными пластинками.

7.18. Какую ширину D может иметь источник света в интерферометре Майкельсона (рис. 7.8), если зеркала интерферометра расположены на неодинаковых расстояниях от делительной пластинки ($\Delta l = 0,2$ мм)? Какой вид будет иметь интерференционная картина? Определить порядок интерференции m_0 в центре картины. Фокусное расстояние коллиматора равно $f = 25$ см; длина волны света $\lambda = 500$ нм.

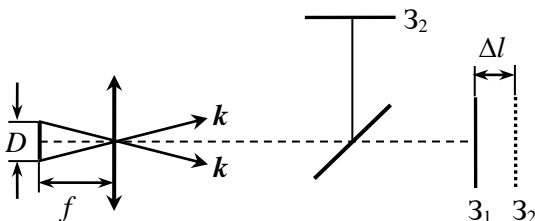


Рис. 7.8. Оптическая схема интерферометра Майкельсона.

7.19. Звездный интерферометр Майкельсона предназначен для измерения угловых диаметров звезд (рис. 7.9). Зеркала Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 направляют в объектив телескопа два пучка света, интерферирующих друг с другом в фокальной плоскости объектива. Расстояние между зеркалами Z_1 и Z_2 можно менять. При измерении углового диаметра гигантской красной звезды Бетельгейзе Майкельсон нашел, что интерференционные полосы исчезают,

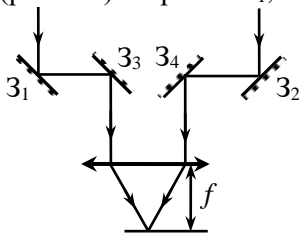


Рис. 7.9. Схема звездного интерферометра Майкельсона.

когда расстояние между внешними зеркалами Z_1 и Z_2 увеличивается до $d = 306,5$ см. Считая, что длина волны света равна $\lambda = 575$ нм, оцените угловой диаметр ψ этой звезды.

7.20. Протяженный квазимонохроматический (средняя длина волны λ) источник используется в интерференционной схеме деления волнового фронта (например, в схеме Юнга). Наблюдаемые интерференционные картины для двух источников показаны на рис. 7.10 *a* и *б*. Оценить диапазоны $(\Delta\lambda)_a$, $(\Delta\lambda)_б$ излучения источников и их поперечные размеры D_a , $D_б$, если апертура интерференции равна Ω .

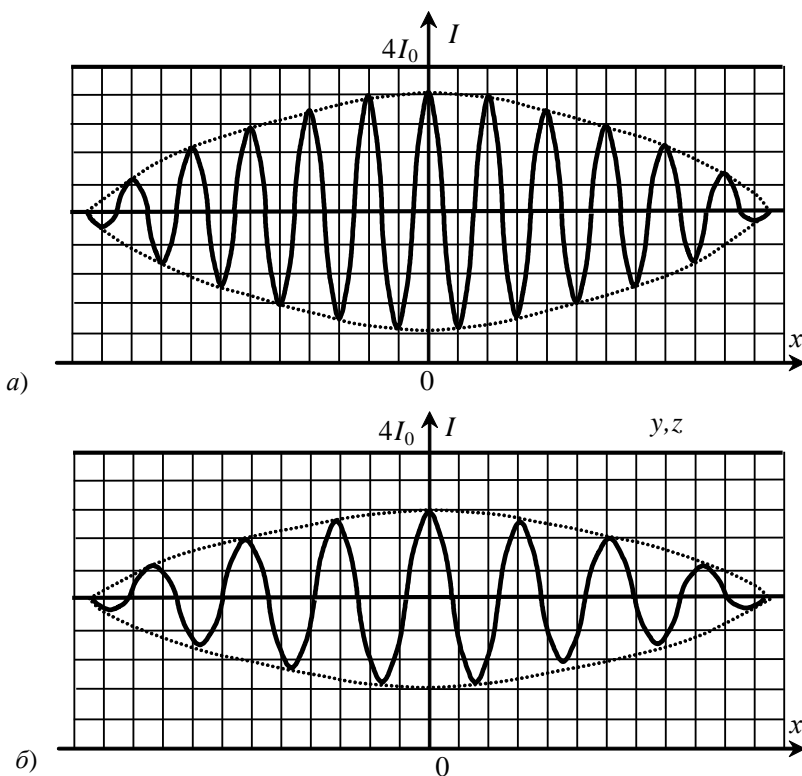


Рис. 7.10. Распределение интенсивности интерференционной картины на экране.

§8. Дифракция Френеля

- Радиус внешней границы n -й зоны Френеля:

$$R_n = \sqrt{\frac{n\lambda}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где a – расстояние от источника P_0 до объекта, b – расстояние от объекта до точки наблюдения P ; $R \ll a$, $R \ll b$ (см. рис. Т8.1).

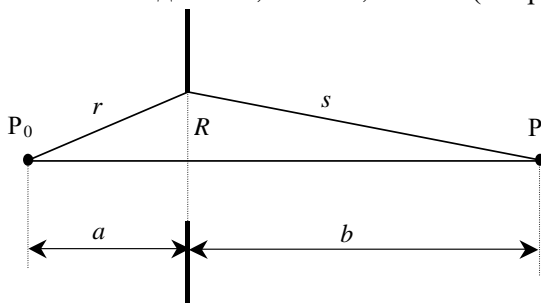


Рис. Т8.1. Расположение источника P_0 и точки наблюдения P при построении зон Френеля.

- Площадь n -ой зоны Френеля S_n :

$$S_n = \frac{\pi\lambda}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \text{const}.$$

- Радиус внешнего края n -ой зоны Френеля для плоской волны:

$$R_n = \sqrt{nb\lambda}.$$

- Разность фаз ψ_R между волнами, пришедшими в точку наблюдения P от края и центра отверстия радиуса R :

$$\psi_R = \frac{kR^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right),$$

где k – волновое число.

8.1. Определить внешний радиус n -й зоны Френеля, если расстояние от источника до непрозрачной диафрагмы с круглым отверстием равно a , а от диафрагмы до точки наблюдения – b . Длина волны света λ . Рассчитать радиус первой зоны Френеля, если $a = b = 1$ м, $\lambda = 500$ нм.

8.2. Показать, что площади зон Френеля при дифракции на круглом отверстии одинаковы. Расстояние от плоскости отверстия до точечного источника света и точки наблюдения равны a и b соответственно, длина волны света λ .

8.3. Точечный источник света с длиной волны λ расположен на расстоянии a от непрозрачной диафрагмы с круглым отверстием радиуса R . Точка наблюдения находится на расстоянии b от диафрагмы. Найти разность фаз ψ_R в точке наблюдения для крайнего и центрального лучей от отверстия. Как будет зависеть эта разность фаз от числа n зон Френеля, открываемых отверстием?

8.4. Экран находится на расстоянии l от точечного источника света с длиной волны $\lambda = 600$ нм. Посредине между ними помещен круглый непрозрачный диск диаметром $D = 4$ мм. Чему равно расстояние l , если диск загораживает одну центральную зону Френеля при наблюдении картины на экране?

8.5. Экран находится на расстоянии $l = 4$ м от точечного источника света с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Посредине между ними помещена диафрагма с круглым отверстием. При каком радиусе отверстия R центр системы дифракционных колец на экране будет наиболее темным?

8.6. Точечный источник света с длиной волны $\lambda = 500$ нм помещен на расстоянии $a = 0,5$ м перед непрозрачной диафрагмой с круглым отверстием радиуса $R = 0,5$ мм. При каком расстоянии b от отверстия для точки наблюдения открыто $n = 10$ зон Френеля?

8.7. Точечный источник света с длиной волны $\lambda = 500$ нм находится на расстоянии $a = 1$ м перед непрозрачной диафрагмой с круглым отверстием радиуса $R = 2$ мм. На каком расстоянии от диафрагмы для точки наблюдения открыто минимальное число зон Френеля? Чему оно равно?

8.8. Непрозрачную диафрагму с круглым отверстием переменного радиуса поместили между точечным источником света и экраном. Расстояния от диафрагмы до источника и экрана равны a и $b = 2a$ соответственно. Определить длину волны света λ , если при

увеличении радиуса отверстия от $r_1 = R$ до $r_2 = \sqrt{3}R$ в центре дифракционной картины наблюдается изменение интенсивности от одного максимума к другому.

8.9. Между точечным монохроматическим источником и экраном поместили непрозрачную диафрагму с круглым отверстием, открывающим для точки наблюдения первую зону Френеля. Расстояния от диафрагмы до источника и экрана одинаковы и равны a . На какое минимальное расстояние Δa надо сместить диафрагму, чтобы в центре дифракционной картины на экране наблюдалось темное пятно?

8.10. На отверстие радиусом $R = 2$ мм в непрозрачной диафрагме падает плоская световая волна. На каком расстоянии b от диафрагмы для точки наблюдения открыта только первая зона Френеля, если свет: а) красный ($\lambda_1 = 600$ нм); б) фиолетовый ($\lambda_2 = 400$ нм)?

8.11. Плоская световая волна падает на непрозрачную преграду с круглым отверстием, которое для точки наблюдения Р открывает первую зону Френеля. Во сколько раз следует увеличить радиус отверстия, чтобы в точке Р наблюдался: 1) первый минимум; 2) следующий максимум?

8.12. На непрозрачную диафрагму с круглым отверстием радиуса $R = 1,2$ мм падает плоская световая волна. Когда расстояние от диафрагмы до находящегося за ней экрана равно $b_1 = 75$ см, интенсивность в центре дифракционной картины максимальна. При увеличении расстояния до $b_2 = 100$ см максимум интенсивности сменяется минимумом. Определить длину волны λ .

8.13. Используя спираль Френеля, получить формулу зависимости интенсивности в центре картины при дифракции на круглом отверстии от числа n открытых зон Френеля.

8.14. Плоская монохроматическая световая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием. Найти интенсивность I за экраном в точке, для которой

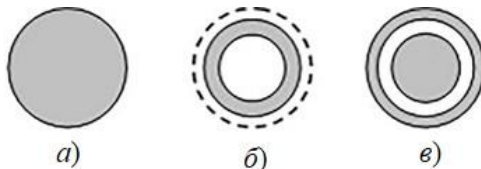


Рис. 8.1. Форма препятствий. Пунктиром показан край первой зоны Френеля. Площади трех частей, на которые поделена первая зона Френеля (пункты б и в) равны между собой.

отверстие открывает: а) половину первой зоны Френеля; б) 1,5 зоны Френеля; в) треть первой зоны Френеля.

8.15. Монохроматическая плоская световая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачные препятствия, имеющие форму (рис. 8.1): а) тонкого диска, закрывающего для точки наблюдения первую зону Френеля; б) тонкого кольца, площадь которого равна $1/3$ площади первой зоны Френеля для точки наблюдения; в) тонкого диска и кольца, площади которых равны $1/3$ площади первой зоны Френеля для точки наблюдения, а внешний край кольца совпадает с краем первой зоны Френеля. Найти интенсивность света I в точке наблюдения.

8.16. На пути монохроматической волны, распространяющейся от точечного источника, установили препятствие с прозрачными участками в виде круглого отверстия радиуса r_1 и кольца с внутренним радиусом $r_2 = 2r_1$ и внешним радиусом $r_3 = 3r_1$ (рис. 8.2). Найти интенсивность в точке наблюдения, для которой радиус r_1 : а) равен радиусу первой зоны Френеля; б) в $\sqrt{3}$ раз меньше радиуса первой зоны Френеля. В отсутствие препятствия в точке наблюдения интенсивность равна I_0 .

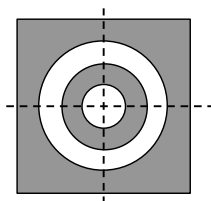


Рис. 8.2. Объект дифракции.

8.17. Монохроматическая волна падает на круглое отверстие в непрозрачном экране, которое открывает для точки наблюдения 2,5 зоны Френеля. Радиус отверстия увеличивают пока интенсивность не станет в два раза больше первоначальной. Во сколько раз увеличили радиус?

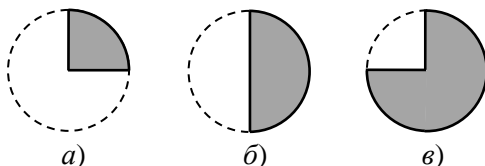


Рис. 8.3. Форма непрозрачных препятствий. Край первой зоны Френеля показан пунктиром.

8.18. На пути плоской световой волны с интенсивностью I_0 установили перпендикулярно направлению её распространения непрозрачные препятствия, закрывающие для точки наблюдения $1/4$,

$1/2$ и $3/4$ площади первой зоны (рис. 8.3). Определить интенсивность I в точке наблюдения.

8.19. Точечный источник света с длиной волны $\lambda = 490$ нм и точка наблюдения находятся на одинаковых расстояниях $a = 1$ м от непрозрачного экрана с круглым отверстием $R = 0,35$ мм. Определить интенсивность I в точке наблюдения, если в отсутствие экрана интенсивность в этой точке равна I_0 .

8.20. На пути плоской световой волны с интенсивностью I_0 помещают перпендикулярно направлению её распространения прозрачные плоские объекты, которые вносят дополнительную разность хода $\lambda/2$ (рис. 8.4): *a*) диск, перекрывающий первую зону Френеля для точки наблюдения; *б*) квадрант круга; *в*) полудиск; *г*) диск без квадранта. Внешний край всех этих объектов совпадает с краем первой зоны Френеля. Определить интенсивность I в точке

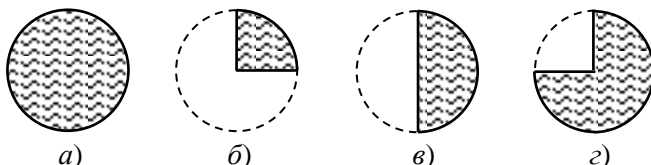


Рис. 8.4. Форма препятствий, вносящих дополнительную разность хода $\lambda/2$. Край первой зоны Френеля показан пунктиром.

наблюдения.

8.21. В объекте, рассмотренном в задаче 8.16 *a*, прозрачное кольцо перекрывают стеклянной пластиной, вносящей дополнительную разность хода $\lambda/4$. Определить интенсивность I в точке наблюдения.

8.22. На пути монохроматической волны от точечного источника установили препятствие с прозрачными участками в виде круглого отверстия, радиус которого равен радиусу первой зоны Френеля R_1 для точки наблюдения, и кольца с внутренним радиусом $r_2 = 2R_1$ и внешним радиусом $r_3 = 3R_1$. Центральное прозрачное отверстие перекрыли наполовину (по диаметру) непрозрачным экраном (рис. 8.5). Найти интенсивность I в точке наблюдения.

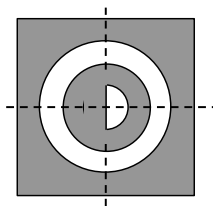


Рис. 8.5. Объект дифракции.

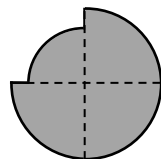


Рис. 8.6. Объект дифракции.

8.23. Между точечным источником монохроматического света и точкой наблюдения перпенди-

кулярно соединяющей их линии помещено непрозрачное препятствие из секторов двух кругов (рис. 8.6). Радиус меньшего круга равен радиусу первой зоны Френеля для точки наблюдения, внешний радиус большего круга – радиусу второй зоны Френеля. Определить интенсивность I света в точке наблюдения, если в отсутствие препятствия она равна I_0 .

8.24. Между точечным монохроматическим источником света и точкой наблюдения помещают экран, форма которого показана на рис. 8.7 (источник, точка наблюдения и точка В, находятся на одной прямой, перпендикулярной плоскости экрана). Радиус полукруглого отверстия в $\sqrt{2}$ раз меньше радиуса первой зоны Френеля. Найти интенсивность в точке наблюдения, если в отсутствие экрана она равна I_0 .

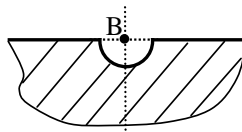


Рис. 8.7. Объект дифракции.

8.25. Непрозрачный диск радиусом $R = 0,55$ см освещается плоской монохроматической волной с $\lambda = 500$ нм. Оказалось, что если в центре диска проделать маленькое круглое отверстие, то интенсивность света в точке наблюдения, находящейся за диском на оси отверстия на расстоянии $L = 1,5$ м увеличится в 4 раза. Определить минимально возможный радиус r_{\min} отверстия.

8.26. На пути плоской волны интенсивностью I_0 установлен непрозрачный круглый диск, радиус которого для точки наблюдения соответствует радиусу первой зоны Френеля. Из диска удаляют сектор с углом $\psi = 2\pi/m$, где m – целое число. Найти интенсивность I в точке наблюдения.

8.27. Диск из стекла с показателем преломления n закрывает для точки наблюдения Р первые 2,5 зоны Френеля. При какой толщине h диска интенсивность I в точке Р будет наибольшей? Чему она будет равна? Длина волны излучения в вакууме λ .

8.28. Плоская монохроматическая волна с длиной волны λ падает нормально на круглое отверстие в непрозрачном экране, которое для точки наблюдения открывает 1,5 зоны Френеля. В центре отверстия находится тонкий стеклянный диск, который закрывает внутреннюю половину (по площади) первой зоны Френеля. Показатель преломления стекла n . При какой толщине диска h интенсивность I света в точке

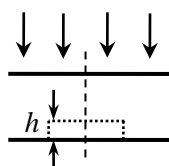


Рис. 8.8. Профиль выемки в пластине.

наблюдения будет минимальной? Чему она будет равна?

8.29. Плоская световая волна с длиной волны λ и интенсивностью I_0 падает нормально на большую стеклянную пластину (показатель преломления n), в которой сделана круглая выемка, размер которой для точки наблюдения соответствует $1/3$ первой зоны Френеля (рис. 8.8). При какой глубине выемки h интенсивность I света в точке наблюдения будет равна нулю? Потерями на отражение пренебречь.

8.30. Плоская световая волна с длиной волны λ падает нормально на большую стеклянную пластинку с показателем преломления n , на противоположной стороне которой сделана круглая выемка, заполненная прозрачным веществом с показателем преломления $n' < n$. Для точки наблюдения выемка совпадает с внутренней половиной первой зоны Френеля. При какой глубине h выемки интенсивность света в точке наблюдения будет максимальной? Потерями на отражение пренебречь.

8.31. Плоская световая волна с длиной волны λ и интенсивностью I_0 падает нормально на большую стеклянную пластину (показатель преломления n), профиль которой показан на рис. 8.9. При какой высоте h выступа интенсивность в точках, расположенных под ним, будет: а) равна нулю; б) вдвое меньше I_0 ? Потерями на отражение пренебречь.

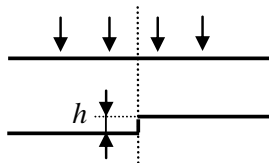


Рис. 8.9. Профиль пластины с уступом.

8.32. В плоскопараллельной стеклянной пластинке с показателем преломления n , на которую нормально падает плоская световая волна с длиной λ и интенсивностью I_0 , вырезано круглое отверстие размером в одну зону Френеля для точки наблюдения P , лежащей на оси системы. При какой толщине пластины интенсивность в точке P будет максимальной? Чему она будет равна?

8.33. Между источником и точкой наблюдения установлен непрозрачный экран с круглым отверстием радиуса R , открывающий первые три зоны Френеля. В отверстие вставляют круглый стеклянный диск такой толщины, что он вносит дополнительную разность фаз $\pi/2$. 1) При каком радиусе r_1 диска интенсивность в точке наблюдения равна нулю? 2) При каком радиусе r_2 она будет

максимально возможной? 3) Найти зависимость интенсивности I от радиуса диска.

8.34. Плоская волна интенсивностью I_0 и длиной волны λ падает нормально на непрозрачную диафрагму с круглым отверстием переменного радиуса. Точка наблюдения находится на расстоянии b от диафрагмы. При каком минимальном радиусе R отверстия интенсивность в точке наблюдения равна I_0 ?

8.35. Известно, что яркий источник света можно сфотографировать, поместив между ним и фотопластинкой гладкий непрозрачный шарик (*опыт Поля*). Определить минимальную высоту h_{\min} неровностей, хаотически покрывающих поверхность шарика, при которой он будет загораживать свет. Диаметр шарика $d = 40$ мм. Расстояние между источником света и шариком равно $a = 12$ м, а между шариком и фотопластинкой $- b = 18$ м. Длина волны света $\lambda = 550$ нм.

8.36. На непрозрачную диафрагму с круглым отверстием радиуса R нормально падает плоская световая волна с интенсивностью I_0 и длиной волны λ . Построить график зависимости интенсивности I на оси отверстия от расстояния b между диафрагмой и точкой наблюдения.

8.37. На непрозрачную диафрагму с круглым отверстием нормально падает плоская световая волна с интенсивностью I_0 и длиной волны λ . Точка наблюдения находится на оси отверстия на расстоянии b от диафрагмы. Используя спираль Френеля, построить график зависимости интенсивности I в центре дифракционной картины от радиуса отверстия R .

8.38. Точечный монохроматический источник (длина волны $\lambda = 500$ нм) расположен на расстоянии $a = 0,5$ м от непрозрачного препятствия с круглым отверстием радиуса $R = 0,5$ мм. Используя спираль Френеля, построить график зависимости интенсивности I в центре дифракционной картины от расстояния b между препятствием и точкой наблюдения.

8.39. Плоская монохроматическая волна с интенсивностью I_0 и длиной волны λ падает на плоскую зонную пластинку с последовательно чередующимися прозрачными и непрозрачными кольцами, площади которых одинаковы и равны S_0 . Центральная зона пластинки прозрачна. Определить положения фокусов зонной пластинки. Чему равна интенсивность света I в первом фокусе, если

число прозрачных колец в пластинке равно m ?

8.40. Радиусы окружностей, разграничивающих прозрачные и непрозрачные кольца плоской зонной пластинки, имеют значения $r_m = \alpha \sqrt{m}$, где $\alpha = 1$ мм, $m = 1, 2, 3, \dots$ Определить фокусное расстояние f пластинки для длин волн: а) $\lambda = 400$ нм; б) $\lambda = 580$ нм; в) $\lambda = 760$ нм.

8.41. Точечный источник монохроматического света расположен на расстоянии $f = 1,5$ м перед зонной пластинкой. Изображение источника получается на расстоянии $b = 1,0$ м за пластинкой. Найти главное фокусное расстояние f зонной пластинки.

8.42. Определить для света с длиной волны $\lambda = 500$ нм главное фокусное расстояние f зонной пластинки и радиус r_1 её центрального прозрачного круга, равный радиусу первой зоны Френеля для выбранной точки наблюдения, если внутренний радиус пятого прозрачного кольца зонной пластинки $r_5 = 1,5$ мм. Что произойдет, если пространство между зонной пластинкой и экраном заполнить прозрачной средой с показателем преломления $n > 1$?

8.43. Освещенный предмет расположен на оси зонной пластинки на расстоянии a от неё. Самое дальнее от зонной пластинки изображение предмета получается на расстоянии b от него. На каких расстояниях b_k от пластинки получают остальные изображения предмета?

8.44. Требуется изготовить отражательную зонную пластинку на вогнутом сферическом зеркале путем снятия отражающего покрытия зеркала кольцевыми зонами Френеля. Чему равен радиус m -й зоны, если радиус кривизны зеркала равен R , а источник света и точка наблюдения расположены на оси зеркала на расстояниях a и b от его вершины соответственно ($a \leq R \leq b$, $r_m \leq a$)?

8.45. Для отражательной решетки, описанной в задаче 8.44, $R = 100$ см, $a = 0,8R$, $\lambda = 500$ нм и радиус четвертого кольца $r_4 = 2$ мм. На каком расстоянии b от вершины зеркала будет находиться изображение источника первого порядка?

8.46. Плоская монохроматическая световая волна с длиной волны λ падает нормально на длиннофокусную собирающую линзу с ирисовой диафрагмой, позволяющей регулировать радиус R отверстия. Точка наблюдения P находится на оси отверстия на расстоянии b от линзы. При каких радиусах диафрагмы в точке P будет

наблюдаться максимум или минимум интенсивности, если фокусное расстояние линзы равно f ? Радиус отверстия $R \ll b, f$.

8.47. Плоская монохроматическая световая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием радиуса r_0 . Для точки наблюдения Р, находящейся на расстоянии b от экрана, отверстие открывает три зоны Френеля. В отверстие вставили тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием f . Найти интенсивность света в точке Р, если $f = b$.

8.48. Решить задачу 8.47 для случая, когда $f = 2b$.

8.49. Плоская монохроматическая световая волна падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием радиуса r_0 . Для точки наблюдения Р, находящейся на расстоянии b от экрана, отверстие открывает три зоны Френеля. В отверстие вставлена тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $f = b$. Во сколько раз изменится интенсивность света в точке Р, если линзу заменить на другую, с фокусным расстоянием $f = b/2$?

8.50. На пути плоской световой волны с $\lambda = 540$ нм поставили тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием $f = 50$ см, непосредственно за ней диафрагму с круглым отверстием и на расстоянии $b = 75$ см от диафрагмы – экран. При каких радиусах r отверстия центр дифракционной картины на экране имеет максимальную освещенность?

§9. Дифракция Фраунгофера

• Распределение интенсивности при дифракции Фраунгофера плоской монохроматической волны на одной щели (при нормальном падении):

$$I(\varphi) = I_0 \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{kb \sin \varphi}{2}\right)}{\frac{kb \sin \varphi}{2}} \right)^2,$$

где φ – угол дифракции, b – ширина щели, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, $I_0 \sim b^2$ – интенсивность в центре дифракционной картины.

• Условие минимумов интенсивности при дифракции на одной щели (свет падает нормально):

$$b \sin \varphi = \pm n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

• Угловая дифракционная расходимость при дифракции на одной щели шириной b :

$$\theta_{\text{диф-щель}} \approx \lambda / b.$$

• Распределение интенсивности при дифракции Фраунгофера на N щелях:

$$I(\varphi) = I_0 \cdot \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N\delta}{\sin \delta} \right)^2,$$

где $u = \frac{kb \sin \varphi}{2} = \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}$, $\delta = \frac{kd \sin \varphi}{2} = \frac{\pi d \sin \varphi}{\lambda}$;

b – ширина щели, d – период решетки, N – число щелей решетки, I_0 – интенсивность в центре картины при дифракции на одной щели шириной b ($I_0 \sim b^2$, а $I(\varphi = 0) = N^2 I_0 \sim (Nb)^2$).

• Дифракционная решетка с N щелями, период решетки d , ширина щели b , свет падает нормально.

Условие главных максимумов:

$$d \sin \varphi = \pm m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

условие главных минимумов:

$$b \sin \varphi = \pm n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

условие добавочных минимумов:

$$d \sin \varphi = \pm \frac{p}{N} \lambda, \quad p = 1, 2, 3, \dots, \text{ кроме } 0, N, 2N, 3N \dots$$

- Условие главных максимумов при падении света на дифракционную решетку с N щелями и периодом d под углом θ к нормали:

$$d \cdot (\sin \varphi_m - \sin \theta) = m \lambda.$$

- Дифракционная длина $z_{\text{диф}}$ и угловая дифракционная расходимость $\theta_{\text{диф}}$ при нормальном падении плоской волны на непрозрачный экран с отверстием (характерный размер d):

$$z_{\text{диф}} \approx \frac{d^2}{4\lambda}; \quad \theta_{\text{диф}} \approx \frac{\lambda}{d}.$$

- Представление дифракции в дальней зоне (приближение Фраунгофера) в виде пространственного преобразования Фурье:

$$U(\sin \varphi_x, \sin \varphi_y) = B \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x', y') \cdot \exp [i(k_x x' + k_y y')] dx' dy',$$

где U – комплексная амплитуда поля, φ_x, φ_y – углы дифракции; (x', y') – координаты точек в плоскости отверстия; $k_x = k \cdot \sin \varphi_x$, $k_y = k \cdot \sin \varphi_y$ – пространственные частоты, $k = 2\pi / \lambda$ – волновой вектор, $\alpha(x', y')$ – функция пропускания препятствия:

$$\alpha(x', y') = \frac{U_{\text{за}}(x', y')}{U_{\text{перед}}(x', y')}.$$

- Распределение интенсивности при дифракции Фраунгофера на прямоугольном отверстии размером $b \times d$:

$$I(\varphi_x, \varphi_y) = I_0 \cdot \left(\frac{\sin \left(\frac{kb \sin \varphi_x}{2} \right)}{\frac{kb \sin \varphi_x}{2}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin \left(\frac{kd \sin \varphi_y}{2} \right)}{\frac{kd \sin \varphi_y}{2}} \right)^2,$$

где $I_0 \sim b^2 d^2$.

• Угловая дифракционная расходимость при дифракции Фраунгофера на круглом отверстии радиуса R :

$$\theta_{\text{диф. круг. отв.}} \approx \frac{0,61 \cdot \lambda}{R} = \frac{1,22 \cdot \lambda}{d},$$

где $d = 2R$ – диаметр отверстия.

9.1. Плоская монохроматическая волна с длиной волны λ падает нормально на непрозрачное препятствие с узкой длинной щелью ширины b . Дифракцию Фраунгофера наблюдают на экране, расположенном в фокальной плоскости собирающей линзы, установленной за препятствием. С помощью векторной диаграммы найти распределение интенсивности света и угловое положение минимумов интенсивности.

9.2. Параллельный пучок монохроматического света ($\lambda = 550$ нм) падает нормально на щель шириной $b = 0,5$ мм. Какова ширина Δx центрального дифракционного максимума на экране, расположенном в фокальной плоскости линзы с фокусным расстоянием $f = 20$ см?

9.3. Параллельный пучок белого света падает нормально на щель шириной $b = 0,1$ мм. За щелью установлена линза с фокусным расстоянием $f = 20$ см, в фокальной плоскости которой помещен экран. Оценить ширину δx радужного канта на границе центрального дифракционного максимума на экране и найти отношение этой ширины к средней ширине Δx центрального максимума. Диапазон длин волн белого света считать от $\lambda_1 = 400$ нм до $\lambda_2 = 750$ нм.

9.4. Параллельный пучок монохроматического света с длиной волны λ падает нормально на непрозрачное плоское препятствие с узкой щелью шириной b . Дифракцию Фраунгофера наблюдают на экране, расположенном в фокальной плоскости собирающей линзы, установленной за препятствием. Определить приближенно угловое положение максимумов интенсивности.

9.5. Плоская монохроматическая волна с длиной волны $\lambda = 600$ нм падает нормально на диафрагму с узкой щелью шириной $b = 0,04$ мм. За щелью находится тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $f = 40$ см, в фокальной плоскости которой расположен экран. Определить координаты x_1 и x_2 максимумов интенсивности первого и второго порядков, отсчитываемые от положения главного максимума на экране. Оценить отношение интенсивностей нулевого, первого и второго максимумов.

9.6. Плоская монохроматическая волна падает нормально на узкую щель. Дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости собирающей линзы, причем расстояние между максимумами нулевого и первого порядков равно $\Delta x_{01} = 3$ мм. Считая

углы дифракции малыми, оценить расстояние Δx_{12} между максимумами первого и второго порядков.

9.7. На экран с узкой щелью шириной $b = 3$ мкм нормально падает плоская монохроматическая волна ($\lambda = 500$ нм). За щелью расположена линза, в фокальной плоскости которой находится экран. Какое число N дифракционных максимумов можно наблюдать на экране?

9.8. Во сколько раз изменится интенсивность в центре дифракционной картины на щели, если ее ширину увеличить в m раз?

9.9. Плоская монохроматическая волна падает нормально на узкую щель. За щелью находится тонкая собирающая линза, в фокальной плоскости которой расположен экран. Расстояние между минимумами второго порядка на экране равно l_0 . Ширину щели изменяют так, что интенсивность в центре дифракционной картины возрастает в 9 раз. Каким стало расстояние l_1 между минимумами первого порядка на экране? Углы дифракции считать малыми.

9.10. На узкую длинную щель падает плоская монохроматическая волна с длиной волны λ , распределение интенсивности на экране задается приближением Фраунгофера. Щель перекрывают двумя плотно прижатыми друг к другу прозрачными пластинами одинаковой толщины d , но с разными показателями преломления n_1 и n_2 . При каких условиях в центре картины будет наблюдаться темная полоса?

9.11. Плоская монохроматическая волна с интенсивностью $I_0 = 10$ мВт/см² и длиной волны $\lambda = 600$ нм падает нормально на узкую бесконечно длинную щель шириной $b = 60$ мкм. Оценить интенсивность I в центре дифракционной картины на экране, расположенном на расстоянии $L = 60$ см от щели.

9.12. Плоская монохроматическая волна ($\lambda = 500$ нм) падает нормально на узкую щель шириной b . Интенсивность в центре дифракционной картины на экране, расположенном на расстоянии $L = 1$ м от щели, в $n = 50$ раз меньше интенсивности падающей волны. Оценить ширину b щели.

9.13. Оценить максимальное расстояние l_{\max} , с которого еще могут быть видны раздельно светящиеся фары автомобиля.

9.14. На дифракционную решетку, состоящую из N щелей, нормально падает плоская монохроматическая волна с длиной вол-

ны λ . Период решетки d , ширина щели b . Дифракцию Фраунгофера наблюдают на экране, расположенном в фокальной плоскости собирающей линзы, установленной за решеткой. С помощью векторной диаграммы найти угловое положение главных максимумов и минимумов и добавочных минимумов интенсивности на экране.

9.15. Чему равен период d дифракционной решетки, если при нормальном падении на неё света с длиной волны $\lambda = 700$ нм спектр второго порядка наблюдается под углом $\varphi = 30^\circ$? Определить число n штрихов на 1 см длины решетки.

9.16. На дифракционную решетку нормально падает пучок света с длиной волны $\lambda_1 = 589$ нм. В дифракционном спектре максимум первого порядка наблюдается при угле дифракции $\varphi_1 = 17^\circ$. Определить длину волны λ_2 света, для которого при нормальном падении на эту же решетку максимум второго порядка наблюдается при угле дифракции $\varphi_2 = 24^\circ$. Найти число n штрихов на 1 см решетки.

9.17. Определить длину λ_2 волны света, для которой при дифракции на решетке максимум третьего порядка совпадает с максимумом четвертого порядка для длины волны $\lambda_1 = 450$ нм.

9.18. Определить наибольший порядок m_{\max} спектра, который можно наблюдать при нормальном падении на дифракционную решетку, имеющую $n = 500$ штрихов на 1 мм, света с длиной волны $\lambda = 590$ нм.

9.19. На дифракционную решетку с периодом $d = 6$ мкм нормально падает плоская монохроматическая волна. Угол между максимумами первого и второго порядков равен $\Delta\varphi = 4^\circ 30'$. Определить длину λ света.

9.20. Определить число n штрихов на 1 мм дифракционной решетки, если при нормальном падении на неё света с длиной волны $\lambda_1 = 589$ нм (желтая линия натрия) угол между направлениями на два максимума третьего порядка равен $\Delta\varphi = 4^\circ$.

9.21. На дифракционную решетку, имеющую $n = 50$ штрихов на 1 мм, нормально падает параллельный пучок белого света с длинами волн от $\lambda_1 = 400$ нм до $\lambda_2 = 760$ нм. Определить разность углов $\Delta\varphi$ между направлениями на конец спектра первого порядка и начало спектра второго порядка.

9.22. На дифракционную решетку с периодом $d = 5$ мкм нормально падает параллельный пучок света от газоразрядной трубки,

наполненной водородом. Под каким минимальным углом по отношению к направлению падающего света надо поставить зрительную трубу, чтобы в поле зрения совпали две линии с $\lambda_1 = 656,3$ нм и $\lambda_2 = 410,2$ нм?

9.23. Зрительная труба гониометра с дифракционной решеткой поставлена под углом $\varphi = 20^\circ$ к оси коллиматора. Свет падает на решетку нормально. При этом в поле зрения трубы видна красная линия гелиевой трубки ($\lambda_1 = 668$ нм). Определить период d дифракционной решетки, если под тем же углом видна и синяя линия гелия ($\lambda_2 = 447$ нм) более высокого порядка. Наибольший порядок спектра, который можно наблюдать при помощи данной решетки, $m_{\max} = 5$.

9.24. Для наблюдения дифракционного спектра решетки используется линза с фокусным расстоянием $f = 50$ см. На решетку нормально падает желтый свет натриевой лампы, состоящий из двух компонент с длинами волн $\lambda_1 = 589,0$ нм и $\lambda_2 = 589,6$ нм. При этом в третьем порядке спектра расстояние между линиями этих длин волн на экране равно $\Delta x = 0,9$ мм. Найти период d решетки.

9.25. На дифракционную решетку с периодом d под углом θ к нормали падает плоская монохроматическая волна с длиной волны λ . Получить условие главных дифракционных максимумов. Рассмотреть случай, когда $d \gg \lambda$, а порядок спектра $m \ll d / \lambda$.

9.26. Пучок рентгеновских лучей падает на дифракционную решетку с периодом $d = 1$ мкм под углом $\theta = 89^\circ 30'$. Угол дифракции для спектра второго порядка $\varphi = 89^\circ$. Определить длину волны λ рентгеновских лучей.

9.27. На дифракционную решетку с периодом $d = 0,2$ мкм падает пучок рентгеновских лучей под углом $\theta = 88^\circ 30'$. Спектр 4-го порядка наблюдается под углом $\psi = 10^\circ$ к направлению падающей волны. Определить длину волны λ рентгеновских лучей.

9.28. Какой максимальный порядок дифракции m_{\max} может наблюдаться при дифракции плоской волны с длиной λ , падающей под углом θ на решетку с периодом d ?

9.29. Определить угловое расстояние $\Delta\varphi_m$ между главным максимумом m -го порядка и ближайшим к нему минимумом (угловую ширину дифракционных максимумов) при нормальном падении параллельного пучка света с длиной волны λ на решетку с пе-

риодом d и числом щелей N .

9.30. Для наблюдения дифракционного спектра решетки с $n = 200$ штрихов на 1 мм используется линза с фокусным расстоянием $f = 15$ см. Ширина решетки $L = 3$ см, длина волны света $\lambda = 660$ нм. Определить ширину Δx дифракционного максимума первого порядка на экране в фокальной плоскости линзы.

9.31. Дифракционную картину получают при нормальном падении плоской световой волны на решетку. При каком соотношении между периодом решетки d и шириной щели b интенсивность главного максимума m -го порядка равна нулю?

9.32. Две щели одинаковой ширины, разделенные непрозрачным промежутком такой же ширины, освещают падающим нормально параллельным пучком монохроматического света и фиксируют угловую ширину центральной полосы. Затем одну из щелей закрывают. Во сколько раз изменится ширина центральной полосы?

9.33. Свет с длиной волны $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ падает нормально на дифракционную решетку. Два соседних главных максимума наблюдаются при $\sin \varphi_1 = 0,2$ и $\sin \varphi_2 = 0,3$, причем максимум четвертого порядка отсутствует. Определить период d решетки и наименьшую возможную ширину b отдельных щелей. При найденных значениях указанных величин линии каких порядков будут наблюдаться на экране?

9.34. Рассматривая дифракцию Фраунгофера как пространственное разложение светового пучка на плоские волны, рассчитать распределение интенсивности I света за препятствием при нормальном падении плоской монохроматической волны с длиной волны λ на непрозрачное препятствие с узкой длинной щелью ширины b .

9.35. Рассматривая дифракцию Фраунгофера как пространственное разложение светового пучка на плоские волны, рассчитать распределение интенсивности I света при нормальном падении плоской монохроматической волны с длиной волны λ на дифракционную решетку с N щелями. Период решетки d , ширина одной щели b .

9.36. Доказать справедливость принципа Бабине для дополнительных объектов (распределение интенсивности для дополнительных объектов одинаково во всех точках, кроме нулевого макси-

мум), используя представление о дифракции Фраунгофера как пространственном преобразовании Фурье.

9.37. На дифракционную решетку с N щелями, периодом d и шириной одной щели b падает нормально плоская монохроматическая волна. Нарисовать график зависимости $I(\sin\varphi)$, где I – интенсивность света, φ – угол дифракции, для следующих случаев: а) $d/b = 4$, $N = 4$; б) $d/b = 3$, $N = 5$; в) $d/b = 5$, $N = 3$; г) $d/b = 2$, $N = 6$. На графиках должно быть по 2 главных минимума с одной стороны от максимума нулевого порядка.

9.38. На дифракционную решетку падает нормально плоская монохроматическая волна. Половину решетки закрывают с одного края непрозрачной пластиной, в результате чего число штрихов уменьшается в 2 раза. Как изменятся при этом: а) положения дифракционных максимумов; б) интенсивность центрального максимума; в) ширина максимумов?

9.39. Плоская монохроматическая волна с длиной волны λ_1 падает нормально на дифракционную решетку. Дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости линзы, установленной за решеткой. Как изменятся параметры дифракционной картины (положения главных максимумов и минимумов, ширина максимумов) при освещении этой решетки монохроматической волной с длиной волны $\lambda_2 > \lambda_1$ той же интенсивности?

9.40. На дифракционную решетку падает нормально плоская монохроматическая волна. Не меняя периода решетки и числа щелей, увеличивают ширину каждой щели в 2 раза. Как изменятся при этом: а) положения главных максимумов; б) положения главных минимумов, в) интенсивность центрального максимума; г) ширина максимумов?

9.41. Плоская монохроматическая волна падает нормально на дифракционную решетку с четным количеством щелей. Затем каждую вторую щель делают непрозрачной. Как изменятся при этом: а) положения главных максимумов; б) положения главных минимумов, в) интенсивность центрального максимума; г) ширина максимумов; д) число добавочных максимумов между главными максимумами?

9.42. Плоская монохроматическая волна падает нормально на дифракционную решетку. Дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости линзы, установленной за решеткой. Как из-

менится дифракционная картина, если свет направить на решетку под углом θ к нормали?

9.43. Параллельный пучок монохроматического света падает нормально на дифракционную решетку с заданной полной шириной ее штрихованной поверхности. Найти значения отношения b/d (b – ширина щели, d – период решетки), соответствующего максимуму интенсивности для главных дифракционных максимумов: *a*) первого; *б*) второго; *в*) третьего порядков.

§10. Спектральные приборы. Многоволновая интерференция

• Для дифракционной решетки условие главных максимумов при нормальном падении света имеет вид:

$$d \sin \varphi_{m,\max} = \pm m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

• Условие минимумов, ближайших к главным максимумам, для дифракционной решетки при нормальном падении света:

$$d \sin \varphi_{m,\min} = \left(m \pm \frac{1}{N}\right)\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

• Угловая дисперсия D_φ дифракционной решетки при нормальном падении света:

$$D_\varphi = \frac{\delta\varphi_m}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi_m}.$$

• Линейная дисперсия D_x дифракционной решетки при нормальном падении света:

$$D_x = \frac{\delta x_m}{\delta\lambda} = f D_\varphi,$$

где f – фокусное расстояние линзы, собирающей дифракционные лучи на экране, δx_m – линейное расстояние на экране между максимумами m -го порядка для линий, длины волн которых отличаются на $\delta\lambda$.

• Разрешающая способность R дифракционной решетки:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN,$$

где N – число щелей решетки, $\delta\lambda$ – минимальная разность длин волн по критерию Рэлея.

• Область свободной дисперсии $\Delta\lambda$ дифракционной решетки для m -го порядка спектра:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}.$$

• Угловая ширина дифракционного максимума $\Delta\varphi_m$ для дифракционной решетки:

$$\Delta\varphi_m = \frac{\lambda}{Nd \cos \varphi_m}.$$

• Формула Эйри для интенсивности излучения, прошедшего через воздушный интерферометр Фабри - Перо (ИФП):

$$I = \frac{I_0}{1 + \frac{4\rho}{(1-\rho)^2} \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}},$$

где ρ - коэффициент отражения каждого из зеркал интерферометра (по интенсивности);

$$\delta = \frac{4\pi \cdot h}{\lambda} \cos\varphi - \text{разность фаз между соседними лучами};$$

h - расстояние между зеркалами (база) ИФП; φ - угол падения света на зеркала ИФП.

• Условие интерференционных максимумов для углов θ_m в воздушном интерферометре Фабри-Перо:

$$2h \cdot \cos\varphi_m = m\lambda, \quad m = 1, 2, \dots, m_{\max} = \left[\frac{2h}{\lambda} \right].$$

• Угловая дисперсия D_φ ИФП:

$$D_\varphi = \frac{d\varphi_m}{d\lambda} = \frac{m}{2h \sin\varphi_m}.$$

• Разрешающая способность R ИФП:

$$R_{\text{ИФП}} = mF,$$

где F - резкость полос (иногда её называют *эффективным числом интерферирующих лучей*):

$$F = \frac{\pi\sqrt{\rho}}{1-\rho}.$$

• Область свободной дисперсии $\Delta\lambda$ ИФП:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} \approx \frac{\lambda}{m_{\max}} = \frac{\lambda^2}{2h}.$$

• Угловая ширина дифракционного максимума $\Delta\varphi_m$ для ИФП:

$$\Delta\varphi_m = \frac{\lambda \cdot (1 - \rho)}{2\pi \cdot h \sin\varphi_m \cdot \sqrt{\rho}}$$

- Пластинка Льюмера-Герке.

Схема формирования интерференционной картины представлена на рис. Т10.1.

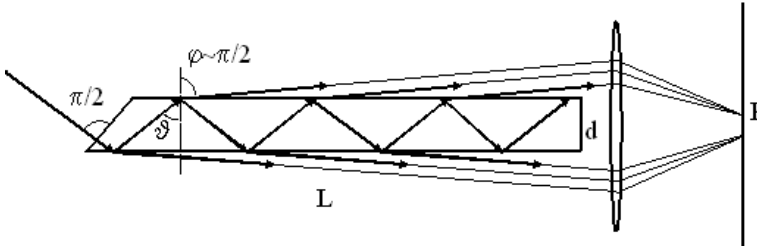


Рис. Т10.1. Схема интерференции в пластинке Льюмера-Герке.

- Условие интерференционных максимумов для пластинки Льюмера-Герке:

$$2dnc\cos\varphi_m = m\lambda,$$

или
$$2d\sqrt{n^2 - \cos^2 \varepsilon_m} = m\lambda, \quad m = 1, 2, \dots, m_{\max} = \left\lfloor \frac{2h}{\lambda} \right\rfloor.$$

где d – толщина, n – показатель преломления пластинки, φ_m – угол между лучом, идущим внутри пластинки, и нормалью к её поверхности, ε – угол между лучом, вышедшим из пластинки, и её поверхностью (см. рис. Т10.2).

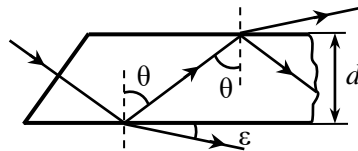


Рис. Т10.2. Ход лучей в пластинке Льюмера - Герке.

- Угловая дисперсия D_ε пластинки Льюмера-Герке:

$$D_\varepsilon = \frac{d\varepsilon_m}{d\lambda} \approx \frac{n^2 - 1}{\lambda\varepsilon_m}.$$

- Разрешающая способность R пластинки Льюмера-Герке:

$$R \approx \frac{L(n^2 - 1)}{\lambda},$$

где L – длина пластинки.

- Область свободной дисперсии $\Delta\lambda$ пластинки Льюммера-Герке:

$$\Delta\lambda \approx \frac{\lambda}{m_{\max}} = \frac{\lambda^2}{2d\sqrt{n^2 - 1}}.$$

- Число лучей N , выходящих из пластинки Льюммера-Герке:

$$N \approx \frac{L\sqrt{n^2 - 1}}{2d}.$$

10.1. Найти зависимость угловой дисперсии D_ϕ решетки с периодом d от длины волны λ в m -м порядке спектра при нормальном падении света на решетку.

10.2. Определить угловую дисперсию D_ϕ дифракционной решетки с периодом $d = 2,5$ мкм в спектре первого порядка для спектральной линии $\lambda = 589$ нм. Свет падает на решетку нормально.

10.3. Определить угловую дисперсию D_ϕ дифракционной решетки, имеющей $n = 500$ штрихов на 1 мм, в спектре наибольшего порядка для спектральной линии с $\lambda = 600$ нм при нормальном падении света на решетку.

10.4. Рассчитать линейную дисперсию D_x спектрографа с дифракционной решеткой, имеющей $n = 400$ штрихов на 1 мм, в первом порядке спектра, если фокусное расстояние объектива $f = 50$ см. Углы дифракции считать малыми.

10.5. Какое расстояние δx между компонентами желтой линии дублета натрия ($\lambda_1 = 589,0$ нм, $\lambda_2 = 589,6$ нм) получится в первом порядке на фотонегативе в спектрографе, описанном в задаче 10.4?

10.6. Свет с длиной волны $\lambda = 500$ нм падает нормально на дифракционную решетку. Определить её угловую дисперсию D_ϕ (в угл. мин/нм) в направлении под углом $\phi = 30^\circ$.

10.7. Свет с длиной волны $\lambda = 589$ нм падает нормально на дифракционную решетку с периодом $d = 4$ мкм и числом штрихов $N = 2000$. Определить угловую ширину $\delta\varphi_3$ дифракционного максимума третьего порядка.

10.8. Найти зависимость угловой дисперсии D_φ решетки с периодом d от длины волны λ в m -м порядке спектра, если свет падает на решетку под углом θ к нормали.

10.9. На каком расстоянии δx друг от друга будут находиться на экране две линии ртутной лампы ($\lambda_1 = 577,0$ нм, $\lambda_2 = 579,1$ нм) в спектре первого порядка от дифракционной решетки с периодом $d = 2$ мкм при падении света на решетку под углом $\theta = 30^\circ$ к нормали? Фокусное расстояние линзы, проецирующей спектр на экран, равно $f = 60$ см.

10.10. Найти разрешающую силу R решетки с периодом $d = 2$ мкм и шириной $L = 4$ см в спектрах следующих порядков: а) $m_1 = 1$; б) $m_2 = 3$.

10.11. Чему равен период дифракционной решетки шириной $L = 3$ см, если она позволяет разрешить в первом порядке линии спектра калия $\lambda_1 = 4044\text{\AA}$ и $\lambda_2 = 4047\text{\AA}$?

10.12. Период дифракционной решетки равен $d = 2$ мкм, её ширина $L = 2,5$ см. Какое разрешение $\delta\lambda$ может обеспечить эта решетка в желтом свете ($\lambda = 600$ нм) в спектре второго порядка?

10.13. Найти максимальную разрешающую способность R_{\max} дифракционной решетки шириной $L = 5$ см для средней длины волны $\lambda = 500$ нм.

10.14. Будут ли при нормальном падении света на дифракционную решетку с $N = 100$ штрихов разрешены линии $\lambda_1 = 598$ нм и $\lambda_2 = 602$ нм в спектре: а) первого порядка; б) второго порядка?

10.15. При нормальном падении света на дифракционную решетку две близкие линии в спектре ($\lambda_{11} = 4500\text{\AA}$ и $\lambda_{12} = 4506\text{\AA}$) оказываются разрешенными, начиная с порядка $m_1 = 3$. В каком наименьшем порядке m_2 будут разрешены линии с длинами волн $\lambda_{21} = 6000\text{\AA}$ и $\lambda_{22} = 6004\text{\AA}$?

10.16. При нормальном падении света с длиной волны λ на дифракционную решетку с периодом $d = 5\lambda$ угловая ширина дифракционного максимума в 3-м порядке равна $\delta\varphi$. Определить разрешающую способность R решетки в $n = 4$ порядке спектра.

10.17. На дифракционную решетку с периодом $d = 2$ мкм с числом штрихов $N = 50000$ нормально падает свет желтой линии дублета натрия ($\lambda_1 = 589,0$ нм, $\lambda_2 = 589,6$ нм). Какой максимальный порядок спектра m_{\max} можно получить с помощью такой решетки? Какое разрешение $\delta\lambda$ в этой области спектра способна обеспечить решетка в данном порядке?

10.18. Плоская световая волна падает нормально на дифракционную решетку с периодом $d = 5$ мкм с числом штрихов $N = 1000$. Падающий свет содержит две компоненты с длинами волн $\lambda_1 = 4600\text{Å}$ и $\lambda_2 = 4602\text{Å}$. Начиная с какого порядка m спектра будут разрешены эти линии? Определить угол дифракции φ_m , соответствующий данному порядку спектра.

10.19. Свет падает нормально на дифракционную решетку шириной $L = 6,5$ см, имеющую $n = 200$ штрихов на 1 мм. Исследуемый спектр содержит спектральную линию с $\lambda = 670,8$ нм, которая состоит из двух компонент, отличающихся на $\delta\lambda = 0,015$ нм. Найти: 1) в каком порядке m спектра эти компоненты будут разрешены; 2) наименьшую разность длин волн $\delta\lambda_{\min}$, которую может разрешить эта решетка в области $\lambda = 670$ нм.

10.20. Для проведения спектральных исследований в области длин волн $\lambda \approx 500$ нм имеются две дифракционные решетки с параметрами: 1) $n_1 = 100$ штрихов/мм; ширина решетки $L_1 = 10$ см; 2) $n_2 = 400$ штрихов/мм; ширина решетки $L_2 = 5$ см. Какая из решеток обеспечит максимальную разрешающую способность, если угол дифракции в спектральном приборе не превышает 15° ?

10.21. Изменяется ли разрешающая способность R и область свободной дисперсии $\Delta\lambda$ дифракционной решетки, если, закрепив неподвижно трубу, в которую наблюдают дифракционные спектры, закрыть через одну щели решетки?

10.22. Свет от газоразрядной трубки, диаметр которой $D = 1$ см падает непосредственно на дифракционную решетку, находящуюся на расстоянии $L = 100$ см от трубки. Оценить, максимальную разрешающую способность R_{\max} решетки в этих условиях.

10.23. Удаленный протяженный источник излучает две узкие спектральные линии $\lambda_1 = 500,0$ нм и $\lambda_2 = 500,2$ нм равной интенсивности. Свет от источника падает на дифракционную решетку.

Оценить угловой размер ψ источника, при котором еще можно разрешить эти две линии.

10.24. Для дифракционной решетки с $n = 500$ штрихов/мм в области $\lambda = 600$ нм предел разрешения в спектре первого порядка равен $\delta\lambda = 0,1$ нм. Изображение спектра получают на экране в фокальной плоскости за линзой. Определить минимальный диаметр D_{\min} линзы, при котором изображение спектра может быть разрешено.

10.25. Призма с преломляющим углом $\theta = 60^\circ$ изготовлена из флинта с показателем преломления $n = 1,7$. Призма установлена под углом наименьшего отклонения луча падающего на нее света. Определить угол, на который будут разведены две желтые линии натрия ($\lambda_1 = 589,0$ нм, $\lambda_2 = 589,6$ нм), если дисперсия вещества призмы в этом диапазоне длин волн равна $dn/d\lambda = 0,096$ мкм $^{-1}$.

10.26. Для трехгранной призмы спектрографа (рис. 10.1) предельная разрешающая способность R обусловлена дифракцией света на краях призмы (как на щели). Пользуясь критерием Рэлея, вывести формулу для разрешающей способности призмы, считая, что световой пучок захватывает всю призму, и призма установлена под углом наименьшего отклонения пучка. Ширина основания призмы равна b , дисперсия вещества $dn/d\lambda$.

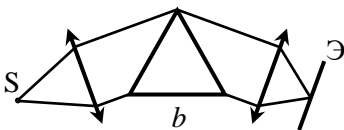


Рис. 10.1. Схема спектрографа с призмой.

10.27. Определить наименьшую ширину b основания призмы, способной разрешить дублет с длинами волн $\lambda_1 = 589,0$ нм и $\lambda_2 = 589,6$ нм. Призма изготовлена из стекла, дисперсия которого вблизи желтой линии натрия равна $dn/d\lambda = 0,096$ мкм $^{-1}$.

10.28. Какой должна быть ширина b трехгранной призмы с дисперсией $dn/d\lambda = 0,1$ мкм $^{-1}$, чтобы она имела такую же разрешающую способность, как и дифракционная решетка с числом штрихов $N = 10000$ во втором порядке спектра?

10.29. Призма с шириной основания $b = 10$ см изготовлена из флинта, дисперсия которого в области $\lambda = 600$ нм равна $dn/d\lambda = 0,1$ мкм $^{-1}$. Какую максимальную разрешающую способность R_{\max} может иметь дифракционная решетка, ширина которой равна ширине основания призмы? Во сколько раз разрешающая способность такой решетки отличается от разрешающей способно-

сти призмы?

10.30. Призма с основанием $b = 10$ см и углом при вершине $\theta = 60^\circ$ установлена в спектрографе на угол наименьшего отклонения для длины волны $\lambda = 500$ нм. Показатель преломления материала призмы $n = 1,73$, фокусное расстояние объектива коллиматора $f = 25$ см. Какой должна быть ширина коллиматорной щели Δx , чтобы можно было практически полностью использовать теоретическую разрешающую способность призмы?

10.31. В интерферометре Фабри–Перо расстояние между зеркалами равно h , коэффициент отражения каждого из зеркал интерферометра (по интенсивности) равен ρ . Используя формулу Эйри, получить условие максимума интенсивности и определить её максимальное I_{\max} и минимальное I_{\min} значения.

10.32. Чему равен порядок m спектра при работе с интерферометром Фабри–Перо в зеленой части спектра ($\lambda = 550,0$ нм), если расстояние между зеркалами интерферометра равно $d = 1$ см? Угол падения лучей очень мал.

10.33. При работе с интерферометром Фабри–Перо, у которого толщина воздушного зазора между зеркалами равна h , наблюдаются интерференционные кольца. 1) Определить длину волны λ_{0m} , для которой в центре системы колец наблюдается максимум интенсивности порядка m . 2) Для света с длиной волны λ , немного меньшей λ_{0m} , найти угловой радиус $\theta_m(\lambda)$ ярких колец, соответствующих тому же порядку интерференции m , в зависимости от λ_{0m} и λ . Угол θ_m считать малым.

10.34. Для интерферометра Фабри–Перо, база которого равна $d = 2,5$ см, найти: а) максимальный порядок m_0 интерференции света с длиной волны $\lambda = 500$ нм; б) область свободной дисперсии $\Delta\lambda$ вблизи $\lambda = 500$ нм, т.е. спектральный интервал длин волн, для которого еще нет перекрытия с другими порядками интерференции.

10.35. Определить угловой радиус θ_{10} 10-го видимого кольца (считая от центрального), полученного в интерферометре Фабри–Перо с базой $d = 1,2$ см при длине волны света $\lambda = 600,0$ нм.

10.36. Для интерферометра Фабри–Перо с базой h и коэффициентом отражения зеркал ρ найти угловую ширину $\delta\theta_m$ интерференционных колец.

10.37. Найти угловую ширину 10-го видимого кольца в интерферометре Фабри–Перо, если коэффициент отражения зеркал

$\rho = 0,9$, а толщина воздушного зазора между ними $h = 2$ см. Длина волны излучения $\lambda = 500$ нм.

10.38. Излучение от точечного монохроматического источника света с длиной волны $\lambda = 500$ нм падает на интерферометр Фабри-Перо с базой $h = 1$ мм. Интерференционную картину наблюдают в фокальной плоскости объектива с фокусным расстоянием $f = 10$ см. Найти радиус r_5 пятого светлого кольца.

10.39. В интерферометре Фабри-Перо среда между зеркалами обладает дисперсией. Для длины волны λ показатель преломления среды равен n . При изменении длины волны λ света на $\Delta\lambda$ наблюдаемые интерференционные кольца сдвигаются так, что каждое кольцо перемещается на место соседнего кольца. Предполагая, что база интерферометра $h \gg \lambda$, найти дисперсию показателя преломления $dn/d\lambda$.

10.40. В интерферометре Фабри-Перо с открытым воздушным зазором между зеркалами при температуре $T_1 = 293$ К наблюдается одно из колец равного наклона, угловой размер которого $\varphi_1 = 0,01$ рад. При повышении температуры кольцо стягивается к центру и исчезает. Найти температуру T_2 , при которой это произойдет, если для воздуха при температуре T_1 разность $(n-1) = 0,00029$, где n – показатель преломления. Для воздуха разность $(n-1)$ пропорциональна его плотности.

10.41. Через интерферометр Фабри-Перо пропускают свет, в спектре которого две длины волны, соответствующие разным цветам – зеленому с $\lambda_3 = 550$ нм и красному с $\lambda_к = 660$ нм. При наблюдении в проходящем свете вблизи центра картины кольца разных цветов совпадают, формируя светлое кольцо. Через какое число n_3 зеленых колец вновь будет наблюдаться подобное совпадение?

10.42. Определить угловую дисперсию D_φ и область свободной дисперсии $\Delta\lambda$ для интерферометра Фабри-Перо с базой h вблизи длины волны λ .

10.43. При освещении интерферометра Фабри-Перо светом с длиной волны λ от точечного источника на экране, расположенном в фокальной плоскости линзы с фокусным расстоянием f , возникает система концентрических колец. Найти угловую дисперсию D_θ интерферометра для кольца, радиус которого на экране равен r .

10.44. Определить разрешающую способность R и область свободной дисперсии $\Delta\lambda$ интерферометра Фабри-Перо с базой $h = 2$ см и коэффициентом отражения зеркал $\rho = 0,9$ в спектре максимального порядка для длины волны $\lambda = 500$ нм.

10.45. База интерферометра Фабри-Перо и коэффициент отражения его зеркал равны соответственно $h = 2$ мм и $\rho = 0,9$. С каким минимальным значением $\delta\lambda$ можно разрешить две линии с помощью такого интерферометра в области $\lambda = 600$ нм?

10.46. Можно ли интерферометром Фабри-Перо, у которого коэффициент отражения зеркал $\rho = 0,92$ и база $h = 1$ мм, разрешить дублет с компонентами $\lambda_1 = 630,01$ нм и $\lambda_2 = 630,02$ нм?

10.47. Какое максимальное расстояние h_{\max} между зеркалами интерферометра Фабри-Перо следует установить, чтобы наблюдать без перекрытия порядков спектров дублет натрия ($\delta\lambda = 0,6$ нм, $\lambda = 600,0$ нм)?

10.48. С помощью интерферометра Фабри-Перо исследуется выделенный системой фильтров участок спектра шириной $\Delta\lambda = 0,2$ нм. Минимальная разность длин волн соседних спектральных линий равна $\delta\lambda = 0,001$ нм. Оценить минимальное значение коэффициента отражения ρ_{\min} зеркал интерферометра, при котором можно разрешить соседние линии.

10.49. Для проведения спектральных исследований в диапазоне длин волн $\lambda \approx 500$ нм имеются три интерферометра Фабри-Перо с параметрами: 1) база $h_1 = 2$ мм; коэффициент отражения $\rho_1 = 0,7$; 2) база $h_2 = 8$ мм; коэффициент отражения $\rho_2 = 0,8$; 3) база $h_3 = 4$ мм; коэффициент отражения $\rho_3 = 0,9$. Подходят ли эти интерферометры для исследования спектра шириной не более $\Delta\lambda_0 = 0,03$ нм? Какой из интерферометров обеспечит максимальную разрешающую способность R_{\max} и чему она равна?

10.50. Оценить число N интерферирующих лучей в пластинке Люммера-Герке, если ее длина $L = 30$ см, толщина $d = 1$ см, показатель преломления $n = 1,5$.

10.51. Найти минимальный m_{\min} и максимальный m_{\max} порядки спектров, которые могут наблюдаться в опыте с пластинкой Люммера-Герке длиной $L = 30$ см, толщиной $d = 1$ см и с показателем преломления $n = 1,5$ для линии водорода H_β ($\lambda = 486,1$ нм).

10.52. Определить угловое расстояние $\Delta\varepsilon$ между направлениями на соседние максимумы в опыте с пластинкой, описанной в задаче 10.51, для H_β - линии водорода при условии, что луч выходит из пластинки под углом $\varepsilon = 1^\circ$ к её поверхности.

10.53. Найти угловую дисперсию D_ε пластинки Льюммера-Герке (толщина d , показатель преломления n) в области длин волн λ . Дисперсией показателя преломления n пренебречь.

10.54. Определить область свободной дисперсии $\Delta\lambda$ пластинки Льюммера-Герке толщиной $d = 1$ см с показателем преломления $n = 1,5$ для линии водорода H_β ($\lambda = 486,1$ нм). Дисперсией показателя преломления $n(\lambda)$ пренебречь.

10.55. Определить разрешающую способность R пластинки Льюммера-Герке длиной $L = 30$ см, толщиной $d = 1$ см и с показателем преломления $n = 1,5$ для линии водорода H_β ($\lambda = 486,1$ нм). Дисперсией показателя преломления $n(\lambda)$ пренебречь.

10.56. Какую минимальную длину L_{\min} должна иметь пластинка Льюммера-Герке ($n = 1,5$), чтобы разрешить дублетную структуру линии $\lambda = 656,0$ нм, если разность длин волн компонент дублета равна $\delta\lambda = 0,014$ нм?

10.57. Можно ли с помощью пластинки Льюммера-Герке ($n = 1,5$) длиной $L = 3$ см разрешить дублетную структуру линии с компонентами $\lambda_1 = 550,01$ нм и $\lambda_2 = 550,02$ нм?

10.58. Как изменятся разрешающая способность R и область свободной дисперсии $\Delta\lambda$ пластинки Льюммера-Герке, если: а) её толщину увеличить в 2 раза, а длину оставить без изменения; б) её длину увеличить в 2 раза, а толщину оставить без изменения?

§11. Дисперсия света

- Связь между показателем преломления n и диэлектрической проницаемостью ε для немагнитных сред ($\mu = 1$):

$$n = \sqrt{\varepsilon}.$$

- Закон дисперсии (дисперсионное соотношение):

$$k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \omega^2 = \varepsilon \cdot \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{или} \quad k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon} = \frac{\omega}{c} \cdot n,$$

где $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ – скорость света в вакууме, ω – угловая частота волны.

- Фазовая скорость v :

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{n},$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число.

- Групповая скорость u :

$$u = \frac{d\omega}{dk}.$$

- Формула Рэлея

$$u = v + k \frac{dv}{dk} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}.$$

- Связь групповой скорости u с длиной волны λ :

$$u = v \left(1 + \frac{\lambda}{n} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \right).$$

- Зависимость диэлектрической проницаемости ε среды от частоты ω световой волны в модели Лоренца:

$$\varepsilon = 1 + \frac{e^2 N / (\varepsilon_0 m)}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\delta\omega},$$

где ω_0 – собственная частота колебаний электрона, δ – постоянная затухания, N – число электронов в единице объема.

- Плазменная частота ω_p :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}}$$

- Комплексный показатель преломления для плоской монохроматической световой волны в среде с дисперсией:

$$\hat{n} = \sqrt{\epsilon} = n' + in'' = 1 + \frac{\omega_p^2}{2} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\delta\omega}, \quad \text{где}$$

$$n' = 1 + \frac{\omega_p^2}{2} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2},$$

$$n'' = \omega_p^2 \cdot \frac{\delta \cdot \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}.$$

n' является собственно показателем преломления, а n'' – показателем затухания (рис. Т11.1).

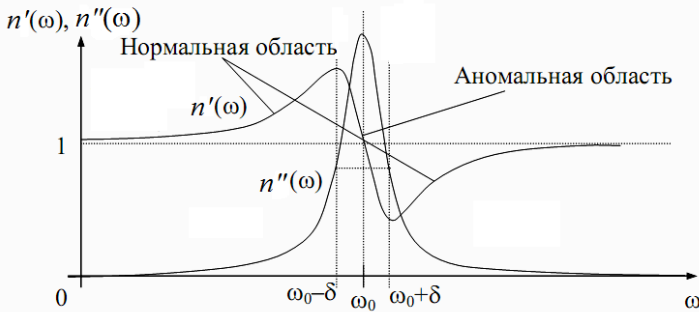


Рис. Т11.1. Зависимость действительной n' и мнимой n'' частей показателя преломления от частоты вблизи одиночной полосы поглощения ω_0 .

- Формула Коши для показателя преломления n :

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots,$$

где A, B, C – постоянные величины для данного материала.

- Закон Бугера-Ламберта-Бера:

$$I(z) = I(0)\exp(-\mu z),$$

где z – толщина слоя, пройденного волной в направлении её распространения, μ – коэффициент поглощения.

- Связь линейного коэффициент поглощения μ с показателем затухания n'' :

$$\mu(\omega) = 2 \frac{\omega}{c} n''(\omega).$$

11.1. Световой пучок представляет собой суперпозицию двух гармонических волн, распространяющихся вдоль оси X и поляризованных в одном направлении: $E_1 = E_0 \cos(\omega t - kx)$ и $E_2 = E_0 \cos(\omega' t - k'x)$, причем $\omega' \approx \omega$ и $k' \approx k$. Найти групповую скорость u этого пучка.

11.2. Выразить групповую скорость u : а) через фазовую скорость v и ее дисперсию $dv/d\lambda$, если задана зависимость $v(\lambda)$, где λ – длина волны; б) через фазовую скорость v и дисперсию $dn/d\lambda$ показателя преломления среды n , если задана зависимость $n(\lambda)$.

11.3. Найти групповую скорость u для волнового пакета (длина волны λ , $\delta\lambda \ll \lambda$), если зависимость фазовой скорости v от длины волны λ имеет вид: $v = a\lambda^\alpha$, где a и α – постоянные.

11.4. Найти связь групповой u и фазовой v скоростей для волнового пакета (λ , $\delta\lambda \ll \lambda$), если зависимость фазовой скорости от длины волны λ имеет вид: а) $v = a = \text{const}$; б) $v = a\sqrt{\lambda}$; в) $v = a/\sqrt{\lambda}$; г) $v = a/\lambda$; д) $v = \sqrt{c^2 + b^2\lambda^2}$ (c – скорость света в вакууме, $b = \text{const}$).

11.5. Майкельсон измерил скорость света в сероуглероде методом вращающегося зеркала, который позволяет определять групповую скорость волнового пакета u . Показатель преломления сероуглерода для средней длины волны видимого спектра $n = 1,63$, а величина $\left(1 + \frac{\lambda}{n} \cdot \frac{dn}{d\lambda}\right) = 0,93$. Определить отношение скорости света в вакууме к скорости света в сероуглероде, измеренной этим методом.

11.6. Для многих прозрачных бесцветных веществ зависимость показателя преломления n от длины волны λ в вакууме может быть приближенно описана формулой $n = a + b/\lambda^2$, где a и b – константы. Найти зависимость групповой скорости u от λ для света в данной среде.

11.7. Найти связь между фазовой v и групповой u скоростями в отсутствие поглощения, если задана зависимость показателя преломления среды от частоты $n(\omega)$.

11.8. Найти групповую скорость u рентгеновского излучения

в среде, если зависимость показателя преломления для рентгеновских волн от частоты ω имеет вид: $n^2 = 1 - \omega_0^2 / \omega^2$, где $\omega_0 = \text{const}$.

Фазовая скорость рентгеновских волн равна v .

11.9. Групповая скорость u электромагнитной волны в 3 раза больше фазовой скорости v . Как зависит фазовая скорость от длины волны λ ?

11.10. Найти связь между фазовой скоростью v и групповой u , если дисперсионное соотношение имеет вид: $\omega = ak^\beta$, где $a = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$.

11.11. При каком законе дисперсии $\omega(k)$ связь между групповой u и фазовой v скоростями имеет вид: $u = v/4$?

11.12. Найти связь групповой u и фазовой v скоростей, если задана зависимость фазовой скорости от частоты $v(\omega)$.

11.13. Найти связь между фазовой v и групповой u скоростями, если фазовая скорость зависит от частоты по закону: $v = a / \omega^2$, где $a = \text{const}$.

11.14. Определить групповую скорость u электромагнитных волн в разреженной плазме, фазовая скорость которых зависит от частоты по закону: $v = \frac{c}{\sqrt{1 + \alpha^2 / \omega^2}}$, где c – скорость света в вакууме, $\alpha = \text{const}$.

11.15. При каком законе дисперсии $\varepsilon(\omega)$ немагнитной среды, заполняющей бесконечное пространство, связь между фазовой v и групповой u скоростями световых волн имеет вид: $vu = c^2$?

11.16. Для некоторой среды зависимость фазовой скорости от длины волны и частоты имеет вид: $v = \frac{a}{\omega \cdot \lambda^2}$, где a – константа.

Найти связь групповой u и фазовой v скоростей в этой среде.

11.17. Найти зависимость фазовой v и групповой u скоростей от длины волны λ для следующих законов дисперсии: а) $\omega^2 = gk$ (гравитационные поверхностные волны, g – ускорение свободного падения); б) $\omega = \frac{\hbar}{2m} k^2$ (волны де Бройля, \hbar – постоянная Планка, m – масса частицы).

11.18. При распространении волн в глубокой воде закон дис-

персии имеет вид: $\omega^2 = \alpha k + \beta k^3$, где α и β – константы. Получить выражение для зависимости фазовой v и групповой u скоростей от волнового вектора k .

11.19. Найти фазовую v и групповую u скорости для волн де Бройля, описывающих свободную квантовую частицу массой m , движущуюся прямолинейно со скоростью V .

11.20. Показатели преломления сероуглерода для света с длинами волн $\lambda_1 = 509$ нм, $\lambda_2 = 534$ нм и $\lambda_3 = 574$ нм равны $n_1 = 1,647$, $n_2 = 1,640$ и $n_3 = 1,630$ соответственно. Найти фазовую скорость v_2 для длины волны λ_2 и групповую скорость u_2 вблизи неё.

11.21. В среде из неполярных молекул распространяется плоская электромагнитная волна с частотой ω . Рассматривая взаимодействие волны со связанными электронами, найти зависимость показателя преломления n среды от частоты волны.

11.22. Высокочастотная электромагнитная волна (например, рентгеновские лучи) с частотой ω распространяется в среде с N молекулами в единице объема. Найти зависимость показателя преломления n среды от частоты волны.

11.23. Найти показатель преломления алюминия для рентгеновских лучей с длиной волны $\lambda = 1,56 \text{ \AA}$. Собственная частота электронов в алюминии меньше частоты рентгеновских лучей. Концентрация электронов $N \approx 8 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$.

11.24. Определить число N_1 свободных электронов в расчете на атом Ag в пленке серебра, если она прозрачна для ультрафиолета начиная с частоты $\nu = 1,2 \cdot 10^{15}$ Гц. Плотность серебра $\rho = 10,5 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, атомная масса $\mu_{\text{Ag}} = 108 \text{ г/моль}$.

11.25. Найти связь между фазовой v и групповой u скоростями волновых пакетов в ионосфере (поглощение считать малым).

11.26. Радиоволны распространяются вверх. Волны каких частот будут проходить через ионосферу, а каких будут полностью отражаться? Для оценки принять, что концентрация электронов в верхних слоях ионосферы равна $N \approx 10^{11} \text{ м}^{-3}$.

11.27. Для радиоволн с частотой $\nu = 10^8$ Гц показатель преломления ионосферы равен $n = 0,95$. Чему равны фазовая v и групповая u скорости этих радиоволн? Определить концентрацию N электронов в ионосфере.

11.28. Радиосигнал частоты $\nu = 10^7$ Гц посылается вверх и отражается на определенной высоте. Оценить концентрацию N электронов на этой высоте.

11.29. На расстоянии $r = 0,06R$ от центра Солнца ($R = 6,95 \cdot 10^8$ м – радиус Солнца) концентрация электронов примерно равна $N \approx 2 \cdot 10^{14}$ м⁻³. Могут ли радиоволны из этой области Солнца достигать Земли, если их длина волны в вакууме равна: а) $\lambda = 1$ м; б) $\lambda = 10$ м; в) $\lambda = 50$ м?

11.30. Получить выражение для фазовой скорости v радиоволны в ионосфере в зависимости от длины волны λ .

11.31. Пусть в стекле дисперсия определяется одним резонансом с частотой ω_0 . Какой вид имеет закон дисперсии в этом случае, если затуханием можно пренебречь?

11.32. Для найденного в задаче 11.30 закона дисперсии определить групповую скорость волнового пакета.

11.33. Найти показатель преломления n газовой атмосферы на поверхности Венеры. Атмосфера Венеры состоит из углекислого газа, поляризуемость молекул которого равна $\alpha = 2,7 \cdot 10^{-23}$ см³. Давление на Венере $p = 100$ атм, температура $t = 500^\circ\text{C}$.

11.34. Исследования прохождения плоской электромагнитной волны с частотой $\nu = 8$ МГц через плоский однородный слой плазмы с концентрацией свободных электронов $N = 10^{12}$ м⁻³ показали, что при увеличении толщины слоя d в $\eta_d = 2$ раза, энергетический коэффициент пропускания τ изменяется в $\eta_\tau = 10$ раз. Найти толщину слоя плазмы d .

11.35. При прохождении света в некотором веществе пути l его интенсивность уменьшается в $\alpha = 2$ раза. Во сколько раз β уменьшится интенсивность света при прохождении пути $3l$?

11.36. В некоторой среде распространяется плоская монохроматическая волна. Коэффициент поглощения среды для данной длины волны равен $\mu = 1,0$ м⁻¹. На сколько процентов уменьшается интенсивность света при прохождении волной пути, равного: а) $d_1 = 5$ мм (в оконном стекле); б) $d_2 = 10$ мм (в зеркальном стекле); в) $d_3 = 1$ м?

11.37. В прозрачной пластине толщиной $d = 10$ см для некоторой длины волны λ коэффициент поглощения линейно изменяет-

ся от $\mu_1 = 0,8 \text{ м}^{-1}$ у одной её поверхности до $\mu_2 = 1,2 \text{ м}^{-1}$ у другой. На сколько процентов уменьшится интенсивность света с такой длиной волны после прохождения пластины? Потерями на отражение света пренебречь.

11.38. Во сколько раз уменьшится интенсивность узкого пучка рентгеновского излучения с длиной волны $\lambda = 0,02 \text{ нм}$ при прохождении свинцовой пластинки толщиной $d = 1 \text{ мм}$, если массовый показатель ослабления для данной волны равен $\mu_m = \mu/\rho = 3,6 \text{ см}^2/\text{г}$? Плотность свинца – $\rho_{\text{Pb}} = 11,34 \text{ г}/\text{см}^3$.

11.39. Узкий пучок рентгеновского излучения с длиной волны $\lambda = 0,062 \text{ нм}$ проходит через алюминиевый экран толщиной $d_1 = 2,6 \text{ см}$. Какой толщины d_2 должен быть свинцовый экран, чтобы ослаблять этот пучок в той же степени? Массовые показатели ослабления для Al и Pb равны $\mu_{m1} = \mu_1/\rho_1 = 3,48 \text{ см}^2/\text{г}$ и $\mu_{m2} = \mu_2/\rho_2 = 72,0 \text{ см}^2/\text{г}$ соответственно. Плотности свинца и алюминия равны $\rho_{\text{Pb}} = 11,34 \text{ г}/\text{см}^3$ и $\rho_{\text{Al}} = 2,7 \text{ г}/\text{см}^3$.

11.40. Найти для Al толщину d слоя половинного ослабления узкого пучка монохроматического рентгеновского излучения, если массовый показатель ослабления равен $\mu_m = \mu/\rho = 0,32 \text{ см}^2/\text{г}$. Плотность алюминия – $\rho_{\text{Al}} = 2,7 \text{ г}/\text{см}^3$.

11.41. Импульсное излучение от одного из пульсаров на частоте $\nu_1 = 80 \text{ МГц}$ достигает Земли на $\Delta t = 7 \text{ с}$ позже, чем импульс на частоте $\nu_2 = 2000 \text{ МГц}$. Оценить расстояние L до пульсара, если средняя концентрация электронов в межзвездном пространстве $N \approx 0,05 \text{ см}^{-3}$.

11.42. Для некоторого твердого тела с линией поглощения на частоте ω_1 действительная часть ε' комплексной диэлектрической проницаемости ($\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$) максимальна при частоте $\omega_{\text{max}} = 1,67 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ и минимальна ($\varepsilon' = 0,25$) при частоте $\omega_{\text{min}} = 3,60 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$. Найти частоту ω_1 , эффективное число N оптических электронов и показатель преломления n в низкочастотной области спектра ($\omega \ll \omega_1$).

11.43. Найти среднее значение $\langle Q \rangle$ потерь энергии переменного электрического поля $E = E_0 \cos \omega t$ в единице объема разреженной среды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$.

§12. Оптические явления на границе раздела диэлектриков. Формулы Френеля

• Граничные условия для векторов E и H , D и B при падении плоской волны на границу раздела однородных и изотропных сред с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 :

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}; \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}; \quad D_{1n} = D_{2n}; \quad B_{1n} = B_{2n}.$$

• Волновой вектор k монохроматической волны в среде с показателем преломления n :

$$k = \frac{\omega}{c} nN,$$

где N – единичный вектор нормали к волновому фронту.

• Интенсивность плоской монохроматической волны в среде с показателем преломления n :

$$I = v \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E_0^2}{2} \sim n E_0^2 \sim \frac{H_0^2}{n},$$

где E_0 , H_0 – амплитуды векторов E и H .

• Коэффициенты отражения r и пропускания t для комплексных амплитуд падающей (E_{10}), отраженной (E_{00}) и преломленной (E_{20}) волн:

$$r \equiv \frac{E_{00}}{E_{10}}; \quad t \equiv \frac{E_{20}}{E_{10}}.$$

• Формулы Френеля.

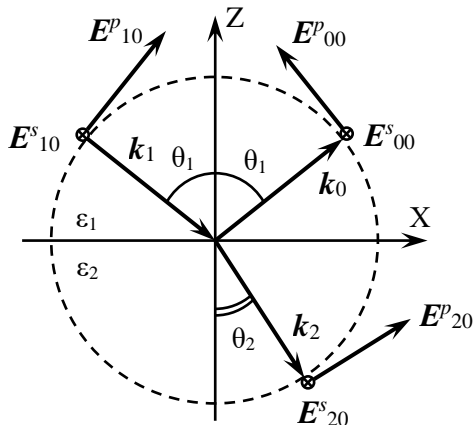


Рис. T12.1. Отражение и преломление света на границе раздела двух сред с проницаемостями $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$.

Будем обозначать компоненты вектора \mathbf{E} , перпендикулярные плоскости падения, E^S , а компоненты, лежащие в плоскости падения, E^P . Тогда формулы Френеля в первой форме запишутся в виде (см. рис Г12.1):

$$r_s^E \equiv \frac{E_{00}^S}{E_{10}^S} = \frac{k_{1z} - k_{2z}}{k_{1z} + k_{2z}}, \quad t_s^E \equiv \frac{E_{20}^S}{E_{10}^S} = \frac{2k_{1z}}{k_{1z} + k_{2z}};$$

$$r_p^E \equiv \frac{E_{00}^P}{E_{10}^P} = -\frac{\frac{k_{1z}}{\varepsilon_1} - \frac{k_{2z}}{\varepsilon_2}}{\frac{k_{1z}}{\varepsilon_1} + \frac{k_{2z}}{\varepsilon_2}}, \quad t_p^E \equiv \frac{E_{20}^P}{E_{10}^P} = \frac{2 \frac{k_{1z}}{\varepsilon_1}}{\frac{k_{1z}}{\varepsilon_1} + \frac{k_{2z}}{\varepsilon_2}} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}.$$

Вторая форма записи формул Френеля:

$$r_s^E = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}, \quad t_s^E = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)};$$

$$r_p^E = -\frac{\operatorname{tg} \theta_1 - \operatorname{tg} \theta_2}{\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2}, \quad t_p^E = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Третья форма записи формул Френеля:

$$r_s^E = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}, \quad t_s^E = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2};$$

$$r_p^E = -\frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2}, \quad t_p^E = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2}.$$

- Угол Брюстера $\theta_{\text{Бр}}$:

$$\theta_{\text{Бр}} = \operatorname{arctg} \frac{n_2}{n_1}.$$

- Азимут поляризации падающей волны.

Азимутом поляризации называют угол α_1 между плоскостью поляризации волны и плоскостью падения ($-\pi/2 \leq \alpha_1 \leq \pi/2$).

- Коэффициенты отражения R и пропускания T по энергии:

$$R = \frac{S_{n,\text{отр}}}{S_{n,\text{пад}}} = \frac{I_{\text{отр}}}{I_{\text{пад}}} = r^2;$$

$$T = \frac{S_{n,\text{прел}}}{S_{n,\text{пад}}} = \frac{n_2 \cdot \cos \theta_2}{n_1 \cdot \cos \theta_1} \cdot t^2 = \frac{I_{\text{прел}}}{I_{\text{пад}}} \cdot \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1},$$

где S – вектор Умова-Пойнтинга, $S \sim E \cdot H \sim nE^2$.

• Коэффициенты отражения R и пропускания T по интенсивности:

$$R = \frac{I_{\text{отр}}}{I_{\text{пад}}} = R; \quad T = \frac{I_{\text{прел}}}{I_{\text{пад}}} = T \cdot \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2}.$$

• Связь интенсивностей падающей, отраженной и преломленной волн:

$$I_{\text{пад}} = I_{\text{отр}} + I_{\text{прел}} \cdot \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1}.$$

• Угол полного внутреннего отражения θ_m :

$$\theta_m = \arcsin \frac{n_1}{n_2}.$$

• Уравнение преломленной волны при полном внутреннем отражении (см. рис. Т12.2):

$$E_2(r, t) = E_{20} e^{-k''_{2z} z} e^{i(\omega t - k_{1x} x)},$$

где

$$k''_{2z} = \frac{\omega}{c} \sqrt{(n_1 \sin \theta_1)^2 - n_2^2}.$$

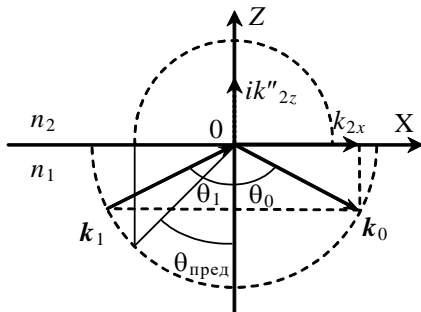


Рис. Т12.2. Отражение и преломление света на границе раздела двух сред с показателями преломления $n_1 > n_2$ при полном внутреннем отражении.

• Глубина проникновения световой волны с отражающую среду при полном внутреннем отражении:

$$\Delta z = \frac{1}{k_{2z}''} = \frac{c}{\omega \sqrt{(n_1 \sin \theta_1)^2 - n_2^2}}.$$

• Степень поляризации отраженного и преломленного света Δ :

$$\Delta = \frac{I^s - I^p}{I^s + I^p}.$$

Значения Δ могут быть и положительными, и отрицательными.

12.1. Исходя непосредственно из граничных условий для векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} , \mathbf{D} и \mathbf{B} при падении плоской волны на границу раздела однородных и изотропных сред с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 , получить формулы Френеля в форме:

$$r_s^E = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}, \quad r_p^E = -\frac{\operatorname{tg} \theta_1 - \operatorname{tg} \theta_2}{\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2};$$

$$t_s^E = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}, \quad t_p^E = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)},$$

где $r_s^E \equiv \frac{E_{00}^S}{E_{10}^S}$, $t_s^E \equiv \frac{E_{20}^S}{E_{10}^S}$; $r_p^E \equiv \frac{E_{00}^P}{E_{10}^P}$, $t_p^E \equiv \frac{E_{20}^P}{E_{10}^P}$ (см. рис. Т12.1).

12.2. Получить формулы Френеля при малых углах падения плоской волны на границу раздела однородных сред с показателями преломления n_1 и n_2 .

12.3. Определить коэффициенты отражения R и пропускания T света при малых углах падения плоской волны на границу раздела однородных сред с показателями преломления n_1 и n_2 .

12.4. Рассчитать коэффициенты отражения R и пропускания T при нормальном падении света из воздуха: а) на воду ($n_{\text{в}} = 1,33$); б) на стекло ($n_{\text{ст}} = 1,5$).

12.5. Свет с интенсивностью I_0 падает нормально на прозрачную пластинку, коэффициент отражения каждой поверхности которой $R = 0,05$. Найти интенсивность I прошедшего через пластинку света: а) пренебрегая вторичными отражениями; б) с учетом многократных отражений.

12.6. Плоская монохроматическая световая волна интенсивностью I_0 падает нормально на пластинку толщиной d с показателем поглощения μ . Коэффициент отражения каждой поверхности пластинки равен R . Найти интенсивность прошедшего света, пренебрегая вторичными отражениями.

12.7. Под каким углом нужно отразить естественный свет от кристалла каменной соли ($n = 1,544$), чтобы получить максимальную степень поляризации отраженного света?

12.8. При каких условиях луч света, падающий на боковую грань прозрачной изотропной призмы с преломляющим углом $\alpha = 60^\circ$, проходит через неё без потерь на отражение?

12.9. Найти азимут α_0 отраженной волны и азимут α_2 преломленной волны, если азимут падающей волны α_1 , а угол падения и угол преломления равны соответственно θ_1 и θ_2 .

12.10. Плоская световая волна с интенсивностью I_0 , поляризованная перпендикулярно плоскости падения, падает под углом Брюстера из воздуха на стекло с показателем преломления n . Определить интенсивность $I_{\text{отр}}$ отраженного света.

12.11. Распространяющийся в стекле с показателем преломления $n = \sqrt{3}$ пучок света с интенсивностью I_0 падает на плоскую границу раздела с воздухом под углом $\alpha = 30^\circ$. Найти интенсивность I преломленного пучка, если падающий свет поляризован в плоскости падения.

12.12. Плоский пучок естественного света с интенсивностью I_0 падает под углом Брюстера на поверхность воды ($n = 1,33$). При этом $R = 0,03$ светового потока отражается. Найти интенсивность преломленного пучка.

12.13. Линейно поляризованный свет падает под углом Брюстера на поверхность стекла с показателем преломления n . Азимут падающей волны равен α . Найти коэффициент отражения R по энергии.

12.14. Естественный свет с интенсивностью I_0 падает под углом Брюстера из воздуха на поверхность стекла с показателем преломления $n = 1,5$. Найти степень поляризации Δ_2 преломленного света.

12.15. При нормальном падении светового пучка из воздуха на некоторый прозрачный диэлектрик отражается $\eta = 25\%$ энергии. Какова будет интенсивность $I_{\text{отр}}$ отраженной волны, если волна с интенсивностью I_0 , линейно поляризованная в плоскости падения, будет падать на этот диэлектрик под углом $\alpha = \arctg(3)$?

12.16. При падении неполяризованного светового пучка из воздуха под углом $\alpha = 60^\circ$ на некоторый прозрачный диэлектрик отраженный свет полностью поляризован. Найти интенсивность $I_{\text{отр}}$ отраженной волны при нормальном падении пучка с интенсивностью I_0 из такого диэлектрика на границу с воздухом.

12.17. Неполяризованный свет падает под углом $\theta_1 = 45^\circ$ на поверхность стекла с показателем преломления $n = 1,53$. Найти степень поляризации Δ отраженного света.

12.18. На поверхность стекла падает естественный свет под углом $\varphi = 30^\circ$. Показатель преломления стекла $n = 1,5$. Найти степень поляризации Δ преломленного света.

12.19. Узкий пучок естественного света падает под углом Брюстера на поверхность толстой плоскопараллельной прозрачной пластины. При этом от верхней поверхности отражается $\rho = 0,08$ светового потока. Найти степень поляризации Δ_i пучков 1–4 (рис. 12.1).

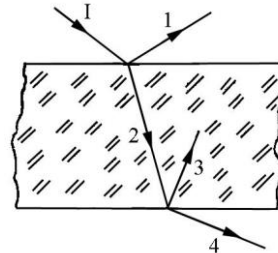


Рис. 12.1. Ход лучей через плоскопараллельную стеклянную пластинку.

12.20. Узкий пучок линейно поляризованного света с интенсивностью I_0 падает под углом Брюстера на плоскопараллельную стеклянную пластину так, что его плоскость поляризации перпендикулярна плоскости падения (рис. 12.1). Показатель преломления стекла $n = 1,5$. Найти интенсивность I_2 пучка, преломленного на первой границе, и интенсивность I_4 прошедшего через пластину пучка 4.

12.21. Узкий пучок естественного света падает под углом Брюстера на поверхность толстой плоскопараллельной прозрачной пластины с показателем преломления n (рис. 12.1). Определить степень поляризации Δ прошедшего через пластину пучка 4.

12.22. Узкий пучок естественного света падает под углом Брюстера на стопу Столетова, состоящую из N одинаковых толстых плоскопараллельных пластин с показателем преломления n . Определить степень поляризации Δ прошедшего пучка.

12.23. Узкий пучок неполяризованного света падает под углом Брюстера на стопу Столетова, состоящую из N толстых плоскопараллельных стеклянных пластин ($n = 1,5$). Найти степень поляризации Δ_N прошедшего света, если N равно: а) 2; б) 5; в) 10.

12.24. Естественный свет пропускают через пластинку с показателем преломления $n = 1,5$. Найти степень поляризации Δ прошедшего света при углах падения $\theta = 20^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ и 80° .

12.25. Естественный свет падает наклонно на плоскопараллельную стеклянную пластинку. Найти степень поляризации Δ вы-

шедшего из пластинки света с учетом многократных отражений (ответ выразить через углы падения θ_1 и преломления θ_2).

12.26. Показать с помощью формул Френеля, что при достаточно малых углах падения ($\theta_1 + \theta_2 < \pi/2$) при отражении от оптически более плотной среды ($n_2 > n_1$) происходит изменение фазы волны на π , а при отражении от оптически менее плотной среды фаза отраженной волны совпадает с фазой падающей.

12.27. Показать, что в случае полного внутреннего отражения интенсивность отраженного света равна интенсивности падающего света.

12.28. Найти фазовый сдвиг φ между p - и s -компонентами отраженной волны при полном внутреннем отражении.

12.29. Чему должен быть равен показатель преломления n вещества, чтобы в результате однократного полного внутреннего отражения на его границе с воздухом можно было линейно поляризованный свет с азимутом поляризации 45° преобразовать в свет с круговой поляризацией?

12.30. В параллелепипеде Френеля проходящий через него свет испытывает двукратное полное внутреннее отражение (рис. 12.2), что позволяет, в частности, преобразовывать линейно поляризованный свет в свет с круговой поляризацией. Для этого угол параллелепипеда θ выбирается таким, чтобы при однократном отражении разность фаз φ между p - и s -компонентами $\varphi_p - \varphi_s = \pi/4$. Рассчитать преломляющий угол θ для параллелепипеда Френеля, изготовленного из стекла с показателем преломления $n = 1,51$.

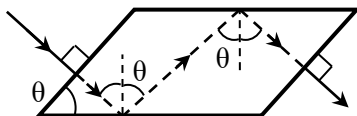


Рис. 12.2. Ход лучей в параллелепипеде Френеля.

12.31. Каким должен быть минимальный показатель преломления n у материала для параллелепипеда Френеля, чтобы обеспечить на выходе сдвиг фаз между p - и s -компонентами, равный $\varphi = \varphi_p - \varphi_s = 3\pi/2$?

12.32. Линейно поляризованный свет падает на границу раздела "стекло – воздух" и полностью отражается. Какая получится поляризация отраженного света, если азимут поляризации падающего света равен: а) $\alpha = +45^\circ$; б) $\alpha = -45^\circ$?

12.33. Линейно поляризованная световая волна с азимутом колебаний $\alpha = -45^\circ$ полностью отражается от границы "вода – воздух". Показатель преломления воды $n = 1,33$. Каким должен быть угол падения θ волны, чтобы отраженная волна получилась поляризованной по кругу? Какой будет при этом круговая поляризация: правой или левой?

12.34. Оценить глубину проникновения Δz поляризованного перпендикулярно плоскости падения лазерного излучения ($\lambda = 0,63$ мкм) в воздух после прохождения прямоугольной призмы из стекла с показателем преломления $n = 1,5$ и преломляющим углом $\theta = 45^\circ$ (рис. 12.3).

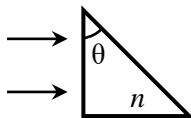


Рис. 12.3. Падение световой волны на призму.

§13. Оптика анизотропных сред. Кристаллооптика

• Уравнение плоской монохроматической волны в диэлектрической немагнитной среде в комплексной форме:

$$A(t, \mathbf{r}) = \tilde{A}_0 \exp \left\{ i\omega \left(t - \frac{N\mathbf{r}}{v} \right) \right\},$$

где \tilde{A}_0 – комплексная амплитуда, $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} N$ – волновой вектор, N – единичный вектор волновой нормали к фронту плоской волны, $v = \frac{\omega}{k}$ – фазовая скорость (скорость фронта волны в направлении нормали N) (рис. Т13.1).

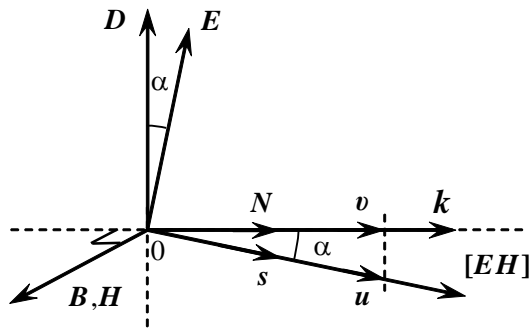


Рис Т13.1. Взаимная ориентация векторов \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} и \mathbf{k} при распространении световой волны в анизотропной среде.

• Связь модулей векторов \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} и \mathbf{B} в световой волне:

$$E = vB, \quad H = vD.$$

• Вектор Умова-Пойнтинга \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}] = EDvs = (\mathbf{E}, \mathbf{D}) \frac{v}{\cos \alpha} \mathbf{s},$$

где \mathbf{s} – единичный вектор в направлении $[\mathbf{E}, \mathbf{H}]$.

• Фазовая скорость v :

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}.$$

- Лучевая скорость u :

$$u = \frac{v}{\cos \alpha} s ,$$

где α – угол между векторами \mathbf{D} и \mathbf{E} (угол поляризации) (см. рис. Т13.1).

- Интенсивность света I в направлении луча \mathbf{S} :

$$I = \langle (\mathbf{E}, \mathbf{D}) \rangle \frac{v}{\cos \alpha} = \langle (\mathbf{E}, \mathbf{D}) \rangle u = wu ,$$

где w – среднее по времени значение объёмной плотности энергии электромагнитного поля световой волны.

- Тензорная связь между векторами \mathbf{D} и \mathbf{E} в анизотропной среде в проекциях на главные направления кристалла:

$$D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_i E_i \quad (i = x, y, z),$$

где ε_i – главные диэлектрические проницаемости.

- Главные показатели преломления n_i :

$$n_i = \sqrt{\varepsilon_i} .$$

- Главные скорости v_i :

$$v_i = c / n_i .$$

Главные скорости – это скорости распространения волны, поляризованной вдоль соответствующего главного направления.

- Зависимость фазовой скорости v плоской линейно-поляризованной волны от ориентации вектора \mathbf{D} в кристалле с главными скоростями v_i :

$$v^2 = \sum_i d_i^2 v_i^2 \quad (i = x, y, z),$$

где d_i – направляющие косинусы вектора \mathbf{D} относительно главных направлений кристалла.

- Эллипсоид показателей преломления (ЭПП):

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1 .$$

Главные оси ЭПП совпадают с главными направлениями анизотропной среды.

• Уравнение волновых нормалей (уравнение Френеля) для фазовых скоростей:

$$\sum_i \frac{N_i^2}{v^2 - v_i^2} = 0 \quad (i = x, y, z),$$

где N_i – проекции вектора \mathbf{N} на главные направления кристалла.

• Зависимость лучевой скорости u линейно-поляризованной волны от ориентации вектора \mathbf{E} в кристалле с главными скоростями v_i :

$$\frac{1}{u^2} = \sum_i \frac{e_i^2}{v_i^2} \quad (i = x, y, z),$$

где e_i – проекция вектора \mathbf{E} на главные направления кристалла.

• Эллипсоид лучевых скоростей (эллипсоид Френеля):

$$\frac{x^2}{v_x^2} + \frac{y^2}{v_y^2} + \frac{z^2}{v_z^2} = 1,$$

где v_i – главные скорости анизотропного кристалла; главные оси эллипсоида Френеля совпадают с главными направлениями анизотропной среды.

• Уравнение Френеля для лучевых скоростей:

$$\sum_i \frac{S_i^2 v_i^2}{u^2 - v_i^2} = 0.$$

• Одноосные кристаллы.

Пусть оптическая ось кристалла совпадает с осью OZ и

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_{\perp}, \quad \varepsilon_z = \varepsilon_{\parallel}.$$

В этом случае уравнение ЭПП запишется в виде:

$$\frac{x^2 + y^2}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{z^2}{\varepsilon_{\parallel}} = 1.$$

Для нахождения фазовых скоростей волн, распространяющихся в некотором направлении волновой нормали \mathbf{N} (пусть \mathbf{N} лежит в плоскости OXZ и образует с оптической осью кристалла угол φ) (см. рис. T13.2), найдем сечение ЭПП плоскостью, перпендикулярной к \mathbf{N} . Это сечение имеет форму эллипса, одна из полуосей которого всегда ориентирована по оси OY и равна ε_{\perp} (на рисунке не показана). Следовательно, волна, поляризованная *перпендикулярно*

оптической оси и вектору волновой нормали \vec{N} , т.е. перпендикулярно плоскости главного сечения, распространяется со скоростью

$$v_0 = \frac{c}{n_0} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}}. \text{ Таковую волну называют обыкновенной.}$$

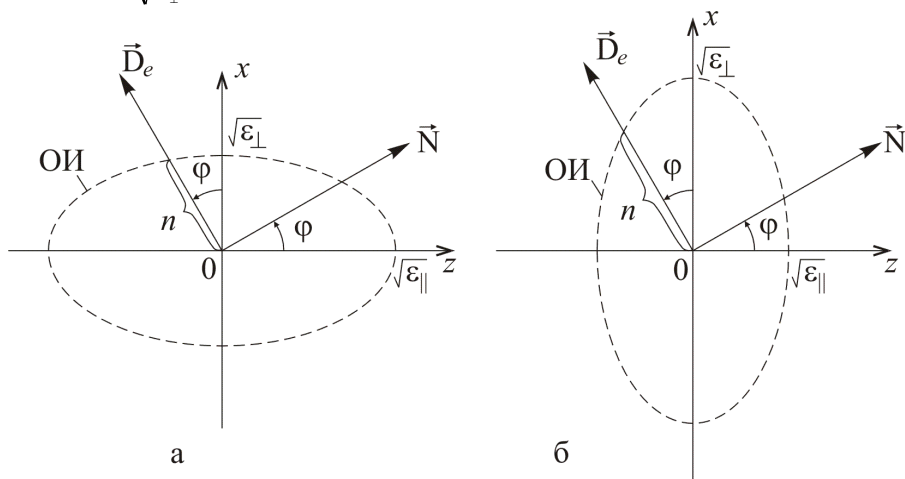


Рис.Т13.2. Сечение эллипсоида показателя преломления плоскостью $y = 0$ (штриховая линия) для одноосных положительного (а) и отрицательного (б) кристаллов (Oz – оптическая ось кристалла).

Для второй волны (*необыкновенной*), поляризованной в плоскости главного сечения (в направлении \vec{D}_e), фазовая скорость равна

$$v_e = \frac{c}{n(\varphi)}.$$

$$n(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{\sin^2 \varphi}{\varepsilon_{\parallel}}}}; \quad v_e(\varphi) = c \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{\sin^2 \varphi}{\varepsilon_{\parallel}}}.$$

Параметры $n_0 = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$ и $n_e = \sqrt{\varepsilon_{\parallel}}$ называют *обыкновенным* и *необыкновенным показателями преломления*.

- Положительные и отрицательные одноосные кристаллы.

Если $\epsilon_x = \epsilon_y \equiv \epsilon_{\perp}$, $\epsilon_z \equiv \epsilon_{\parallel}$, то при $\epsilon_{\parallel} > \epsilon_{\perp}$ кристаллы называют *положительными*, и *отрицательными*, если $\epsilon_{\parallel} < \epsilon_{\perp}$ (рис. Т13.3).

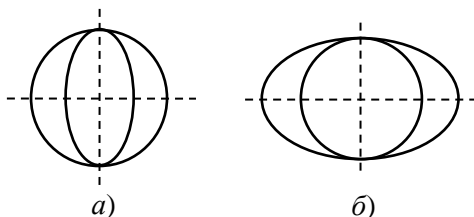


Рис. Т13.3. Сечения лучевых поверхностей одноосного положительного (а) и отрицательного (б) кристаллов.

С помощью *эллипсоида волновых векторов* $k(\varphi) = \frac{\omega}{c} n(\varphi)$ удобно описывать преломление плоских волн на границе с анизотропной средой (см. рис. Т13.4 для случая *отрицательного* кристалла). Для расчета углов преломления нормалью можно использовать *закон преломления Снеллиуса*.

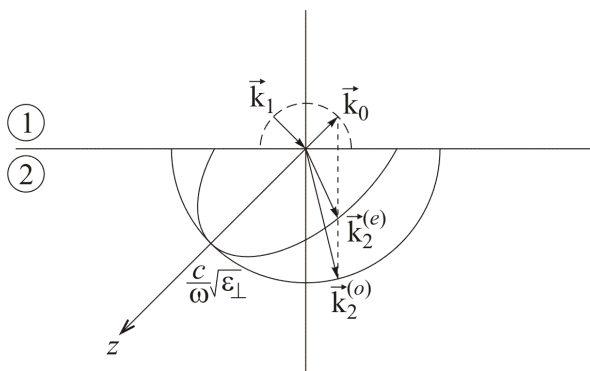


Рис. Т13.4. Сечение волновой поверхности, состоящей из сферы и эллипсоида, плоскостью $z = 0$ для одноосного отрицательного кристалла.

Уравнение *лучевого эллипсоида* имеет вид:

$$\epsilon_{\perp} (x^2 + y^2) + \epsilon_{\parallel} z^2 = 1.$$

Его центральные сечения приведены на рис. Т13.5.

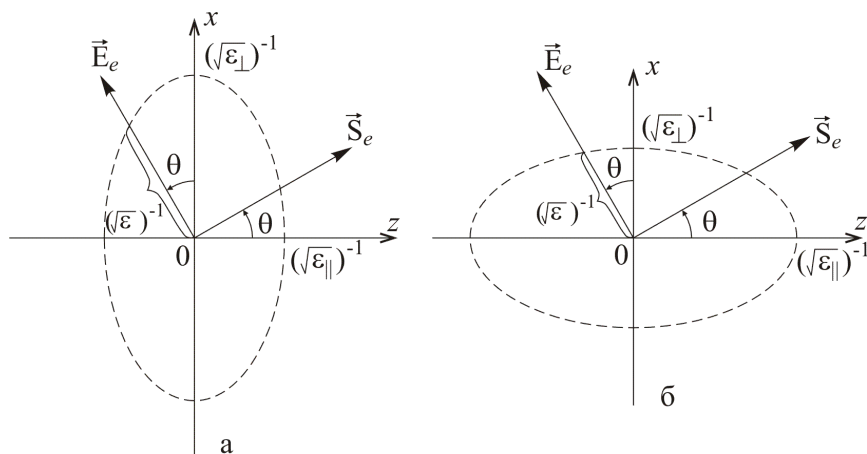


Рис. Т13.5. Сечения лучевого эллипсоида плоскостью $y=0$ и взаимная ориентация векторов \vec{E}_e и \vec{S}_e для положительного (а) и отрицательного (б) одноосных кристаллов (Oz – оптическая ось кристалла).

Лучевая скорость необыкновенной волны равна:

$$u_e(\theta) = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\perp} \cos^2 \theta + \epsilon_{\parallel} \sin^2 \theta}},$$

где θ – угол между \vec{S}_e и оптической осью кристалла Oz ,

а лучевая скорость обыкновенной волны $u_0 = v_0 = \frac{c}{n_0} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\perp}}}$.

13.1. Для анизотропного кристалла с заданными значениями главных диэлектрических проницаемостей $\varepsilon_x = 4$; $\varepsilon_y = 3$; $\varepsilon_z = 2$ построить сечения плоскостями $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$: а) эллипсоида показателей преломления; б) лучевого эллипсоида; в) лучевой поверхности. Указать направления главных оптических осей.

13.2. Для анизотропного кристалла с значениями главных диэлектрических проницаемостей $\varepsilon_x = 2$; $\varepsilon_y = 3$; $\varepsilon_z = 4$ построить лучевую поверхность и найти направления главных оптических осей.

13.3. Для анизотропного кристалла с заданными значениями главных диэлектрических проницаемостей $\varepsilon_x = 2$; $\varepsilon_y = 4$; $\varepsilon_z = 3$ найти фазовые скорости для направления $N = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0 \right\}$.

13.4. Для анизотропного кристалла с значениями главных диэлектрических проницаемостей $\varepsilon_x = 4$; $\varepsilon_y = 3$; $\varepsilon_z = 2$ найти лучевые скорости для направления $S = \left\{ 0; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} \right\}$.

13.5. Для некоторой среды уравнение эллипсоида показателей преломления имеет вид: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2,5} + \frac{z^2}{3} = 1$. Найти фазовые скорости волн в направлении $N = \frac{1}{\sqrt{2}} e_x + \frac{1}{\sqrt{2}} e_z$.

13.6. Показать, что в анизотропной среде волны, распространяющиеся в одном направлении с разными фазовыми скоростями $v_1 \neq v_2$, поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях, т.е. $D_1 \perp D_2$.

13.7. Получить уравнение Френеля для фазовых скоростей: $\sum_i \frac{N_i^2}{v^2 - v_i^2} = 0$ ($i = x, y, z$), где N_i – проекции вектора нормали к волновому фронту N на главные направления кристалла.

13.8. Получить уравнение Френеля для лучевых скоростей:

$$\sum_i \frac{S_i^2 v_i^2}{u^2 - v_i^2} = 0, \text{ где } S_i - \text{ проекции лучевого вектора } \mathbf{S} \text{ на главные}$$

направления кристалла.

13.9. Получить формулу зависимости фазовой скорости v плоской линейно-поляризованной волны от ориентации вектора \mathbf{D} в кристалле: $v^2 = \sum_i d_i^2 v_i^2$, где v_i – главные скорости, d_i – направля-

ющие косинусы вектора \mathbf{D} относительно главных направлений кристалла.

13.10. Вывести формулу $\frac{1}{u^2} = \sum_i \frac{e_i^2}{v_i^2}$, описывающую зависи-

мость лучевой скорости u световой волны от ориентации вектора \mathbf{E} в анизотропной среде с главными скоростями v_i (e_i – направляющие косинусы вектора \mathbf{E} относительно главных направлений кристалла).

13.11. Главные диэлектрические проницаемости некоторой среды равны: $\epsilon_x = 4$, $\epsilon_y = 2$, $\epsilon_z = 3$. Найти лучевые скорости волн с частотой ω в направлении $\mathbf{S} = \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{e}_x + \frac{1}{2} \mathbf{e}_z$. Записать уравнения этих волн для вектора \mathbf{E} .

13.12. Главные диэлектрические проницаемости некоторой среды равны: $\epsilon_x = 2,5$, $\epsilon_y = 3$, $\epsilon_z = 2$. Найти фазовые скорости волн с частотой ω в направлении $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_y + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_z$. Записать уравнения

этих волн для векторов \mathbf{D} .

13.13. Для некоторой среды уравнение эллипсоида показателей преломления имеет вид: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = 1$. Записать для вектора \mathbf{E} уравнения волн с частотой ω , лучевые скорости которых имеют направление $\mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_y$.

13.14. Главные значения диэлектрической проницаемости немагнитной среды: $\epsilon_x = 2$; $\epsilon_y = 2,5$; $\epsilon_z = 3$. Как должна быть

поляризована волна, чтобы ее фазовая скорость в этой среде была максимальна? Найти это максимальное значение. Написать уравнения такой волны для вектора \mathbf{D} , если её частота равна ν , а амплитуда вектора электрической индукции D_0 .

13.15. На рис. 13.1 показано сечение лучевой поверхности плоскостью XOZ . Известно, что скорость распространения света вдоль оптической оси равна $c/\sqrt{3}$. Найти характеристики кристалла; построить лучевые поверхности, эллипсоид показателей преломления и лучевой эллипсоид.

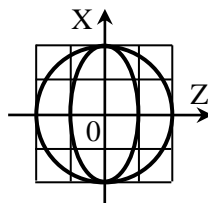


Рис. 13.1. Сечение лучевой поверхности одноосного кристалла плоскостью XOZ .

13.16. При наклонном падении луча на кристаллическую пластинку её поворачивают вокруг оси, перпендикулярной плоскости падения луча и лежащей в плоскости пластинки, и измеряют показатель преломления. Оказалось, что один показатель преломления постоянен при всех поворотах пластинки и равен 1,646, а другой меняется от 1,642 до 1,646. Определить оптический знак кристалла и ориентировку пластинки относительно оптической оси.

13.17. Как будут изменяться показатели преломления пластинки из того же материала, что в задаче 13.16, если оптическая ось пластинки перпендикулярна плоскости падения луча и параллельна поверхности пластинки?

13.18. Пучок неполяризованного излучения падает наклонно на пластинку из одноосного положительного кристалла. Найти с помощью построения Гюйгенса направления преломленных лучей для следующих случаев (рис. 13.2): а) оптическая ось кристалла находится в плоскости падения и параллельна поверхности пластинки; б) оптическая ось кристалла находится в плоскости падения и перпендикулярна поверхности пластинки; в) оптическая ось кристалла перпендикулярна плоскости падения и параллельна поверхности пластинки. Указать поляризацию преломленных лучей.

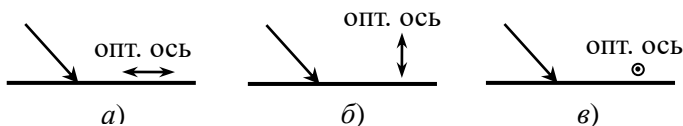


Рис. 13.2. Ориентация оптических осей относительно поверхности кристалла.

13.19. Решить задачу 13.18, если пучок света падает на отрицательный одноосный кристалл.

13.20. Узкий пучок неполяризованного света падает наклонно на пластинку из одноосного анизотропного кристалла, оптическая ось которого расположена в плоскости падения под углом к плоскости пластинки (рис. 13.3). Найти с помощью построения Гюйгенса направления преломленных пучков, если кристалл: а) отрицательный; б) положительный. Указать поляризацию преломленных пучков.

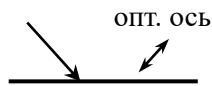


Рис. 13.3. Ориентация оптической оси относительно поверхности кристалла.

13.21. Узкий пучок неполяризованного света падает нормально на одноосный положительный кристалл, оптическая ось которого образует угол α ($0 < \alpha < 90^\circ$) с нормалью к пластинке. Найти с помощью построения Гюйгенса направления преломленных пучков.

13.22. Найти угол α между нормалью к волновому фронту N_e и лучом S_e для необыкновенной волны в одноосном кристалле с известными значениями главных диэлектрических проницаемостей ϵ_{\parallel} и ϵ_{\perp} в зависимости от ориентации вектора E_e (рис. 13.4).

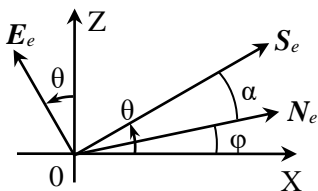


Рис. 13.4. Ориентация векторов E , S и N в плоскости XOZ (X – оптическая ось кристалла).

13.23. Определить максимальный угол α_{\max} между направлением луча и направлением волновой нормали в исландском шпате, для которого $n_o = 1,658$ и $n_e = 1,486$.

13.24. Узкий пучок света с длиной волны $\lambda = 0,55$ мкм распространяется в исландском шпате под углом $\theta = 45^\circ$ к оптической оси. Показатели преломления исландского шпата $n_o = 1,658$ и $n_e = 1,486$. Найти угол α между фазовой и лучевой скоростями.

13.25. Параллельный пучок света падает нормально на пластинку исландского шпата ($n_o = 1,658$ и $n_e = 1,486$) толщиной $d = 0,03$ мм, вырезанную параллельно оптической оси. Определить оптическую разность хода Δ обыкновенного и необыкновенного лучей, прошедших через пластинку.

13.26. Имеются две пластинки, вырезанные параллельно оптической оси: одна – из исландского шпата толщиной $d = 1,0$ мм,

другая – из кварца. Найти толщину d' кварцевой пластинки, которая для света с длиной волны $\lambda = 0,55$ мкм дает такую же разность хода обыкновенного и необыкновенного лучей. В чем при этом будет их различие? Для кварца $n_o = 1,545$ и $n_e = 1,554$; для исландского шпата $n_o = 1,658$ и $n_e = 1,486$.

13.27. Монохроматический пучок неполяризованного света падает нормально на пластинку из исландского шпата, вырезанную под углом γ к оптической оси. Найти разность хода Δ для обыкновенной и необыкновенной волн в зависимости от угла γ . Толщина пластинки равна d , главные показатели преломления – n_o и n_e .

13.28. Найти фазовую скорость v_e необыкновенной волны, нормаль к волновому фронту N которой лежит в плоскости главного сечения кристалла и составляет угол φ с оптической осью. Главные диэлектрические проницаемости кристалла равны ϵ_{\parallel} и ϵ_{\perp} .

13.29. Из одноосного кристалла с главными показателями преломления n_o и n_e вырезан кубик. Ребра кубика совпадают с главными направлениями кристалла. Найти фазовые скорости v , с которыми плоские световые волны могут распространяться вдоль пространственной диагонали кубика.

13.30. Луч неполяризованного света падает нормально на призму Волластона, сделанную из исландского шпата ($n_o = 1,658$, $n_e = 1,486$) (рис. 13.5, точками и линиями показаны направления оптических осей каждой из призм). Преломляющий угол призмы $\alpha = 15^\circ$. Построить ход лучей через призму. На какой угол φ будут разведены два луча на выходе из призмы?

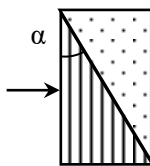


Рис. 13.5. Призма Волластона.

13.31. Двоякопреломляющая призма изготовлена из стекла с показателем преломления $n = 1,66$ и исландского шпата с показателями преломления для обыкновенного и необыкновенного лучей $n_o = 1,658$, $n_e = 1,486$ соответственно (рис. 13.6). Оптическая ось призмы перпендикулярна плоскости рисунка, преломляющий угол $\alpha = 30^\circ$. На стеклянную грань призмы нормально падает пучок света. Построить ход

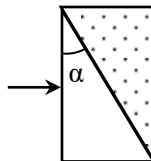


Рис. 13.6. Двоякопреломляющая призма.

лучей через призму. Определить угол φ расхождения лучей, вышедших из призмы.

13.32. Построить ход узкого пучка неполяризованного света через призму, обе части которых изготовлены из одного и того же двоякопреломляющего материала, но оптические оси призм взаимно перпендикулярны (рис. 13.6, точками и линиями показаны направления оптических осей каждой из призм): а) призма Рошона; б) призма Сенармона.

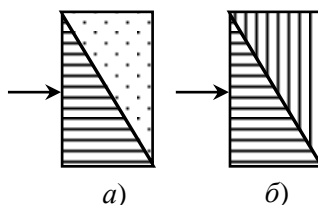


Рис. 13.6. Двоякопреломляющие призмы: а) Рошона; б) Сенармона.

13.33. Призма Николя сделана из кристалла исландского шпата, разрезанного на две равные части вдоль диагональной плоскости (рис. 13.7). Эти части склеены канадским бальзамом, показатель преломления которого $n = 1,54$. Луч света падает на призму так, что внутри призмы необыкновенный луч идет параллельно длинному ребру призмы, практически не испытывая бокового смещения при переходе через разрез. Для данного направления показатель преломления необыкновенного луча $n_e = 1,516$, а обыкновенного $n_o = 1,658$. Определить угол α между длинным и коротким ребрами призмы Николя, при котором угол падения обыкновенного луча на слой канадского бальзама превышает угол полного внутреннего отражения β на $\delta = 1^\circ 45'$, а необыкновенный луч идет так, как описано выше.

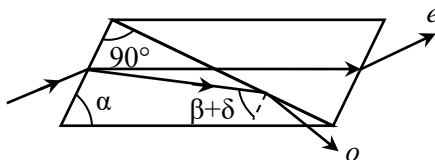


Рис. 13.7. Ход лучей через призму Николя.

13.34. Поляризационная призма Глана сделана из исландского шпата и склеена глицерином ($n = 1,474$). Неполяризованный световой пучок нормально падает на переднюю грань призмы. Оптические оси обеих частей призмы перпендикулярна плоскости падения света (рис. 13.8). Преломляющий угол призмы $\alpha = 18^\circ$. Показа-

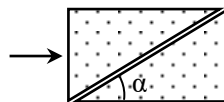


Рис. 13.8. Поляризационная призма Глана.

тели преломления исландского шпата для обыкновенного и необыкновенного лучей равны $n_o = 1,658$, $n_e = 1,486$. Какой луч выходит из призмы?

13.35. Две поляризационные призмы с воздушной прослойкой изготовлены из исландского шпата ($n_o = 1,658$, $n_e = 1,486$) (рис. 13.9). В одной призме оптическая ось перпендикулярна плоскости падения света (*а*), в другой – параллельна (*б*). При условии нормального падения света на грань призмы определить: *а*) какая из призм пропускает больше света; *б*) каким должен быть преломляющий угол призм α , чтобы из призмы выходил линейно-поляризованный свет.

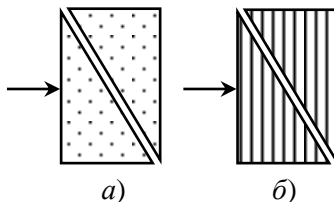


Рис. 13.9. Различные поляризационные призмы.

§14. Поляризация света

- Закон Малюса:

$$I(\theta) = I_0 \cos^2 \theta,$$

где θ – угол между плоскостью поляризации волны и плоскостью пропускания анализатора, I_0 – интенсивность линейно поляризованной волны.

- Эллипс поляризации.

Пусть плоская монохроматическая волна распространяется вдоль оси OZ и для некоторой плоскости $z = \text{const}$ компоненты вектора \mathbf{E} в проекциях на координатные оси OX и OY имеют вид:

$$x = a \cos(\omega t),$$

$$y = b \cos(\omega t + \varphi),$$

где $x = E_x$, $y = E_y$, $a = E_{x0}$, $b = E_{y0}$ $\varphi \equiv \varphi_y - \varphi_x = \text{const}$.

Тогда уравнение траектории движения конца вектора \mathbf{E} в плоскости волнового фронта имеет вид:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 2\frac{xy}{ab} \cos \varphi = \sin^2 \varphi.$$

Это уравнение эллипса, главные оси которого ориентированы под углом θ_0 к координатным осям OX и OY (рис. Т14.1), причем

$$\text{tg } 2\theta_0 = \frac{2ab}{a^2 - b^2} \cdot \cos \varphi = \text{tg } 2\alpha \cdot \cos \varphi, \text{ где } \text{tg } \alpha = \frac{b}{a}.$$

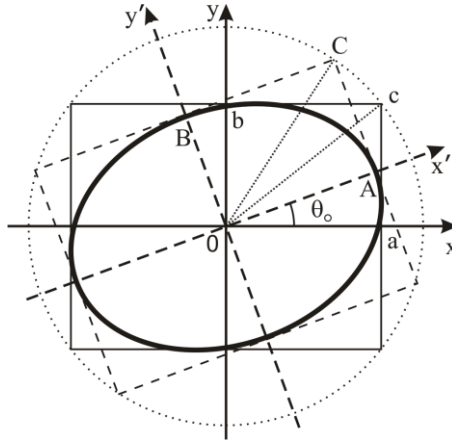


Рис. 14.1. Вид эллипса поляризации при различном выборе системы координат.

- Уравнение эллипса поляризации в системе главных осей:

$$\left(\frac{x'}{A}\right)^2 + \left(\frac{y'}{B}\right)^2 = 1,$$

где OX' и OY' – главные оси эллипса, A и B – длины главных полуосей эллипса поляризации, причем

$$A^2 + B^2 = a^2 + b^2 = c^2 \propto I_0;$$

$$\left(\frac{B}{A}\right)^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \varphi}}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \varphi}}, \text{ где } \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

- Степень поляризации:

$$P = \frac{I_{\text{пол}}}{I_{\text{ест}} + I_{\text{пол}}},$$

где $I_{\text{пол}}$ и $I_{\text{ест}}$ – интенсивности поляризованной и естественной компонент соответственно.

- "Четвертьволновые" пластинки (пластинки " $\frac{\lambda}{4}$ "):

$$|\Delta| = \frac{\lambda}{4} + m \frac{\lambda}{2} \text{ (или разность фаз } |\varphi| = \frac{\pi}{2} + \pi m \text{),}$$

где $\Delta = d(n_o - n_e)$ – дополнительная разность хода после прохождения двупреломляющей пластинки толщиной d , n_o и n_e – показатели преломления для обыкновенной и необыкновенной волн.

- "Полуволновые" пластинки (пластинки " $\frac{\lambda}{2}$ "):

$$|\Delta| = \frac{\lambda}{2} + m\lambda \quad (|\varphi| = \pi + 2\pi m).$$

- Анализ состояния поляризации света с помощью двупреломляющей пластинки.

Если пучок неполяризованного света направить на систему, состоящую из поляризатора, двупреломляющей пластинки и анализатора, то интенсивность прошедшего через систему света будет равна:

$$I(\alpha, \beta, \delta) = I_0 \left[\cos^2(\alpha - \beta) - \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2} \right],$$

где α, β – углы между оптической осью пластинки и направлениями пропускания поляризатора и анализатора соответственно; δ – разность фаз, вносимая пластинкой, I_0 – интенсивность света после поляризатора.

В случае *параллельно* ориентированных поляризатора и анализатора ($\alpha = \beta$)

$$I_{\parallel} = I_0 \left[1 - \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2} \right].$$

В случае ориентированных взаимно перпендикулярно (*скрещенных*) поляризатора и анализатора ($\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$)

$$I_{\perp} = I_0 \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}.$$

- Естественное вращение плоскости поляризации:

$$\psi = \alpha l,$$

где ψ – угол поворота плоскости поляризации световой волны, l – длина пути светового луча в кристалле, α – постоянная вращения, зависящая от рода вещества, температуры и длины волны.

Согласно теории Френеля

$$\psi = \frac{\pi}{\lambda_0} |n_o - n_e| l,$$

где λ_0 – длина волны в вакууме, n_o и n_e – показатели преломления для обыкновенной и необыкновенной волн соответственно.

14.1. Чему равна степень поляризации P света, являющегося смесью естественного и линейно поляризованного, если отношение интенсивности поляризованного света к интенсивности естественного равно: а) 1; б) 10?

14.2. Линейно поляризованный свет с интенсивностью I_0 проходит последовательно через два поляризатора, плоскости пропускания которых образуют с плоскостью поляризации света углы $\alpha_1 = 30^\circ$ и $\alpha_2 = 60^\circ$. Определить интенсивность I прошедшего света.

14.3. Естественный свет падает на систему из двух поляризаторов, угол между плоскостями пропускания которых равен $\alpha_1 = 30^\circ$. Как изменится интенсивность прошедшего света, если увеличить этот угол до $\alpha_2 = 45^\circ$?

14.4. Линейно поляризованный свет с интенсивностью I_0 падает на систему из двух поляризаторов. Плоскость пропускания первого поляризатора составляет угол α с плоскостью поляризации света, а плоскость пропускания второго поляризатора совпадает с плоскостью поляризации падающего света. Найти интенсивность I прошедшего света.

14.5. Поляризованный по кругу свет с интенсивностью I_0 падает на систему из трех поляризаторов. Первый и последний поляризаторы скрещены, а угол между плоскостями пропускания первого и второго поляризаторов равен α . Найти интенсивность I прошедшего света.

14.6. Пучок естественного света падает на систему из $N = 6$ поляризаторов, плоскость пропускания каждого из которых повернута на угол $\varphi = 30^\circ$ относительно плоскости пропускания предыдущего поляризатора. Какая часть светового потока проходит через систему?

14.7. Большое число $(N+1)$ поляроидов уложено в стопку. Плоскость пропускания каждого последующего поляроида составляет малый угол α с плоскостью предыдущего, так что угол между плоскостями пропускания первого и последнего поляроидов равен $N\alpha$. На стопку падает линейно поляризованный свет с интенсивностью I_0 , плоскость поляризации которого совпадает с плоскостью пропускания первого поляроида. Пренебрегая потерями на отражение и поглощение, найти интенсивность I прошедшего света.

14.8. Естественный свет с интенсивностью I_0 проходит через систему из двух последовательно расположенных одинаковых со-

вершенных поляризаторов. При этом интенсивность прошедшего через систему света уменьшается в $\eta = 8$ раз. Какова будет интенсивность I прошедшего света, если один из поляризаторов повернуть в ту или другую сторону на угол $\alpha = \pi/6$?

14.9. Частично поляризованный свет (смесь естественного и линейно поляризованного) со степенью поляризации $P = 0,5$ пропускают через николю. Как изменится интенсивность света за николем, если николю из положения, соответствующего максимуму пропускания, повернуть на $\theta = 45^\circ$?

14.10. На пути частично поляризованного света находится совершенный поляризатор, при этом интенсивность прошедшего света равна I_1 . После поворота поляризатора на 90° интенсивность света уменьшается до I_2 . Определить интенсивность линейно поляризованной компоненты $I_{\text{лин}}$, если она в $\beta = 4$ раза больше интенсивности естественной составляющей.

14.11. На пути частично поляризованного света находится николю. При его повороте на угол $\alpha = 60^\circ$ из положения, соответствующего максимуму пропускания, интенсивность света за николем уменьшается в $\beta = 3$ раза. Определить степень поляризации P света.

14.12. Линейно-поляризованный пучок света с интенсивностью I_0 пропускают через идеальный поляризатор, который вращается вокруг оси пучка с постоянной угловой скоростью ω . Найти световую энергию W , которую пропускает поляризатор за один оборот, если площадь поперечного сечения пучка равна S_0 .

14.13. Степень поляризации пучка частично поляризованного света $P = 0,4$. Какой станет степень поляризации P_1 света, если интенсивность линейно поляризованной составляющей уменьшить в $\eta = 2$ раза?

14.14. При падении естественного света на некоторый поляризатор проходит $\eta_1 = 30\%$ светового потока, а через два таких поляризатора – $\eta_2 = 13,5\%$. Найти угол φ между плоскостями пропускания этих поляризаторов.

14.15. Для сравнения яркостей двух поверхностей, освещаемых неполяризованным светом, первую поверхность рассматривают непосредственно, а вторую – через два николя. Найти отношение этих яркостей, если освещенность обеих поверхностей кажется

одинаковой, когда угол между николями равен $\varphi = 60^\circ$. Считать, что потери света в каждом из николей на отражение и поглощение составляют $p = 10\%$ от интенсивности падающего света.

14.16. Некогерентная смесь линейно поляризованного света и света, поляризованного по кругу, рассматривается через николю. Поворачивая николю вокруг оси пучка, находят такое положение, при котором интенсивность прошедшего света максимальна. Если теперь повернуть николю на некоторый угол $\theta < \pi/2$, то интенсивность прошедшего света уменьшится в $\eta = 2$ раза, но будет во столько же раз больше, чем в случае ориентации николя на минимум пропускания. Найти отношение интенсивностей линейно поляризованного света и света, поляризованного по кругу, $I_{\text{линь}}/I_{\text{круг}}$ и угол θ .

14.17. Некогерентная смесь линейно поляризованного света и света, поляризованного по кругу, рассматривается через поляризатор. При повороте поляризатора из положения, соответствующего максимуму интенсивности прошедшего света, на угол $\alpha = 30^\circ$ интенсивность света уменьшается на $p = 20\%$. Найти соотношение интенсивностей циркулярно и линейно поляризованных компонент $I_{\text{круг}}/I_{\text{линь}}$.

14.18. Уравнения двух плоских волн с взаимно перпендикулярными направлениями векторов \mathbf{E} имеют вид: $\mathbf{E}_1 = a\mathbf{e}_x \cos(\omega t - kz)$ и $\mathbf{E}_2 = b\mathbf{e}_y \cos(\omega t - kz + \varphi)$. Как ведет себя результирующий вектор \mathbf{E} плоской волны, получающейся при сложении этих волн?

14.19. Какой характер поляризации имеет результирующая плоская электромагнитная волна, описанная в задаче 14.18, если: а) $\varphi = 0$; б) $\varphi = \pi/2$; в) $\varphi = \pi/6$; г) $\varphi = 5\pi/6$; д) $\varphi = \pi$; е) $\varphi = 7\pi/6$? Изобразить эллипсы поляризации для всех случаев, считая $a > b$.

14.20. Как поляризована плоская световая волна, если уравнение для светового вектора \mathbf{E} в волне имеет вид:

$$а) E_x = E \cos(\omega t - kz), E_y = E \sin(\omega t - kz);$$

$$б) E_x = E \cos(\omega t - kz), E_y = E \cos\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{4}\right);$$

$$в) E_x = E \cos(\omega t - kz), E_y = E \cos(\omega t - kz + \pi).$$

14.21. Записать уравнение для светового вектора \mathbf{E} плоской монохроматической волны: а) с правой круговой поляризацией; б) с левой эллиптической поляризацией (большая ось эллипса лежит в плоскости $y = x$).

14.22. Какой характер поляризации имеет плоская волна, проекции вектора \mathbf{E} которой по осям X и Y задаются уравнениями:

$E_x = a \sin(\omega t - kz)$, $E_y = a \sin\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{3}\right)$? Построить эллипс поляризации в плоскости $z = 0$, определить его полуоси A и B и их ориентацию.

14.23. Определить характер поляризации плоской волны, проекции вектора \mathbf{E} которой по осям X и Y задаются уравнениями:

$E_x = 3a \cos(\omega t - kz)$, $E_y = a \sin(\omega t - kz)$. Построить эллипс поляризации в плоскости $z = 0$.

14.24. Свет с правой круговой поляризацией пропускают через николю. Записать уравнение световой волны на выходе из поляризатора, если его плоскость пропускания ориентирована под углом α к оси X .

14.25. Эллипс поляризации задан уравнением:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 2 \cdot \frac{xy}{ab} \cdot \cos \varphi = \sin^2 \varphi.$$

Найти угол θ_0 , под которым ориентированы главные оси эллипса относительно координатных осей OX и OY (рис. 14.1).

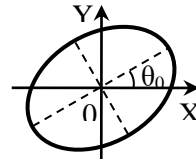


Рис. 14.1. Вид эллипса поляризации.

14.26. Эллипс поляризации задан уравнением:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 2 \cdot \frac{xy}{ab} \cdot \cos \varphi = \sin^2 \varphi.$$

Найти отношение полуосей эллипса.

14.27. Проекции вектора \mathbf{E} плоской световой волны по осям X и Y задаются уравнениями:

$$E_x = 2a \sin(\omega t - kz), E_y = a \sin(\omega t - kz + \pi/3).$$

Записать уравнение эллипса поляризации. Найти угол θ_0 , под которым ориентированы главные оси эллипса относительно координатных осей OX и OY , и определить отношение полуосей эллипса.

14.28. Найти наименьшую толщину d_{\min} пластинки кварца, вырезанной параллельно оптической оси, чтобы падающий линейно поляризованный свет ($\lambda = 500$ нм) выходил поляризованным по кругу. Для кварца $n_o = 1,5442$, $n_e = 1,5533$.

14.29. Пучок линейно поляризованного излучения интенсивностью I_0 падает нормально на анизотропную пластинку, вырезанную параллельно оптической оси. Угол между направлением поляризации и оптической осью равен α . Найти интенсивность и состояние поляризации прошедшего света, если используется пластинка: а) " $\lambda/4$ "; б) " $\lambda/2$ ".

14.30. Параллельный пучок монохроматического света проходит через два николя, главные плоскости которых ориентированы под углом $\delta = 20^\circ$ друг к другу. Между николями помещают пластинку, вырезанную из одноосного кристалла параллельно его оптической оси, которая обеспечивает разность хода $\lambda/2$ между обыкновенным и необыкновенным лучами. При каком угле α между главным направлением первого николя и оптической осью пластинки свет через систему не проходит?

14.31. Какова должна быть наименьшая толщина d пластинки слюды, чтобы она могла служить в качестве пластинки $\lambda/4$ для света натрия, если для этого света показатели преломления волн, идущих перпендикулярно к пластинке, соответственно равны $n_1 = 1,5941$ и $n_2 = 1,5887$?

14.32. Параллельный пучок монохроматического света с длиной волны λ и поляризованный по правому кругу падает нормально на пластинку в полволны. Найти состояние поляризации света, прошедшего через эту пластинку.

14.33. Линейно поляризованный свет падает на пластинку $\lambda/4$ так, что угол между плоскостью поляризации света и оптической осью пластинки равен $\alpha = 30^\circ$. Прошедшую волну исследуют с помощью анализатора. Найти отношение I_{\max} / I_{\min} , где I_{\max} и I_{\min} – соответственно максимальное и минимальное значения интенсивности, которые можно получить при вращении анализатора.

14.34. Смесь естественного и поляризованного по кругу света

рассматривается через кристаллическую пластинку в четверть волны и анализатор. При вращении анализатора вокруг оси светового пучка найдено, что максимальная интенсивность света, прошедшего через систему, в $\eta = 5$ раз превосходит минимальную интенсивность. Найти отношение интенсивности $I_{\text{круг}}$ света, поляризованного по кругу, к интенсивности естественного света $I_{\text{ест}}$.

14.35. Кристаллическая пластинка, вырезанная параллельно оптической оси, имеет толщину $d = 0,75$ мм и служит пластинкой в четверть волны для длины волны $\lambda = 600$ нм. Для каких еще длин волн в области видимого спектра она будет также пластинкой в четверть волны, если для всех длин волн видимого спектра разность показателей преломления необыкновенного и обыкновенного лучей $\Delta n = n_e - n_o = 0,001$?

14.36. Пучок неполяризованного излучения падает нормально на систему, состоящую из поляризатора, двупреломляющей пластинки из одноосного кристалла и анализатора. Найти интенсивность прошедшего через систему света.

14.37. Между двумя скрещенными николями помещена кристаллическая пластинка толщиной $d = 0,045$ мм с показателями преломления $n_o = 1,54$ и $n_e = 1,55$. Пластинка вырезана параллельно оптической оси кристалла и ориентирована так, что угол между главным направлением первого николя и оптической осью пластинки равен $\alpha = 30^\circ$. На систему падает нормально неполяризованный свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм и интенсивностью I_0 . Найти интенсивность I света на выходе из системы.

14.38. Между двумя параллельными николями помещена кристаллическая пластинка в полволны, оптическая ось которой составляет угол $\alpha = 30^\circ$ с главным направлением первого николя. На систему падает нормально естественный свет с интенсивностью I_0 . Определить интенсивность света, прошедшего систему.

14.39. Кристаллическая пластинка с $\Delta n = n_o - n_e = 0,005$, вырезанная параллельно оптической оси, помещена между поляризатором и анализатором так, что ее оптическая ось составляет угол $\alpha = 45^\circ$ с плоскостью пропускания поляризатора. Какой должна быть минимальная толщина пластинки d для того, чтобы при произвольном положении анализатора интенсивность прошедшего через систему света с длиной волны $\lambda = 600$ нм оставалась неизменной?

14.40. Анизотропная пластинка может вращаться между параллельно ориентированными поляризатором и анализатором. Из положения, соответствующего максимально возможной интенсивности прошедшего через систему пучка монохроматического света, анизотропную пластинку поворачивают на угол $\delta = 45^\circ$, при этом интенсивность уменьшается в $\eta = 4$ раза. Какую разность фаз вносит анизотропная пластинка?

14.41. Между скрещенными николями помещена анизотропная пластинка (толщина $d = 2$ мм, разность показателей преломления обыкновенной и необыкновенной волн в пластинке $\Delta n = 0,001$), вырезанная параллельно оптической оси, которая ориентирована под углом $\alpha = 45^\circ$ к главным направлениям николей. Излучение каких длин волн из видимого диапазона не будет проходить через систему?

14.42. На кварцевую пластинку толщиной $d = 3$ мм, вырезанную параллельно оптической оси, нормально падает пучок белого, линейно поляризованного света, плоскость поляризации которого составляет угол $\alpha = 45^\circ$ с осью пластинки. Выходящий из пластинки свет сначала снова проходит через николю, скрещенный с первичным поляризатором светового пучка, а затем падает на щель спектроскопа. Сколько темных полос будет наблюдаться в спектре от длины волны $\lambda_D = 589$ нм до длины волны $\lambda_F = 486$ нм включительно, если для λ_D : $n_e = 1,5533$ и $n_o = 1,5442$, а для λ_F : $n_e = 1,5589$ и $n_o = 1,5497$.

14.43. На пластинку кварца, вырезанную параллельно оптической оси, нормально падает поляризованный по кругу свет (интервал длин волн от $\lambda_1 = 400$ нм до $\lambda_2 = 500$ нм). За пластинкой поставлен поляроид, главное направление которого составляет угол 45° с осью пластинки. Прошедший свет падает на щель спектрографа. Сколько темных полос N получится в спектре, если толщина кварцевой пластинки $d = 2$ мм, $n_e = 1,55$, $n_o = 1,54$?

14.44. Между двумя скрещенными поляроидами поместили кварцевый клин с преломляющим углом $\alpha = 3,5^\circ$. Оптическая ось клина параллельна его ребру и составляет угол $\beta = 45^\circ$ с главными направлениями поляроидов. При прохождении через эту систему света с длиной волны $\lambda = 550$ нм наблюдается система темных по-

лос, расстояние между которыми $\Delta x = 1$ мм. Определить разность показателей преломления Δn кварца для обыкновенного и необыкновенного лучей.

14.45. Компенсатор Бабинэ состоит из двух кварцевых клиньев с одинаковыми острыми углами. В одном из клиньев оптическая ось параллельна, а в другом перпендикулярна ребру клина (рис. О.14.2). Показатели преломления для обыкновенного и необыкновенного лучей в кварце равны $n_e = 1,55$, $n_o = 1,54$. Компенсатор помещен между двумя скрещенными николями. В каких местах компенсатора наблюдаются темные полосы?

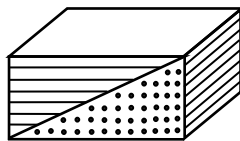


Рис. 14.2. Компенсатор Бабинэ.

14.46. Вторые темные полосы (т.е. две полосы, из которых одной соответствует вносимая компенсатором разность хода $+2\lambda$, а другой -2λ) для натриевого света ($\lambda_{\text{Na}} = 589,3$ нм) в компенсаторе Бабинэ (николи скрещены) располагаются на 7,34 и 27,20 делениях компенсатора. На каких делениях расположатся вторые темные полосы для света лития ($\lambda_{\text{Li}} = 670,8$ нм)?

14.47. Между параллельными николями помещена анизотропная пластинка ($\Delta n = 0,001$), вырезанная параллельно оптической оси и ориентированная под углом $\alpha = 45^\circ$ к главным направлениям николей. При какой минимальной толщине d_{min} пластинки излучение с длиной волны $\lambda_1 = 500$ нм будет иметь максимальную интенсивность, а излучение с длиной волны $\lambda_2 = 600$ нм будет сильно ослаблено?

14.48. Между двумя скрещенными поляризаторами установлена кристаллическая пластинка " $\lambda/4$ ". Как будет изменяться интенсивность света, вышедшего из второго поляризатора, при вращении пластинки вокруг направления луча, если на первый поляризатор падает естественный свет с интенсивностью I_0 ?

14.49. Почему тонкая двоякопреломляющая пластинка, помещенная между двумя николями, имеет цветную окраску?

14.50. Будет ли наблюдаться цветная окраска тонкой двоякопреломляющей пластинки, если плоскость пропускания анализатора совпадает с одним из главных направлений пластинки?

14.51. В каких случаях тонкая кристаллическая пластинка, помещенная между скрещенными николями, кажется темной в монохроматическом свете?

14.52. Монохроматический свет с правой круговой поляризацией с интенсивностью I_0 распространяется вдоль оси Z . На его пути последовательно находятся следующие элементы, оптические оси которых располагаются под указанными углами к горизонтальной оси X : поляризатор ($\alpha_1 = 30^\circ$), пластинка $\lambda/2$ ($\alpha_2 = 60^\circ$), пластинка $\lambda/4$ ($\alpha_3 = 45^\circ$). Найти интенсивность света после прохождения всех элементов и определить состояние его поляризации.

14.53. Линейно поляризованный вдоль вертикальной оси Y свет с интенсивностью I_0 распространяется вдоль оси Z . На его пути последовательно находятся следующие элементы, оптические оси которых располагаются под указанными углами к горизонтальной оси X : поляризатор ($\alpha_1 = 45^\circ$), пластинка $\lambda/4$ ($\alpha_2 = 0^\circ$), пластинка $\lambda/2$ ($\alpha_3 = 30^\circ$). Найти интенсивность света после прохождения всех элементов и определить состояние его поляризации.

14.54. Свет с правой круговой поляризацией с интенсивностью I_0 распространяется вдоль оси Z . На его пути последовательно находятся следующие элементы, оптические оси которых располагаются под указанными углами к горизонтальной оси X : пластинка $\lambda/4$ ($\alpha_1 = 45^\circ$), поляризатор ($\alpha_2 = 30^\circ$), пластинка $\lambda/2$ ($\alpha_3 = 60^\circ$), поляризатор ($\alpha_4 = 45^\circ$). Найти интенсивность света после прохождения всех элементов и определить состояние его поляризации.

14.55. На пути плоской поляризованной по кругу световой волны с длиной волны λ и интенсивностью I_0 находится диск, вырезанный из идеального поляроида с показателем преломления n . Диск закрывает для точки наблюдения P одну зону Френеля. Какой должна быть толщина d диска, чтобы интенсивность света в точке P была максимальной? Определить эту интенсивность I_{\max} .

14.56. Круглое отверстие в непрозрачном экране открывает для точки наблюдения P одну зону Френеля. Отверстие закрывают идеальным поляроидом так, что направления колебаний вектора E в двух половинах зоны взаимно перпендикулярны. Отверстие освещается поляризованным по кругу светом с интенсивностью I_0 . Определить интенсивность I света в точке P и его поляризацию.

14.57. В непрозрачном экране, на который нормально падает плоская линейно поляризованная волна с интенсивностью I_0 , вырезано круглое отверстие размером в одну зону Френеля для некоторой точки наблюдения, лежащей на оси системы. В отверстие вставили пластинки $\lambda/4$ в форме полудисков, оптические оси которых взаимно перпендикулярны. Плоскость поляризации падающей волны составляет 45° с главными направлениями пластинок. Определить интенсивность I в точке наблюдения.

14.58. Параллельный пучок неполяризованного света падает на пластинку $\lambda/2$. Интенсивность света в некоторой точке наблюдения P за пластинкой равна I_0 . Из пластинки вырезают диск, закрывающий для точки P полторы зоны Френеля. Найти интенсивность I света в точке P после того, как диск повернули вокруг оси пучка на угол 90° .

14.59. В непрозрачном экране, на который нормально падает линейно поляризованная волна с интенсивностью I_0 , вырезано круглое отверстие размером в две зоны Френеля для некоторой точки наблюдения, лежащей на оси системы. Первая зона перекрыта пластинкой $\lambda/4$ в форме диска, а вторая – пластинкой $\lambda/4$ в форме кольца. Одноименные оси пластинок ориентированы взаимно перпендикулярно. Главные направления пластинок в обоих случаях составляют угол 45° с направлением колебаний вектора \mathbf{E} в падающей волне. Определить интенсивность света в точке наблюдения.

14.60. Определить разность показателей преломления Δn для поляризованного по правому и левому кругам света с длиной волны $\lambda = 589,3$ нм в кварце, если постоянная вращения плоскости поляризации в кварце для этой длины волны равна $\alpha = 21,7$ град/мм.

14.61. Какую минимальную разность показателей преломления Δn право- и левополяризованных по кругу волн ($\lambda = 589,3$ нм) можно обнаружить при слое вещества $h = 30$ см, если измерять угол поворота плоскости поляризации с точностью до $\Delta\varphi = 1^\circ$?

§15. Тепловое излучение

- Тепловое излучение – электромагнитное излучение, испускаемое веществом за счет его внутренней энергии.

- Поглощательная способность тела α :

$$\alpha(\nu, T) = \frac{P_{\text{погл}}}{P_{\text{пад}}},$$

где $P_{\text{погл}}$ – мощность излучения, поглощенного телом, $P_{\text{пад}}$ – мощность падающего на тело излучения, ν – частота излучения, T – температура тела.

$$0 \leq \alpha \leq 1.$$

- Абсолютно черное тело – такое тело, у которого $\alpha(\nu, T) = 1$ для любых частот и температур.

- Излучательная (испускательная) способность тела ε :

$$\varepsilon(\nu, T) = \frac{dP_{\text{изл}}}{dS d\nu},$$

где $dP_{\text{изл}}$ – мощность излучения с поверхности площадью dS в интервале частот $(\nu, \nu + d\nu)$.

- Энергетическая светимость тела M_s :

$$M_s = \frac{dP_{\text{изл}}}{dS} = \int_0^{\infty} \varepsilon(\nu, T) d\nu.$$

- Связь энергетической светимости тела с объемной плотностью энергии теплового излучения u :

$$M_s = \frac{c}{4} u,$$

где $u = \frac{dW}{dV}$, dW – энергия теплового излучения в объеме dV , c – скорость света.

- *Закон Кирхгофа*: в состоянии теплового равновесия отношение излучательной способности тела α к его поглощательной способности ε одинаково для всех тел и является универсальной функцией частоты излучения ν (или длины волны λ) и температуры тела T :

$$\frac{\varepsilon(\nu, T)}{\alpha(\nu, T)} = \rho(\nu, T) = \text{inv}.$$

$\rho(\nu, T)$ называется *излучательной способностью абсолютно черного тела*.

- Закон смещения Вина:

$$T\lambda_{\max} = b ,$$

где λ_{\max} – длина волны излучения с максимальной интенсивностью,

$$b = \frac{hc}{4,965 k} \cong 0,0029 \text{ м}\cdot\text{К} - \text{постоянная Вина.}$$

- Спектральная плотность равновесного теплового излучения (спектральная плотность излучения абсолютно черного тела) $u(\omega, T)$:

$$u(\omega, T) = \frac{dW}{Vd\omega} ,$$

где dW – энергия теплового излучения в объеме V и полосе частот $(\omega, \omega + d\omega)$.

- Выражение объемной плотности энергии теплового излучения u через спектральную плотность равновесного теплового излучения $u(\omega, T)$:

$$u = \frac{dW}{dV} = \int_0^{\infty} u(\omega, T) d\omega .$$

- Связь излучательной способности абсолютно черного тела $\rho(\omega, T)$ со спектральной плотностью равновесного теплового излучения $u(\omega, T)$:

$$\rho(\omega, T) = \frac{c}{4} u(\omega, T) .$$

- Закон Стефана–Больцмана:

$$M_s = \sigma T^4 ,$$

где M_s – энергетическая светимость *абсолютно черного тела*, σ – постоянная Стефана–Больцмана.

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60c^2 \hbar^3} = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 \hbar^3} \cong 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4} ,$$

где k – постоянная Больцмана, \hbar – постоянная Планка.

В другой форме закон Стефана–Больцмана имеет вид:

$$u = aT^4 ,$$

где $a = \frac{4\sigma}{c} = \frac{\pi^2 k^4}{15c^3 \hbar^3} = 7,56 \cdot 10^{-16} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \text{К}^4}$.

- Формула Планка:

$$u(\omega, T) = \frac{1}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\hbar \omega^3}{e^{\hbar \omega / kT} - 1}.$$

- Формула Рэлея – Джинса:

$$u(\omega, T) = \frac{kT \omega^2}{\pi^2 c^3}.$$

15.1. В спектре звезды Сириус максимум интенсивности излучения приходится на длину волны $\lambda_{\max} = 290$ нм. Определить температуру поверхности Сириуса.

15.2. При нагревании абсолютно черного тела длина волны излучения с максимальной интенсивностью уменьшилась в 2 раза. Во сколько раз изменилась температура тела?

15.3. Температура одного абсолютно черного тела $T_1 = 2500$ К. Найти температуру другого абсолютно черного тела, если для этих тел длины волн излучения с максимальной интенсивностью отличаются на $\Delta\lambda = 500$ нм ($\lambda_{\max 1} < \lambda_{\max 2}$).

15.4. Принимая, что Солнце излучает как абсолютно черное тело, вычислить его энергетическую светимость и температуру поверхности. Солнечный диск виден с Земли под углом $\theta = 32' = 9,3 \cdot 10^{-3}$ рад. Поток солнечной энергии на земной орбите (так называемая солнечная постоянная) равен $C = 1,4$ кВт/м². Найти длину волны, на которую приходится максимум энергии солнечного излучения.

15.5. Вычислить величину солнечной постоянной C (поток солнечной энергии на орбите Земли), считая, что Солнце излучает как абсолютно черное тело. Радиус Солнца $r = 7 \cdot 10^5$ км, радиус земной орбиты $R = 1,4 \cdot 10^8$ км, температура поверхности Солнца $T = 5700$ К.

15.6. Абсолютно черное тело в форме шара радиусом $r = 15$ см поддерживается при постоянной температуре. Мощность теплового излучения тела составляет $P = 1,4$ кВт. Определить температуру T тела.

15.7. До какой температуры солнечный свет может нагреть некоторое абсолютно черное тело на поверхности Земли? Считать, что интенсивность солнечного света около поверхности Земли равна $I_c = 1,0$ кВт/м².

15.8. Температура поверхности Солнца $T_0 = 5700$ К, радиус Солнца $r_c = 7 \cdot 10^5$ км, средний радиус земной орбиты $R = 1,4 \cdot 10^8$ км. Считая, что поглощательные способности Солнца и Земли равны единице и что Земля находится в состоянии теплового равновесия, оценить её среднюю температуру T_3 .

15.9. Мощность излучения абсолютно черного тела с площадью поверхности $S = 1$ м² равна $P = 100$ кВт. Определить температуру этого тела.

15.10. Найти мощность P излучения абсолютно черного тела площадью $S = 1 \text{ м}^2$; если длина волны с максимальной интенсивностью излучения составляет $\lambda_{\text{max}} = 600 \text{ нм}$?

15.11. Мощность излучения абсолютно черного тела равна $P = 10^8 \text{ Вт}$, а длина волны с максимальной интенсивностью составляет $\lambda_{\text{max}} = 600 \text{ нм}$. Определить площадь S поверхности тела.

15.12. Поток тепловой энергии, излучаемой раскаленной до температуры $T = 2600 \text{ К}$ поверхностью, составляет $I = 130 \text{ Вт/см}^2$. Найти отношение энергетических светимостей этой поверхности и абсолютно черного тела с такой же температурой.

15.13. При нагревании абсолютно черного тела максимум интенсивности его излучения сместился с длины волны $\lambda_{\text{max1}} = 600 \text{ нм}$ на длину волны $\lambda_{\text{max2}} = 500 \text{ нм}$. Как изменилась мощность теплового излучения тела?

15.14. Три одинаковые абсолютно черные плоскости расположены параллельно друг другу. Внутреннюю плоскость поддерживают при температуре T . Найти установившуюся температуру T_x внешних плоскостей.

15.15. Имеются три одинаковые параллельные друг другу абсолютно черные плоскости. Внешние плоскости поддерживаются при температурах T и $2T$ соответственно. Найти установившуюся температуру T_x внутренней плоскости.

15.16. Получить с помощью формулы Планка приближенные выражения для спектральной плотности равновесного теплового излучения $u(\omega, T)$ в области, где:

а) $h\omega \ll kT$ (формула Рэлея–Джинса);

б) $h\omega \gg kT$ (формула Вина).

15.17. Пользуясь формулой Планка, определить постоянную σ в законе Стефана–Больцмана для энергетической светимости абсолютно черного тела: $M_{\text{э}} = \sigma T^4$.

15.18. Преобразовать формулу Планка для $u(\omega, T)$, записанную для переменной ω , к переменной ν (линейная частота).

15.19. Используя формулу Планка для $u(\omega, T)$, записанную для переменной ω , получить выражения для спектральной плотности излучения $u(\lambda, T)$ и излучательной способности $\rho(\lambda, T)$ абсолютно черного тела в зависимости от длины волны λ .

15.20. Исходя из формулы для излучательной способности $\rho(\lambda, T)$ абсолютно черного тела в зависимости от длины волны λ , определенной в задаче 15.19, получить закон смещения Вина.

15.21. Определить зависимость от температуры T максимума объемной спектральной плотности $u(\lambda, T)$ равновесного теплового излучения.

15.22. Найти с помощью формулы Планка мощность излучения поверхности абсолютно черного тела, приходящуюся на единицу площади и малый интервал длин волн $\Delta\lambda = 1,0$ нм вблизи максимума спектральной плотности излучения, считая температуру тела равной $T = 3000$ К.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

§1. Геометрическая оптика и простые оптические системы

1.1. $L = h \cdot \operatorname{ctg}(\alpha/2) \approx 5,6 \text{ м}$ (см. рис. О.1.1.).

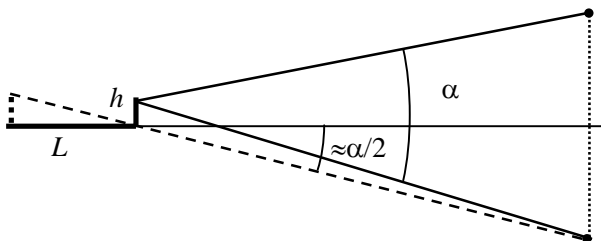


Рис. О.1.1.

1.2. а) $x = \frac{h_0}{2} = 0,9 \text{ м}$;

б) $x_с = h_0 - \frac{\Delta h}{2} = 1,75 \text{ м}$; $x_н = \frac{h_0 - \Delta h}{2} = 0,85 \text{ м}$;

в) человек ростом $h_1 < h_0$ не будет видеть нижнюю часть своего отражения размером $h_0 - h_1 = 0,3 \text{ м}$. Отметим, что результаты не зависят от расстояния L (см. рис. О.1.2).

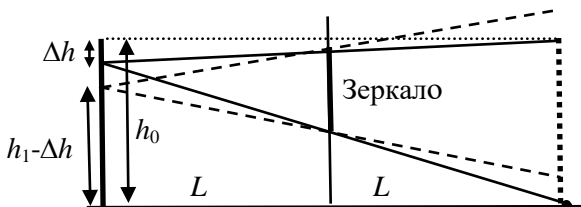


Рис. О.1.2.

1.3. а) $l = 2 \text{ м}$; б) $x = BF = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0,9 \text{ м}$; $BF \perp DF$; в) зеркало

надо повернуть на угол $\Delta\varphi \approx 8,5^\circ$ (см. рис. О.1.3).

Решение. Строим изображение A_1 точки A в плоском зеркале и проводим линию от A_1 через D (рис. О.1.3). Из рисунка видно, что:

а) $l = BE = 2 \text{ м}$; б) $x = BF = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0,9 \text{ м}$; $BF \perp DF$.

в). При вращении зеркала вокруг точки D изображение будет перемещаться по дуге окружности с центром в т. D и радиусом $DA = \sqrt{5}$ м (см. рис. О.1.3). Проводим прямую BD до пересечения с окружностью в точке G . При перемещении изображения из т. A_1 в т. G угол поворота $\angle GDA_1 \approx 17^\circ$, зеркало при этом поворачивается на вдвое меньший угол $\Delta\varphi \approx 8,5^\circ$.

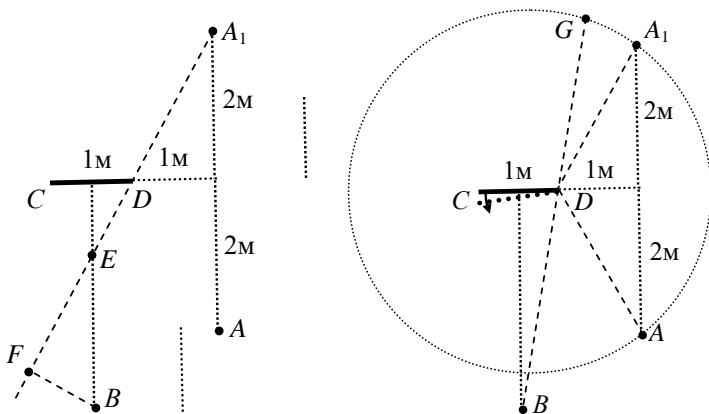


Рис. О.1.3.

1.4. $\alpha = \arccos \left(\frac{l^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2} \right) = \frac{\pi}{2}$.

1.5. а) $\alpha = 60^\circ$; б) $\alpha = 30^\circ$.

Решение. а). Луч возвращается к источнику, описав правильный треугольник (рис. О.1.5 а). Поэтому углы падения $\varphi = 30^\circ$, углы $\gamma = 60^\circ$, следовательно, угол между зеркалами $\alpha = 60^\circ$.

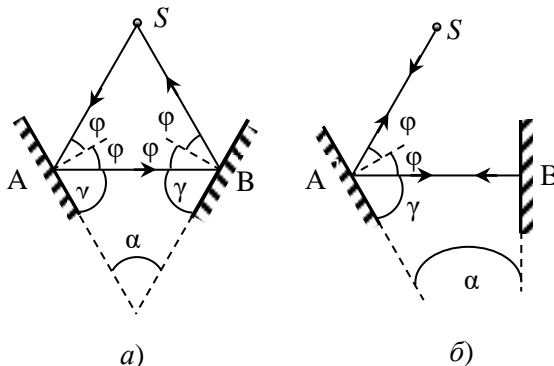


Рис. О.1.5.

б). Чтобы возвратиться к источнику по пройденному пути, луч должен упасть на второе зеркало перпендикулярно его поверхности (рис. О.1.5 б). Угол $\gamma = 60^\circ$, поэтому угол между зеркалами $\alpha = 30^\circ$.

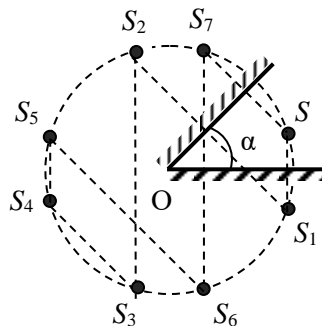
1.6. $\theta = 2\alpha$; θ не зависит от угла φ падения луча на зеркало.

1.7. $\psi = 0$.

Указание. Угол отклонения θ луча от первоначального направления после отражения от обоих зеркал не зависит от угла падения луча на зеркало (см. задачу 1.6).

1.8. $N = 2n - 1$.

Решение. Получаем изображения источника S , последовательно отражая его сначала в первом, потом во втором зеркале, пока система изображений не замкнется. Изображения расположатся на окружности с центром на ребре двугранного угла. Всего таких изображений будет $N = 2n - 1$. В качестве при-

Рис. О.1.8, $\varphi = \pi/4$.

мера на рис. О.1.8 показана система изображений источника для угла $\alpha = \pi/4$.

1.9. $N = a - 1$, если a – целое число; $N = 2k$, если a – не целое число и $a = 2k \pm \varepsilon$, где k – целое число, $\varepsilon < 1$.

Решение. Построим последовательно отражения источника S в обоих зеркалах. Они будут лежать на окружности с центром на ребре двугранного угла и радиусом OS (рис. О.1.9).

Если a – целое число, то последние i -тые изображения либо попадут в т. C и D , лежащие на продолжении зеркал (если a нечетное число), либо совпадут с точкой окружности, диаметрально противоположной источнику S (если a четное число, см. задачу 1.8).

В обоих случаях число изображений будет $N = a - 1$.

Если a – не целое число, например, $a = 2k \pm \varepsilon$, где k – целое число, $\varepsilon < 1$, то последние i -тые изображения будут лежать на дуге CFD , находящейся позади как первого, так и второго зеркала, поэтому дальнейших изображений не будет. Общее число изображений в этом случае будет равно $N = 2k$.

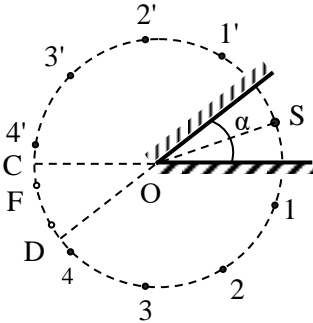


Рис. О.1.9.

1.10. См. рис. О.1.10.

Решение. Точка A в зеркале 1 даст изображение S_1 (рис. О.1.10), которое будет предметом для зеркала 2. Далее строим S_2 – изображение S_1 в зеркале 2, S_3 – изображение S_2 в зеркале 3.

По условию задачи луч должен последовательно отразиться от всех зеркал по одному разу и вернуться в точку A . Поэтому соединяем точки S_3 и A , эта прямая определит направление луча, отраженного зеркалом 3 в направлении точки A .

В точку D пересечения этой прямой с зеркалом 3 луч падает так, как будто он выхо-

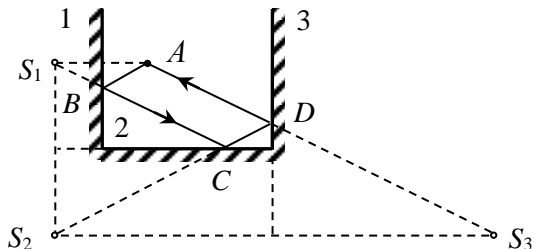


Рис. О.1.10.

дит из точки S_2 . Поэтому прямая S_2D определит направление луча, отраженного зеркалом 2 в направлении точки D .

Аналогично, в точку C пересечения этой прямой с зеркалом 2 луч падает так, как будто он выходит из точки S_1 . Прямая S_1C определит направление луча, отраженного зеркалом 1 в направлении точки C . Направляем луч из точки A в точку B пересечения прямой S_1C с зеркалом 1.

Ломаная линия $ABCD$ есть искомая траектория луча. Из геометрических соображений нетрудно убедиться, что в точках B , C и D выполняется закон отражения.

Приведенное решение не является единственным, так как первоначально луч не обязательно направлять на зеркало 1.

1.11. Ход решения задачи такой же, как в задаче 1.10.

1.12. См. решение.

Решение. Выберем систему координат XYZ так, чтобы каждая ось была перпендикулярна одному из зеркал. Пусть единичный вектор e_0 , задающий направление падающего луча, имеет координаты:

$$e_0 = e_x i + e_y j + e_z k .$$

После отражения от зеркала X соответствующая компонента вектора e_0 изменит свое направление на противоположное, а остальные останутся неизменными:

$$e_{0,x} = -e_x i + e_y j + e_z k .$$

Аналогичные изменения произойдут и при последующих отражениях. В результате вектор e_0 изменит свое направление на противоположное.

1.13. $\frac{a}{R} < 0,14$.

Решение. Ход луча показан на рис. О.1.13. $\angle EAC = \angle CAF$ по закону отражения, $\angle EAC = \angle ACF$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых, следовательно, $\triangle ACF$ равнобедрен-

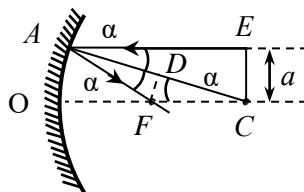


Рис. О.1.13.

ный. $OC = AC = R$, $FD \perp AC$ и $DC = R/2$.

$$\sin \alpha = \frac{EC}{AC} = \frac{a}{R}, \quad FC = \frac{CD}{\cos \alpha} = \frac{R}{2\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{R^2}{2\sqrt{R^2 - a^2}}.$$

По условию задачи $\frac{R/2 - OF}{R/2} < 0,01$, откуда $OF > 0,495 R$.

Значит, $FC < 0,505 R$, т.е. $\frac{R^2}{2\sqrt{R^2 - a^2}} < 0,505 R$, откуда получаем:

$$\left(\frac{a}{R}\right)^2 < 0,0198 \quad \text{и} \quad \frac{a}{R} < 0,14.$$

1.14. $s_1 s_2 = f^2$.

1.15. $\beta = y_2 / y_1 = b / a$.

Решение. Строим изображение предмета в сферическом зеркале (рис. О.1.15). Из подобия $\triangle ABF$ и $\triangle CDF$ следует:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{f}{b - f}.$$

Из формулы сферического зеркала

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad \text{определяем:} \quad a = \frac{bf}{b - f}.$$

Отсюда получаем: $\frac{y_2}{y_1} = \frac{b}{a}$.

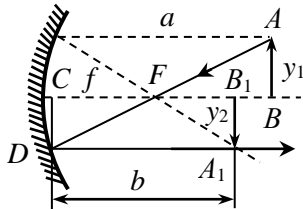


Рис. О.1.15.

1.16. $H = \frac{Rh}{2a - R} = 0,12 \text{ м}.$

1.17. $k_2 = \frac{1}{k_1} = 0,2.$

Решение. Пусть a и b – расстояния от полюса зеркала до предмета и изображения соответственно. Первоначальное увеличение $k_1 = y_2 / y_1 = b / a$, где y_2 и y_1 – поперечные размеры изображения и предмета. По формуле сферического зеркала

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Если предмет и его изображение переместились на расстояние x , то формула приобретает вид:

$$\frac{1}{a+x} + \frac{1}{b-x} = \frac{1}{f} = \frac{a+b}{ab}.$$

Из последнего уравнения находим: $x = b - a$, т.е. предмет и изображение поменялись местами.

$$\text{Новое увеличение } k_2 = \frac{b-x}{a+x} = \frac{a}{b} = \frac{1}{k_1} = 0,2.$$

1.18. $b = 2R / 3$.

Указание. Для построения хода лучей использовать побочную оптическую ось, проходящую через источник света.

1.19. См. рис. О.1.19.

Решение. Если бы источник света находился в т. E , то т. L являлась бы его отражением. Следовательно, любой луч, упавший на зеркало из т. E , после отражения пройдет через т. L .

Проведем побочную оптическую ось $EN \parallel BL$ и соединим точки N и L (рис. О.1.19). Используя свойство обратимости лучей, будем считать, что на зеркало падают параллельные лучи NE и BL , которые после отражения от зеркала сходятся в т. I , лежащей в фокальной плоскости зеркала. Опустив из т. I перпендикуляр на главную оптическую ось, находим положение фокуса F .

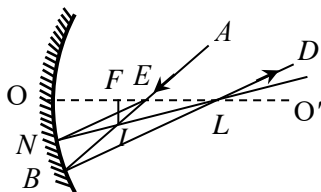


Рис. О.1.19.

1.20. Для построения воспользоваться свойством фокальной плоскости и дополнительным лучом, параллельным данному и проходящим через полюс зеркала.

1.21. См. рис. О.1.21.

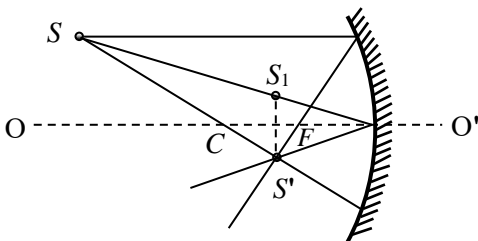


Рис. О.1.21.

На рис. О.1.21 S_1 – зеркальное изображение S' относительно оси OO' , C – центр сферической поверхности.

1.22. См. рис. О.1.22.

AB_1 – изображение стрелки.

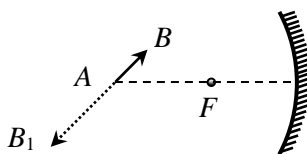


Рис. О.1.22.

1.23. $D = d \cdot \frac{2a + R}{R} = 6 \text{ см} .$

1.24. $f = \frac{l(a_1 + a_2) + \sqrt{l(a_2 - a_1) \cdot (4a_1a_2 - la_1 + la_2)}}{2(l + a_1 - a_2)} = 120 \text{ см} .$

1.25. $x = \frac{a^2}{2a - R} = 90 \text{ см} ;$ не изменится.

1.26. На расстоянии $x \approx 0,65 R$, не изменится.

Решение. Ход лучей схематично показан на рис. О.1.26. Обозначим через x расстояние от вогнутого зеркала до источника S , через $y > 0$ расстояние мнимого изображения S' , даваемого выпуклым зеркалом, от

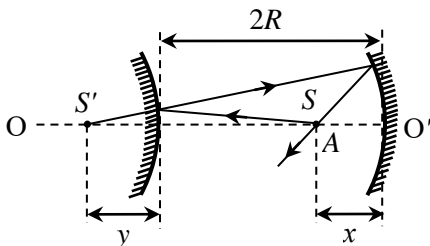


Рис. О.1.26.

этого зеркала. Применяя уравнение сферического зеркала (с учетом знаков: фокусное расстояние выпуклого зеркала $f_1 = R/2 < 0$, расстояние от зеркала до мнимого источника $b = -y < 0$), получаем:

$$\frac{1}{2R - x} - \frac{1}{y} = -\frac{2}{R}.$$

Изображение S' в выпуклом зеркале является источником для вогнутого зеркала. Запишем уравнение для вогнутого зеркала, учитывая, что отраженный луч должен попасть в точку A :

$$\frac{1}{2R + y} + \frac{1}{x} = \frac{2}{R}.$$

Решая полученную систему уравнений, находим x :

$$x = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} R \approx 0,65 R.$$

1.27. Зеркальная поверхность должна иметь форму параболоида вращения, задаваемого уравнением $y = \frac{1}{4f} x^2$.

Решение. Предположим, что параллельный пучок после отражения от поверхности СОА фокусируется в т. F (рис. О.1.27). Вследствие обратимости хода лучей сферическая волна из т. F после отражения от зеркала должна стать плоской. Для любого луча из т. F оптический путь до плоского волнового фронта (на рис. О.1.26 DFB) должен быть одним и тем же

$$FA + AB = FC + CD = FO + FO = 2f,$$

где f – фокусное расстояние зеркала.

Переходя к координатам (x, y) , запишем:

$$\sqrt{x^2 + (f - y)^2} + (f - y) = 2f.$$

После преобразований получаем уравнение параболоида вращения:

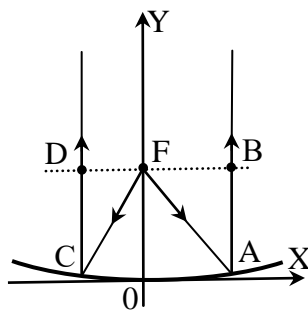


Рис. О.1.27.

$$y = \frac{1}{4f} x^2.$$

1.28. $h = H \cdot \frac{n^2 \cos^3 \varphi}{(n^2 - \sin^2 \varphi)^{3/2}} \approx 0,22 \text{ м}.$

Решение. На рис. О.1.28 изображен ход двух лучей, выходящих из воды под близкими углами φ и $\varphi+d\varphi$, на продолжении которых находится изображения S' камня S . Расстояние AB между точками выхода этих лучей из воды равно:

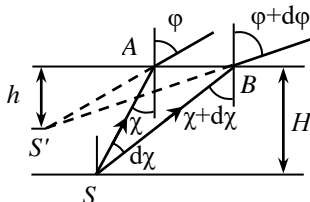


Рис. О.1.28

$$AB = H [\text{tg}(\chi + d\chi) - \text{tg}\chi] = h [\text{tg}(\varphi + d\varphi) - \text{tg}\varphi],$$

откуда
$$h = H \cdot \frac{d(\text{tg}\chi)}{d(\text{tg}\varphi)} = H \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \chi} \cdot \frac{d\chi}{d\varphi}.$$

Запишем закон преломления для границы воздух – вода:

$$1 \cdot \sin \varphi = n \sin \chi.$$

Взяв полный дифференциал от обеих частей равенства, получаем:

$$\cos \varphi d\varphi = n \cos \chi d\chi, \text{ откуда } \frac{d\chi}{d\varphi} = \frac{\cos \varphi}{n \cos \chi}.$$

Тогда

$$h = H \cdot \frac{\cos^3 \varphi}{n \cos^3 \chi} = H \cdot \frac{\cos^3 \varphi}{n \left(1 - \frac{\sin^2 \varphi}{n^2}\right)^{3/2}} = H \cdot \frac{n^2 \cos^3 \varphi}{(n^2 - \sin^2 \varphi)^{3/2}} \approx 0,22 \text{ м}.$$

Замечание. На самом деле изображение, полученное после преломления на поверхности воды, не является гомоцентрическим. Но поскольку в глаз попадают лучи с малым угловым раствором, изображение камня получается отчетливым.

1.29. $\beta = \arctg \left(\frac{n-1}{\text{tg}\alpha + n/\text{tg}\alpha} \right); \beta$ максимален при $\alpha = \arctg \sqrt{n}.$

$$1.30. R = r \left(1 + \frac{H}{\sqrt{n^2 h^2 + r^2 (n^2 - 1)}} \right);$$

$$R_{\max} = r + H / \sqrt{n^2 - 1} \approx 3,9 \text{ м при } h \rightarrow 0.$$

$$1.31. \varphi = i + \arcsin \{ n \sin [\theta - \arcsin(\sin i / n)] \} - \theta.$$

Решение. В соответствии с законом преломления луч, падающий на первую грань под углом i , после двукратного преломления выйдет из призмы под углом r' , отклонившись от первоначального направления на угол φ (рис. О.1.31).

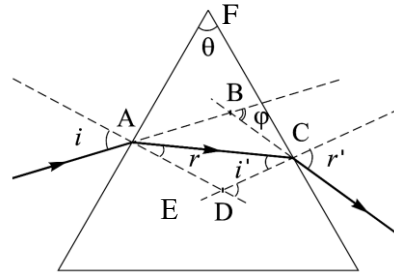


Рис. О.1.31.

$\angle ADE = r + i'$ как внешний угол $\triangle ACD$. Так как сумма внутренних углов четырехугольника $AFCD$ равна 2π , то

$$\theta + \pi / 2 + \pi / 2 + [\pi - (r + i')] = 2\pi,$$

откуда получаем:

$$i' + r = \theta.$$

Тогда $\angle ADC = \pi - (r + i') = \pi - \theta$.

Запишем для четырехугольника $ABCD$ равенство суммы углов 2π :

$$i + r' + (\pi - \varphi) + (\pi - \theta) = 2\pi,$$

откуда

$$\varphi = i + r' - \theta.$$

С учетом закона преломления

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n \quad \frac{\sin i'}{\sin r'} = \frac{1}{n}$$

и соотношения $i' + r = \theta$ получаем:

$$\varphi = i + \arcsin \{ n \sin [\theta - \arcsin(\sin i / n)] \} - \theta.$$

$$1.32. \theta = \alpha + \gamma - \varphi = \pi / 4.$$

1.33. Минимальный угол отклонения луча призмой будет при условии: $i = r'$ (см. рис. О.1.26); $\sin \frac{\varphi_{\min} + \theta}{2} = n \cdot \sin \frac{\theta}{2}$.

Решение. Перепишем формулу для угла отклонения луча, полученную в задаче 1.31, используя угол преломления r луча в призме (см. рис. О.1.31):

$$\varphi = \arcsin(n \sin r) + \arcsin[n \sin(\theta - r)] - \theta.$$

Продифференцируем φ по r и приравняем производную нулю в точке наименьшего значения φ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{n \cos r}{\sqrt{1 - (n \sin r)^2}} - \frac{n \cos(\theta - r)}{\sqrt{1 - [n \sin(\theta - r)]^2}} = 0.$$

Данное соотношение выполняется при условии:

$$\theta - r = r.$$

Поскольку $i' = \theta - r$ (см. решение задачи 1.31), то

$$i = r'.$$

Если призма равнобедренная, полученное условие означает, что внутри призмы преломленный луч АС идет *параллельно основанию призмы*.

Используя соотношение $\varphi = i + r' - \theta$, получим: $i = \frac{\varphi_{\min} + \theta}{2}$.

Записав закон преломления для передней грани призмы, находим соотношение, связывающее φ_{\min} с углом θ :

$$\sin \frac{\varphi_{\min} + \theta}{2} = n \cdot \sin \frac{\theta}{2}.$$

1.34. $59^\circ \leq \varphi \leq 80^\circ$.

Решение. Используем рис. О.1.31. Применяя закон преломления $\sin i = n \sin r$ для передней грани призмы, получаем:

$$n \sin r \leq 1.$$

Угол выхода луча из призмы должен быть меньше угла полного внутреннего отражения, откуда:

$$\sin(\theta - r) \leq 1/n.$$

Подставляя $\theta = 60^\circ$ и $n = 1,8$, получаем: $26,3^\circ \leq r \leq 33,7^\circ$.

Используя формулу для угла отклонения луча призмой

$$\varphi = \arcsin(n \sin r) + \arcsin[n \sin(\theta - r)] - \theta$$

(см. задачу 1.33), находим для $r = 26,3^\circ$ и $r = 33,7^\circ$ $\varphi_{\max} \approx 80^\circ$.

Минимальный угол отклонения луча φ_{\min} получается, когда преломленный луч идет параллельно основанию призмы, т.е. при $r = 30^\circ$. Проведя расчеты аналогично предыдущим, находим: $\varphi_{\min} \approx 59^\circ$.

Таким образом, угол отклонения луча может изменяться в пределах от 59° до 80° .

1.35. $\theta = 2 \arccos(n/2) \approx 81^\circ$.

1.36. $\sqrt{2} < n < 2$.

1.37. $\theta_{\min} = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{n^2 - 1}}{n^2}\right) = 77^\circ 20'$.

Решение. Из закона преломления на первой грани $\frac{\sin \pi/2}{\sin \beta} = n$ следует:

$\sin \beta = 1/n$, т.е. β – угол полного внутреннего отражения. Для полного отражения на второй грани должно быть $\delta \geq \beta$.

Так как $\theta = \beta + \delta$ (см. решение задачи 1.31), то минимальный преломляющий угол призмы $\theta_{\min} = 2\beta$. Следовательно,

$$\sin \theta_{\min} = \sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta = \frac{2\sqrt{n^2 - 1}}{n^2};$$

$$\theta_{\min} = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{n^2 - 1}}{n^2}\right) = 77^\circ 20'.$$

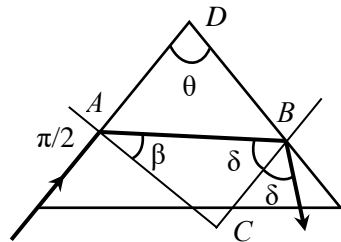


Рис. О.1.37.

1.38. $\alpha \leq \arcsin \left(\sin \theta \sqrt{n^2 - 1} - \cos \theta \right) \approx 48^\circ$.

1.39. $\theta = 36^\circ$.

1.40. $x = d \sin \varphi \cdot \left(1 - \frac{\cos \varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} \right)$; максимальное смещение $x_{\max} \rightarrow d$ при $\varphi \rightarrow 90^\circ$.

1.41. $n > \sqrt{2}$.

Решение. От монеты лучи идут по всем возможным направлениям, тогда максимальный угол преломления лучей в жидкости φ_{\max} находится из условия $\sin \varphi_{\max} = \frac{1}{n}$. Вследствие перпендикулярности дна и стенок стакана минимальный угол падения ψ_{\min} на стенку равен $\psi_{\min} = \frac{\pi}{2} - \varphi_{\max}$. Луч не выйдет через боковую стенку, если $n \cdot \sin \psi_{\min} > 1$.

Отсюда получаем: $n \cdot \sin \psi_{\min} = n \cdot \cos \varphi_{\min} = \sqrt{n^2 - 1} > 1$;
 $n > \sqrt{2}$.

1.42. Нельзя.

Решение. Чтобы увидеть свет от предмета через две смежные грани кубика (рис. О.1.42), нужно, чтобы луч, вошедший через одну грань, не испытал полного внутреннего отражения на другой грани. Применим последовательно закон преломления к двум граням кубика, учтя, что $\sin \gamma = \cos \beta$:

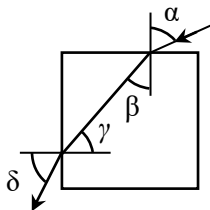


Рис. О.1.42.

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \quad \frac{\cos \beta}{\sin \delta} = \frac{1}{n},$$

откуда следует, что

$$\sin \delta = \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}.$$

Поскольку $\sin \delta \leq 1$, $n^2 \leq 1 + \sin^2 \alpha$, следовательно, предельное значение n^2 , при котором свет может выйти через две смежные грани кубика, равно 2.

Для стекла $n = 1,5$, $n^2 = 2,25 > 2$, т.е. увидеть что-либо через две смежные грани стеклянного кубика невозможно.

$$1.43. R = d \cdot \frac{n}{n-1}.$$

Решение. Наибольшие шансы выйти из световода имеет луч, входящий в него у внутреннего радиуса (самый малый угол падения). Если этот луч не выйдет при первом касании внешнего радиуса световода, то при дальнейших отражениях угол падения только увеличивается (рис. О.1.43), что сделает невозможным выход луча через внешнюю поверхность. Таким образом, для достижения полного внутреннего отражения угол α должен удовлетворять условию:

$$\sin \alpha = 1/n.$$

Кроме того, из рис. О.1.43 видно, что $\sin \alpha = \frac{R-d}{R}$. Из этих двух равенств находим:

$$R = d \cdot \frac{n}{n-1}.$$

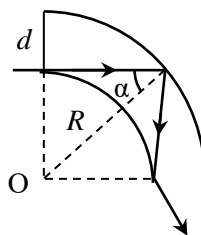


Рис. О.1.43.

$$1.44. a_1 = 5f, b_1 = 1,25f; a_2 = 1,25f, b_2 = 5f.$$

Указание. Записать уравнение тонкой линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ и условие $a + b = l$.

$$1.45. h = \sqrt{H_1 H_2}.$$

$$1.46. l_{\min} = 4f.$$

Решение. Обозначим $a + b = l$, где a и b – расстояния от линзы до предмета и изображения. Из формулы линзы $f = \frac{ab}{a + b}$. Учти-

тывая, что $\sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}$, получаем:

$$l = \frac{ab}{f} \leq \frac{(a + b)^2}{4f} = \frac{l^2}{4f}, \text{ откуда } l \geq 4f,$$

следовательно, $l_{\min} = 4f$. При этом $a = b = 2f$.

$$1.47. f = \frac{l^2 - d^2}{4l}.$$

$$1.48. f = \frac{l \sqrt{n}}{(\sqrt{n} + 1)^2} = 0,2 \text{ м}.$$

$$1.49. S = ad / (a - f) = 6 \text{ см}.$$

1.50 – 1.53. Использовать побочную оптическую ось.

1.54. Линза находится в точке пересечения оптической оси и линии SS' .

1.55. См. рис. О.1.55.

Решение. Продолжив данные лучи до их пересечения, получим изображение S' источника света. Соединим точку S' с оптическим центром линзы C . Луч BF после преломления идет через фокус, значит, до линзы он шёл параллельно главной оптической оси. Проводим $SB \parallel OO'$. Точка S лежит на пересечении CS' и BS .

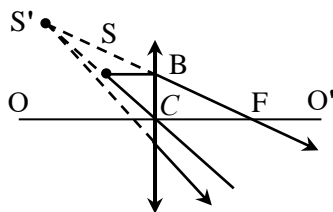


Рис. О.1.55.

$$1.56. b = f_2 \frac{d(a - f_1) - af_1}{(d - f_2)(a - f_1) - af_1} = 2 \text{ м},$$

$$L = \frac{f_1 f_2 l}{(d - f_2)(a - f_1) - af_1} = 32 \text{ см}.$$

Указание. Изображение, даваемое первой линзой, служит предметом для второй линзы.

1.57. Если собирающая линза находится перед рассеивающей, $d_1 = f_2 - \frac{f_1 l}{f_1 + l} = 3,5 \text{ см}$;

если собирающая линза находится после рассеивающей, $d_2 = \frac{l - f_1}{2} \pm \frac{l + f_1}{2} \sqrt{1 - \frac{4f_2}{l + f_1}}$, $d_2 = 35 \text{ см}$ или $d'_2 = 5 \text{ см}$.

Решение. Резкое изображение удаленных предметов можно получить при двух положениях собирающей линзы: перед рассеивающей и после неё относительно луча, идущего от предмета.

В первом случае (рис. О.1.57 а) т. K — мнимое изображение т. A в рассеивающей линзе. Применяем формулу тонкой линзы:

$$-\frac{1}{f_2 - d_1} + \frac{1}{l} = -\frac{1}{f_1}.$$

Луч MN , идущий от удаленного источника, параллелен главной оптической оси, поэтому получаем:

$$d_1 = f_2 - \frac{f_1 l}{f_1 + l} = 3,5 \text{ см}.$$

Во втором случае (рис. О.1.57 б) т. A является изображением т. K в соби-

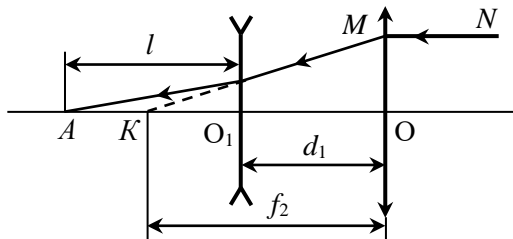


Рис. О.1.57 а).

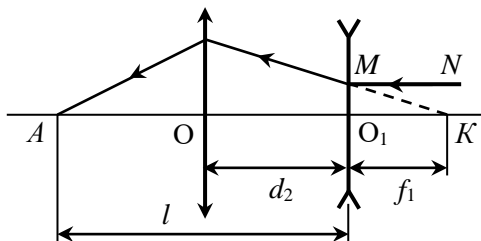


Рис. О.1.57 б).

рающей линзе. Применяя формулу тонкой линзы

$$\frac{1}{f_1 + d_2} + \frac{1}{l - d_2} = \frac{1}{f_2},$$

находим:

$$d_2 = \frac{l - f_1}{2} \pm \frac{l + f_1}{2} \sqrt{1 - \frac{4f_2}{l + f_1}}.$$

Подставляя численные данные, получаем, что расстояние между линзами может быть $d_2 = 35$ см или $d'_2 = 5$ см.

$$1.58. a = f_3 - \frac{f_2(d - f_1)}{f_2 + d - f_1} = 6 \text{ см}.$$

$$1.59. a) k = \frac{f_{об}(d_0 + f_{ок})}{(a - f_{об})f_{ок}} = 180; б) k = \frac{f_{об}d_0}{(a - f_{об})f_{ок}} = 150.$$

Решение. Запишем формулу тонкой линзы для объектива микроскопа:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_{об}}, \text{ где } b - \text{ расстояние от изображения до объектива,}$$

откуда находим коэффициент увеличения k_1 объектива:

$$k_1 = \frac{b}{a} = \frac{f_{об}}{a - f_{об}}.$$

а). Изображение, даваемое объективом, рассматривается через окуляр как через лупу, причем мнимое изображение, даваемое окуляром, находится от глаза на расстоянии наилучшего зрения d_0 .

Применяя формулу тонкой линзы для окуляра: $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{d_0} = \frac{1}{f_{ок}}$, где

a_1 – расстояние изображения, даваемого объективом, до окуляра, находим коэффициент увеличения k_2 окуляра:

$$k_2 = \frac{d_0}{a_1} = \frac{d_0 + f_{ок}}{f_{ок}}.$$

Полный коэффициент увеличения k микроскопа равен:

$$k = k_1 k_2 = \frac{f_{об}(d_0 + f_{ок})}{(a - f_{об})f_{ок}} = 180.$$

б). Во втором случае $k_2 = \frac{d_0}{f_{\text{ок}}}$ и $k = k_1 k_2 = \frac{f_{\text{об}} d_0}{(a - f_{\text{об}}) f_{\text{ок}}} = 150$.

1.60. $a = f_1 + \frac{(f_2 + d_0) f_1^2}{(d - f_1) \cdot (f_2 + d_0) - f_2 d_0} = 1,06 \text{ см}$.

1.61. $f_3 = \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2} f_1 = 36 \text{ см}$, $f_4 = \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2} f_2 = 4 \text{ см}$.

1.62. На $l = \frac{f^2}{d - f} = 1 \text{ см}$ дальше от объектива.

1.63. $f_1 = \frac{n - 1}{n/n_1 - 1} f = 90 \text{ см}$.

1.64. $n_2 = \frac{f \Phi n_1}{f \Phi + 1 - n_1} \approx 1,67$.

1.65. $f' = \frac{2n f_1 f_2}{f_2 + n f_1} = \frac{8 f_1 f_2}{4 f_1 + 3 f_2}$; $f'' = \frac{2 f_1 f_2}{f_2 + n f_1} = \frac{6 f_1 f_2}{4 f_1 + 3 f_2}$.

Решение. Фокусные расстояния f_1 и f_2 линзы в воздухе и воде соответственно определяются из формулы линзы:

$$\frac{1}{f_1} = (n_c - 1) \cdot \frac{2}{R}, \quad \frac{1}{f_2} = \left(\frac{n_c}{n} - 1 \right) \cdot \frac{2}{R},$$

где R – радиус кривизны поверхностей линзы, n_c – показатель преломления стекла.

Когда линза находится на границе раздела воздуха и воды, а лучи света идут из воздуха в воду, фокус линзы расположен в воде на расстоянии f' , определяемом из соотношения:

$$\frac{n}{f'} = \frac{n_c - n}{R} + \frac{n_c - 1}{R}.$$

Когда лучи света идут из воды в воздух, фокус линзы находится в воздухе на расстоянии f'' от линзы, причем

$$\frac{1}{f''} = \frac{n_c - n}{R} + \frac{n_c - 1}{R}.$$

Из записанных четырех уравнений находим:

$$f' = \frac{2nf_1f_2}{f_2 + nf_1} = \frac{8f_1f_2}{4f_1 + 3f_2}; \quad f'' = \frac{2f_1f_2}{f_2 + nf_1} = \frac{6f_1f_2}{4f_1 + 3f_2}.$$

1.66. $b = \frac{aR}{nR - a(n - 1)}$; $k_{\max} = \frac{n}{2 - n} = 2$ при $a = 2R$.

Решение. Воспользуемся инвариантом Аббе для сферической поверхности раздела двух прозрачных сред, учитывая, что изображение рыбки является мнимым и радиус преломляющей поверхности отсчитывается

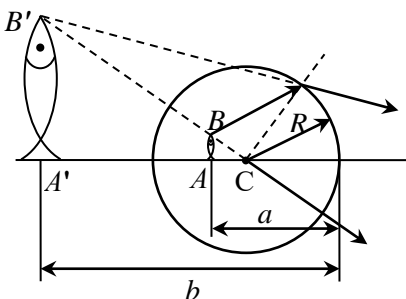


Рис. О.1.66.

против хода луча, поэтому в формуле взят со знаком "минус":

$$\frac{n}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1 - n}{-R} = \frac{n - 1}{R},$$

где $b > 0$ (рис. О.1.66).

Отсюда получаем:

$$b = \frac{aR}{nR - a(n - 1)}.$$

Видно, что если рыбка находится ближе к передней стенке аквариума ($a < R$), то ее изображение находится перед рыбкой, если рыбка плавает ближе к задней стенке ($a > R$), то ее изображение находится за рыбкой. Если рыбка находится точно в центре аквариума ($a = R$), то ее изображение находится в том же месте, что и сама рыбка ($b = a$). Если рыбка находится точно у передней стенки ($a = 0$), то изображение тоже совмещено с самой рыбкой ($b = 0$).

Рассчитаем увеличение k рыбки. Так как точки B' , B и центр аквариума C находятся на одной прямой (луч этого направления не испытывает преломления), то из подобия $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C$ следует:

$$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{b - R}{a - R} = \frac{nR}{nR - a(n - 1)}.$$

Из полученной формулы видно, что если рыбка находится у передней стенки аквариума ($a = 0$), то увеличение $k = 1$ (видим рыбку такой же величины и в том же месте). Если рыбка находится в центре аквариума ($a = R$), то $k = n$ (видим рыбку в том же месте, но увеличенную в n раз). Самое большое увеличение наблюдается, если рыбка плавает у задней стенки аквариума ($a = 2R$):

$$k_{\max} = \frac{n}{2 - n}.$$

Подставляя $n = 4/3$, находим: $k_{\max} = 2$. При этом изображение рыбки находится на расстоянии $b = 3R$ от передней стенки аквариума (а сама рыбка – на расстоянии $2R$ от этой стенки).

1.67. $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - d\Phi_1\Phi_2$.

Решение. Проведем построение для двух собирающих тонких

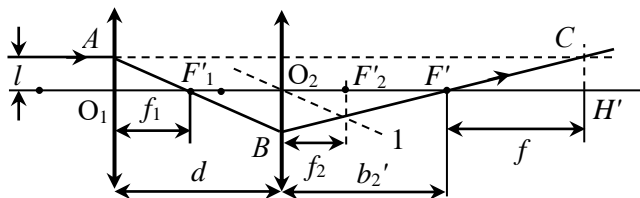


Рис. О.1.67.

линз (рис. О.1.67). Поскольку линзы находятся в воздухе, передние и задние фокусные расстояния для каждой из линз и для системы в целом одинаковы, поэтому будем обозначать их f_1 , f_2 и f соответственно. Направим луч параллельно главной оптической оси, далее строим его ход через линзы, используя побочную оптическую ось 1 второй линзы. Задний фокус всей системы находится в точке F' , CH' – задняя главная плоскость всей системы. По определению $F'H' \equiv f$ – заднее фокусное расстояние системы линз.

Из подобия $\triangle AO_1F'_1$ и $\triangle F'_1O_2B$ следует, что

$$\frac{AO_1}{BO_2} = \frac{f_1}{d - f_1}.$$

Для второй линзы т. F'_1 является предметом, а т. F' – его изображением. Записывая формулу линзы, получаем:

$$\frac{1}{b_2} + \frac{1}{d - f_1} = \frac{1}{f_2}, \text{ откуда } b_2 = \frac{f_2(d - f_1)}{d - f_1 - f_2}.$$

Из подобия $\triangle O_2BF'$ и $\triangle F'CH'$ следует:

$$\frac{CH'}{BO_2} = \frac{f}{b_2} = \frac{f(d - f_1 - f_2)}{f_2(d - f_1)}.$$

Поскольку $AO_1 = CH'$, получаем соотношение:

$$\frac{f(d - f_1 - f_2)}{f_2(d - f_1)} = \frac{f_1}{d - f_1}, \text{ откуда } \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}.$$

В воздухе оптическая сила линз $\Phi = 1/f$, поэтому формулу можно переписать в виде:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - d\Phi_1\Phi_2.$$

Замечание. Если между линзами находится среда с показателем преломления n , а до и после системы линз среда однородна, то выведенная формула приобретает вид:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n}\Phi_1\Phi_2.$$

$$\mathbf{1.68.} \quad f_1 = f_{02}, \quad f_2 = \frac{f_{01}f_{02}}{f_{01} + f_{02}}, \quad f_3 = f_{01}.$$

Указание. Все линзы, сложенные вместе, образуют плоскопараллельную пластинку, у которой оптическая сила Φ равна нулю.

$$\mathbf{1.69.} \quad \text{Экран нужно отодвинуть от второй линзы на } x = l - \frac{f_1 f_2 a}{(f_1 + f_2)a - f_1 f_2} + \frac{f_2 [f_1(a + l) - al]}{f_1(a + l - f_2) + a(f_2 - l)} = 4,5 \text{ см.}$$

$$\mathbf{1.70.} \quad b_2 = \frac{a_1 f}{f + 2a_1}.$$

Решение. Пусть источник света находится в точке A . Рассмотрим произвольный луч AB , падающий на линзу (рис. О.1.70). Его дальнейший ход можно найти с помощью побочной оптической оси 1. Изображение т. A в линзе мнимое и находится в т. A_1 . Его расстояние b_1 находим по формуле тонкой линзы:

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1} = -\frac{1}{f}, \text{ откуда } b_1 = \frac{a_1 f}{f + a_1}.$$

Пройдя линзу, луч отразится от зеркала и пойдет так, как если бы он выходил из т. A_2 , являющейся изображением т. A_1 в плоском зеркале, т.е. $a_2 = b_1$.

Отраженный от зеркала луч преломится в линзе и пойдет так, как если бы он выходил из т. A_3 , которая и является изображением т. A . Ход этого луча строим с помощью побочной оси 2. Чтобы найти расстояние b_2 от т. A_3 до линзы, запишем уравнение тонкой рассеивающей линзы, рассматривая промежуточное изображение A_2 в зеркале как действительный предмет для линзы:

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{b_2} = -\frac{1}{f}, \text{ откуда } b_2 = \frac{a_2 f}{a_2 + f} = \frac{a_1 f}{f + 2a_1}.$$

Замечание. Можно сначала вычислить фокусное расстояние f системы, состоящей из рассеивающей линзы, плоского зеркала и снова рассеивающей линзы (луч проходит линзу дважды), а потом записать формулу:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

где a и b – расстояния от системы до источника света и его изображения соответственно.

$$\mathbf{1.71.} \quad f = \frac{R_1 R_2}{2(n-1)R_1 + 2nR_2}.$$

Указание. См. решение задачи 1.70.

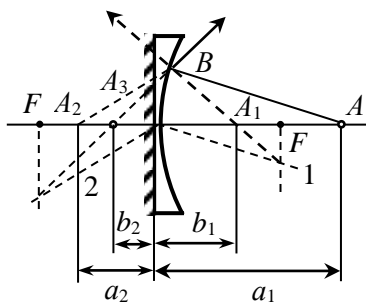


Рис. О.1.70.

1.72. $f_2 = f_1 \frac{n-1}{n}$.

1.73. $R = \frac{2(n-1)b_1b_2}{b_1 - b_2} = 72 \text{ см}$, $a = \frac{(n-1)b_1b_2}{b_1 - nb_2} = 108 \text{ см}$.

Указание. Так как вода не покрывает всю отражающую поверхность зеркала, то свое изображение формируют периферийные участки зеркала, не покрытые водой, и центральная часть зеркала с водой, представляющая собой сложную оптическую систему из зеркала и тонкой плоско-выпуклой водяной линзы.

1.74. $x_H = \frac{d}{n} \cdot \frac{\Phi_2}{\Phi}$, $x_{H'} = -\frac{d}{n} \cdot \frac{\Phi_1}{\Phi}$.

Решение. Выполним построение для нахождения заднего фокуса F' и задней главной плоскости H' системы, направив луч параллельно главной оптической оси слева направо (рис. О.1.74). На

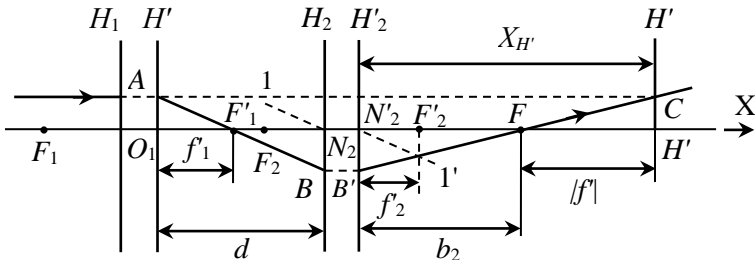


Рис. О.1.74.

рисунке H_1, H'_1 – передняя и задняя главные плоскости первой системы, F_1, F'_1 – её фокусы; H_2, H'_2 – передняя и задняя главные плоскости второй системы, F_2, F'_2 – её фокусы, N_2, N'_2 – узлы второй системы (в однородной среде они совпадают с её главными точками). Ось X направим по ходу луча. Будем считать все величины, указанные на рисунке, положительными, т.е. расстояниями.

Из подобия $\Delta AO_1F'_1$ и $\Delta F'_1N_2B$ следует, что

$$\frac{BN_2}{AO_1} = \frac{d - f'_1}{f'_1} = \frac{d}{f'_1} - 1.$$

Из подобия $\Delta O_2BF'$ и $\Delta F'CH'$ имеем:

$$\frac{BN'_2}{CH'} = \frac{X_{H'} - |f'|}{|f'|} = \frac{X_{H''}}{|f'|} - 1.$$

Поскольку $AO_1 = CH'$, получаем соотношение:

$$\frac{X_{H''}}{|f'|} = \frac{d}{f'_1}, \text{ откуда } X_{H'} = |f'| \frac{d}{f'_1},$$

где все величины положительные (расстояния). Поскольку координата $x_{H'}$ отсчитывается по ходу луча, а координата фокуса F' против хода (от задней главной плоскости H'), то для координаты задней главной плоскости H' находим:

$$x_{H'} = -f' \frac{d}{f'_1}.$$

Будем считать, что до первой системы и после второй среда однородна и её показатель преломления n_1 , а показатель преломления среды между системами равен n_2 . Используя определение оптической силы $\Phi = \frac{n_1}{f'}$ и $\Phi_1 = \frac{n_2}{f'_1}$, окончательно получаем:

$$x_{H'} = -\frac{d}{n} \cdot \frac{\Phi_1}{\Phi}, \text{ где } n = \frac{n_2}{n_1}.$$

Аналогично находим: $x_H = \frac{d}{n} \cdot \frac{\Phi_2}{\Phi}$.

1.75. $|f| = |f_1 f_2| / \Delta$.

Решение. Запишем уравнение для двухкомпонентной оптической системы (см. задачу 1.67):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}.$$

Из рис. О.1.71 видно, что $d = |f_1| + |f_2| + \Delta$ (в воздухе $|f'_1| = |f_1|$). Подставив в формулу это соотношение, получаем:

$$|f| = |f_1 f_2| / \Delta.$$

1.76. а). H проходит через вершину сферической поверхности, F находится перед линзой на расстоянии 26 см от вершины; H'

проходит внутри линзы на расстоянии $\approx 2,3$ см от плоской поверхности, F' находится за линзой на расстоянии $\approx 23,7$ см от неё.

б). H и H' находятся внутри линзы на расстоянии 1,22 см от вершин первой и второй поверхностей; F и F' расположены на расстояниях 12,4 см от ближайших вершин преломляющих поверхностей перед линзой и позади неё.

в). H и H' находятся перед линзой: H на расстоянии $\approx 2,0$ см, а H' на расстоянии $\approx 0,4$ см от её поверхности; F находится перед линзой на расстоянии $\approx 24,0$ см от вершины поверхности, F' находится за линзой на расстоянии $\approx 18,9$ см от вершины вогнутой поверхности.

г). H и H' находятся перед линзой: H на расстоянии $\approx 2,8$ см, а H' на расстоянии $\approx 2,2$ см от её поверхности; F находится за линзой на расстоянии $\approx 25,3$ см от её задней поверхности, F' находится перед линзой на расстоянии $\approx 33,8$ см от её поверхности.

Решение. а). Оптическая сила выпуклой преломляющей поверхности: $\Phi_1 = \frac{n-1}{R}$, а плоской поверхности $\Phi_2 = 0$, т.к. её радиус кривизны $R_2 \rightarrow \infty$. Оптическая сила линзы

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n} \Phi_1 \Phi_2 = \Phi_1 = \frac{n-1}{R} = \frac{1}{f'},$$

откуда заднее фокусное расстояние линзы равно:

$$f' = -f = \frac{R}{n-1} = 26 \text{ см}.$$

Найдем координаты главных плоскостей линзы:

$$x_H = \frac{d}{n} \cdot \frac{\Phi_2}{\Phi} = 0, \quad x_{H'} = -\frac{d}{n} \cdot \frac{\Phi_1}{\Phi} = -\frac{d}{n} \approx -2,3 \text{ см}.$$

Для преломляющей сферической поверхности её главные плоскости совмещены и проходят через вершину поверхности. Для плоской поверхности её главные плоскости совпадают с самой поверхностью. Следовательно, передняя главная плоскость H линзы проходит через вершину сферической поверхности, а передний фо-

кус F находится перед линзой на расстоянии $f = \frac{R}{n-1} = 26$ см от вершины.

Задняя главная плоскость H' проходит внутри линзы на расстоянии $|x_{H'}| = \frac{d}{n} \approx 2,3$ см от плоской поверхности, задний фокус F' находится за линзой на расстоянии $l = f' - |x_{H'}| \approx 23,7$ см.

Пункты б), в), г) задачи рассматриваются аналогично.

$$1.77. d = \frac{2nR}{n-1} = 28,5 \text{ см}.$$

$$1.78. f = -f' = \frac{Rn}{2(n-1)}; \text{ главные плоскости линзы совпадают}$$

и проходят через центр шара; фокальные точки находятся внутри шара при $n > 2$.

$$1.79. f = -\frac{nR(R-d)}{d(n-1)}; \text{ главные плоскости совпадают и про-}$$

ходят через общий центр кривизны поверхностей линзы; линза будет рассеивающей.

$$1.80. a) l = \frac{sR}{s(n-1) - R} - \frac{d}{n} = 118 \text{ см от плоской поверхности};$$

$$б) l = \frac{sR}{s(n-1) - R} \approx 109 \text{ см от вершины выпуклой поверхности}; \text{ в}$$

обоих случаях изображения находятся с противоположной стороны линзы по отношению к предмету.

Указание. Можно найти положение главных плоскостей линзы и её фокусное расстояние f , а потом воспользоваться формулой

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \text{ где } a - \text{ расстояние предмета до передней главной плос-}$$

кости, b – расстояние изображения до задней главной плоскости

линзы, или использовать формулу Ньютона: $F_1 S \cdot F_2 S^* = f_1 f_2$, где S и S^* – места нахождения предмета и его изображения, F_1 и F_2 – точки фокусов системы.

1.81. См. рис. О.1.81.

Указание. Использовать свойства узловых точек N и N' , которые в однородной среде совпадают с главными точками линзы.

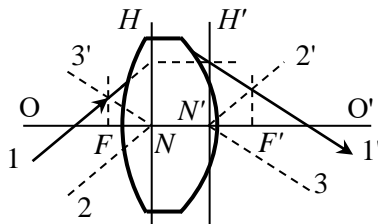


Рис. О.1.81.

$$1.82. \Phi = \frac{(n-1) \cdot [2nR - d(n-1)]}{nR^2} = 19 \text{ дптр} .$$

Указание. См. задачу 1.76 пункт а).

$$1.83. l = \frac{n(R_1 + R_2)}{2(n-1)} = 9 \text{ см} .$$

1.84. После 2013-го шарика изображение окажется на его дальней от источника поверхности.

Решение. Запишем инвариант Аббе для преломления на ближайшей к источнику поверхности первого шарика:

$$\frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{r} ,$$

где $x_1 = \infty$, $r = R$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$. Отсюда получаем:

$$\frac{n_2}{x_2} = \frac{n_2 - n_1}{R} , \quad \frac{2}{x_2} = \frac{1}{R} ; \quad x_2 = 2R ,$$

т.е. изображение окажется точно в точке касания первого и второго шариков. Следовательно, при преломлениях на второй границе первого шарика и первой границе второго шарика изображение останется в том же месте.

Для преломления на второй границе второго шарика:

$$\frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{r},$$

где $x_1 = -2R$, $r = -R$, $n_1 = 2$, $n_2 = 1$. Из этого уравнения получаем:

$$\frac{n_2}{x_2} = \frac{n_1}{x_1} + \frac{n_2 - n_1}{-R}, \quad \frac{1}{x_2} = \frac{2}{-2R} + \frac{-1}{-R} = 0; \quad x_2 = \infty,$$

т.е. выйдет вновь плоская волна (этот результат очевиден и без расчетов).

Ситуация повторится после прохождения 4, 6, ...2012 шариков. После 2013-го шарика изображение окажется на его второй (дальней от источника) поверхности.

1.85. См. рис. О.1.85.

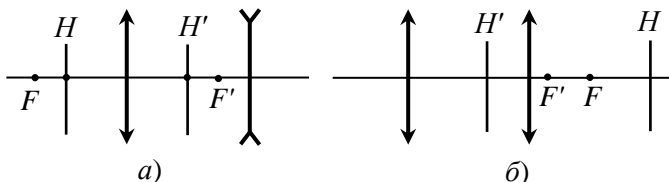


Рис. О.1.85.

1.87. См. рис. О.1.87 а).

В случае б) построение проводится аналогично.

1.89. См. рис. О.1.89.

Решение. Любой луч 1, проходящий через фокус F , выходит из оптической системы параллельно ее оптической оси (луч 1') и пересекает заднюю фокальную плоскость F' в некоторой точке A . Через эту же точку пройдет любой другой луч, входящий в систему параллельно лучу 1.

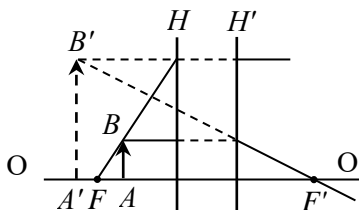


Рис. О.1.87 а).

Проведем через точку A луч 2', параллельный лучу 1. Он пересечет главную плоскость H' в точке B , а главную оптическую ось – в

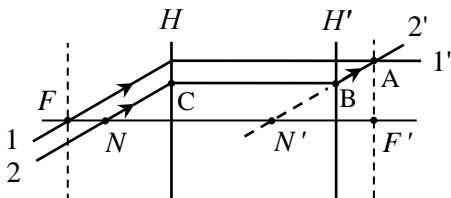


Рис. О.1.89.

точке N' . Найдем входящий в систему луч 2, который выходит из системы как луч $2'$. Для этого проведем через точку В прямую, параллельную оптической оси, до пересечения ее с главной плоскостью H (точка С). Если через точку С провести луч 2, параллельный лучам 1 и $2'$, то он пересечет оптическую ось в точке N . Поскольку лучи 2 и $2'$ параллельны, точки N и N' и есть узловые точки.

Как видно из рис. О.1.89, фокусное расстояние FH равно расстоянию $N'F'$, аналогично $FN = H'F'$. Кроме того, $NH = N'H'$.

1.90. $f = -2,5$ см , $f' = 2,5$ см ; передняя главная плоскость находится на расстоянии $x_H = -5$ см от собирающей линзы, задняя главная плоскость — на расстоянии $x_{H'} = -5$ см от рассеивающей линзы; передний фокус F расположен до собирающей линзы на расстоянии 7,5 см от неё, задний фокус F' — между линзами на расстоянии 2,5 см от рассеивающей линзы (см. рис. О.1.90).

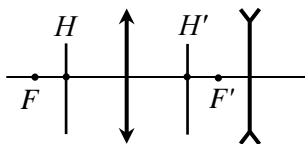


Рис. О.1.90.

Решение. Воспользуемся формулой для оптической силы двухкомпонентной системы в воздухе:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - d\Phi_1\Phi_2,$$

где $\Phi_1 = 1/f_1$, $\Phi_2 = 1/f_2$ — оптические силы тонких линз.

Перепишем уравнение в виде:

$$\Phi = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} = \frac{10}{25} \text{ см}^{-1},$$

откуда находим: $f = -\frac{1}{\Phi} = -2,5$ см , $f' = \frac{1}{\Phi} = 2,5$ см .

Определим координаты главных плоскостей:

$$x_H = d \frac{\Phi_2}{\Phi} = d \frac{f}{f_2} = -5 \text{ см} , \quad x_{H'} = -d \frac{\Phi_1}{\Phi} = -d \frac{f}{f_1} = -5 \text{ см} .$$

Расстояние x_H отсчитывается от первой линзы, а расстояние $x_{H'}$ — от второй. Фокусы системы находятся: F на расстоянии f от главной плоскости H , а F' на расстоянии f' от главной плоскости

H'. Расположение фокусов и главных плоскостей показано на рис. О.1.90.

1.91. Главные плоскости проходят через центр линзы. Фокусные расстояния в воздухе f и воде f' равны: $f = -\frac{1}{\Phi} = -28,5$ см ,
 $f' = \frac{n_1}{\Phi} = 38$ см , где $\Phi = \frac{2n - n_1 - 1}{R}$. Узловые точки совпадают и находятся в воде на расстоянии $x = f' + f = 9,5$ см от линзы.

§2. Электромагнитные волны оптического диапазона. Уравнения Максвелла

$$2.1. E_0 = cB_0 = 300 \text{ В/м}, \lambda = c \cdot \frac{2\pi}{\omega} = 0,6 \text{ мкм}.$$

$$2.2. \Delta\varphi = \frac{\omega}{c} |(x_1 - x_2) \cos \alpha + (y_1 - y_2) \cos \beta + (z_1 - z_2) \cos \gamma|.$$

Решение. Введем систему координат с осями OX' , OY' и OZ' так, чтобы ось OX' совпала с направлением распространения волны. Уравнение волны в этой системе координат имеет вид:

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx') = E_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}),$$

где $x' = \mathbf{r}\mathbf{n}$, \mathbf{r} – радиус-вектор произвольной точки волнового фронта, \mathbf{n} – единичный вектор в направлении распространения волны,

$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}$ – волновой вектор.

Отсюда искомая разность фаз равна:

$$\Delta\varphi = |\mathbf{k}\mathbf{r}_1 - \mathbf{k}\mathbf{r}_2| = \frac{\omega}{c} |(x_1 - x_2) \cos \alpha + (y_1 - y_2) \cos \beta + (z_1 - z_2) \cos \gamma|.$$

$$2.3. \psi(t, x, y, z) = f\left(t - \frac{(3/5)x + (4/5)z}{c}\right); \text{ для гармонической}$$

$$\text{волны } \psi(t, x, y, z) = \psi_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{(3/5)x + (4/5)y}{c}\right) + \delta\right].$$

Решение. Для волнового возмущения ψ уравнение имеет вид:

$$\psi(t, \mathbf{r}) = f\left(t - \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}}{c}\right) = f\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c}\right),$$

где α , β , γ – направляющие косинусы вектора нормали \mathbf{n} к волновому фронту. Если задан направляющий вектор \mathbf{a} , то

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \text{ По условию задачи } \mathbf{n} = \frac{1}{5} \{3, 0, 4\}, \text{ и}$$

уравнение волны имеет вид:

$$\psi(t, x, y, z) = f\left(t - \frac{(3/5)x + (4/5)z}{c}\right).$$

Для гармонической волны уравнение имеет вид:

$$\psi = \psi_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \delta) = \psi_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}}{c}\right) + \delta\right].$$

Для данной задачи

$$\psi(t, x, y, z) = \psi_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{(3/5)x + (4/5)y}{c}\right) + \delta\right].$$

$$2.4. \mathbf{r}_0 = \frac{E_{01}\mathbf{r}_1 + E_{02}\mathbf{r}_2}{E_{01} + E_{02}}.$$

Решение. Уравнение сферической световой волны для модуля вектора \mathbf{E} имеет вид:

$$E = \frac{E_0 R_0}{R} \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}),$$

где E_0 – амплитуда напряженности вектора \mathbf{E} на расстоянии R_0 от источника, R – расстояние от источника до точки наблюдения.

Так как амплитуда убывает обратно пропорционально расстоянию до источника, для амплитуд вектора \mathbf{E} в точках 1 и 2 можно написать:

$$E_{01} = \frac{C}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|}, \quad E_{02} = \frac{C}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_2|}, \quad \text{где } C = \text{const.}$$

Поскольку источник и точки 1 и 2 лежат на одной прямой, отсюда следует:

$$E_{01}\mathbf{r}_0 - E_{01}\mathbf{r}_1 = -(E_{02}\mathbf{r}_0 - E_{02}\mathbf{r}_2) \quad \text{и} \quad \mathbf{r}_0 = \frac{E_{01}\mathbf{r}_1 + E_{02}\mathbf{r}_2}{E_{01} + E_{02}}.$$

$$2.5. I_{\min} = c\varepsilon_0 E_0^2 / 2 = 1,2 \cdot 10^{10} \text{ Вт/м}^2.$$

$$2.6. \langle P \rangle \geq \frac{1}{4e} c\varepsilon_0 \pi d^2 m \omega^2 U \approx 2,7 \cdot 10^{11} \text{ Вт}.$$

Решение. Для осуществления пробоя газа необходимо, чтобы выполнялось условие: энергия ускоренных в поле световой волны электронов $W \geq eU$. Смещение электрона в электрическом поле световой волны с круговой частотой ω описывается уравнением:

$$m\ddot{x} = -eE_0 \cos(\omega t),$$

где m , e – масса и заряд электрона, E_0 – амплитуда вектора \mathbf{E} .

Отсюда скорость электрона $v = -\frac{eE_0}{m\omega} \sin(\omega t)$ и его максимальная кинетическая энергия

$$W_{\max} = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{eE_0}{m\omega} \right)^2 \geq eU, \text{ откуда } E_0^2 \geq \frac{2Um\omega^2}{e}.$$

В лазерном луче средняя плотность потока энергии $\langle S \rangle_T = \frac{\langle P \rangle}{\pi d^2 / 4} = \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2}$, откуда получаем:

$$\langle P \rangle \geq \frac{1}{4e} c\varepsilon_0 \pi d^2 m \omega^2 U \approx 2,7 \cdot 10^{11} \text{ Вт}.$$

$$2.7. E_0 = \sqrt{\frac{2I}{\varepsilon_0 c}} \approx 86,6 \text{ В/м}, H_0 = \sqrt{\frac{2I}{\mu_0 c}} \approx 0,23 \text{ А/м}.$$

$$2.8. B_0 = \sqrt{\frac{2\mu_0 I}{c}} \approx 2,9 \cdot 10^{-6} \text{ Тл}.$$

$$2.9. H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0 \approx 0,53 \text{ А/м}, \langle S \rangle_T = \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2} = 53,1 \text{ Вт/м}^2.$$

$$2.10. P = I \cdot 4\pi R_{\text{орг}}^2 \approx 2,9 \cdot 10^{26} \text{ Вт}.$$

$$2.11. W = 0,5c\varepsilon_0 E_0^2 \pi R^2 \Delta t \approx 400 \text{ Дж}.$$

$$2.12. \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x}.$$

Указание. Воспользоваться уравнениями Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \text{ с учетом связи } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}.$$

$$\mathbf{2.13.} \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} = -kE_0 \sin(\omega t - kz), \quad \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{kE_0}{c} \sin(\omega t - kz).$$

Указание: Воспользоваться соотношениями $\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$,

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x} \text{ (см. задачу 2.12).}$$

$$\mathbf{2.14.} \quad \mathbf{B} = \mathbf{e}_y \frac{k}{\omega} E_0 \cos(\omega t - kz).$$

Решение. Согласно уравнению Максвелла $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$.

Найдем в декартовых координатах $\operatorname{rot} \mathbf{E}$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} \equiv \nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_y \frac{\partial E_x}{\partial z} - \mathbf{e}_z \frac{\partial E_x}{\partial y} = \mathbf{e}_y kE_0 \sin(\omega t - kz),$$

следовательно: $-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{e}_y kE_0 \sin(\omega t - kz)$, откуда

$$\mathbf{B} = -\mathbf{e}_y \int kE_0 \sin(\omega t - kz) dt = \mathbf{e}_y \frac{k}{\omega} E_0 \cos(\omega t - kz),$$

т.е. в каждой точке поля напряженность \mathbf{E} и индукция \mathbf{B} изменяются синфазно.

Замечание. Вектор \mathbf{B} можно также найти, воспользовавшись соотношением $[\mathbf{k}, \mathbf{E}] = \frac{\omega}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{H}$ для плоской бегущей волны.

$$\mathbf{2.15.} \quad \mathbf{E} = -\mathbf{e}_x \frac{k}{\varepsilon_0 \omega} H_0 \sin(\omega t - kz).$$

Указание. См. решение задачи 2.12. Можно воспользоваться соотношением $[\mathbf{k}, \mathbf{H}] = -\omega \varepsilon_0 \mathbf{E}$ для плоской бегущей волны.

$$2.16. \mathbf{H}(x, t) = \mathbf{e}_z \varepsilon_0 c E_0 \sin \left(\omega t - \frac{\omega}{c} x \right) = 0,31 \mathbf{e}_z \text{ [A/м]}.$$

$$2.17. S = \mathbf{e}_z \varepsilon_0 c \cos^2 [\omega(t - z/c)].$$

$$2.18. \langle j_{\text{см}} \rangle = 4 \varepsilon_0 v E_0 \approx 0,35 \text{ mA/м}^2.$$

Решение. В случае плоской монохроматической волны

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr}).$$

В вакууме $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$, в результате получаем:

$$\mathbf{j}_{\text{см}} \equiv \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\omega \varepsilon_0 E_0 \sin(\omega t - \mathbf{kr}).$$

Среднее по времени значения модуля плотности тока смещения равно:

$$\langle j_{\text{см}} \rangle = \omega \varepsilon_0 E_0 \left\langle \left| \sin(\omega t - \mathbf{kr}) \right| \right\rangle_{T/2} = \omega \varepsilon_0 E_0 \cdot \frac{2}{\pi} = 4 \varepsilon_0 v E_0 \approx 0,35 \text{ mA/м}^2.$$

$$2.19. j_0 = \omega \cdot \sqrt{2 \varepsilon_0 I / c}.$$

$$2.20. \varphi = \frac{\lambda}{2l} \approx 2'.$$

Решение. Направим ось X перпендикулярно зеркалу. Пусть уравнения падающей волны для вектора \mathbf{E} имеет вид:

$$\mathbf{E}_1(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx).$$

Тогда уравнение отраженной волны

$$\mathbf{E}_2(x, t) = E_0 \cos(\omega t + kx).$$

В соответствии с принципом суперпозиции:

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_1(x, t) + \mathbf{E}_2(x, t) = 2E_0 \cos(kx) \cos(\omega t),$$

т.е. формируется стоячая волна $E(x, t)$. Из уравнения волны видно, что амплитуда вектора напряженности E достигает максимального значения в точках, где

$$kx = \frac{2\pi}{\lambda} x = m\pi \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

откуда получаем координаты пучностей волны для вектора E :

$$x_m = (\lambda / 2) m.$$

Расстояние между соседними пучностями $\Delta x = \lambda/2$. В местах воздействия на фотопластинку волны с максимальным значением модуля E происходит максимальное выделение серебра, и образуются темные полосы.

Поскольку фотопластинка находится под малым углом φ к зеркалу, расстояние между полосами на поверхности пластинки

$$l = \frac{\Delta x}{\sin \varphi} \approx \frac{\Delta x}{\varphi} = \frac{\lambda}{2\varphi}, \text{ откуда } \varphi = \frac{\lambda}{2l} \approx 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ рад} \approx 2'.$$

$$\mathbf{2.21.} \quad \mathbf{B}(x, t) = 2E_0 \frac{k}{\omega} \sin(kx) \sin(\omega t) \mathbf{e}_z.$$

Решение. В соответствии с принципом суперпозиции:

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_1(x, t) + \mathbf{E}_2(x, t) = \mathbf{e}_y 2E_0 \cos(kx) \cos(\omega t),$$

т.е. формируется стоячая волна $E(x, t)$, поляризованная в плоскости ХОУ.

Магнитные составляющие волн описываются уравнениями:

$$\mathbf{B}_1(x, t) = \mathbf{e}_z B_0 \cos(\omega t - kx),$$

$$\mathbf{B}_2(x, t) = -\mathbf{e}_z B_0 \cos(\omega t + kx),$$

где учтено направление их распространения.

Поскольку для бегущих волн $E = v \cdot B = \frac{\omega}{k} B$, получаем:

$$\mathbf{B}(x, t) = \mathbf{B}_1(x, t) + \mathbf{B}_2(x, t) = 2E_0 \frac{k}{\omega} \sin(kx) \sin(\omega t) \mathbf{e}_z.$$

$$\mathbf{2.22.} \quad \mathbf{B}(z, t) = -E_0 \frac{k}{\omega} \cos(kz) \sin(\omega t) \mathbf{e}_y.$$

$$2.23. \mathbf{B}(z, t) = -\frac{E_0}{c} \sin(kz) \sin(\omega t) \mathbf{e}_x.$$

$$2.24. \mathbf{E} = -B_0 c \sin(kz) \cos(\omega t) \mathbf{e}_y.$$

$$2.25. S_x = \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{4} \cdot \sin(2kx) \cdot \sin(2\omega t); \langle S_x \rangle = 0.$$

Решение. По определению $\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$. Пусть $\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_y E_0$. Тогда (см. задачу 2.21):

$$\mathbf{H}(x, t) = \mathbf{e}_z H_0 \sin(kx) \sin(\omega t),$$

где $H_0 = (\omega / k) \cdot D = \varepsilon_0 c E_0$. Следовательно,

$$\mathbf{S} = \mathbf{e}_x \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{4} \cdot \sin(2kx) \cdot \sin(2\omega t),$$

а среднее за период колебаний значение x -проекции вектора Пойнтинга составляет:

$$\langle S_x \rangle = \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{4} \cdot \sin(2kx) \cdot \langle \sin(2\omega t) \rangle_T = 0.$$

$$2.26. \langle S \rangle = c\varepsilon_0 E_0^2 (1 + \cos \varphi).$$

$$2.27. \langle S \rangle = \sqrt{2} c\varepsilon_0 E_0^2.$$

$$2.28. w_{\text{эл}} = 0,5\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kx) \cos^2(\omega t),$$

$$w_{\text{магн}} = 0,5\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(kx) \sin^2(\omega t), \quad S = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \sin(2kx) \sin(2\omega t);$$

$$w(x, 0) = 0,5\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kx), \quad w(x, T/8) = 0,25\varepsilon_0 E_0^2,$$

$$w(x, T/4) = 0,5\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(kx); \quad W = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 \lambda \sigma}{16}.$$

$$2.29. P = I_0 \cdot \pi a^2.$$

Решение. $P = \int I d\sigma = \int I_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{a^2}\right) dx dy =$
 $= I_0 \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) \cdot 2\pi r dr = I_0 \pi a^2.$

2.30. $W = P_0 \cdot \tau \sqrt{\pi}.$

Решение. $W = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) dt = P_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right) dt = P_0 \tau \sqrt{\pi}.$

2.31. $f_I = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_I) = \frac{I_0}{c} \cos \theta (1 + R \cos 2\theta) \cdot \sigma,$

$f_n = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_n) = (1 + R) \frac{I_0}{c} \cos^2 \theta \cdot \sigma, \quad f_\tau = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_\tau) = (1 - R) \frac{I_0}{c} \cdot \frac{\sin 2\theta}{2} \cdot \sigma.$

Решение. Плотность потока импульса \mathbf{G} в поле электромагнитной волны в вакууме равна: $\mathbf{G} = \frac{\mathbf{S}}{c}$. Следовательно, за время Δt волна приносит к пластинке импульс:

$$\Delta \mathbf{P}_1 = \mathbf{G} \cdot \Delta V = \frac{\mathbf{S}}{c} \cdot \sigma_\perp \cdot c \Delta t = \frac{I_0}{c} \Delta t \cdot \sigma_\perp \cdot \mathbf{e}_I = \frac{I_0}{c} \Delta t \cdot (\sigma \cos \theta) \cdot \mathbf{e}_I,$$

где \mathbf{e}_I – единичный вектор нормали к фронту падающей волны; $\sigma_\perp = \sigma \cos \theta$ – площадь поперечного сечения светового пучка (см.

рис. О.2.31), $\frac{I_0}{c} = \langle w \rangle_T.$

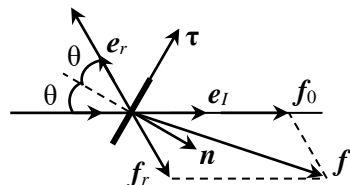


Рис. О.2.31.

Если бы падающий на пластинку свет полностью поглощался, то на пластинку действовала бы сила:

$$\mathbf{f}_0 = \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} = \frac{I_0}{c} \sigma_\perp \cdot \mathbf{e}_I = \frac{I_0}{c} \sigma \cos \theta \cdot \mathbf{e}_I.$$

По условию задачи свет частично отражается под таким же углом θ к нормали и уносит импульс

$$\Delta \mathbf{P}_2 = -\frac{I_r}{c} \Delta t \cdot \sigma_{\perp} \mathbf{e}_r = -\frac{RI_0}{c} \Delta t \cdot (\sigma \cos \theta) \cdot \mathbf{e}_r,$$

где \mathbf{e}_r – единичный вектор нормали к фронту отраженной волны, $I_r = RI_0$ – интенсивность отраженной волны.

Пластинка при этом получает дополнительный импульс (“импульс отдачи”), причем модуль “силы отдачи” $f_r = Rf_0$.

Таким образом, на пластину действует сила:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_r = \frac{I_0}{c} \sigma \cos \theta (\mathbf{e}_l - R\mathbf{e}_r),$$

а ее проекции на различные направления равны:

$$f_l = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_l) = \frac{I_0}{c} \cos \theta (1 + R \cos 2\theta) \cdot \sigma,$$

$$f_n = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_n) = (1 + R) \frac{I_0}{c} \cos^2 \theta \cdot \sigma,$$

$$f_{\tau} = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_{\tau}) = (1 - R) \frac{I_0}{c} \cdot \frac{\sin 2\theta}{2} \cdot \sigma.$$

$$\mathbf{2.32.} \quad p = \frac{f_n}{\sigma} = \frac{3}{2} \cdot \frac{I_0}{c} \cos^2 \theta = 0,25 \cdot 10^{-4} \text{ Па}.$$

Указание. См. решение задачи 2.31.

$$\mathbf{2.33.} \quad \langle p \rangle = \frac{4(1 + \rho) \cdot W}{\pi d^2 c t} \approx 5,0 \text{ МПа}.$$

$$\mathbf{2.34.} \quad P = \frac{W}{c} \sqrt{1 + \rho^2 + 2\rho \cos 2\theta} = 35 \text{ нН} \cdot \text{с}.$$

$$\mathbf{2.35.} \quad \mathbf{F}_K = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} a^2 [\sin \alpha (1 - r \cos 2\alpha) + \cos \alpha (1 + r \cos 2\alpha)] \mathbf{e}_k,$$

где \mathbf{e}_k – единичный вектор в направлении вектора \mathbf{k} .

Указание. Воспользоваться решением задачи 2.31.

$$2.36. p = \frac{w_0}{3}.$$

Решение. В случае плоской волны с объемной плотностью энергии w_0 и зеркального отражения ($R = 1$) давление на зеркало равно (см. задачу 2.31):

$$p = \frac{f_n}{\sigma} = (1 + R) w_0 \cos^2 \theta = 2 w_0 \cos^2 \theta.$$

Учитывая, что при изотропном излучении

$$dw(\theta) = w_0 \frac{d\Omega}{4\pi} = w_0 \cdot \frac{2\pi \cdot \sin \theta \cdot d\theta}{4\pi} = \frac{1}{2} w_0 \sin \theta \cdot d\theta,$$

получим:

$$p = 2 \cdot \frac{1}{2} w_0 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta = \frac{w_0}{3}.$$

$$2.37. F_I = w \pi a^2 (1 + R \cos 2\alpha).$$

Решение. Из симметрии задачи ясно, что сила светового давления F_I , возникающая за счет падающего и отраженного пучков, направлена вдоль оси X , поэтому в дальнейшем будем иметь в виду x -компоненты сил (рис. О.2.37). Для каждого из элементов освещаемой поверхности конуса площадью $d\sigma$ вклад dF_I в силу давления F_I равен:

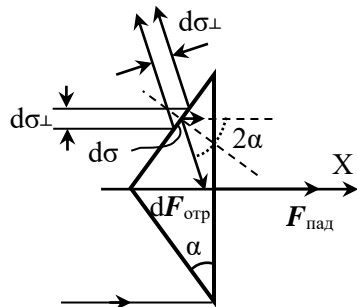


Рис. О.2.37.

$$dF_I = (dF, e_I) = \frac{I_0}{c} d\sigma_{\perp} (1 + R \cos 2\theta),$$

где $d\sigma_{\perp} = d\sigma \cos \theta$, $\theta = \alpha$. Суммирование по всем элементам $d\sigma_{\perp}$ дает площадь поперечного сечения, равную πa^2 , поэтому для искомой силы получаем:

$$F_I = \frac{I_0}{c} \cdot \pi a^2 \cdot (1 + R \cos 2\alpha), \text{ или } F_I = w \pi a^2 (1 + R \cos 2\alpha).$$

2.38. $F_I = w\pi a^2$.

Решение. Для кольцевого элемента освещаемой поверхности площадью $d\sigma$, который виден из центра сферы под углом θ (рис. О.2.38), вклад dF_I в силу давления F_I равен (см. решение задачи 2.37):

$$dF_I = (d\mathbf{F}, \mathbf{e}_I) = \frac{I_0}{c} d\sigma \cdot \cos \theta \cdot (1 + R \cos 2\theta),$$

где $d\sigma = a^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$. Интегрируя по φ от 0 до 2π и по θ от 0 до $\pi/2$, получим:

$$F_I = \frac{I_0 a^2}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} (1 + R \cos 2\theta) \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{I_0}{c} \pi a^2 = w\pi a^2,$$

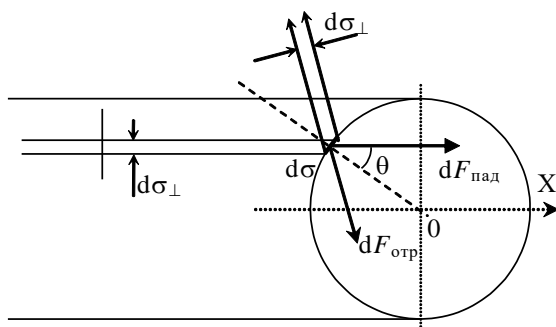


Рис. О.2.38.

т.е. сила давления F_I не зависит от коэффициента отражения R .

2.39. $F_I = w\pi d^2 \left(1 + R - \frac{Rd^2}{a^2} \right)$.

Указание. См. решение задачи 2.38.

2.40. $F_I = w\pi a^2 (1 - \cos^4 \theta + \cos^2 \theta) = \frac{5}{4} w\pi a^2$.

Указание. См. решение задачи 2.38.

$$2.41. F_I = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \cdot \pi R^2 = 1,25 \cdot 10^{-12} \text{ Н}.$$

$$2.42. F = \frac{4}{3} \cdot \frac{I_0}{c} \cdot \pi R^2.$$

Решение. Рассмотрим элемент поверхности шара, ориентированный под углом θ к вектору I_0 (см. рис. О.2.42). Площадь этого элемента равна

$$d\sigma = R^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi.$$

Так как элементом $d\sigma$ за время Δt рассеивается энергия $\Delta W = I_0 d\sigma \cdot \cos \theta \cdot \Delta t$, то на него действует сила:

$$df = df_0 + df_r,$$

причем $df_0 = \frac{I_0}{c} d\sigma \cos \theta e_I$, $df_r = \frac{1}{2} \cdot \frac{I_0}{c} d\sigma \cos \theta e_n$. Результирующая всех df_0 равна

$$F_0 = \frac{I_0}{c} \cdot \pi R^2 e_I.$$

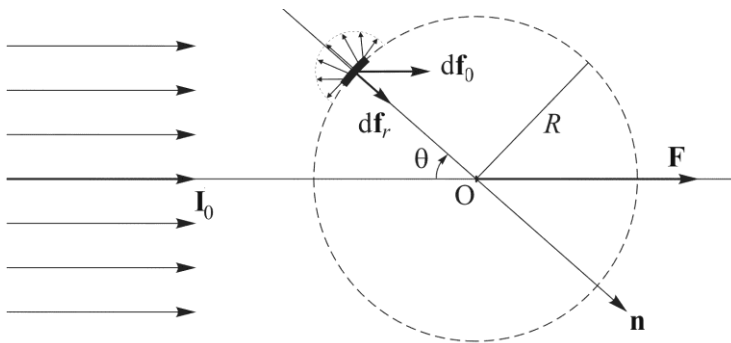


Рис. О.2.42.

Силу F_r найдем, суммируя проекции сил df_r на направление I_0 по всем элементам освещенной поверхности:

$$F_r = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi/2} df_r \cdot \cos \theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi/2} \frac{I_0}{2c} \cdot R^2 \sin \theta \cos^2 \theta d\theta d\varphi = \frac{1}{3} \cdot \frac{I_0}{c} \cdot \pi R^2.$$

Следовательно, сила, действующая на шар, равна:

$$F = F_0 + F_r = \frac{4}{3} \cdot \frac{I_0}{c} \cdot \pi R^2.$$

2.43. $F = \frac{3I}{2c} S.$

Указание. Расчет проводится аналогично сделанному в задаче 2.42).

2.44. $F = \frac{P}{c} \cdot \frac{R^2}{2(R^2 + d^2)}.$

Решение. На расстоянии l от точечного изотропного источника мощностью P интенсивность излучения равна $I = \frac{P}{4\pi l^2}$, а средняя по времени объемная плотность энергии: $w = \frac{I}{c} = \frac{P}{4\pi l^2 c}.$

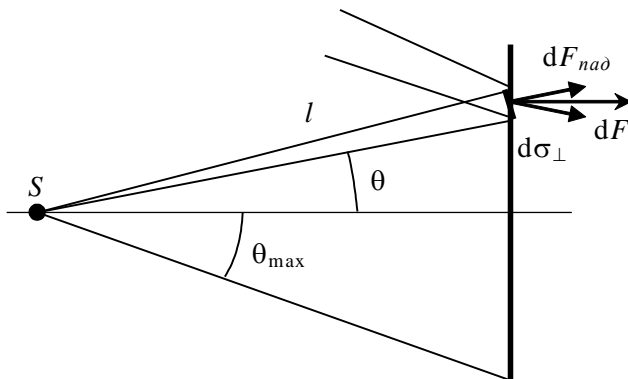


Рис. О.2.44.

Введем сферическую систему координат с началом в месте расположения источника S , угол θ будем отсчитывать от оси симметрии системы; он изменяется от 0 до $\theta_{\max} = \arctg(R/d)$. Рассмотрим пучок излучения с поперечным сечением $d\sigma_{\perp} = l^2 \sin \theta d\varphi d\theta$, где l -расстояние от источника до точки на по-

верхности пластинки (рис. О.2.44). Модуль силы светового давления такого пучка равен

$$dF_{\text{над}} = w d\sigma_{\perp}.$$

С такой же силой будет действовать и отраженный пучок, сумма этих сил направлена параллельно оси симметрии и равна:

$$\begin{aligned} dF &= 2dF_{\text{над}} \cos \theta = 2w d\sigma_{\perp} \cdot \cos \theta = \\ &= 2 \cdot \frac{P}{4\pi l^2 c} \cdot l^2 \sin \theta d\varphi d\theta \cdot \cos \theta = \frac{P}{2\pi c} \cdot \sin \theta \cos \theta d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

Проводя интегрирование, получаем:

$$F = \frac{P}{2\pi c} \cdot 2\pi \cdot \int_0^{\theta_{\max}} \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta = \frac{P}{c} \cdot \frac{\sin^2 \theta_{\max}}{2} = \frac{P}{c} \cdot \frac{R^2}{2(R^2 + d^2)}.$$

$$2.45. \theta \approx 2 \arcsin \frac{W}{mc \sqrt{gl}} = 0,5^\circ.$$

$$2.46. P = c \cdot mg.$$

§3. Преобразования Фурье в оптике

$$3.1. f(t) = \frac{A\tau}{T} + \frac{2A\tau}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right) \cdot \cos(n\omega t), \text{ где } \omega = 2\pi/T;$$

см. рис. О.3.1.

Решение. Периодическая функция на интервале $-T/2 \leq t \leq T/2$ имеет следующий аналитический вид:

$$f(t) = \begin{cases} A, & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0, & \frac{\tau}{2} < |t| < \frac{T}{2} \end{cases}.$$

Находим коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A dt = \frac{2A\tau}{T};$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \cos(n\omega t) dt = \frac{2A}{T} \cdot \frac{1}{n\omega} \left(\sin \frac{n\omega\tau}{2} - \sin \left(-\frac{n\omega\tau}{2} \right) \right) = \\ &= \frac{2A}{T} \left(\frac{\tau}{\tau} \right) \cdot \frac{2 \sin \frac{n\omega\tau}{2}}{n\omega} = \frac{2A\tau}{T} \operatorname{sinc} \left(\frac{n\omega\tau}{2} \right), \text{ где } \operatorname{sinc} \alpha = \sin \alpha / \alpha. \end{aligned}$$

Так как функция $f(t)$ – четная, то $b_n = 0$ для всех n .

$$f(t) = \frac{A\tau}{T} + \frac{2A\tau}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sinc} \left(\frac{n\omega\tau}{2} \right) \cdot \cos(n\omega t).$$

График спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов приведен на рис. О.3.1.

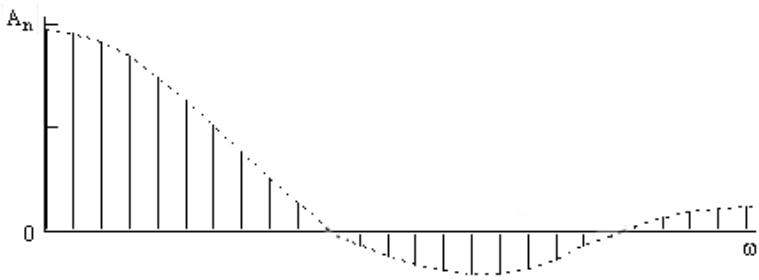


Рис. О.3.1.

$$3.2. f(t) = U_0 + \frac{U_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \cos(n \omega t), \text{ где } \omega = 2\pi/T.$$

$$3.3. f(t) = \frac{U_0}{2} - \frac{4U_0}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \cos[(2n+1)\omega t],$$

где $\omega = 2\pi/T$.

$$3.4. f(t) = A \cos \omega t + \frac{mA}{2} [\cos(\omega + \Omega)t + \cos(\omega - \Omega)t].$$

Решение. В данной задаче спектр легко получить, применив формулу произведения косинусов:

$$f(t) = A \cos \omega t + \frac{mA}{2} [\cos(\omega + \Omega)t + \cos(\omega - \Omega)t].$$

Видно, что спектр состоит из трех гармоник с частотами ω , $\omega + \Omega$ и $\omega - \Omega$ и амплитудами A и $mA/2$.

$$3.5. f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \text{ где } F(\omega) = U_0 \tau \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right).$$

Решение. Найдем Фурье-образ функции $f(t)$:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = U_0 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-i\omega t} dt = f_0 \frac{e^{-i\omega\tau/2} - e^{i\omega\tau/2}}{-i\omega} = \\ &= U_0 \tau \frac{-2i \sin(\omega\tau/2)}{-i\omega\tau} = U_0 \tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} = U_0 \tau \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right). \end{aligned}$$

3.6. $F_{\tau}(\omega) = F(\omega) \cdot e^{-i\omega\tau}$.

Решение. Находим спектр сигнала $f(t - \tau)$:

$$F_{\tau}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) \cdot e^{-i\omega(t - \tau)} \cdot e^{-i\omega\tau} dt.$$

Делая замену переменных $t' = t - \tau$ и учитывая, что при этом пределы интегрирования не изменятся, получим:

$$F_{\tau}(\omega) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t') \cdot e^{-i\omega t'} dt' \right) \cdot e^{-i\omega\tau} = F(\omega) \cdot e^{-i\omega\tau}.$$

Таким образом, сдвиг сигнала по времени на τ приводит к появлению в его спектре фазового множителя $e^{-i\omega\tau}$. При этом $|F_{\tau}(\omega)| = |F(\omega)|$, т.е. спектральная плотность не меняется.

3.7. $F(\omega) = 2f_0\tau \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)$.

Указание. Записать временную функцию двух импульсов $f(t) = f_0(t - T) + f_0(t + T)$ и использовать результаты задач 3.5 и 3.6.

3.8. $F(\omega) = f_0\tau \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \cdot [1 + 2\cos(\omega T)]$.

Указание. Записать временную функцию трех импульсов

$f(t) = f_0(t) + f_0(t - T) + f_0(t + T)$ и использовать результаты **задач 3.5 и 3.6**.

$$3.9. F(\omega) = f_0 \tau \cdot \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega \tau}{2} \right) \cdot \frac{\sin \left(\frac{N \omega T}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\omega T}{2} \right)}.$$

Решение. Временную функцию, описывающую N прямоугольных импульсов одинаковой полярности, можно представить в виде:

$$f(t) = f_0(t) + f_0(t + T) + f_0(t + 2T) + \dots + f_0(t + (N - 1)T),$$

где функция $f_0(t)$ — это временная функция одиночного прямоугольного симметричного импульса длительностью τ , спектр $F_0(\omega)$ которого был получен в **задаче 3.5**:

$$F_0(\omega) = f_0 \tau \cdot \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega \tau}{2} \right).$$

Используя **задачу 3.6**, можем записать:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= f_0 \tau \cdot \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega \tau}{2} \right) \cdot \left(1 + e^{i\omega T} + e^{i\omega 2T} + \dots + e^{i\omega(N-1)T} \right) = \\ &= f_0 \tau \cdot \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega \tau}{2} \right) \cdot \frac{1 - e^{i\omega NT}}{1 - e^{i\omega T}} = f_0 \tau \cdot \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega \tau}{2} \right) \cdot \frac{e^{i\omega NT/2}}{e^{i\omega T/2}} \cdot \frac{\sin \left(\frac{N \omega T}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\omega T}{2} \right)}. \end{aligned}$$

При преобразованиях использовалась формула суммы геометрической прогрессии, которая стоит в круглых скобках, а также формула Эйлера: $\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$. Взяв $\operatorname{Re}F(\omega)$, получаем амплитудный спектр последовательности N прямоугольных импульсов:

$$F(\omega) = f_0 \cdot \tau \cdot \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega \tau}{2} \right) \cdot \frac{\sin \left(\frac{N \omega T}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\omega T}{2} \right)}.$$

$$3.10. G_0(\omega) = NG(\omega).$$

Решение. Найдем Фурье-образ последовательности цугов:

$$F_0(\omega) = \sum_{i=1}^N F(\omega) \cdot e^{-i\omega t_i} = F(\omega) \cdot \sum_{i=1}^N e^{-i\omega t_i}.$$

Для спектральной плотности имеем:

$$\begin{aligned} G_0(\omega) &= F_0(\omega) \cdot F_0^*(\omega) = F(\omega) \cdot F^*(\omega) \left(\sum_{i=1}^N e^{-i\omega t_i} \cdot \sum_{j=1}^N e^{i\omega t_j} \right) = \\ &= F(\omega) \cdot F^*(\omega) \left(\sum_{i=1}^N e^{-i\omega t_i} \cdot \sum_{j=1}^N e^{i\omega t_j} \right) = G(\omega) \left(N + \sum_{i,j=1; i \neq j}^N e^{-i\omega(t_i - t_j)} \right) = NG(\omega). \end{aligned}$$

(перекрестное произведение в среднем равно нулю).

Спектральная плотность N цугов возрастает в N раз, однако, если бы последовательность была регулярной (через одинаковые промежутки времени), то для некоторых частот увеличение было бы в N^2 раз.

$$3.11. F(\omega) = f_0 \tau \cdot \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\omega \tau}{2} \right).$$

Решение. Функция, описывающая симметричный треугольный импульс, имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} f_0 \left(1 - \frac{|t|}{\tau} \right), & |t| \leq \tau \\ 0, & |t| > \tau \end{cases}.$$

Спектр такого импульса равен:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt = \int_{-\tau}^{\tau} f_0 \left(1 - \frac{|t|}{\tau} \right) \exp(-i\omega t) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= f_0 \int_{-\tau}^0 (1 + t/\tau) \exp(-i\omega t) dt + f_0 \int_0^{\tau} (1 - t/\tau) dt = \\
&= \left[-\frac{f_0(1 + t/\tau)}{i\omega} \exp(-i\omega t) + \frac{f_0}{\tau\omega^2} \exp(-i\omega t) \right]_{-\tau}^0 + \\
&+ \left[-\frac{f_0(1 - t/\tau)}{i\omega} \exp(-i\omega t) - \frac{f_0}{\tau\omega^2} \exp(-i\omega t) \right]_0^{\tau} = \\
&= -\frac{f_0}{\tau\omega^2} [\exp(-i\omega t) + \exp(i\omega t)] + \frac{2f_0}{\tau\omega^2} = \frac{2f_0}{\tau\omega^2} [1 - \cos(\omega\tau)] = \\
&= f_0\tau \frac{\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2} = f_0\tau \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right).
\end{aligned}$$

3.12. $F_{\text{мод}}(\omega) = \frac{1}{2}(F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0))$.

Решение. Используем формулу Эйлера $\cos \omega_0 t = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}$.

Тогда

$$\begin{aligned}
F_{\text{мод}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} \cdot e^{-i\omega t} dt = \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i(\omega + \omega_0)t} dt \right) = \\
&= \frac{1}{2} (F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)).
\end{aligned}$$

Следовательно, при "заполнении" относительно медленно изменяющегося сигнала $f(t)$ гармонической функцией на частоте ω_0 спектр смещается влево и вправо от начала координат на ω_0 , при этом форма спектра не изменяется.

$$3.13. F(\omega) = \frac{A\tau}{4} \cdot \left[\operatorname{sinc} \left(\frac{(\omega - \omega_0)\tau}{4} \right) + \operatorname{sinc} \left(\frac{(\omega + \omega_0)\tau}{4} \right) \right].$$

Решение. Используем формулу $\cos \omega_0 t = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}$. Найдем

Фурье-образ функции $f(t)$:

$$\begin{aligned} F_{\text{мод}}(\omega) &= A \int_{-\tau/4}^{\tau/4} \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{A}{2} \int_{-\tau/4}^{\tau/4} \exp[-i(\omega - \omega_0)t] dt + \\ &+ \frac{A}{2} \int_{-\tau/4}^{\tau/4} \exp[-i(\omega_0 + \omega)t] dt = \frac{A}{2} \cdot \frac{e^{-i(\omega - \omega_0)\tau/4} - e^{i(\omega - \omega_0)\tau/4}}{-i(\omega - \omega_0)} + \\ &+ \frac{A}{2} \cdot \frac{e^{-i(\omega + \omega_0)\tau/4} - e^{i(\omega + \omega_0)\tau/4}}{-i(\omega + \omega_0)} = \frac{A\tau}{4} \left[\operatorname{sinc} \left(\frac{(\omega - \omega_0)\tau}{4} \right) + \operatorname{sinc} \left(\frac{(\omega + \omega_0)\tau}{4} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$3.14. F(\omega) = \frac{f_0\tau}{2} \left[\operatorname{sinc} \left(\frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2} \right) + \operatorname{sinc} \left(\frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2} \right) \right]; \text{ для вы-}$$

сокочастотного сигнала, если его длительность τ такова, что $\frac{2\pi}{\tau} \ll \omega_0$, $F(\omega) = \frac{f_0\tau}{2} \cdot \operatorname{sinc} \left(\frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2} \right)$.

Указание. См. решение задачи 3.13. Можно также воспользоваться результатом задачи 3.12.

$$3.15. F(\omega) = \frac{E_0\tau}{2} \cdot \operatorname{sinc} \left(\frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2} \right);$$

$$G(\omega) = \frac{E_0^2\tau^2}{4} \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2} \right); \Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{c\tau} = 1,6 \cdot 10^{-8} \text{ нм};$$

$$w = 0,508 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}; E_0 \approx 3,4 \cdot 10^5 \text{ В/м}.$$

Решение. Пусть колебания вектора электрической напряженности волны $E(t)$ описывается уравнением:

$$E(t) = \begin{cases} E_0 \cos(\omega_0 t) & \text{при } t \in [-\tau/2, \tau/2], \\ 0 & \text{при } t \notin [-\tau/2, \tau/2]. \end{cases}$$

Фурье-образ такой функции равен (см. задачу 3.14):

$$F(\omega) = \frac{E_0 \tau}{2} \left[\operatorname{sinc} \left(\frac{(\omega - \omega_0) \tau}{2} \right) + \operatorname{sinc} \left(\frac{(\omega + \omega_0) \tau}{2} \right) \right].$$

Второе слагаемое в области частот $\omega \approx \omega_0$ осциллирует с частотой $\sim \omega_0$, а первое слагаемое – с частотой $\Delta\omega \ll \omega_0$, поэтому за время импульса, содержащего $N = \frac{\tau}{\lambda/c} = 4 \cdot 10^{10}$ периодов колебаний, основную роль будет играть первое слагаемое в $F(\omega)$. Можно записать:

$$F(\omega) = \frac{E_0 \tau}{2} \cdot \operatorname{sinc} \left(\frac{(\omega - \omega_0) \tau}{2} \right).$$

Определим спектральную плотность излучения $G(\omega)$:

$$G(\omega) = (F(\omega) \cdot F^*(\omega)) = \frac{E_0^2 \tau^2}{4} \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{(\omega - \omega_0) \tau}{2} \right).$$

$G(\omega)$ имеет максимум при $\omega = \omega_0$ и первый раз обращается в ноль при $\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \frac{2\pi}{\tau}$, что определяет ширину частотного спектра $\Delta\omega = 2\pi/\tau$, соответственно $\Delta\nu = 1/\tau$ и основной диапазон длин волн

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{c} \Delta\nu = \frac{\lambda^2}{c\tau} = 1,6 \cdot 10^{-8} \text{ нм},$$

что значительно меньше естественной ширины линии излучения рубина.

Оценим объемную плотность энергии излучения w . Объем волн цуга

$$V = \frac{\pi d^2}{4} \cdot c\tau = 0,59 \text{ м}^3, \quad w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = 0,508 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3},$$

откуда $E_0 = \sqrt{2w / \varepsilon_0} \approx 3,4 \cdot 10^5 \text{ В/м}$.

Замечание. Для учета спектрального состава импульса при расчете объемной плотности энергии излучения w надо суммировать вклады в объемную плотность всех волн с частотой ω и диапазоном частот $d\omega$: $dw(\omega) = \frac{G(\omega)}{c} d\omega$. Тогда с учетом всех частот излучения получаем:

$$w = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega.$$

Однако в данной задаче спектральный диапазон частот очень мал, поэтому можно ограничиться приведенной оценкой.

$$\mathbf{3.16.} \quad a(\omega) = \frac{f_0 \delta}{\omega^2 + \delta^2}; \quad b(\omega) = \frac{f_0 \omega}{\omega^2 + \delta^2}.$$

Решение. Найдем Фурье-образ функции $f(t)$:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = f_0 \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \cdot e^{-i\omega t} dt = f_0 \int_0^{\infty} e^{-(\delta+i\omega)t} dt = \\ &= -\frac{f_0}{i\omega + \delta} e^{-(\delta+i\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{f_0 (\delta - i\omega)}{\omega^2 + \delta^2}, \end{aligned}$$

откуда $a(\omega) = \text{Re} F(\omega) = \frac{f_0 \delta}{\omega^2 + \delta^2}$; $b(\omega) = -\text{Im} F(\omega) = \frac{f_0 \omega}{\omega^2 + \delta^2}$.

$$\mathbf{3.17.} \quad G(\omega) = \frac{f_0^2}{\omega^2 + \delta^2}; \quad \Delta\omega = 2\delta; \quad \text{см. рис. О.3.17.}$$

Указание. Использовать результат задачи 3.16 и определение спектральной плотности $G(\omega) = (F(\omega) \cdot F^*(\omega)) = a^2(\omega) + b^2(\omega)$. Ширина кривой $G(\omega)$ на половине

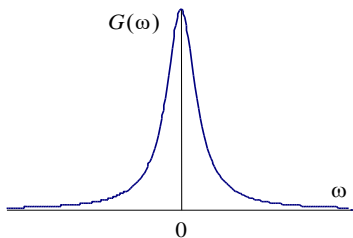


Рис. О.3.17.

высоты определяется из условия: $G_{1/2}(\omega) = \frac{1}{2} G_{\max}(\omega)$.

$$\mathbf{3.18.} \quad F(\omega) = \frac{f_0}{2} \cdot \frac{\delta - i(\omega - \omega_0)}{(\omega - \omega_0)^2 + \delta^2}; \quad G(\omega) = \frac{f_0^2}{4} \cdot \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \delta^2}.$$

Решение. Воспользовавшись результатами, полученными в задачах **3.12** и **3.16**, получим:

$$F(\omega) = \frac{f_0}{2} \cdot \left[\frac{\delta - i(\omega - \omega_0)}{(\omega - \omega_0)^2 + \delta^2} + \frac{\delta - i(\omega + \omega_0)}{(\omega + \omega_0)^2 + \delta^2} \right].$$

При малом затухании вторым слагаемым можно пренебречь, тогда:

$$F(\omega) = \frac{f_0}{2} \cdot \frac{\delta - i(\omega - \omega_0)}{(\omega - \omega_0)^2 + \delta^2},$$

и спектральная плотность равна:

$$G(\omega) = (F(\omega) \cdot F^*(\omega)) = \frac{f_0^2}{4} \cdot \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \delta^2}.$$

Линия излучения описывается функцией Лоренца

$$L(x) \equiv 1/(1 + x^2) \quad \text{при} \quad x = (\omega - \omega_0) / \delta.$$

$$\mathbf{3.19.} \quad W_0 = \frac{f_0^2 \pi}{4\delta}.$$

Решение. Спектральная плотность волны равна (см. задачу

$$\mathbf{3.18):} \quad G(\omega) = \frac{f_0^2}{4} \cdot \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \delta^2}.$$

Вклад в энергию излучений с частотами $(\omega, \omega + d\omega)$ равен: $dW(\omega) = G(\omega) d\omega$, а полная искомая энергия волны составляет:

$$W_0 = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega = \frac{f_0^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + \delta^2} = \frac{f_0^2}{4} \cdot \frac{\pi}{\delta}.$$

При вычислении использовался интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{a} \cdot \pi.$$

$$3.20. f(t) = \frac{A_0 \Delta\omega}{2\pi} \operatorname{sinc} \left(\frac{\Delta\omega t}{2} \right) \cos \omega_0 t.$$

Решение. Используем преобразование Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} A_0 e^{i\omega t} d\omega = \frac{A_0}{\pi t} \sin \left(\frac{\Delta\omega}{2} t \right) e^{i\omega_0 t}.$$

Действительная часть полученного выражения и есть временное представление функции $f(t)$:

$$f(t) = \frac{A_0}{\pi t} \sin \left(\frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega_0 t = \frac{A_0 \Delta\omega}{2\pi} \operatorname{sinc} \left(\frac{\Delta\omega t}{2} \right) \cos \omega_0 t = A(t) \cos \omega_0 t.$$

Амплитуда импульса $A(t)$ медленно меняется со временем, т.к. $\Delta\omega \ll \omega_0$.

§4. Интерференция монохроматического света

$$4.1. I = I_1 + I_2 .$$

$$4.2. V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \approx 0,2 .$$

$$4.3. \frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{\sqrt{N} + 1}{\sqrt{N} - 1} \right)^2 = 4 .$$

$$4.4. \theta = \arcsin \left[\frac{\lambda}{l} \left(m + \frac{\alpha_0}{2\pi} \right) \right]; \quad a) \quad m = 0, \quad \theta_0 = \pi/6;$$

б) $m = 0, \pm 1, \pm 2, -3$.

Решение. Поскольку излучаемые волны когерентны, они будут интерферировать, и интенсивность в любой точке определяется формулой:

$$I = 2I_0(1 + \cos \delta) .$$

Выберем точку М, находящуюся на расстоянии $r \gg l$ от середины линии, соединяющей излучатели (т.0 на рис. О.4.4) и видную из т. 0 под углом θ к линии 0А, перпендикулярной линии 1-2. Расстояния от т. М до излучателей 1 и 2 будут r_1 и r_2 соответственно. Угол $\theta_1 \approx \theta$ (см. рис. О.4.1), т.к. $r \gg l$. Разность хода волн от излучателей 1 и 2 до т. М равна:

$$\Delta r = r_1 - r_2 = l \sin \theta_1 \approx l \sin \theta .$$

Уравнения волн, приходящих в т. М от излучателей 1 и 2, имеют вид:

$$E_1 = E_{01} \cos(\omega t - kr_1), \quad E_2 = E_{02} \cos(\omega t - kr_2 - \alpha_0), \quad \text{где } k = 2\pi/\lambda .$$

Разность фаз между этими волнами в т. М составит:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) - \alpha_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot l \sin \theta - \alpha_0 .$$

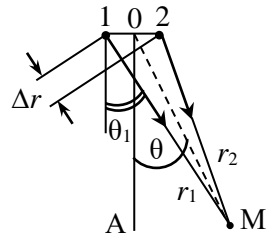


Рис. О.4.4.

Она будет максимальной при $\delta = 2\pi m$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), т.е. при

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot l \sin \theta - \alpha_0 = 2\pi m,$$

откуда
$$\sin \theta = \frac{\lambda}{l} \left(m + \frac{\alpha_0}{2\pi} \right).$$

а) $l = \lambda / 4$, тогда $\sin \theta = \frac{\lambda}{l} \left(m + \frac{\alpha_0}{2\pi} \right) = 4 \left(m + \frac{1}{8} \right)$, откуда

единственно возможное решение: $m = 0$, $\sin \theta = 1/2$ и $\theta_0 = \pi/6$.

б) $l = 3\lambda$, $\sin \theta = \frac{1}{3} \left(m + \frac{1}{8} \right)$ и $m = 0, \pm 1, \pm 2, -3$. Соответ-

ственно

$$\theta_1 = \arcsin (1/24) \approx 2,4^\circ, \theta_2 = \arcsin (9/24) \approx 22^\circ,$$

$$\theta_3 = \arcsin (17/24) \approx 45^\circ, \theta_4 = -\arcsin (7/24) \approx -17^\circ,$$

$$\theta_5 = -\arcsin (5/8) \approx -39^\circ, \theta_6 = -\arcsin (23/24) \approx 74^\circ.$$

4.5. $\Lambda \approx \lambda / \alpha$.

Решение. Выберем начало системы координат так (рис. О.4.5), чтобы уравнения волн имели вид:

$$E_1(t) = A \cos (\omega t - k_1 r),$$

$$E_2(t) = A \cos (\omega t - k_2 r),$$

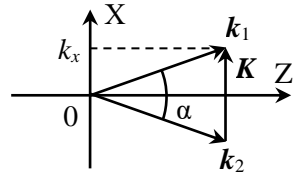


Рис. О.4.5.

где $A = \{0, A, 0\}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. В области пере-

крытия волн вектор напряженности электрического поля волны равен:

$$\begin{aligned} E(t, r) &= E_1 + E_2 = A [\cos (\omega t - k_1 r) + \cos (\omega t - k_2 r)] = \\ &= 2A \cos \left(\frac{(k_1 - k_2) r}{2} \right) \cos \left(\omega t - \frac{k_1 + k_2}{2} r \right) = 2A \cos \frac{K r}{2} \cos (\omega t - k r), \end{aligned}$$

где $K = k_1 - k_2$, $k = (k_1 + k_2) / 2$.

Волна распространяется вдоль оси Z , т.к. вдоль неё направлен вектор \mathbf{k} , но её амплитуда меняется вдоль оси X . Из рис. О.4.2 видно, что вектор \mathbf{K} направлен вдоль оси X и его модуль с учетом того, что $k_1 = k_2 = k$, равен: $K = 2k_x = 2k \sin(\alpha / 2)$.

Поскольку интенсивность результирующей волны $I \propto \mathbf{E}^2$, она будет максимальна там, где $\cos^2\left(\frac{\mathbf{K}\mathbf{r}}{2}\right)$ имеет максимум, т.е. при условии:

$$\frac{\mathbf{K}\mathbf{r}}{2} = k_x x = k \sin \frac{\alpha}{2} \cdot x = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \frac{\alpha}{2} \cdot x = \pi m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

откуда находим координаты максимумов x_m в направлении оси OX :

$$x_m = \frac{\pi m}{k \sin(\alpha / 2)} = \frac{m\lambda}{2 \sin(\alpha / 2)}.$$

Ширина интерференционных полос равна:

$$\Lambda = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda}{2 \sin(\alpha / 2)} \approx \frac{\lambda}{\alpha}.$$

4.6. $\Lambda \approx \frac{\lambda}{\alpha \cos \theta}$.

4.7. $I(x) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi dx}{\lambda l}\right)$; $\Lambda = \frac{\lambda l}{d}$.

Решение. Найдем разность хода $\Delta(x) = r_2(x) - r_1(x)$ между лучами 1 и 2, идущими из точек S_1 и S_2 в точку P на экране (рис. О.4.7).

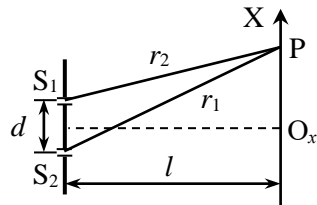


Рис. О.4.7.

По теореме Пифагора:

$$r_1^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2; \quad r_2^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2,$$

откуда $r_2^2 - r_1^2 = \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 = 2x \cdot d$.

$$\text{Одновременно } r_2^2 - r_1^2 = (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) \approx 2l \cdot \Delta ,$$

где учтено, что $l \gg d$. Приравнивая эти выражения, находим:

$$\Delta(x) = \frac{d}{l}x \text{ и разность фаз } \delta(x) = k \cdot \Delta(x) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{d}{l}x .$$

Распределение интенсивности $I(x)$ на экране имеет вид:

$$I(x) = 2I_0(1 + \cos \delta) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(2\pi \cdot \frac{x \cdot d}{\lambda \cdot l} \right) \right] = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi dx}{\lambda l} \right) ,$$

где I_0 – интенсивность света на экране при одной открытой щели.

Интенсивность в точке наблюдения максимальна, если

$$\frac{\pi dx_{\max}}{\lambda l} = \pi m , \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots ,$$

откуда находим координаты максимумов: $x_m = \frac{\lambda l m}{d}$ и ширину интерференционных полос:

$$\Delta = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda l}{d} \approx \frac{\lambda}{\alpha} ,$$

где α – угол схождения интерферирующих лучей вблизи центра экрана O_x (или угол, под которым видны щели S_1 и S_2 из центра экрана).

$$\mathbf{4.8.} \quad \lambda = \frac{\Delta x \cdot d}{4l} = 500 \text{ нм} .$$

$$\mathbf{4.9.} \quad \text{Увеличится в } \beta = \lambda_2 / \lambda_1 = 1,3 \text{ раза} .$$

$$\mathbf{4.10.} \quad \text{Картина сместится в сторону перекрытой щели на } N = \frac{a(n-1)}{\lambda} = 10 \text{ полос.}$$

$$\mathbf{4.11.} \quad n_{Kr} = n + \frac{N\lambda}{l} = 1,000427 ; \text{ полосы смещаются в сторону трубки.}$$

4.12. Ширина полос уменьшится: а) в $N_1 = \frac{l}{l - 4f} = 1,5$ раза;

б) в $N_2 = l / f = 12$ раз .

4.13. $x = \frac{6\lambda \cdot l}{2h} = 1,5 \text{ мм} .$

4.14. $\lambda = \frac{2\Lambda \cdot \Delta h}{l(\beta - 1)} .$

4.15. $N = \frac{8h^2 a}{\lambda(l^2 - a^2)} \approx 40 .$

Решение. На экране наблюдается картина интерференции волн от источника S и его мнимого изображения S' в зеркале (рис. О.4.15). Расстояние между источниками $d = 2h$. Поскольку $l \gg d$, интерферирующие лучи сходятся в точке 0 экрана под малым углом $\alpha \approx \frac{d}{l}$, а ширина интерференционных полос равна

$$\Lambda \approx \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda l}{d} .$$

Введем ось X вдоль экрана. Как видно из рис. О.4.15, ширина интерференционной картины на экране совпадает с шириной отраженного от зеркала «зайчика» и равна $\Delta X = x_1 - x_2$. Из подобных треугольников (см. рис. О.4.15) получаем (учитывая, что координата x отрицательна):

$$\frac{x_1 - x}{h} = \frac{l}{l/2 - a/2} , \text{ откуда } x_1 - x = \frac{d \cdot l}{l - a} .$$

Аналогично получаем: $x_2 - x = \frac{d \cdot l}{l + a} .$

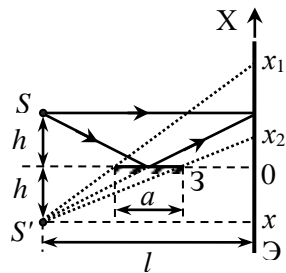


Рис. О.4.15.

Ширина зоны интерференции на экране:

$$\Delta X = (x_1 - x) - (x_2 - x) = \frac{d \cdot l \cdot 2a}{l^2 - a^2},$$

а число интерференционных полос на экране:

$$N = \frac{\Delta X}{\Lambda} = \frac{d^2 \cdot 2a}{\lambda(l^2 - a^2)} = \frac{8h^2 a}{\lambda(l^2 - a^2)} \approx 40.$$

4.16. $\Lambda = \frac{\lambda(a+b)}{2a\varphi} \approx 1 \text{ мм}$, $N = 2 \left[\frac{2ab\varphi^2}{\lambda(a+b)} \right] + 1 = 9$.

Решение. а) После отражения от зеркал 1 и 2 образуются два пучка света, выходящие из точек S_1 и S_2 . Эти точки находятся на таком же расстоянии a от ребра бизеркала, что и источник S .

Экран обычно располагают так, чтобы его плоскость была параллельна линии S_1S_2 . Как видно на рис. О.4.16, в центре экрана \mathcal{E} (точка O_x) интерферирующие лучи сходятся под углом

$$\alpha = \frac{S_1S_2}{a+b} = \frac{a \cdot 2\varphi}{a+b}.$$

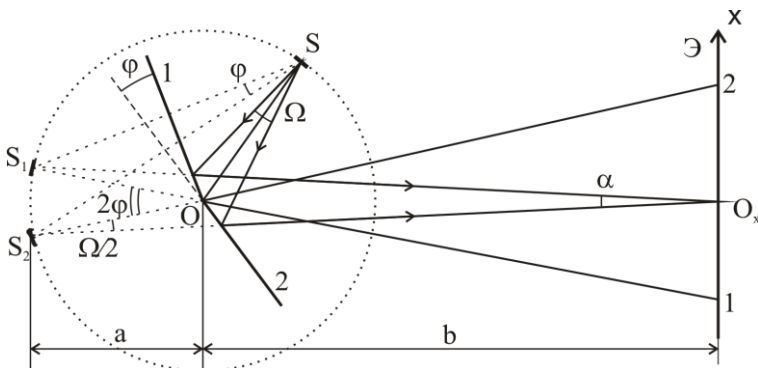


Рис. О.4.16.

Поэтому ширина интерференционных полос на экране равна:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda(a+b)}{a \cdot 2\varphi} = 1 \text{ мм}.$$

б) Число интерференционных полос на экране равно

$$N = 2 \left[\frac{\Delta X}{2\Lambda} \right] + 1,$$

где ΔX – ширина области интерференции, расположенной на экране между точками 1 и 2 (см. рис. О.4.16). Поскольку

$\Delta X \approx b \cdot 2\varphi$, получаем:

$$N = 2 \left[\frac{b\varphi}{\Lambda} \right] + 1 = 2 \left[\frac{2ab\varphi^2}{\lambda(a+b)} \right] + 1 = 9.$$

4.17. Вся интерференционная картина сместится в том же направлении, что и источник, на расстояние $\delta x \approx \delta l \cdot (b/a) = 12$ мм .

Решение. При смещении источника S на δl (например, по часовой стрелке), изображения S_1 и S_2 сместятся по дуге на такое же расстояние (но против часовой стрелки) (см. рис. О.4.16). В результате центр интерференционной картины на экране сместится вниз относительно точки O_x на расстояние:

$$\delta x \approx \delta l \cdot (b/a) = 12 \text{ мм} .$$

4.18. Центр интерференционной картины не сместится, но расстояние между полосами уменьшится в $\eta = \frac{2(a+b)}{2a+b} \approx 1,86$ раза.

Число интерференционных полос на экране возрастет на

$$\Delta N = 2 \left[\frac{b\varphi}{\Lambda/\alpha} \right] - 2 \left[\frac{b\varphi}{\Lambda} \right] = 6 \text{ полос (здесь } \alpha = \frac{a \cdot 2\varphi}{a+b} \text{ – угол схождения}$$

интерферирующих лучей, $\Lambda = \frac{\lambda(a+b)}{2a\varphi} \approx 1 \text{ мм}$ – первоначальная

ширина интерференционной полосы) (см. задачу 4.16).

$$\mathbf{4.19.} \quad \Delta x = \frac{3\lambda(a+b)}{2a\varphi} \approx 1,7 \text{ мм} .$$

$$4.20. \theta = \frac{\lambda(a+b)}{2a\Lambda(n-1)}, N = 2 \left[\frac{b\lambda(a+b)}{2a\Lambda^2} \right] + 1.$$

Решение. Луч, падающий на прозрачный клин с преломляющим углом $\theta \ll 1$ почти нормально, после прохождения клина отклоняется на угол $\varphi = \theta(n-1)$.

Если расстояние a много больше толщины бипризмы, то лучи на выходе из бипризмы образуют два частично перекрывающихся пучка, как бы выходящих из щелей S_1 и S_2 (рис. О.4.20), расположенных примерно на том же расстоянии a от бипризмы, причем

$$S_1 S_2 \equiv d = 2atg\varphi \approx 2a\theta(n-1).$$

Экран расположен на расстоянии $l=a+b$ от источников. Используя формулу, полученную для схемы Юнга, находим ширину интерференционных полос:

$$\Lambda = \frac{\lambda l}{d} = \frac{\lambda(a+b)}{a \cdot 2\theta(n-1)},$$

откуда определяем преломляющий угол бипризмы:

$$\theta = \frac{\lambda(a+b)}{2a\Lambda(n-1)}.$$

Из рис. О.4.20 видно, что размер области интерференции лучей на экране равен:

$$MN = 2btg\varphi \approx 2b\varphi = 2b\theta(n-1) = \frac{b\lambda(a+b)}{a\Lambda}.$$

Из симметрии задачи следует, что число N всегда должно быть нечетным, поэтому число наблюдаемых полос на экране

$$N = 2 \left[\frac{MN}{2\Lambda} \right] + 1 = 2 \left[\frac{b\lambda(a+b)}{2a\Lambda^2} \right] + 1.$$

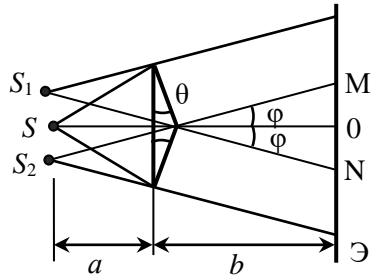


Рис. О.4.20.

$$4.21. \lambda = \frac{2a\theta(n-1)}{a+b} \Lambda = 484 \text{ нм} .$$

$$4.22. 1) \Delta x = \frac{\lambda}{2(n-1)\varepsilon} \approx 0,2 \text{ мм} ;$$

$$2) N_{\max} = 2 \left[\frac{2b(n-1)^2 \varepsilon^2}{\lambda} \right] + 1 = 43 , \quad m_{\max} = \left[\frac{2b(n-1)^2 \varepsilon^2}{\lambda} \right] = 21 ;$$

$$3) b_N = \frac{(N-1)\lambda}{4(n-1)^2 \varepsilon^2} \approx 84 \text{ см} .$$

Решение. С помощью бипризмы плоская волна, получающаяся за линзой, делится на два пучка, выходящих из бипризмы под углом $2\varphi = 2(n-1)\varepsilon$ друг к другу. Область интерференции на рис. О.4.22 представляет собой ромб $OMO'N$, на экране \mathcal{E} интерференционные полосы будут наблюдаться в области AB .

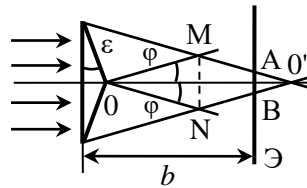


Рис. О.4.20.

Расстояние между темными полосами на экране, т.е. период интерференционной картины Λ , равно (см. задачу 4.5):

$$\Delta x \equiv \Lambda = \frac{\lambda}{2\varphi} = \frac{\lambda}{2(n-1)\varepsilon} \approx 0,2 \text{ мм} .$$

Как видно из рис. О.4.22, максимально возможная ширина интерференционной картины равна MN :

$$\Delta X_{\max} = MN = 2btg\varphi \approx 2b\varphi = 2b(n-1)\varepsilon .$$

Из симметрии задачи следует, что число N_{\max} всегда должно быть нечетным. Следовательно, максимально возможное число N_{\max} интерференционных полос равно:

$$N_{\max} = 2 \left[\frac{\Delta X_{\max}}{2\Lambda} \right] + 1 = 2 \left[\frac{2b(n-1)^2 \varepsilon^2}{\lambda} \right] + 1 = 43 .$$

Максимальный порядок интерференции равен:

$$m_{\max} = \left[\frac{2b(n-1)^2 \varepsilon^2}{\lambda} \right] = 21 .$$

Чтобы при минимальном расстоянии между экраном и бипризмой на экране было N полос, ширина интерференционной картины должно быть равна

$$\Delta X = 2b_N \operatorname{tg} \varphi \approx 2b_N (n-1) \varepsilon = (N-1)\Lambda ,$$

откуда

$$b_N = \frac{(N-1)\lambda}{4(n-1)^2 \varepsilon^2} \approx 84 \text{ см} .$$

$$4.23. \quad b_0 \approx \frac{H}{4(n-1)\varepsilon} \approx 3,4 \text{ м} ;$$

$$N_{\max} = 2 \left[\frac{H(n-1)\varepsilon}{2\lambda} \right] + 1 = 49 ; \quad b_1 > 2b_0 \approx 6,8 \text{ м} .$$

$$4.24. \quad \Lambda = \frac{\lambda}{2\varepsilon(n-n')} \approx 0,2 \text{ мм} .$$

$$4.25. \quad \Lambda = \lambda \cdot \frac{L(a-f) - af}{ah} .$$

Решение. Каждая половинка линзы даст свое действительное изображение источника S (рис. О.4.25 а, на рисунке горизонталь-

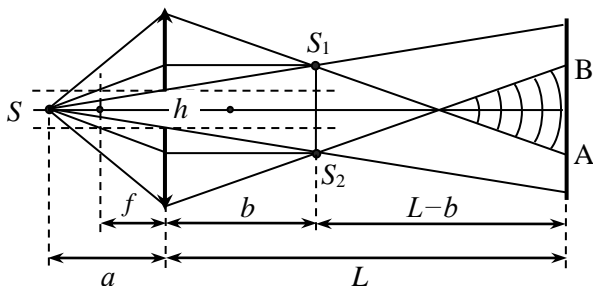


Рис. О.4.25 а.

ные штриховые линии – главные оптические оси верхней и нижней половин линзы). Эти изображения S_1 и S_2 играют роль источников двух частично перекрывающихся световых пучков, на рис. О.4.25 а область интерференции заштрихована. Интерференционную картину наблюдают на экране между точками А и В.

По формуле тонкой линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ находим расстояние b от билинзы до изображений S_1 и S_2 :

$$b = \frac{a \cdot f}{a - f}.$$

Лучи, выходящие из источника S и проходящие через оптические центры каждой из половинок билинзы, не преломляются, что позволяет найти расстояние S_1S_2 :

$$d = S_1S_2 = h \cdot \frac{a+b}{a} = \frac{h}{a} \cdot \left(a + \frac{af}{a-f} \right) = \frac{ah}{a-f}.$$

Расстояние от изображений до экрана

$$l = L - b = L - \frac{af}{a-f}.$$

По формуле, полученной для схемы Юнга (см. задачу 4.7), находим ширину интерференционных полос:

$$\Delta = \frac{\lambda l}{d} = \lambda \cdot \frac{L(a-f) - af}{ah}.$$

Замечание. Если экран будет располагаться дальше от билинзы, область интерференции будет определяться линиями SS_1 и SS_2 (см. рис. О.4.25 б) (на рисунке область интерференции заштрихована).

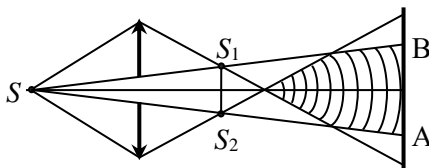


Рис. О.4.25 б.

$$4.26. L_{\min} = \frac{afD}{D(a-f) - ah} \approx 33 \text{ см};$$

$$\Delta x = \lambda \cdot \frac{2L_{\min}(a-f) - af}{ah} \approx 0,08 \text{ мм}.$$

Указание. См. решение задачи 4.25. Учесть, что $D \gg h$.

4.27. Нет.

4.28. 1) $\Lambda = \frac{\lambda f}{h} = 0,05 \text{ мм} ;$

2) $l_0 = \frac{Df}{2h} = 1,0 \text{ м} , N_{\max} = \left[\frac{(D-h)h}{2\lambda f} \right] + 1 = 201 ;$ 3) $l_1 = 2l_0 = 2,0 \text{ м} .$

Решение. Так как источник S находится в передней фокальной плоскости каждой из половин билинзы, то после её прохождения формируются две плоские волны, идущие под небольшим углом θ друг к другу (рис. О.4.28). На рисунке точки O_1 и O_2 – оптические центры верхней и нижней половинок линз, а горизонтальные штриховые линии 1 и 2 – их главные оптические оси. Область интерференции имеет форму ромба.

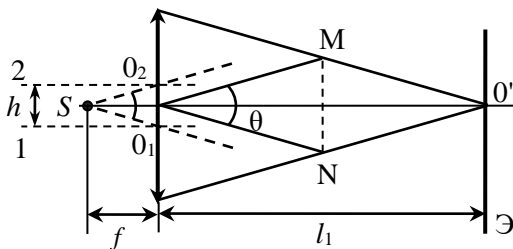


Рис. О.4.28.

1) Из ΔSO_1O_2 получаем: $\text{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{h}{2f}$, отку-

да с учетом малости углов θ следует: $\theta = h / f$.

Ширина интерференционных полос

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\theta} = \frac{\lambda f}{h} = 0,05 \text{ мм} .$$

2) Максимальный размер области интерференции $MN = (D - h) / 2$. Чтобы наблюдать максимальное число полос, экран нужно расположить от билинзы на расстоянии

$$l_0 = \frac{D - h}{4 \text{tg}(\theta/2)} \approx \frac{D - h}{2\theta} = \frac{(D - h)f}{2h} = 1,0 \text{ м} .$$

Максимальное число полос

$$N_{\max} = \left[\frac{D - h}{2\Lambda} \right] + 1 = \left[\frac{(D - h)h}{2\lambda f} \right] + 1 = 201 .$$

3) Интерференционные полосы исчезнут, если экран будет на расстоянии $l_1 = 2l_0 = 2,0 \text{ м}$ от билинзы.

$$4.29. l_{\min} = \frac{(N - 1)\lambda f^2}{h^2} = 96 \text{ см} .$$

$$4.30. a = \frac{f \cdot \lambda}{\Delta x} = 0,6 \text{ мм} .$$

$$4.31. b = \frac{d^2}{\lambda} + f .$$

Указание. После прохождения билинзы в ее задней фокальной плоскости сформируются два когерентных источника на расстоянии d друг от друга.

§5. Интерференция монохроматического света в тонких пленках. Полосы равной толщины и равного наклона

5.1. $\Delta = 2h \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} \pm \lambda / 2 .$

Решение. Падающий луч частично отражается в направлении ОМ и преломляется в направлении ОВ. Преломленный луч после отражения от задней грани в точке В вновь преломляется и выходит в направлении СN параллельно первому отраженному лучу.

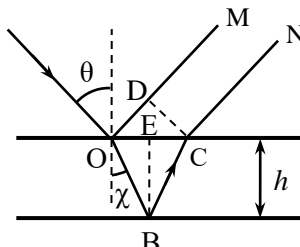


Рис. О.5.1.

Проведем из т. С линию волнового фронта $CD \perp CN$. Оптическая разность хода между лучами ОМ и СN равна:

$$\begin{aligned} \Delta &= n \cdot (OB + BC) - OD = 2n \cdot \frac{h}{\cos \chi} - OC \cdot \sin \theta = \\ &= 2n \cdot \frac{h}{\cos \chi} - 2h \operatorname{tg} \chi \cdot n \sin \chi = \frac{2nh (1 - \sin^2 \chi)}{\cos \chi} = 2nh \cos \chi . \end{aligned}$$

С учетом закона преломления $\sin \theta = n \sin \chi$ получаем:

$$\Delta = 2nh \cos \chi = 2h \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} .$$

Кроме того, необходимо учесть изменение на π фазы отраженного луча ОМ (отражение от оптически более плотной среды). Поэтому полная разность фаз в т. Р равна:

$$\delta = k_0 \cdot \Delta = k_0 \cdot 2h \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} \pm \pi , \text{ где } k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} .$$

Соответственно для оптической разности хода получаем:

$$\Delta = 2h \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} \pm \lambda / 2 .$$

Линза дополнительной оптической разности хода не вносит.

5.2. $h = \frac{m\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \approx 0,14 \text{ мм} , \Lambda = \frac{\lambda H \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{h \sin \theta \cdot \cos^2 \theta} \approx 2,2 \text{ см} .$

Решение. Так как $m \gg 1$, в соответствии с формулой, полученной в задаче 5.1:

$$\Delta = 2h \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} \pm \lambda / 2$$

и условием задачи находим:

$$h = \frac{\Delta}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \approx \frac{m\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \approx 0,14 \text{ мм} .$$

Ход лучей в пластинке показан на рис. О.5.2. Поскольку $h \ll H$, угол схождения интерферирующих лучей

$$\alpha = \frac{\delta}{H/\cos \theta}$$

достаточно мал, и для ширины интерференционных полос на экране можно использовать формулу:

$\Lambda = \frac{\lambda}{\alpha}$ (см. задачу

4.5). Из рис. О.5.2 видно, что

$$\delta \cong h \cdot \operatorname{tg} \theta' \cdot \cos \theta .$$

Учитывая закон преломления $\sin \theta = n \sin \theta'$, получаем:

$$\delta = h \cdot \frac{\sin \theta \cdot \cos \theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} , \quad \alpha = \frac{h}{H} \cdot \frac{\sin \theta \cdot \cos^2 \theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \approx 0,27 \cdot 10^{-4} \text{ рад} ,$$

откуда

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda H \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{h \sin \theta \cdot \cos^2 \theta} \approx 2,2 \text{ см} .$$

$$\mathbf{5.3.} \quad d = \frac{\lambda \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{\sin(2\theta) \cdot \delta\theta} = 15 \text{ мкм} .$$

$$\mathbf{5.4.} \quad h = \frac{\lambda \cdot \Delta m}{2 \left(n - \sqrt{n^2 - 1} \right)} \approx 0,24 \text{ мм} .$$

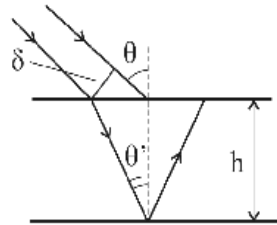


Рис. О.5.2.

Решение. Оптическая разность хода между лучами 1 и 2

$$\Delta_{12} = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}.$$

При изменении θ от 0° до 90° Δ_{12} изменяется от $\Delta_{\max} = 2nh$ до $\Delta_{\min} = 2h\sqrt{n^2 - 1}$. Следовательно,

$$m_{\max} = \frac{\Delta_{\max}}{\lambda} = \frac{2nh}{\lambda}, \quad m_{\min} = \frac{\Delta_{\min}}{\lambda} = \frac{2h\sqrt{n^2 - 1}}{\lambda}.$$

$$\text{Поэтому } \Delta m = m_{\max} - m_{\min} = \frac{2h}{\lambda} \left(n - \sqrt{n^2 - 1} \right),$$

а толщина пластинки равна $h = \frac{\lambda \cdot \Delta m}{2 \left(n - \sqrt{n^2 - 1} \right)} \approx 0,24 \text{ мм}.$

5.5. Темной.

Решение. Разность хода лучей, отраженных от верхней и нижней поверхностей пленки, при нормальном падении света равна $\Delta = 2dn \pm \lambda / 2.$

По условию $d \leq \lambda/10$, $n \approx 1,3$, поэтому соответствующая разность хода не превышает $\Delta = (0,26 \pm 0,5) \lambda$, что соответствует разности фаз $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \approx \frac{\pi}{2} \pm \pi$. При уменьшении толщины пленки разность фаз стремится к $\pm \pi$, и интерферирующие лучи почти полностью гасят друг друга.

$$5.6. \quad d \leq \frac{\lambda}{4n} \approx 0,1 \text{ мкм}.$$

$$5.7. \quad d = \frac{\lambda(2m+1)}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} = 0,10 \cdot (1 + 2m) \text{ мкм}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

5.8. а) зеленый ($\lambda = 542 \text{ нм}$); б) красный ($\lambda = 645 \text{ нм}$).

Указание. Записать условие интерференционных максимумов при отражении света от верхней и нижней поверхностей пленки.

$$5.9. h_{\min} = \frac{2\lambda_2}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} = 0,65 \text{ мкм} .$$

Решение. Для волн, отраженных от двух поверхностей пленки, разность хода равна:

$$\Delta = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} + \frac{\lambda}{2} .$$

По условию задачи

$$\Delta_1 = \Delta_{\max} = m_1\lambda_1; \quad \Delta_2 = \Delta_{\min} = \left(m_2 + \frac{1}{2}\right)\lambda_2 .$$

Так как разность хода лучей одинакова для обеих длин волн, получаем:

$$m_1\lambda_1 - \frac{\lambda_1}{2} = \left(m_2 + \frac{1}{2}\right)\lambda_2 - \frac{\lambda_2}{2}; \text{ откуда } \left(m_1 - \frac{1}{2}\right)\lambda_1 = m_2\lambda_2 .$$

Поиск m_1 и m_2 осуществляем подбором из ряда целых чисел, начиная с 1. В настоящей задаче $m_1 = 3$; $m_2 = 4$.

Далее по любой из формул для разности хода Δ находим толщину пленки:

$$h_{\min} = \frac{2\lambda_2}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} = 0,65 \text{ мкм} .$$

$$5.10. 1) d_{1\min} = \frac{\lambda_1}{2n} = 0,19 \text{ мкм} ; 2) d_{2\min} = \frac{5\lambda_1}{2n} = \frac{6\lambda_2}{2n} = 0,94 \text{ мкм} .$$

Решение. При наблюдении в проходящем свете интерферируют две волны, одна из которых проходит через пластинку без отражений, а вторая – испытывает отражения сначала на нижней, а потом на верхней поверхностях пластинки. При этом изменения фазы второй волны после выхода её из пластинки не происходит, так как отражение идет от оптически менее плотной среды.

Оптическая разность хода двух интерферирующих волн при нормальном падении света равна:

$$\Delta = 2dn .$$

Пластинка наиболее прозрачна для света с длиной волны λ , если выполняется условие интерференционных максимумов:

$$\Delta = m\lambda .$$

1) Для длины волны λ_1 получаем:

$$2d_1n = m\lambda_1, \text{ откуда } d_1 = \frac{m\lambda_1}{2n} \text{ и } d_{1\min} = \frac{\lambda_1}{2n} \approx 0,19 \text{ мкм} ,$$

т.е. прошедший свет будет наиболее интенсивно окрашен в желтый цвет.

2) При одновременном максимальном прохождении желтого и голубого цветов толщина пластинки должна удовлетворять соотношениям:

$$2d_2n = m_1\lambda_1, \quad 2d_2n = m_2\lambda_2, \text{ т.е.}$$

$$\lambda_1 / \lambda_2 = m_2 / m_1 = 6 / 5 ,$$

откуда находим минимально возможные значения $m_1 = 5, m_2 = 6$.

Для минимальной толщины пластинки получаем:

$$d_{2\min} = \frac{5\lambda_1}{2n} = \frac{6\lambda_2}{2n} \approx 0,94 \text{ мкм} .$$

Замечание. На самом деле, прошедший через пластинку пучок практически останется белым. Дело в том, что амплитуда первой (прошедшей без отражений) волны будет существенно больше амплитуды второй (с двумя отражениями), видность картины будет малой. При наблюдении в отраженном свете амплитуды интерферирующих волн примерно одинаковы, поэтому интерференционная картина существенно окрашена в тот или иной цвет.

$$\mathbf{5.11.} \quad \Lambda = \frac{\lambda}{2\alpha\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \approx 0,64 \text{ мм} .$$

Решение. 1) На поверхности клина интерферируют световые пучки, отраженные от верхней и нижней поверхностей клина (лучи 1 и 2 на рис. О.5.11), оптическая разность хода которых равна (см. задачу 5.1):

$$\Delta = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} + \lambda / 2 ,$$

где h – толщина клина в месте наблюдения.

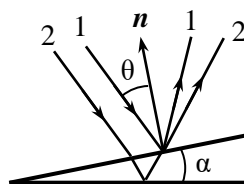


Рис. О.5.11.

Интерференционная картина представляет собой чередование темных и светлых полос, параллельных ребру клина. Условия образования двух соседних темных полос m -го и $(m+1)$ -го порядков имеют вид:

$$2h_m \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} + \frac{\lambda}{2} = (2m + 1) \lambda / 2 ,$$

$$2h_{m+1} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} + \frac{\lambda}{2} = (2m + 3) \lambda / 2 , \quad m = 1, 2, 3, \dots ,$$

откуда находим:

$$\Delta h = h_{m+1} - h_m = \frac{\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} .$$

Как видно из рис. О.5.11,

$$\Delta h = \Lambda \sin \alpha ,$$

откуда с учетом малости угла α получаем:

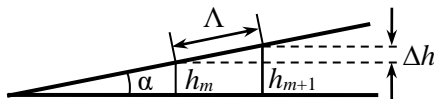


Рис. О.5.11.

$$\Lambda = \frac{\Delta h}{\sin \alpha} \approx \frac{\Delta h}{\alpha} = \frac{\lambda}{2\alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \approx 0,64 \text{ мм} .$$

$$\mathbf{5.12.} \quad \Delta x = \frac{\lambda \cdot \cos \theta}{2\alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \approx 0,62 \text{ мм} .$$

Решение. Так как на клин падает плоская волна, то после отражения от обеих поверхностей клина образуются две плоские волны, которые и будут интерферировать. Первая волна отразится от верхней поверхности клина под тем же углом θ . Вторая после преломления под углом χ и отражения от нижней поверхности клина упадет на первую поверхность под углом $\chi + 2\alpha$ и после преломления выйдет под углом $\theta' = \theta + \Delta\theta$.

Запишем закон преломления в виде:

$$n \cdot \sin(\chi + 2\alpha) = \sin \theta' .$$

Вследствие малости углов α и $\Delta\theta$ получим:

$$n \cdot (\sin \chi + \cos \chi \cdot 2\alpha) = \sin \theta + \cos \theta \cdot \Delta\theta ,$$

откуда

$$\Delta\theta = \frac{n \cdot \cos \chi \cdot 2\alpha}{\cos \theta} .$$

Расстояние между полосами на экране равно

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\Delta \theta} = \frac{\lambda \cdot \cos \theta}{n \cdot \cos \chi \cdot 2\alpha} = \frac{\lambda \cdot \cos \theta}{2\alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \approx 0,62 \text{ мм} .$$

$$5.13. \alpha = \frac{\lambda}{2n\Lambda} \approx 3' .$$

$$5.14. \alpha = \frac{\lambda(N-1)}{2nS} \approx 0,235 \text{ рад} \approx 14' .$$

$$5.15. \Lambda_2 = \Lambda_1 \lambda_2 / \lambda_1 = 1,9 \text{ мм} .$$

$$5.16. \text{Темная; а) } \Lambda = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda}{2\varepsilon} = 0,94 \text{ мм} ; \text{ б) } x_{k=10} = \frac{k\lambda}{2\varepsilon} = 9,4 \text{ мм} ,$$

$$h_{k=10} = k\lambda / 2 \approx 2,7 \text{ мкм} .$$

Решение. а) Так как угол между интерферирующими пучками $\alpha = 2\varepsilon$, то расстояние между двумя полосами интерференционной картины на поверхности клина равно:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda}{2\varepsilon} = 0,94 \text{ мм} .$$

б) k -ая темная полоса находится от вершины клина на расстоянии

$$x_{k=10} = k\Lambda = \frac{k\lambda}{2\varepsilon} = 9,4 \text{ мм} ,$$

а толщина клина в этом месте равна

$$h_{k=10} = x_k \operatorname{tg} \varepsilon \approx k\lambda / 2 \approx 2,7 \text{ мкм} .$$

$$5.17. I \approx 4I_0 \sin^2 \left(\frac{2\pi\alpha x}{\lambda} \right), \text{ где } x - \text{расстояние от ребра клина.}$$

$$5.18. R = \frac{r_k^2}{k\lambda} .$$

Решение. Интерференция происходит между волнами, отраженными от верхней и нижней поверхностей воздушной прослойки между сферической и плоской поверхностями. Интерференционная картина в виде системы концентрических колец (кольца Ньютона) локализована на сферической поверхности линзы. Разность хода между интерферирующими волнами с учетом дополнительной разности фаз π при отражении от оптически более плотной среды равна:

$$\Delta(r) = 2h(r) + \lambda / 2 ,$$

где $h(r)$ – толщина воздушного зазора на расстоянии r от места соприкосновения сферической и плоской поверхностей (рис. О.5.18).

По теореме Пифагора для $\triangle ODB$ можно записать:

$$R^2 = r^2 + (R - h)^2 ,$$

откуда при $h \ll R$ получаем: $h(r) \approx \frac{r^2}{2R}$.

Условие интерференционных минимумов имеет вид:

$$2 \cdot \frac{r^2}{2R} + \frac{\lambda}{2} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \lambda , \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

откуда находим радиус k ого темного кольца:

$$r_k = \sqrt{kR\lambda} .$$

Радиус кривизны сферической поверхности линзы равен:

$$R = \frac{r_k^2}{k\lambda} .$$

$$5.19. \lambda = \frac{(\Delta r)^2}{(\sqrt{25} - \sqrt{4})^2 R} = \frac{(\Delta r)^2}{9R} = 600 \text{ нм} .$$

$$5.20. r_3 = r_4 \sqrt{\frac{3\lambda_2}{4\lambda_1}} = 3,1 \text{ мм} .$$

Указание. При вычислении разности хода между интерферирующими пучками в прошедшем свете для светлых полос не

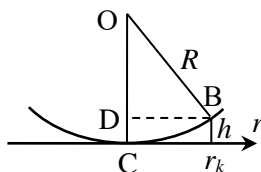


Рис. О.5.18.

надо дополнительно добавлять $\lambda/2$, т.к. оба отражения происходят от оптически более плотной среды.

Замечание. Видность картины в проходящем свете будет малой, так как амплитуда первой (прошедшей без отражений) волны будет существенно больше амплитуды второй (с двумя отражениями), в отличие от картины в отраженном свете, когда амплитуды интерферирующих волн примерно одинаковы.

$$5.21. d_2 = d_1 \cdot \frac{4 - \sqrt{3}}{\sqrt{20} - \sqrt{2}} = 3,6 \text{ мм} .$$

$$5.22. n = \frac{3\lambda R}{r_k^2} \approx 1,33 .$$

$$5.23. f = \frac{2r^2}{5(n-1)\lambda} = 1,64 \text{ м} .$$

5.24. а) Диаметры колец будут уменьшаться; внутреннее кольцо будет стягиваться в точку и исчезать; на внешней границе наблюдения будут возникать новые кольца.

б) Диаметры колец будут увеличиваться; внешние кольца будут уходить за пределы зоны наблюдения; в центре будут возникать новые кольца.

В обоих случаях центр интерференционной картины попеременно будет то темным, то светлым.

$$5.25. r' = \sqrt{r^2 - 2Rd} = 1,5 \text{ мм} .$$

Решение. Когда линза и пластинка находились в соприкосновении, радиус k -го кольца был равен

$$r_k = \sqrt{kR\lambda} .$$

При возникновении расстояния d между линзой и пластинкой оптическая разность хода между интерферирующими волнами становится равной (см. задачу 5.18):

$$\Delta(r) = 2d + \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda}{2},$$

и условие интерференционных минимумов (темные полосы) принимает вид:

$$2d + \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda}{2} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда находим новый радиус k -го кольца:

$$r'_k = \sqrt{Rk\lambda - 2Rd} = \sqrt{r_k^2 - 2Rd} = 1,5 \text{ мм}.$$

$$5.26. \quad \lambda = \frac{d_2^2 - d_1^2}{4R(N_2 - N_1)} = 588 \text{ нм}.$$

$$5.27. \quad f = \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \frac{1}{(n-1)m\lambda} \approx 54 \text{ см}.$$

$$5.28. \quad r_8 = \sqrt{\frac{2(n-1)m\lambda}{\Phi}} \approx 1,3 \text{ мм}, \text{ где } m = 8.$$

Решение. Толщина зазора h между сферической и плоской поверхностями на расстоянии r от точки их соприкосновения при условии $r \ll R$ приближенно равна (см. задачу 5.18):

$$h(r) \approx \frac{r^2}{2R},$$

где R – радиус кривизны сферической поверхности. Поэтому толщина зазора между линзами

$$h(r) \approx \frac{r^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Условие образования темных интерференционных колец имеет вид:

$$\Delta(r) = 2h(r) = m\lambda, \text{ т.е. } r_m^2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = m\lambda.$$

Оптическая сила системы из двух тонких линз, прижатых вплотную друг к другу, равна

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 2(n-1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Следовательно, радиус m -го темного кольца составляет:

$$r_m = \sqrt{\frac{2(n-1)m\lambda}{\Phi}}.$$

Подставляя численные данные, получаем: $r_8 \approx 1,3$ мм .

$$5.29. r_m = \sqrt{r_0^2 + (m-1/2)\lambda R} = 3,5 \text{ мм} , \text{ где } m = 6.$$

$$5.30. r_m = \sqrt{\frac{m\lambda}{1/R_1 + 1/R_2}}.$$

$$5.31. \lambda = \frac{\Phi d^2}{2(n-1)(2m-1)} = 600 \text{ нм} , \text{ где } m = 5.$$

$$5.32. \lambda = \frac{2\Delta x}{N} = 644 \text{ нм} .$$

Решение. Изменение (например, увеличение) расстояния

между зеркалами на $\lambda/2$ приведет к увеличению разности хода между интерферирующими волнами на $2 \cdot \lambda/2 = \lambda$, следовательно, на место m -ой полосы придет $(m+1)$ -ая, а m -ая сместится на расстояние, равное ширине полосы.

При смещении зеркала на расстояние Δx разность хода между волнами изменится на $2\Delta x$. При этом через поле зрения наблюдателя пройдет N полос, поэтому

$$2\Delta x = N\lambda , \text{ откуда } \lambda = \frac{2\Delta x}{N} = 644 \text{ нм} .$$

$$5.33. n = \frac{N\lambda}{2l} + 1 = 1,00038 .$$

Указание. При внесении сосуда с аммиаком разность хода между интерферирующими лучами изменяется на $\Delta = 2l(n-1)$.

$$5.34. \quad r_k = f \sqrt{\frac{\lambda k}{h}}; \quad r_1 = f \sqrt{\frac{\lambda}{h}} = 7,39 \text{ мм}, \quad r_2 = r_1 \sqrt{2} = 10,4 \text{ мм},$$

$$r_3 = r_1 \sqrt{3} = 12,8 \text{ мм}.$$

Решение. Так как источник протяженный, есть набор углов, под которыми свет падает на делительную пластину П. Луч, упавший на неё под определенным углом, разделяется на два. После отражения от зеркал Z_1 и Z_2 эти лучи от пластины П пойдут параллельно друг другу под некоторым углом χ к оптической оси линзы L и проинтерферируют в соответствующей точке её фокальной плоскости. Такая схема эквивалентна образованию интерференционной картины в отраженном свете в плоскопараллельном воздушном слое, получающемся между зеркалом Z_1 и изображением зеркала Z_2 в светоделительной пластине (на рис. 5.7 это изображение показано штриховой линией). Толщина слоя равна разнице плеч интерферометра h . В результате на экране образуются кольца (полосы равного наклона).

Воспользуемся формулой для разности хода лучей в плоскопараллельной пластине:

$$\Delta = 2h \cos \chi = 2h \left(1 - \chi^2 / 2\right)$$

(для малых углов χ $\cos \chi \approx 1 - \chi^2 / 2$).

Запишем условие интерференционных максимумов:

$$2h \left(1 - \chi_m^2 / 2\right) = m\lambda.$$

При $\chi = 0$ в центре картины порядок интерференции

$$m_0 = \frac{2h}{\lambda} = 40000,$$

т.е. в данном случае в центре будет яркое пятно. Для других светлых колец получаем:

$$\frac{h\chi_m^2}{\lambda} = \frac{2h}{\lambda} - m = m_0 - m = k,$$

где $k = m_0 - m$ — номер кольца, отсчитываемый от центра.

$$\text{Отсюда получаем: } \chi_m = \sqrt{\frac{\lambda k}{h}}, \quad r_k = f\chi_m = f \sqrt{\frac{\lambda k}{h}}.$$

Для трех первых колец радиусы равны:

$$r_1 = f \sqrt{\frac{\lambda}{h}} = 7,39 \text{ мм} , \quad r_2 = r_1 \sqrt{2} = 10,4 \text{ мм} , \quad r_3 = r_1 \sqrt{3} = 12,8 \text{ мм} .$$

5.35. $\Lambda = \frac{\lambda}{2\alpha} , \quad x_m = \frac{\lambda m}{2\alpha} .$

Решение. После прохождения света от источника S через линзу образуется плоская волна. В результате отражения волны от зеркал прибора формируются две плоские волны, идущие под малым углом 2α друг к другу (рис. О.5.35). Они образуют интерференционную картину в виде полос (полосы равного наклона).

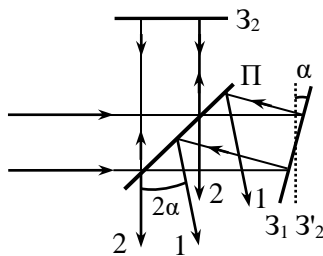


Рис. О.5.35.

Расстояние между параллельными полосами в интерференционной картине равно (см. задачу 4.5):

$$\Lambda = \frac{\lambda}{2\alpha} .$$

Расстояние от центра интерференционной картины до m -ой светлой полосы составляет:

$$x_m = m\Lambda = \frac{\lambda m}{2\alpha} .$$

5.36. $\lambda = \frac{2h\varepsilon}{N} = 603 \text{ нм} .$

Решение. Разность хода двух лучей, прошедших интерферометр Жамена, равна:

$$\Delta = 2hn \cos \chi_1 - 2hn \cos \chi_2 + \Delta_0 = 2hn (\cos \chi_1 - \cos \chi_2) + \Delta_0 ,$$

где h – толщина пластин, χ_1 и χ_2 – углы преломления в первой и второй пластинах соответственно, n – показатель преломления материала пластин, Δ_0 – разность хода, приобретенная при прохождении кювет с разными газами.

Если пластины параллельны друг другу, то $\chi_1 = \chi_2$, $\Delta = \Delta_0$, и условие интерференционных максимумов имеет вид:

$$\Delta_0 = m_0 \lambda .$$

После поворота одной из пластин на малый угол $\varepsilon = \chi_1 - \chi_2$ можно записать:

$$\cos \chi_1 - \cos \chi_2 = 2 \sin \frac{\chi_1 - \chi_2}{2} \sin \frac{\chi_1 + \chi_2}{2} \approx \varepsilon \sin \chi_1 = \varepsilon \cdot \frac{\sin \alpha}{n},$$

где α – угол падения света на первую пластину.

Тогда условие интерференционных максимумов примет вид:

$$\Delta = 2hn (\cos \chi_1 - \cos \chi_2) + \Delta_0 \approx 2h \varepsilon \sin \alpha + m_0 \lambda = m_1 \lambda,$$

откуда находим:

$$\lambda = \frac{2h\varepsilon}{m_1 - m_0} = \frac{2h\varepsilon}{N} = 603 \text{ нм}.$$

§6. Интерференция квазимонохроматического света

$$6.1. a) l_{\text{ког}} = \frac{c}{\Delta\nu} \approx 0,9 \cdot 10^{-6} \text{ м} \approx 1 \text{ мкм} ,$$

$$\text{где } \Delta\nu = \frac{c}{\lambda_1} - \frac{c}{\lambda_2} = 3,75 \cdot 10^{14} \text{ Гц} ; б) l_{\text{ког}} = \frac{c}{\Delta\nu} = 25 \text{ см} .$$

6.2. В красном в $\lambda_1 / \lambda_2 \approx 1,2$ раз.

$$6.3. \Delta\lambda = \lambda^2 / \Delta = 1,29 \cdot 10^{-2} \text{ \AA}.$$

Решение. Размывание интерференционной картины произойдет при наложении интерференционного максимума $(m+1)$ -го порядка для длины волны λ на максимум m -го порядка для длины волны $(\lambda+\Delta\lambda)$, что можно записать в виде:

$$m(\lambda + \Delta\lambda) = (m + 1)\lambda ,$$

откуда находим: $\Delta\lambda = \lambda / m_{\text{max}} = \lambda^2 / \Delta = 1,29 \cdot 10^{-2} \text{ \AA}$.

Замечание. Задачу можно решить, используя временной подход. Время когерентности $\tau_{\text{ког}}$ определяется из соотношения:

$$\tau_{\text{ког}} \Delta\nu \approx 1, \text{ откуда } \tau_{\text{ког}} \approx 1 / \Delta\nu . \text{ Так как } v \approx c / \lambda , \quad |\Delta\nu| \approx \frac{c |\Delta\lambda|}{\lambda^2} , \text{ то}$$

$$\tau_{\text{ког}} = \frac{\lambda^2}{c \Delta\lambda} , \text{ а длина когерентности равна } l_{\text{ког}} = c \tau_{\text{ког}} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} .$$

Интерференция наблюдается, если разность хода интерферирующих волн $\Delta < l_{\text{ког}}$, т.е. $\Delta \leq \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$, откуда

$$\Delta\lambda \leq \frac{\lambda^2}{\Delta} = 1,29 \cdot 10^{-2} \text{ \AA}.$$

$$6.4. \Delta\lambda = \frac{2\lambda}{N} = 10 \text{ нм} .$$

6.5. В центре экрана будет белая полоса, затем расположатся цветные полосы от фиолетовой до красной в первом порядке, потом во втором порядке начнется наложение максимумов для различных

длин волн. В дальнейшем цвета постепенно станут бледнеть, и за-светка экрана станет равномерной.

$$6.6. \Delta\lambda = \frac{dx_1^2}{lx_2} = 2,5 \text{ нм} .$$

$$6.7. \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{\Delta x \alpha n - 1} .$$

Решение. Угол между двумя плоскими волнами после про-хождения бипризмы равен 2δ , где $\delta = \alpha(n-1)$. Ширина полосы

$$\Lambda = \frac{\lambda}{2\delta} = \frac{\lambda}{2\alpha(n-1)} .$$

Максимальный порядок интерференции равен:

$$m_{\max} = \left[\frac{\Delta x / 2}{\Lambda} \right] = \left[\frac{\Delta x \alpha n - 1}{\lambda} \right] = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} , \text{ откуда } \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{\Delta x \alpha n - 1} .$$

$$6.8. x = \frac{\lambda^2}{\varepsilon (n-1)\Delta\lambda} \approx 6,2 \text{ мм} .$$

Указание. См. решение задачи 4.20.

$$6.9. 0,5 \text{ м} \leq l \leq 1,5 \text{ м} .$$

Решение. В ре-шении задачи 4.28 была получена шири-на интерференцион-ных полос для данной схемы:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\theta} = \frac{\lambda f}{h} = 0,05 \text{ мм} ,$$

где $\theta = h / f$.

Максимальная ширина области ин-терференции

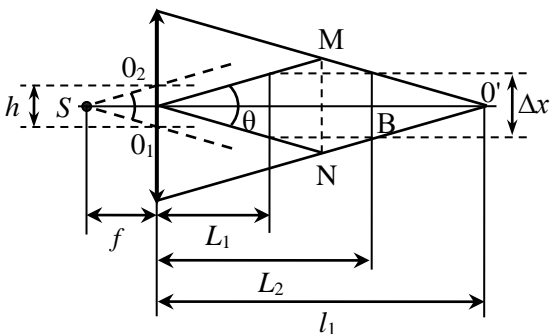


Рис. О.6.9.

$$MN = (D - h) / 2 = 1 \text{ см} .$$

Максимальное число наблюдаемых полос для квазимонохроматического света равно: $m_{\max} = \lambda / \Delta\lambda$, следовательно, ширина максимально возможной области наблюдения полос составляет:

$$\Delta x = 2m_{\max} \Lambda = \frac{2\lambda^2 f}{h\Delta\lambda} = 5 \text{ мм} < MN .$$

Первое возможное расстояние от экрана до билинзы L_1 . Из рис. О.6.9 видно, что $\frac{\Delta x}{2} = L_1 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$, откуда

$$L_1 = \frac{\Delta x}{2 \operatorname{tg}(\theta/2)} \approx \frac{\Delta x}{\theta} = \frac{\Delta x}{(h/f)} = \frac{2\lambda^2 f^2}{h^2 \Delta\lambda} = 0,5 \text{ м} .$$

Если экран передвигать дальше от билинзы, на нём по-прежнему будет видно максимально возможное число полос, пока расстояние от экрана до билинзы не станет равным L_2 (см. рис. О.6.9). В задаче 4.28 было определено расстояние $l_1 = 2,0 \text{ м}$. В силу симметрии $O'B = L_1$. Расстояние L_2 составляет:

$$L_2 = l_1 - L_1 = 1,5 \text{ м} .$$

6.10. $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2 (a + b)}{2ab\varphi^2} \approx 130 \text{ нм} .$

6.11. $\alpha_{\max} = \frac{c}{2h\Delta\nu} \approx 0,05 \text{ рад} .$

Решение. Как видно из рис. О.6.11, перед фотоприемником перекрываются пучки от двух точечных источников S и S' (мнимое изображение S в зеркале). Как и для схемы Юнга, разность хода интерферирующих пучков равна

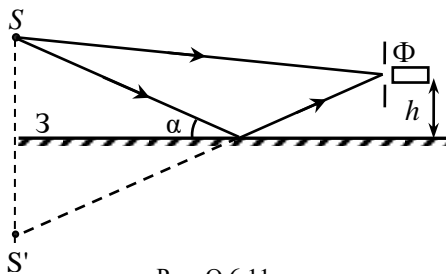


Рис. О.6.11.

$$\Delta = \frac{d \cdot h}{L} \approx 2\alpha \cdot h$$

($h, d \ll L$), и для прошедшего через фильтр света не должна превышать длину когерентности

$$l_{\text{ког}} = m_{\text{проп}} \lambda = \frac{v}{\Delta v} \cdot \frac{c}{v} = \frac{c}{\Delta v}.$$

Следовательно, максимальный угол возвышения источника равен

$$\alpha_{\text{max}} = \frac{c}{2h\Delta v} \approx 0,05 \text{ рад}.$$

6.12. Источник был приближен к зеркалу на расстояние $\Delta h = \left(1 - \frac{10\Delta\lambda}{\lambda}\right)h$.

$$\mathbf{6.13.} \quad I(\Delta) = 2I_0 \left[1 + \text{sinc} \left(\frac{\pi\delta v}{c} \Delta \right) \cdot \cos \left(\frac{2\pi v_0}{c} \Delta \right) \right].$$

Решение. Выделим в спектре узкий частотный интервал ширины δv (рис. О.6.13а), для него будем считать излучение монохроматическим с частотой v и интенсивностью

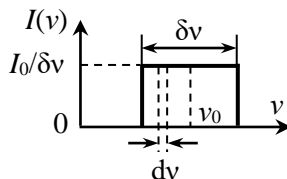


Рис. О.6.13а.

$$dI_v = \frac{I_0}{\delta v} \cdot dv.$$

Распределение интенсивности в интерференционной картине, даваемой этим участком, имеет вид:

$$dI(\Delta) = \frac{2I_0}{\delta v} [1 + \cos k \Delta] dv = \frac{2I_0}{\delta v} \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi v}{c} \Delta \right) \right] dv,$$

$$\text{где } k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi v}{c}.$$

Полная интенсивность от всех участков определяется суммой $dI(\Delta)$:

$$\begin{aligned} I(\Delta) &= \frac{2I_0}{\delta v} \int_{v_0 - \delta v/2}^{v_0 + \delta v/2} \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi v}{c} \Delta \right) \right] dv = \\ &= \frac{2I_0}{\delta v} \left[\delta v + \frac{\sin \left\{ 2\pi \left(v_0 + \frac{\delta v}{2} \right) \cdot \frac{\Delta}{c} \right\} - \sin \left\{ 2\pi \left(v_0 - \frac{\delta v}{2} \right) \cdot \frac{\Delta}{c} \right\}}{2\pi\Delta/c} \right] = \end{aligned}$$

$$= 2I_0 \left[1 + \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi \delta v}{c} \Delta \right) \cdot \cos \left(\frac{2\pi v_0}{c} \Delta \right) \right].$$

Характерный вид зависимости $I(\Delta)$ показан на рис. О.6.13б.

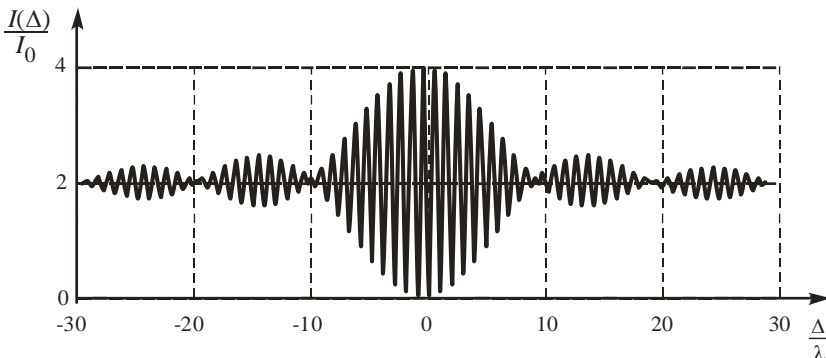


Рис. О.6.13б.

6.14.
$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \operatorname{sinc} \left(\pi \frac{\Delta \lambda \cdot d}{\lambda_0^2 \cdot l} x \right) \cos \left(2\pi \frac{d}{\lambda_0 \cdot l} x \right) \right];$$

$$V = \left| \operatorname{sinc} \pi \frac{\Delta}{\lambda_0^2 / \delta \lambda} \right|; \Delta X = 2 \cdot \frac{\lambda_0^2 l}{\delta \lambda \cdot d}.$$

Решение. В задаче 6.13 получена зависимость интенсивности в зависимости от разности хода:

$$I(\Delta) = 2I_0 \left[1 + \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi \delta v}{c} \Delta \right) \cdot \cos \left(\frac{2\pi v_0}{c} \Delta \right) \right].$$

Учитывая, что $v = \frac{c}{\lambda}$, $\delta v = \frac{c \delta \lambda}{\lambda^2}$, можно записать:

$$I(\Delta) = 2I_0 \left(1 + \operatorname{sinc} \pi \frac{\Delta}{\lambda_0^2 / \delta \lambda} \cos 2\pi \frac{\Delta}{\lambda_0} \right).$$

Поскольку в схеме Юнга $\Delta(x) \approx \frac{d}{l} x$, распределение интенсивности на экране имеет вид:

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \operatorname{sinc} \left(\pi \frac{\Delta \lambda \cdot d}{\lambda_0^2 \cdot l} x \right) \cos \left(2\pi \frac{d}{\lambda_0 \cdot l} x \right) \right].$$

Видность V интерференционной картины равна:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \left| \operatorname{sinc} \pi \frac{\Delta}{\lambda_0^2 / \delta \lambda} \right|.$$

Найдем порядок интерференции m , в котором видность становится равной нулю:

$$\frac{\pi \Delta}{\lambda_0^2 / \delta \lambda} = \pi, \quad \Delta = m \lambda_0 = \frac{\lambda_0^2}{\delta \lambda}, \quad \text{откуда } m_{V=0} = \frac{\lambda_0}{\delta \lambda}.$$

Для ширины интерференционной картины в квазимонохроматическом свете получаем:

$$\Delta X = 2m_{V=0} \cdot \Lambda = 2 \cdot \frac{\lambda_0^2 l}{\delta \lambda \cdot d},$$

где $\Lambda = \frac{\lambda_0 l}{d}$ — ширина интерференционных полос в схеме Юнга.

6.15. $\gamma(\tau) = \operatorname{sinc}(\pi \delta \nu \cdot \tau) \cos(2\pi \nu_0 \tau)$.

Решение. Пусть амплитуда вектора \mathbf{E} интерферирующих волн равна E_0 . Рассчитаем комплексную функцию корреляции

$$\Gamma(\tau) = \left\langle E_{\kappa}(t) E_{\kappa}^*(t + \tau) \right\rangle_{\Delta T}.$$

Для стационарных полей можно положить $t = 0$. Тогда

$$\Gamma(\tau) = \left\langle E_{\kappa}(0) E_{\kappa}^*(\tau) \right\rangle_{\Delta T}.$$

Найдем $E(t)$ по известному частотному спектру излучения:

$$E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{E_0}{2\pi} \int_{\omega_0 - \delta\omega/2}^{\omega_0 + \delta\omega/2} e^{i\omega t} d\omega = \frac{E_0 \delta\omega}{2\pi} \cdot \operatorname{sinc} \left(\frac{\delta\omega t}{2} \right) e^{i\omega_0 t}.$$

Тогда $E(0) = \frac{E_0 \delta\omega}{2\pi}$, $E(\tau) = \frac{E_0 \delta\omega}{2\pi} \cdot \operatorname{sinc} \left(\frac{\delta\omega \tau}{2} \right) e^{i\omega_0 \tau}$, и

$$\Gamma(0) = \frac{E_0^2 (\delta\omega)^2}{4\pi^2} = I_0,$$

$$\Gamma(\tau) = \frac{E_0^2 (\delta\omega)^2}{4\pi^2} \cdot \text{sinc} \left(\frac{\delta\omega\tau}{2} \right) e^{i\omega_0\tau} = I_0 \text{sinc} \left(\frac{\delta\omega \cdot \tau}{2} \right) e^{i\omega_0\tau}.$$

Взяв действительную часть $\Gamma(\tau)$, для комплексной степени когерентности находим:

$$\gamma(\tau) = \frac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(0)} = \text{sinc} \left(\frac{\delta\omega \cdot \tau}{2} \right) \cos \omega_0 \tau.$$

Переходя от круговой частоты ω к частоте ν , получим:

$$\gamma(\tau) = \text{sinc}(\pi\delta\nu \cdot \tau) \cos(2\pi\nu_0 \tau).$$

При этом основное уравнение интерференции имеет вид:

$$I(\tau) = 2I_0 [1 + |\gamma(\tau)| \cos \omega_0 \tau],$$

а видность интерференционной картины $V = |\gamma(\tau)|$.

$$\mathbf{6.16.} \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{(n-1)h}.$$

Решение. Для квазимонохроматического света порядок пропадаания интерференционной картины равен: $m_{\text{проп}} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$. Пластина внесла дополнительную разность хода

$$\Delta_{\text{доп}} = (n-1)h.$$

Так как картина размылась в центре экрана, то

$$\Delta_{\text{доп}} = m_{\text{проп}} \lambda,$$

откуда $(n-1)h = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}; \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{(n-1)h}.$

6.17. а) в центре 10 колец размоются, а остальные на периферии будут видны; **б)** чередующиеся темные и светлые кольца; всего таких колец можно наблюдать ~ 40 .

$$\mathbf{6.18.} \quad \delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2nh} = 0,64 \text{ нм}.$$

$$\mathbf{6.19.} \quad m_{\text{max}} = \frac{\lambda}{\delta\lambda} \approx 54600; \quad x = \frac{\lambda^2}{2\varepsilon\delta\lambda} \approx 51,3 \text{ м}; \quad h = \frac{\lambda^2}{2\delta\lambda} \approx 14,9 \text{ см}.$$

Решение. 1) Поскольку источник света – квазимонохроматический, то максимальный порядок интерференции (а значит, и максимальное число полос) равен:

$$m_{\max} = \lambda / \delta\lambda \approx 54600 .$$

2) Расстояние между двумя полосами интерференционной картины на поверхности клина равно (см. задачу 5.15):

$$\Lambda = \frac{\lambda}{2\varepsilon} = 0,94 \text{ мм} .$$

Последняя из наблюдаемых полос отстояла бы от вершины клина на расстоянии

$$x = m_{\max} \Lambda = \frac{\lambda^2}{2\varepsilon\delta\lambda} \approx 51,3 \text{ м} ,$$

а толщина клина в этом месте была бы равна

$$h = m_{\max} \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda^2}{2\delta\lambda} \approx 14,9 \text{ см} .$$

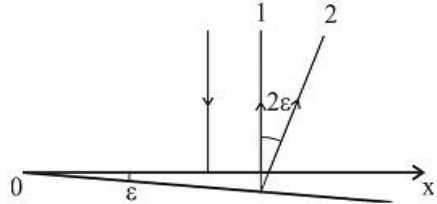


Рис. О.6.19. Формирование интерференционной картины в воздушном клине между двумя стеклянными пластинками.

6.20. а) Равномерно освещенное поле зрения; б) наблюдается ~30 чередующихся светлых и темных полос, параллельных линии пересечения плоскостей, ограничивающий воздушный зазор, после чего картина размывается.

$$\mathbf{6.21.} \quad x = \frac{\lambda^2}{2\varepsilon\delta\lambda \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \approx 64 \text{ мм} .$$

Решение. На поверхности клина интерферируют световые пучки, отраженные от верхней и нижней поверхностей клина, образуя полосы равной толщины. Ширина интерференционных полос равна (см. задачу 5.11):

$$\Lambda = \frac{\lambda}{2\varepsilon \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} .$$

Если свет квазимонохроматический, то максимальный порядок интерференции (а значит, и максимальное число полос) равен:

$$m_{\max} = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = 100 .$$

Интерференционные полосы исчезнут на расстоянии от вершины клина, равном

$$x = m_{\max} \Lambda = \frac{\lambda^2}{2\varepsilon\delta\lambda \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \approx 64 \text{ мм} .$$

$$6.22. h = \frac{\lambda}{2n} \cdot \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \approx 0,2 \text{ мм} .$$

$$6.23. \frac{\Delta l}{l} = \frac{\lambda_2}{2\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2 / \Delta\lambda_2}{\lambda_1 / \Delta\lambda_1} = 0,72 .$$

Указание. См. решение задачи 6.21.

$$6.24. I(\Delta) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{\pi\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \Delta \right) \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta \right) \right],$$

$$\text{где } \Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}; V = \left| \cos \left(\frac{\pi\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \Delta \right) \right| .$$

Решение. Интенсивности каждой из спектральных компонент λ_1 и λ_2 на выходе интерферометра равны

$$I_1 = I_0(1 + \cos \delta_1), \quad I_2 = I_0(1 + \cos \delta_2),$$

где $\delta_i = k_i \Delta = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda_i}$. Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то пучки не интерферируют,

и результирующая интенсивность на выходе $I = I_1 + I_2$, или

$$\begin{aligned} I &= 2I_0 \left(1 + \cos \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} \cos \frac{\delta_2 + \delta_1}{2} \right) = \\ &= 2I_0 \left(1 + \cos \frac{(k_2 - k_1)\Delta}{2} \cos \frac{(k_2 + k_1)\Delta}{2} \right). \end{aligned}$$

Поскольку $k = 2\pi/\lambda$, формулу можно записать в виде:

$$I(\Delta) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{\pi\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \Delta \right) \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta \right) \right],$$

$$\text{где } \Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} .$$

Если $|\Delta\lambda| \ll \lambda_1, \lambda_2$ (условие квазимонохроматичности), то график зависимости $I(\Delta)$ имеет вид "биений" (рис. О.6.24а).

Видность $V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \left| \cos \left(\frac{\pi\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \Delta \right) \right|$ периодически изменяется от 1 до 0 (рис.О.6.24б). Первый раз интерференционная картина пропадает ($V = 0$), если $\Delta = \frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda}$.

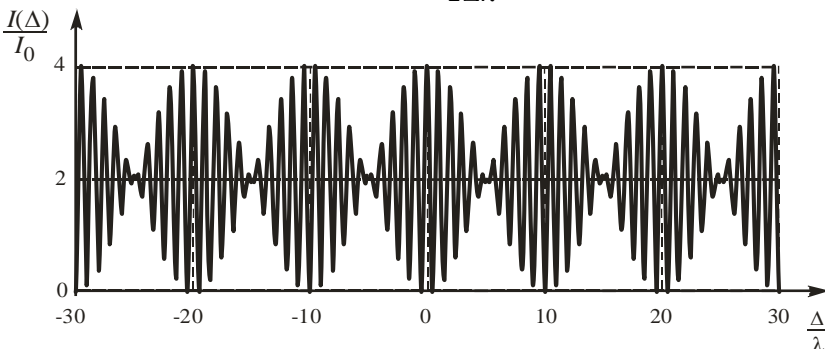


Рис. О.6.24а.

Этой разности ход соответствует порядок интерференции

$$m_{\text{проп}} = \left[\frac{\Delta}{\lambda_0} \right] = \left[\frac{\lambda_0}{2\Delta\lambda} \right].$$

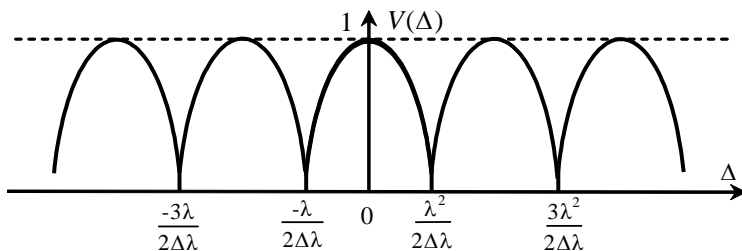


Рис. О.6.24б.

При увеличении разности хода видность снова становится равной 1, т.е. интерференционная картина восстанавливается, а потом периодически пропадает при порядках интерференции

$$m_{k \text{ проп}} = \left[\frac{(2k+1)\Delta}{2\lambda_0} \right] = \left[\frac{(2k+1)\lambda_0}{2\Delta\lambda} \right], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\mathbf{6.25.} \quad \Delta\lambda = \lambda_{\text{ср}} / (2N_1) \cong 0,6 \text{ нм} .$$

Решение. Для решения задачи можно воспользоваться результатом, полученным в задаче 6.24. Видность обращается в ноль (интерференционная картина пропадает) при порядках интерференции

$$m_{k \text{ проп}} = \left[\frac{(2k+1)\lambda_0}{2\Delta\lambda} \right], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, $\lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$.

Видность становится равной 1 при

$$m_n = \left[\frac{n\lambda_0}{\Delta\lambda} \right], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Подставляя данные задачи, получаем:

$$m_{1 \text{ проп}} = \left[\frac{\lambda_0}{2\Delta\lambda} \right] = 490, \quad m_{2 \text{ проп}} = \left[\frac{3\lambda_0}{2\Delta\lambda} \right] = 1470 \text{ и т.д.}$$

откуда
$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0}{2N_1} \cong 0,6 \text{ нм} .$$

Замечание. Найти порядок интерференции, при котором пропадает интерференционная картина, можно из условия наложения интерференционного максимума для одной длины волны на минимум для другой. Так, первое пропадание картины соответствует условию (при $\Delta\lambda \ll \lambda_1, \lambda_2$):

$$m_{1 \text{ проп}} \cdot \lambda_1 = \left(m_{1 \text{ проп}} - \frac{1}{2} \right) \cdot (\lambda_1 + \Delta\lambda),$$

где $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$. Отсюда находим:

$$m_{1 \text{ проп}} = \left[\frac{\lambda_1}{2\Delta\lambda} \right] \approx \left[\frac{\lambda_0}{2\Delta\lambda} \right], \text{ где } \lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} .$$

Следующие исчезновения картины произойдут при совпадении максимума для одной длины волны с последующими минимумами для другой:

$$m_{2 \text{ проп}} = \left[\frac{3\lambda_0}{2\Delta\lambda} \right], \quad m_{3 \text{ проп}} = \left[\frac{5\lambda_0}{2\Delta\lambda} \right] \text{ и т.д.}$$

6.26. Двум близким длинам волн соответствуют две системы колец Ньютона с незначительно отличающимися размерами. Когда линза соприкасается с пластиной, по мере удаления от центра кольца периодически пропадают, а потом снова становятся резкими. Первое пропадание колец происходит при порядке интерференции

$$m_{\text{проп}} \approx \frac{\lambda_1}{2\Delta\lambda} = 490, \text{ следующее — при } m_2 = \frac{3\lambda_1}{2\Delta\lambda} = 1470 \text{ и т.д. (см.}$$

задачу 6.25). Первое восстановление резкости колец произойдет в окрестности кольца с номером $n_1 \approx 2 \cdot \frac{\lambda_1}{2\Delta\lambda} = 2 \cdot 490 = 980$, следующее — при $n_2 \approx 2\lambda_1 / \Delta\lambda = 1960$ и т.д.

При удалении линзы от пластинки кольца стягиваются к центру. Если линзу переместить на $490\lambda_1$, через поле зрения пройдет 490 пар колец, а в центре картины кольца исчезнут. При перемещении линзы на $980\lambda_1$ кольца в центре снова будут резкими, при перемещении на $3 \cdot 490\lambda_1 = 1470\lambda_1$ опять пропадут и т.д.

$$\mathbf{6.27.} \quad \Delta l = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} \approx \frac{\lambda_{\text{ср}}^2}{2\Delta\lambda} \approx 0,08 \text{ мм} .$$

Указание. Условие перехода от одной четкой картины к следующей: $(m+1)\lambda_1 = m\lambda_2$, а соответствующее перемещение зеркала удовлетворяет условию: $2\Delta l = m\lambda_2$.

$$\mathbf{6.28.} \quad I(\Delta) = 2I_0 \left[1 + \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi\delta\lambda}{\lambda_0^2} \Delta \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \Delta \right) \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta \right) \right];$$

$$V(\Delta) = \left| \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi\delta\lambda}{\lambda_0^2} \Delta \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \Delta \right) \right|.$$

Решение. Спектр источника показан на рис. О.6.28а, для удобства расчетов он задается в зависимости от волнового числа k .

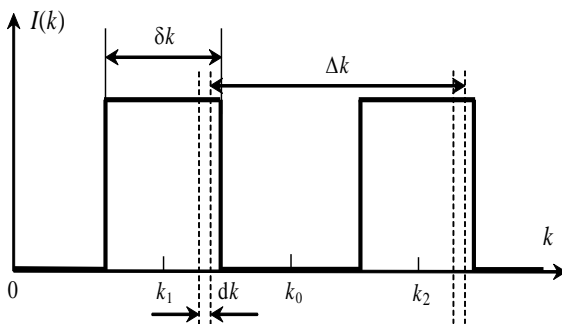


Рис. О.6.28а.

Для каждого из узких участков dk в спектрах двух линий, отстоящих на Δk друг от друга, вклад в интерференционную картину равен (см. задачу 6.24):

$$dI(\Delta) = \frac{2I_0}{\delta k} \left[1 + \cos \frac{\Delta k \cdot \Delta}{2} \cos k \Delta \right] dk,$$

где $\Delta k = k_2 - k_1$, $k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}$. Интегрируя по k в пределах $k_0 \pm \delta k / 2$, получаем:

$$I(\Delta) = 2I_0 \left[1 + \operatorname{sinc} \frac{\delta k \cdot \Delta}{2} \cdot \cos \frac{\Delta k \cdot \Delta}{2} \cdot \cos k_0 \Delta \right].$$

Поскольку $k = 2\pi / \lambda$, формулу можно записать в виде:

$$I(\Delta) = 2I_0 \left[1 + \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi \delta \lambda}{\lambda_0^2} \Delta \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi \Delta \lambda}{\lambda_0^2} \Delta \right) \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta \right) \right],$$

где $\Delta \lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, $\lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$.

Видность интерференционной картины в этом случае равна (рис.О.6.28б):

$$V(\Delta) = \left| \operatorname{sinc} \frac{\delta k \cdot \Delta}{2} \cdot \cos \frac{\Delta k \cdot \Delta}{2} \right| = \left| \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi \delta \lambda}{\lambda_0^2} \Delta \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi \Delta \lambda}{\lambda_0^2} \Delta \right) \right|.$$

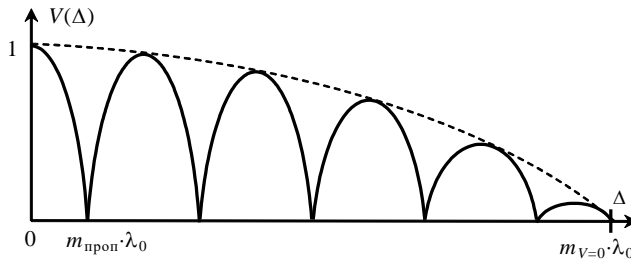


Рис. О.6.28б.

Таким образом, по мере увеличения разности хода Δ интерференционная картина периодически исчезает (когда

$$\Delta = \frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda}, \frac{3\lambda_0^2}{2\Delta\lambda}, \dots, \text{ или } m_{\text{проп}} = \frac{\Delta}{\lambda_0} = \frac{\lambda_0}{2\Delta\lambda}, \frac{3\lambda_0}{2\Delta\lambda}, \dots),$$

при этом максимальное значение видности постепенно уменьшается до нуля при $\Delta = \frac{\lambda_0^2}{\delta\lambda}$ ($m_{V=0} \approx \frac{\lambda_0}{\delta\lambda}$).

$$\mathbf{6.29.} \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda_{\text{ср}}}{\Delta m} \approx 0,6 \text{ нм}, \quad \delta\lambda = \frac{\lambda_0}{m_1 + n \cdot \Delta m} \approx 11 \cdot 10^{-3} \text{ нм}.$$

Решение. Можно воспользоваться решением задачи 6.28. Исчезновение интерференционной картины происходит, когда

$$\cos \left(\frac{\pi \Delta \lambda}{\lambda_0^2} \Delta \right) = 0,$$

$$\text{т.е.} \quad \frac{\pi \Delta \lambda}{\lambda_0^2} \Delta = \frac{(2k+1)\pi}{2} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0^2} \Delta = k + \frac{1}{2}. \quad (*)$$

Первое исчезновение произойдет при

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0^2} \Delta_1 = \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0^2} \cdot m_{\text{проп}} \lambda_0 = \frac{1}{2},$$

$$\text{откуда} \quad m_{\text{проп}} = \frac{\lambda_0}{2\Delta\lambda} \quad \text{и} \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda_{\text{ср}}}{2m_1} \approx 0,6 \text{ нм}.$$

Это значение можно также найти из условия наложения максимума одной длины волны на минимум другой (см. замечание к задаче 6.25).

Между двумя соседними k -м и $(k+1)$ -м пропадающими картины наблюдается Δm колец, т.е.

$$\Delta_{k+1} - \Delta_k = \Delta m \cdot \lambda_0.$$

Используя формулу (*), получаем:

$$(\Delta_{k+1} - \Delta_k) \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} = 1, \text{ откуда } \Delta\lambda = \frac{\lambda_{\text{ср}}}{\Delta m} \approx 0,6 \text{ нм}.$$

Полное исчезновение интерференционной картины связано с тем, что каждая из линий дублета имеет ширину $\delta\lambda$.

Это исчезновение происходит при $m_{V=0} \approx \frac{\lambda_0}{\delta\lambda}$. До этого момента наблюдалось $m_{V=0} = m_1 + n \cdot \Delta m = 51450$ колец, откуда определяем ширину каждой линии:

$$\delta\lambda = \frac{\lambda_0}{m_1 + n \cdot \Delta m} \approx 11 \cdot 10^{-3} \text{ нм}.$$

§7. Интерференция света от протяженных источников

7.1. $x_0 = -\xi \frac{l}{L}$; интерференционная картина, не меняя своих параметров, смещается на расстояние x_0 .

Решение. Координаты точек в плоскостях источника и экрана обозначим через ξ и x соответственно (рис. О.7.1).

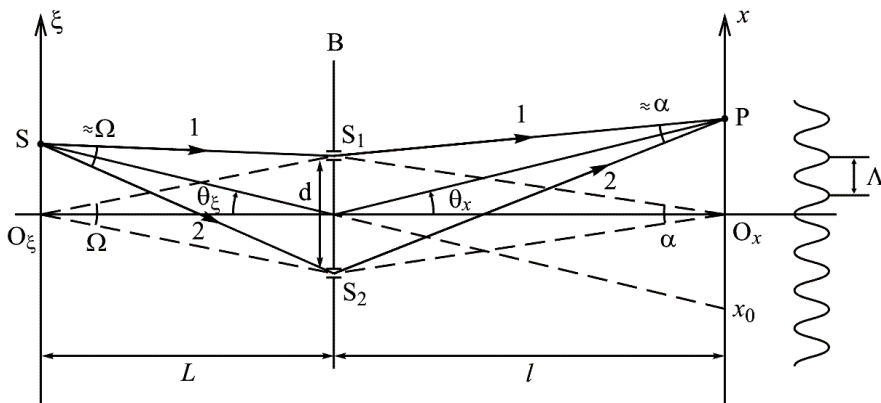


Рис. О.7.1.

Когда щель S равноудалена от щелей S_1 и S_2 ($\xi_s = 0$), разность хода $\Delta(x) = r_2(x) - r_1(x)$ между лучами 1 и 2, идущими из точки S через точки S_1 и S_2 в точку P на экране, равна (см. задачу 4.7):

$$\Delta(x) = \frac{d}{l} x,$$

координаты максимумов $x_m = \frac{\lambda l m}{d}$, ширина интерференционных полос:

$$\Lambda = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda l}{d} \approx \frac{\lambda}{\alpha},$$

где α – угол схождения интерферирующих лучей вблизи центра экрана O_x .

В этом случае в центре экрана O_x ($x = 0$) находится максимум нулевого порядка.

Если щель S сместить перпендикулярно оси симметрии на ξ , то (в приближении $L \gg d, \xi$) между лучами 1 и 2 появится дополнительная разность хода, которая рассчитывается аналогично разности хода $\Delta(x)$ (см. задачу 4.7):

$$\Delta(\xi) = \frac{d}{L} \xi,$$

и для лучей 1 и 2 суммарная разность хода Δ (от источника S до точки наблюдения P) будет равна

$$\Delta = \Delta(\xi) + \Delta(x) = \frac{d}{L} \xi + \frac{d}{l} x = \Omega \xi + \alpha x,$$

где $\Omega = \frac{d}{L}$ – апертура интерференции.

Условие интерференционных максимумов запишется в виде:

$$\frac{d}{L} \xi + \frac{d}{l} x = m \lambda,$$

откуда определяем координаты максимумов:

$$x_m = \frac{\lambda l}{d} m - \frac{l}{L} \xi.$$

Видно, что нулевой максимум сместится на расстояние

$$x_0 = -\xi \frac{l}{L} = -\xi \frac{\Omega}{\alpha},$$

что можно переписать в виде: $\frac{\xi}{L} = -\frac{x_0}{l}$. Из последнего соотношения получаем, что центр картины оказывается на продолжении линии, соединяющей источник S и точку, расположенную посередине между щелями S_1 и S_2 .

При малом смещении источника ширина интерференционных полос

$$\Lambda = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda l}{d}$$

не изменяется. Таким образом, интерференционная картина, не меняя своих параметров, смещается как целое на расстояние x_0 .

$$7.2. D < \frac{\lambda L}{d}.$$

Решение. Координаты точек в плоскостях источника и экрана обозначим через ξ и x соответственно (см. рис. О.7.1).

Каждая точка источника дает свою интерференционную картину на экране, причем эти картины смещены друг относительно друга. Максимальное смещение максимума нулевого порядка x_{\max} (от крайних точек источника с координатами $\xi_1 = D/2$ и $\xi_2 = -D/2$) определяется соотношением (см. задачу 7.1):

$$x_{\max} = \frac{l}{L} \cdot \frac{D}{2}.$$

Интерференционные полосы сольются, если x_{\max} превысит $1/2$ ширины интерференционной полосы $\Lambda = \frac{\lambda l}{d}$, т.е. максимумы нулевого порядка для источников в точках ξ_1 и ξ_2 окажутся точно в первых минимумах для источника в точке $\xi = 0$. Таким образом, чтобы интерференционная картина не смазалась, должно выполняться условие:

$$\frac{l}{L} \cdot \frac{D}{2} < \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda l}{d}, \text{ т.е. } D < \frac{\lambda L}{d} = \frac{\lambda}{\Omega},$$

где Ω – апертура интерференции.

Замечание. Данное решение является не строгим, а оценочным, однако приводит к правильному результату.

$$7.3. I(x) = 2I_0 \left(1 + \operatorname{sinc} \frac{\pi d D}{\lambda L} \cdot \cos \frac{2\pi dx}{\lambda l} \right); V = \left| \operatorname{sinc} \left(\pi \frac{d D}{\lambda L} \right) \right|.$$

Решение. Рассмотрим источник как совокупность элементарных независимых источников шириной $\delta\xi$ с интенсивностью $dI = \frac{I_0}{D} \delta\xi$. Вклад каждого из таких источников в интерференционную картину равен

$$dI_{\xi} = 2I_0 \cdot \frac{\delta\xi}{D} (1 + \cos k \Delta),$$

где разность хода между интерферирующими пучками равна (см. задачу 7.1):

$$\Delta = \Delta_{\xi} + \Delta_x = \frac{d}{L} \xi + \frac{d}{l} x.$$

Так как отдельные участки источника света не являются когерентными, интерференционные картины от этих участков складываются, и суммарную интенсивность I на экране находим интегрированием по координатам источника. При этом представим $\cos k\Delta$ в виде:

$$\cos k\Delta = \cos k(\Delta_{\xi} + \Delta_x) = \cos(k \Delta_{\xi}) \cos(k \Delta_x) - \sin(k \Delta_{\xi}) \sin(k \Delta_x)$$

и учтем, что интеграл от нечетной функции ("синус") в симметричных пределах равен нулю. В итоге получим:

$$I(x) = 2I_0 \int_{-D/2}^{D/2} \left(1 + \cos k \Delta_{\xi} \cdot \cos k \Delta_x\right) \frac{\delta \xi}{D} = 2I_0 \left(1 + \operatorname{sinc} \frac{\pi d D}{\lambda L} \cdot \cos \frac{2\pi dx}{\lambda l}\right).$$

Видность интерференционной картины V равна:

$$V = \left| \operatorname{sinc} \left(\pi \frac{dD}{\lambda L} \right) \right|.$$

График зависимости видности от размера источника приведен на рис.О.7.3.

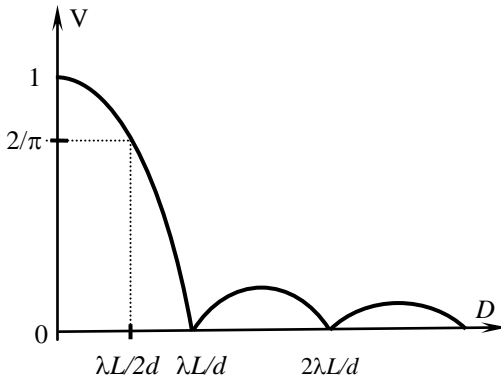


Рис. О.7.3.

Видность первый раз обращается в нуль, если $\pi \frac{dD}{\lambda L} = \pi$, откуда находим размер источника, при котором интерференционная картина полностью размывается:

$$D_{\text{разм}} = \frac{\lambda L}{d}.$$

Принято считать, что картина еще хорошо видна, если размер источника в два раза меньше, чем $D_{\text{разм}}$, т.е

$$D_{\text{хор. видн.}} = \frac{\lambda L}{2d}.$$

Как показано на рис. О.7.3, видность при этом равна $V = \frac{2}{\pi} \approx 0,64$.

$$7.4. L_{\text{max}} \approx \frac{Dd}{\lambda} = 100 \text{ м}.$$

Решение. Для нелазерного источника радиус когерентности излучения

$$r_k \approx \frac{\lambda L}{D},$$

где L – расстояние от источника (с поперечным размером D) до точки наблюдения. Предел разрешающей способности прибора можно оценить из условия: $d \geq r_k$, где d – входная апертура прибора. Из этого соотношения получаем:

$$L_{\text{max}} \approx \frac{Dd}{\lambda} = 100 \text{ м}.$$

$$7.5. L \leq \frac{Dd}{\lambda} = 10 \text{ км}.$$

$$7.6. D \geq \frac{\lambda L}{d} \approx 34 \text{ м}.$$

$$7.7. d < \frac{\lambda}{\psi} \approx 0,05 \text{ мм}.$$

Указание. Записать условие пропадания интерференционной

картины $\frac{Dd}{\lambda L} = 1$ в виде $\frac{d}{\lambda} \cdot \psi = 1$.

$$7.8. r_k \approx \frac{\lambda}{\Omega} = 50 \text{ м.}$$

$$7.9. r_k \approx \frac{\lambda L}{D} \approx 0,05 \text{ мм.}$$

$$7.10. D_{\text{проп}} = \frac{\lambda(a+b)}{2\varphi b} = 0,12 \text{ мм.}$$

Решение. Ширина полос на экране равна (см. задачу 4.16):

$$\Lambda = \frac{\lambda(a+b)}{2\varphi a} \approx 1 \text{ мм.}$$

Поскольку при зеркальном отражении размеры мнимых источников (S_1, S_2) и источника S одинаковы, а угол 2φ относительно мал, можно считать, что поперечные размеры источников S_1 и S_2 равны D .

Рассмотрим крайнюю точку источника S , смещенную от его центра на $D/2$, например, по часовой стрелке. Ее изображения в мнимых источниках (S_1, S_2) сместятся от их центров на такое же расстояние $D/2$, но уже против часовой стрелки (см. решение задачи 4.17). Вследствие равенства расстояний от точки O мнимые источники будут излучать в одной фазе. Максимум нулевого порядка для этих мнимых источников сместится от точки O_x на экране вверх на расстояние $\frac{D}{2} \cdot \frac{b}{a}$. Интерференционная картина полностью размоется, если это смещение будет равно половине ширины полосы $\Lambda/2$, откуда получим:

$$\frac{D}{2} \cdot \frac{b}{a} = \frac{\lambda(a+b)}{4\varphi a}; \quad D_{\text{проп}} = \frac{\lambda(a+b)}{2\varphi b} = 0,12 \text{ мм.}$$

$$7.11. D = \frac{\lambda(r+b)}{4\epsilon b} = \frac{5}{18} \cdot \frac{\lambda}{\epsilon}.$$

Указание. Интерференционная картина считается достаточно отчетливой, если $D \leq \frac{1}{2} D_{\text{проп}}$.

$$7.12. D_{\text{max}} \approx \frac{\lambda(a+b)}{4b\varepsilon(n-1)} \approx 0,06 \text{ мм}.$$

Решение. В случае точечного источника расстояние между полосами на экране равно (см. задачу 4.20):

$$\Lambda = \frac{\lambda(a+b)}{a \cdot 2\varepsilon(n-1)}.$$

При смещении источника, например, вверх на $\Delta\xi$, максимум нулевого порядка сместится вниз на $\Delta x = \frac{b}{a} \cdot \Delta\xi$ (см. задачу 7.1).

Интерференционная картина полностью размоется, если максимум нулевого порядка для крайней точки источника ($\xi = D/2$) окажется точно в первом минимуме для источника в точке $\xi = 0$ (см. задачу 7.2), т.е.

$$\Delta x = \frac{\Lambda}{2} = \frac{b}{a} \cdot \Delta\xi = \frac{b}{a} \cdot \frac{D_{\text{разм}}}{2},$$

откуда
$$D_{\text{разм}} = \frac{a}{b} \cdot \Lambda = \frac{a}{b} \cdot \frac{\lambda(a+b)}{a \cdot 2\varepsilon(n-1)} = \frac{\lambda(a+b)}{b \cdot 2\varepsilon(n-1)}.$$

Картина будет еще достаточно четкой, если

$$D = \frac{D_{\text{разм}}}{2} = \frac{\lambda(a+b)}{4b\varepsilon(n-1)} \approx 0,06 \text{ мм}.$$

$$7.13. a) \psi \leq \frac{\lambda}{H} = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ рад}; \quad б) \psi \leq \frac{\lambda}{4l\varepsilon(n-1)} \approx 8 \cdot 10^{-5} \text{ рад}.$$

Решение. При падении на бипризму пучка света, параллельно-оптической оси, в результате преломления образуются два частично перекрывающихся параллельных пучка, идущих под углом

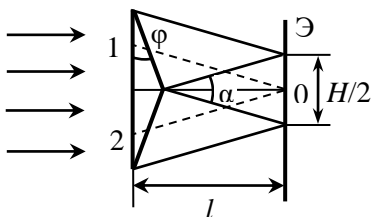


Рис. О.7.13.

$\alpha = 2(n-1)\varphi$ друг к другу (см. задачу 4.22).

а) Ширина зоны перекрывания пучков имеет максимальное значение, равное $H/2$ (рис. О.7.13), на расстоянии

$$l_0 = \frac{H/2}{\alpha} = \frac{H}{4(n-1)\varphi} = 1 \text{ м}.$$

Для наблюдения четкой интерференционной картины необходимо, чтобы угловой размер источника ψ удовлетворял условию:

$$\psi \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{d},$$

где d в данном случае – расстояние между двумя точками на бипризме, лучи из которых придут в центр интерференционной картины т. О.

Из рис. О.7.13 видно, что расстояние между этими точками 1 и 2 равно

$$d \approx l\alpha = H/2.$$

В результате получаем:

$$\psi \leq \frac{\lambda}{H} = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ рад}.$$

б) При расстоянии $l < l_0$ до экрана условие наблюдения четкой интерференционной картины запишется в виде:

$$\psi \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{d} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{l\alpha} = \frac{\lambda}{4l\varphi(n-1)} \approx 8 \cdot 10^{-5} \text{ рад}.$$

$$7.14. D = \frac{\lambda f^2}{lh}.$$

$$7.15. D = \frac{\lambda}{2h} \cdot \left(a - f - \frac{af}{L} \right) \approx 0,1 \text{ мм}.$$

Решение. За билинзой формируются два действительных, перевернутых, увеличенных изображения S_1 и S_2 источника света S (щели) (рис. О.7.15). По формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

находим расстояние b до этих изображений: $b = \frac{af}{a-f}$.

Расстояние между центрами изображений $\Delta y = \frac{h(a+b)}{a}$,

а их размер равен: $D' = D \cdot \frac{b}{a} = D \cdot \frac{f}{a-f}$.

Период интерференционной картины на экране составляет:

$$\Lambda = \lambda / \alpha,$$

где
$$\alpha \approx \frac{\Delta y}{L-b} = \frac{h(a+b)}{a \left(L - \frac{af}{a-f} \right)} = \frac{ha}{L(a-f) - af}$$

угол схождения интерферирующих лучей (см. рис. О.7.15).

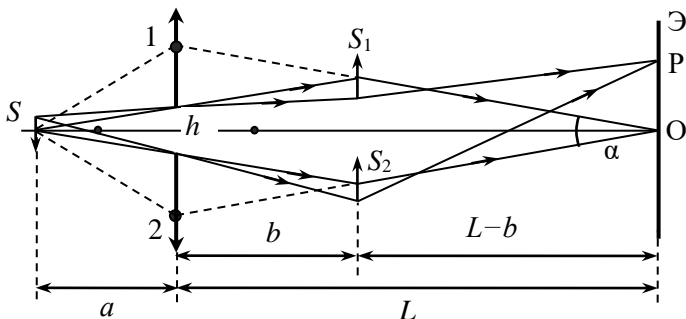


Рис. О.7.15.

Для оценки допустимого размера источника необходимо построить ход двух лучей, вышедших из центральной точки источника S и пришедших в центр интерференционной картины. Эти лучи должны преломиться в билинзе и пройти через центральные точки изображений S_1 и S_2 . Из рис. О.7.15 видно, что лучи пройдут через точки 1 и 2 на билинзе. Расстояние между ними и будет равно базе интерференции d , входящей в формулу для оценки размера источника, при котором произойдет размытие интерференционной картины:

$$D_{\text{разм}} = \frac{\lambda a}{d}.$$

Из рис. О.7.15 следует:

$$d = L\alpha = \frac{haL}{L(a-f) - af},$$

откуда

$$D_{\text{разм}} = \frac{\lambda(L(a-f) - af)}{hL} = \frac{\lambda}{h} \cdot \left(a - f - \frac{af}{L} \right).$$

Картина будет наблюдаться ещё отчетливо, если

$$D = \frac{D_{\text{разм}}}{2} = \frac{\lambda}{2h} \cdot \left(a - f - \frac{af}{L} \right) \approx 0,1 \text{ мм}.$$

7.16. $x = \frac{\lambda l}{2D} = 25 \text{ мм}.$

Решение. В случае точечного монохроматического источника угол схождения интерферирующих лучей в центре экрана т. О (см.

рис. О.7.16) $\alpha_0 \approx \frac{2h}{l}$, а ширина интерференционных полос

$$\Lambda_0 \approx \frac{\lambda}{\alpha_0} = 0,25 \text{ мм}.$$

При интерференции в случае протяженного источника для разных его малых участков, находящихся на различных расстояниях от плоскости зеркала, ширина полос Λ будет различна. Поэтому следует учесть вариацию $\delta\alpha$ угла схождения лучей от разных участков источника S и его зеркального изображения S' и, как следствие, вариацию $\delta\Lambda$.

Вблизи нулевого максимума картина будет видна отчетливо, а по мере удаления от него постепенно начнет размываться. При этом момент полного размывания картины можно оценить из условия:

$$m_{\text{max}} \delta\Lambda \approx \Lambda_0.$$

Поскольку

$$|\delta\Lambda| = \lambda \frac{\delta\alpha}{\alpha_0^2} = \Lambda_0 \frac{\delta\alpha}{\alpha_0} = \Lambda_0 \frac{D}{h},$$

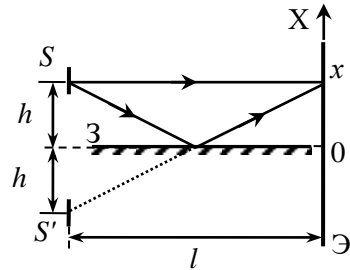


Рис. О.7.16.

определяем номер максимума, при котором картина полностью размыта:

$$m_{\max} \delta\Lambda = m_{\max} \Lambda_0 \cdot \frac{D}{h} \approx \Lambda_0 \rightarrow m_{\max} = \frac{h}{D} = 100 .$$

Расстояние x на экране до места размытия картины составит:

$$x = m_{\max} \Lambda_0 = \frac{h}{D} \cdot \frac{\lambda l}{2h} = \frac{\lambda l}{2D} = 25 \text{ мм} .$$

7.17. $\delta\varphi_{\max} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot \delta\lambda}{\lambda}} \approx 21' .$

Решение. Расстояние между двумя полосами интерференционной картины на поверхности клина равно (см. задачу 5.16):

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda}{2\varepsilon} .$$

Поскольку источник света квазимонохроматический, то максимальный порядок интерференции (а значит, и максимальное число полос) равен

$$m_{\max} = \frac{\lambda}{\delta\lambda} .$$

Последняя из наблюдаемых полос отстояла бы от вершины клина на расстояние

$$x = m_{\max} \cdot \Lambda ,$$

а толщина клина в этом месте была бы равна

$$h = m_{\max} \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda^2}{2 \cdot \delta\lambda} .$$

Максимально допустимое угловое расхождение лучей $\delta\varphi_{\max}$ находим из условия:

$$2h(1 - \cos \delta\varphi) \leq \lambda , \text{ или } 2h \cdot \frac{1}{2} (\delta\varphi)^2 \leq \lambda .$$

С учетом формулы для h окончательно получаем:

$$\delta\varphi_{\max} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot \delta\lambda}{\lambda}} \approx 21' .$$

$$7.18. D \leq 2f \sqrt{\frac{\lambda}{\Delta l}} = 2,5 \text{ см} ; m_0 = \frac{2\Delta l}{\lambda} = 400 .$$

Решение. Будут наблюдаться полосы равного наклона в виде концентрических колец. Порядок интерференции в центре картины равен:

$$m_0 = \frac{2\Delta l}{\lambda} = 400 .$$

Как видно из рис. 7.8, свет от источника падает на зеркала Z_1 и Z_2 интерферометра под углами от 0 до $\alpha = D/(2f)$. Условие, при котором видность интерференционной картины обращается в нуль, можно записать в виде:

$$\Delta(0) - \Delta(\alpha) = \lambda .$$

Используя формулу для разности хода лучей при интерференции на плоскопараллельном воздушном слое толщиной Δl , получаем:

$$2\Delta l (1 - \cos \alpha) = \lambda , \text{ или } 2\Delta l \cdot \frac{\alpha^2}{2} = \lambda ,$$

откуда $\alpha \leq \sqrt{\lambda / (\Delta l)}$, а допустимая ширина источника составляет:

$$D \leq 2f \sqrt{\frac{\lambda}{\Delta l}} = 2,5 \text{ см} .$$

$$7.19. \psi \approx \frac{\lambda}{d} \approx 1,9 \cdot 10^{-7} \text{ рад} = 0,039'' .$$

Указание. Звездный интерферометр Майкельсона можно рассматривать как вариант интерференционной схемы Юнга, в которой расстояние между отверстиями может меняться.

Замечание. Более точный расчет, учитывающий, что звезда имеет сферическую форму, дает: $\psi \approx 1,22 \cdot \frac{\lambda}{d} \approx 0,047''$.

$$7.20. a) D_a \approx \frac{0,36 \cdot \lambda}{\Omega} ; (\Delta\lambda)_a \approx \frac{\lambda}{6} ; б) D_b \approx \frac{0,53 \cdot \lambda}{\Omega} ; (\Delta\lambda)_b \approx \frac{\lambda}{4} .$$

Решение. Видность интерференционной картины при использовании протяженного источника света равна (см. задачу 7.3):

$$V = \left| \operatorname{sinc} \left(\pi \frac{dD}{\lambda L} \right) \right| = \left| \operatorname{sinc} \left(\pi \frac{\Omega \cdot D}{\lambda} \right) \right|,$$

где $\Omega = d/l$ - апертура интерференции.

а) Из рис. 7.10 а следует, что видность интерференционной картины в центре экрана составляет:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{9 - 1}{9 + 1} = 0,8.$$

Так как $\frac{\sin x}{x} \approx 0,8$ при $x \approx 1,13$, для размера источника получаем:

$$\pi \frac{\Omega \cdot D}{\lambda} = 1,13, \text{ откуда } D = \frac{1,13 \cdot \lambda}{\pi \cdot \Omega} \approx \frac{0,36 \cdot \lambda}{\Omega}.$$

На рис. 7.10 а видно, что интерференционная картина размывается в шестом порядке, поэтому диапазон $\Delta\lambda$ излучения равен:

$$\Delta\lambda \approx \lambda / 6.$$

Пункт б) рассматривается аналогично.

§8. Дифракция Френеля

8.1. $r_n = \sqrt{\frac{n\lambda}{1/a + 1/b}}$; $r_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{1/a + 1/b}} = 0,5 \text{ мм} .$

Решение. Полагая радиус отверстия $R \ll a$ и $R \ll b$, заменим сферический фронт волны, на котором расположены вторичные источники, плоским, совпадающим с плоскостью препятствия (рис. О.8.1). Тогда можно записать:

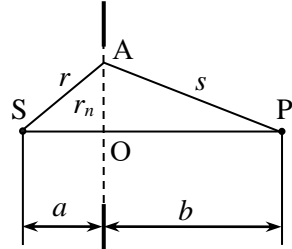


Рис. О.8.1.

$$r = \sqrt{r_n^2 + a^2} = a \sqrt{1 + \frac{r_n^2}{a^2}} \approx a \left(1 + \frac{r_n^2}{2a^2} \right),$$

$$s = \sqrt{r_n^2 + b^2} \approx b \left(1 + \frac{r_n^2}{2b^2} \right).$$

Разность хода между волнами, прошедшими через внешний край n -й зоны и по оси SP, равна:

$$\Delta s_{r_n} = (r + s) - (a + b) = \frac{r_n^2}{2a} + \frac{r_n^2}{2b} = \frac{r_n^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Для границы m -ой зоны Френеля $\Delta s_n = n \cdot \frac{\lambda}{2}$, откуда:

$$r_n^2 = \frac{n\lambda}{1/a + 1/b} \text{ и } r_n = \sqrt{\frac{n\lambda}{1/a + 1/b}} .$$

Подставляя численные данные, находим: $r_1 = 0,5 \text{ мм} .$

8.2. $S_n = \frac{\pi\lambda}{1/a + 1/b} = \text{const} .$

8.3. $\psi_R = \frac{\pi R^2}{\lambda} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \pi n .$

Указание. См. решение задачи **8.1.**

$$8.4. l = D^2 / \lambda \approx 27 \text{ м} .$$

$$8.5. R = r_2 = \sqrt{\lambda l / 2} = 1 \text{ мм} .$$

$$8.6. b = \frac{1}{n\lambda / R^2 - 1/a} \approx 56 \text{ мм} .$$

$$8.7. \text{На бесконечности; } n_{\min} = \frac{R^2}{\lambda a} = 8 .$$

$$8.8. \lambda = \frac{3R^2}{2a} .$$

Решение. Радиус n -й зоны Френеля равен:

$$r_n = \sqrt{\frac{n\lambda}{1/a + 1/b}} .$$

Из условия максимума интенсивности в центре следует, что в обоих случаях число открытых зон нечетное, т.е.

$$n_1 = 2m - 1; \quad n_2 = 2m + 1 ,$$

где m – целое число.

Так как $r_2 > r_1$, $n_2 > n_1$, и $n_2 - n_1 = 2$ максимумы наблюдаются последовательно. Из соотношения

$$\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 = 3 = \frac{n_2}{n_1} = \frac{2m + 1}{2m - 1}$$

находим: $m = 1$, т.е. $n_1 = 1$; $n_2 = 3$.

Длина волны света равна:

$$\lambda = \frac{r_1^2 \cdot (1/a + 1/b)}{n_1} = R^2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} \right) = \frac{3R^2}{2a} .$$

$$8.9. \Delta a = \pm \frac{a}{\sqrt{2}} .$$

Решение. Радиус R отверстия связан с числом n зон Френеля, укладывающихся в отверстие, формулой:

$$R^2 = \frac{n\lambda}{1/a + 1/b}.$$

В начальном состоянии $b = a$; $n = 1$. После перемещения диафрагмы на Δa $a' = a + \Delta a$; $b' = a - \Delta a$; $n' = 2$, Так как радиус отверстия не изменился, можно записать:

$$\frac{n\lambda}{\frac{1}{a} + \frac{1}{a}} = \frac{n'\lambda}{\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'}} \rightarrow \frac{na}{2} = \frac{n'a'b'}{a' + b'};$$

$$\frac{na}{2} = \frac{n'(a^2 - (\Delta a)^2)}{2a}; \rightarrow (\Delta a)^2 = a^2 \left(1 - \frac{n}{n'}\right).$$

Подставляя $n = 1$, $n' = 2$, получаем:

$$\Delta a = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

8.10. а) $b_1 = R^2 / \lambda_1 = 10 \text{ м}$; б) $b_2 = R^2 / \lambda_2 \approx 6,7 \text{ м}$.

8.11. 1) в $\sqrt{2}$ раз; 2) в $\sqrt{3}$ раз.

Указание. Для плоской волны радиус отверстия R связан с числом n зон Френеля, укладывающихся в отверстие, формулой:

$$R = \sqrt{nb\lambda}.$$

Первый минимум соответствует случаю $n = 2$, следующий максимум $- n = 3$.

8.12. $\lambda = \frac{R^2(b_2 - b_1)}{b_1 b_2} = 480 \text{ нм}$.

8.13. $I(n) = 4I_0 \cdot \sin^2 \frac{n\pi}{2}$.

Решение. Возьмем на спирали Френеля произвольную точку O_n (рис. О.8.13). $\angle OO_\infty O_n$ равен разности фаз ψ_n между

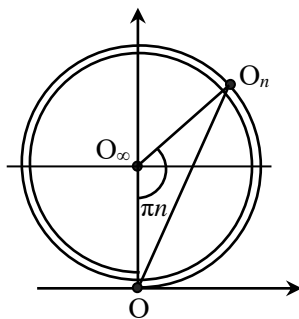


Рис. О.8.13.

центральный лучом и лучом, проходящим через точку отверстия, находящуюся на окружности, внутри которой заключена n -ая часть площади отверстия. $\angle O O_{\infty} O_n = n\pi$ (см. задачу 8.3) (на рис. О.7.13 $n < 1$).

$\triangle O O_{\infty} O_n$ равнобедренный, его стороны $O O_{\infty}$ и $O_{\infty} O_n$ одинаковы и равны амплитуде в отсутствие препятствия A_0 . Сторона $O O_n$ и есть амплитуда A поля. Применяя теорему косинусов, получим:

$$A^2 = A_0^2 + A_0^2 - 2A_0^2 \cdot \cos n\pi ;$$

$$I(n) = 2I_0(1 - \cos n\pi) = 4I_0 \cdot \sin^2 \frac{n\pi}{2}.$$

Замечание. Полученная формула справедлива для небольшого числа открытых зон, когда скручиванием спирали можно пренебречь.

8.14. а) $I = 2I_0$; б) $I = 2I_0$; в) $I = I_0$.

Решение. Для решения задачи следует использовать спираль Френеля.

а) Точка $O_{1/2}$ на спирали Френеля, соответствующая половине открытой первой зоны, $O_{1/2}$ определяет комплексную амплитуду A поля в точке наблюдения (рис. О.8.14). Видно, что $A = O O_{1/2} = \sqrt{2}A_0$. Интенсивность волны $I \propto A^2$, поэтому

$$I = 2I_0.$$

Пункты б), в) рассматриваются аналогично. Точка $O_{3/2}$, соответствующая 1,5 открытым зонам Френеля, $O_{3/2}$ показана на рис. О.8.14.

8.15. а) $I = I_0$; б) $I = 0$; в) $I = 0$.

8.16. а) $I = 16I_0$; б) $I = 4I_0$.

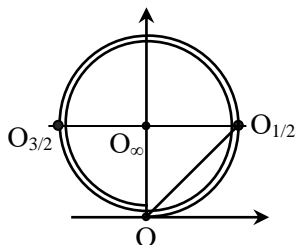


Рис. О.8.14.

Решение. а) По условию задачи радиус r_1 соответствует первой зоне Френеля (точка O_1 на спирали Френеля). Так как число n зон Френеля пропорционально квадрату радиуса n -й зоны R_n^2 , то радиусы $r_2 = 2r_1$ и $r_3 = 3r_1$ соответствуют границам 4-й и 9-й зон Френеля (рис. О.8.16 а) (точки O_4 и O_9 на спирали). Пренебрегая скручиванием спирали, будем считать, что точка O_4 совпадает с точкой O , а точка O_9 - с точкой O_1 . Таким образом, открытые участки дают вклады в комплексную амплитуду поля, отвечающие векторам \mathbf{OO}_1 и $\mathbf{O}_4\mathbf{O}_9$, которые совпадают по направлению и имеют одинаковую длину $2A_0$, где A_0 - амплитуда в отсутствие препятствия. Суммарная амплитуда вкладов от открытых участков $A = 4A_0$, а интенсивность $I_a \propto A^2$ и равна $I_a = 16I_0$.

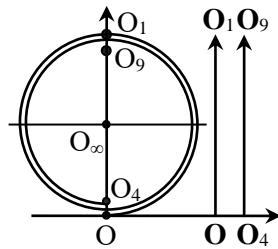


Рис. О.8.16 а.

б) Так как $r_1 = R_1 / \sqrt{3}$, где R_1 - радиус первой зоны Френеля, то число n_1 зон, соответствующих этому радиусу, равно $n_1 = 1/3$ (точка $O_{1/3}$ на спирали). Аналогично, радиусам r_2 и r_3 на спирали будут соответствовать точки $O_{4/3}$ и $O_{9/3} = O_3$. Открытым участкам на препятствии будут отвечать векторы $\mathbf{OO}_{1/3}$ и $\mathbf{O}_{4/3}\mathbf{O}_3$. Отметим на спирали Френеля точки, соответствующие трем заданным значениям радиусов (рис. О.8.16 б). Из рисунка видно, что векторы $\mathbf{OO}_{1/3}$ и $\mathbf{O}_{4/3}\mathbf{O}_3$ ориентированы в одном направлении и имеют длину A_0 . Следовательно, интенсивность в точке наблюдения равна

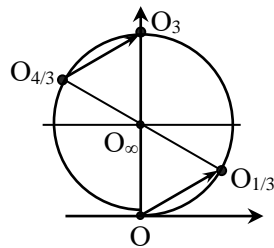


Рис. О.8.16 б.

$$I_b = (A_0 + A_0)^2 = 4I_0.$$

8.17. Увеличили в $\sqrt{6/5}$ раз.

Указание. Надо доказать, что интенсивность увеличится в 2 раза, когда отверстие откроет 3 зоны Френеля.

8.18. а) $I = I_0 / 4$; **б)** $I = 0$; **в)** $I = I_0 / 4$.

Решение. а) При построении спирали Френеля каждую зону разбивают на подзоны (колечки), одинаковые по площади. Непрозрачный экран уменьшил площадь каждой подзоны, следовательно, и вклад в комплексную амплитуду от первой зоны уменьшится (но фазовые соотношения останутся неизменными). Вектор \mathbf{OO}'_1 не изменится по направлению, но его амплитуда уменьшится на $1/4$, т.е. станет равна $A_1 = \frac{3}{4} \cdot 2A_0 = \frac{3}{2}A_0$, где A_0 — амплитуда в отсутствие препятствия (рис. О.8.18).

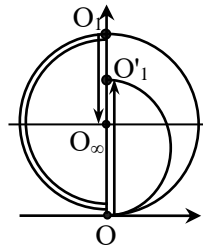


Рис. О.8.18.

Вклад в комплексную амплитуду поля от второй и всех последующих зон Френеля выражается вектором $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_\infty$, который противонаправлен вектору \mathbf{OO}_1 . Суммарная комплексная амплитуда в точке наблюдения равна $A = \frac{3}{2}A_0 - A_0 = \frac{A_0}{2}$, а интенсивность

$$I = I_0 / 4.$$

Пункты б), в) рассматриваются аналогично.

8.19. $I = 2I_0$.

Указание. Следует рассчитать, сколько зон Френеля укладывается в отверстии.

8.20. а) $I = 9I_0$; б) $I = 0$; в) $I = I_0$; г) $I = 4I_0$.

Решение. а). Разности хода $\lambda/2$ соответствует разность фаз π , поэтому вектор \mathbf{OO}_1 следует повернуть на угол π против часовой стрелки, при этом его длина не изменится (рис. О.8.20 а).

Вклад в комплексную амплитуду поля от второй и всех последующих зон Френеля выражается вектором $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_\infty$, который сонаправлен с вектором \mathbf{OO}'_1 . Суммарная комплексная амплитуда в точке наблюдения равна $A = 2A_0 + A_0 = 3A_0$, где A_0 — амплитуда в отсутствие препятствия. Интенсивность

$$I = 9I_0.$$

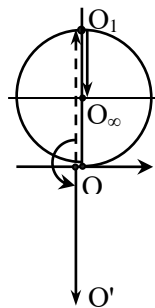


Рис. О.8.20 а.

б) Вклад от открытой части первой зоны изображен вектором \mathbf{OO}'_1 (рис. О.8.20 б), его длина равна

$$|\mathbf{OO}'_1| = \frac{3}{4} \cdot 2A_0 = \frac{3}{2}A_0.$$

Вектор \mathbf{OA}_1 изображает вклад от оставшейся части первой зоны, если бы не было препятствия.

Длина этого вектора равна $|\mathbf{OA}_1| = \frac{1}{4} \cdot 2A_0 = \frac{1}{2}A_0$.

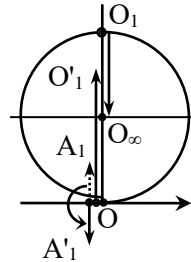


Рис. О.8.20 б.

Этот вектор надо повернуть против часовой стрелки на π , т.к. эта часть зоны закрыта пластинкой, вносящей дополнительную разность фаз π . Вклад от второй и всех последующих зон Френеля выражается вектором $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_\infty$.

Суммарная комплексная амплитуда равна:

$$A = \mathbf{OO}'_1 - \mathbf{O}_1\mathbf{O}_\infty - \mathbf{OA}'_1 = \frac{3}{2}A_0 - A_0 - \frac{1}{2}A_0 = 0.$$

Интенсивность $I = 0$.

Пункты в) и з) рассматриваются аналогично.

8.21. $I = 8I_0$.

8.22. $I = 9I_0$.

Указание. См. решение задачи 8.18 а.

8.23. $I = I_0 / 4$.

8.24. $I = \frac{5}{4} \cdot I_0$.

Указание. Разбить открытую часть экрана на два простых объекта: полуплоскость и полукруг радиуса $R_{1/2}$ (на спирали Френеля радиусу полукруглой выемки соответствует точка $O_{1/2}$). Комплексная амплитуда в точке наблюдения будет равна сумме векторов:

$$A = \frac{1}{2} \mathbf{OO}_{\infty} + \frac{1}{2} \mathbf{OO}_{1/2} = \frac{1}{2} (\mathbf{OO}_{\infty} + \mathbf{OO}_{1/2}),$$

которую просто найти через их проекции на горизонтальную и вертикальную оси.

Замечание. Задачу можно решить и другим способом.

$$8.25. r_{\min} = \sqrt{m\lambda L} \approx 1,15 \text{ мм}, \text{ где } m = 5/3.$$

$$8.26. I = I_0 \cdot \left(1 - \frac{2}{m}\right)^2.$$

$$8.27. h = \frac{\lambda}{n-1} \cdot \left(\frac{3}{8} + m\right); I_{\text{пласт}} = (\sqrt{2} + 1)^2 I_0 \approx 6I_0.$$

Решение. На спирали Френеля отмечаем точку $O_{5/2}$ (рис. О.8.27). В случае отсутствия какого-либо препятствия поле в точке наблюдения можно представить как сумму двух векторов:

$$A_{\text{отс}} = \mathbf{OO}_{5/2} + \mathbf{O}_{5/2}\mathbf{O}_{\infty} = \mathbf{OO}_{\infty} = A_0.$$

Стекла́нная пластинка толщиной h вносит дополнительную разность хода, равную $\Delta = h(n-1)$. Это приводит к появлению дополнительной разности фаз

$$\Delta\varphi = k \cdot \Delta = k \cdot h(n-1).$$

В результате вектор $\mathbf{OO}_{5/2}$ необходимо повернуть на угол $\Delta\varphi > 0$ против часовой стрелки (вектор $\mathbf{OO}'_{5/2}$). Интенсивность станет максимальной, если после поворота направления векторов $\mathbf{OO}'_{5/2}$ и $\mathbf{O}_{5/2}\mathbf{O}_{\infty}$ совпадут. Из рис. О.8.27 видно, что

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + 2\pi m = \pi \left(\frac{3}{4} + 2m\right); m = 0, 1, 2, \dots$$

Для толщины пластины получаем:

$$k \cdot h(n-1) = \pi \left(\frac{3}{4} + 2m\right); h = \frac{\lambda}{n-1} \cdot \left(\frac{3}{8} + m\right).$$

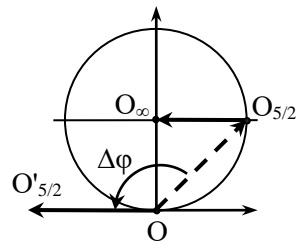


Рис. О.8.27.

Суммарная длина векторов равна:

$$A_{\text{пласт}} = \sqrt{2}A_0 + A_0 = (\sqrt{2} + 1)A_0 ;$$

$$I_{\text{пласт}} = (\sqrt{2} + 1)^2 I_0 \approx 6I_0 .$$

8.28. $h = \frac{\lambda}{n-1} \cdot \left(\frac{7}{8} + m \right), m = 0, 1, 2, \dots ;$

$$I_{\text{min}} = (2 - \sqrt{2})^2 I_0 \approx 0,4I_0 .$$

8.29. $h = \frac{\lambda(1+6m)}{6(n-1)}, m = 0, 1, 2, \dots$

Решение. Наличие выемки приведет к появлению отрицательной оптической разности хода $h \cdot (1 - n) < 0$ и повороту вектора $\mathbf{OO}_{1/3}$ по часовой стрелке (рис. О.8.29) на угол

$$\Delta\varphi = -kh \cdot (1 - n) = \frac{2\pi}{\lambda} h \cdot (n - 1) .$$

Из рисунка видно, что интенсивность будет равна нулю, если векторы $\mathbf{OO}'_{1/3}$ и $\mathbf{O}_{1/3}\mathbf{O}_\infty$ будут направлены в противоположные стороны:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{3} + 2\pi m .$$

Для глубины выемки получаем:

$$h = \frac{\lambda(1+6m)}{6(n-1)} .$$

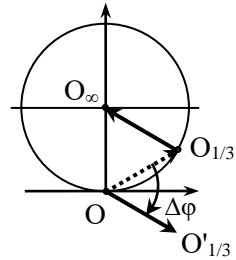


Рис. О.8.29.

8.30. $h = \frac{\lambda}{n-n'} \cdot \left(\frac{5}{8} + m \right), m = 0, 1, 2, \dots$

8.31. а) $h = \frac{\lambda(1+2m)}{2(n-1)}$; б) $h = \frac{\lambda(1+2m)}{4(n-1)}$.

Указание. Уступ на пластине разбивает ее на две одинаковые полуплоскости, вклад от которых в поле в точке наблюдения одина-

ков и равен $A_0/2$ (на спирали Френеля векторы $\mathbf{OO}_\infty/2$), и приводит к появлению оптической разности хода $h(n-1)$ и повороту одного из векторов на угол $\Delta\varphi = kh(n-1)$.

$$8.32. h = \frac{\lambda(m+1/2)}{n-1}, m = 0, 1, 2, \dots; I \approx 9I_0.$$

8.33. 1) $r_{1 \text{ диска}} = R/\sqrt{2}$; 2) $r_{2 \text{ диска}} = R/\sqrt{6}$ и $r_{2 \text{ диска}} = \sqrt{5/6} R$; 3) $I = 4I_0(1 + \sin(n\pi))$, где n – доля площади отверстия, перекрытой диском.

Решение. На спирали Френеля указываем точку O_3 (рис. О.8.33 а). Предположим, что стеклянный диск перекрывает $n < 3$ зон Френеля. Так как для векторов

$$\mathbf{OO}_n + \mathbf{O}_n\mathbf{O}_3 = \mathbf{OO}_3,$$

то, как видно из рис. О.8.33 а, векторы \mathbf{OO}_n и $\mathbf{O}_n\mathbf{O}_3$ перпендикулярны друг другу независимо от n .

Стеклянный диск, внося до-

полнительную положительную разность фаз, "поворачивает" вектор \mathbf{OO}_n на угол $\pi/2$ против часовой стрелки, в результате векторы \mathbf{OO}'_n и $\mathbf{O}_n\mathbf{O}_3$ окажутся либо сонаправленными (если $n < 1$ или $2 < n < 3$), либо направленными в противоположные стороны (если $1 < n < 2$).

Интенсивность будет равна нулю, если векторы \mathbf{OO}'_n и $\mathbf{O}_n\mathbf{O}_3$ будут одинаковы по длине и противоположно направлены, откуда следует, что $n = 3/2$. Число зон, перекрываемых диском, в два раза меньше числа зон, открываемых отверстием в экране, следовательно

$$r_{1 \text{ диска}} = R/\sqrt{2}.$$

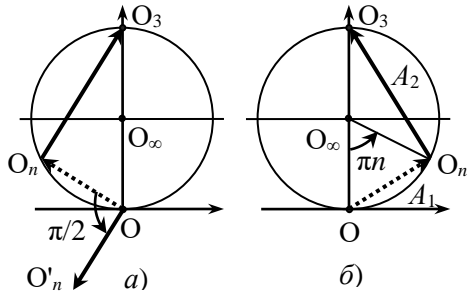


Рис. О.8.33.

В случаях $n = 1/2$ и $n = 5/2$ векторы \mathbf{OO}'_n и $\mathbf{O}_n\mathbf{O}_3$ окажутся сонаправленными и одинаковыми по длине. Их суммарная длина равна $2\sqrt{2}A_0$, интенсивность будет максимально возможной и равной

$$I_{\max} = 8I_0.$$

В этих случаях

$$r_{2 \text{ диска}} = R/\sqrt{6} \text{ и } r_{2 \text{ диска}} = \sqrt{5/6} R$$

(т.к. $0,5/3 = 1/6$ и $2,5/3 = 5/6$).

Найдем зависимость интенсивности от радиуса диска (рис. О.8.33 б). $\angle \mathbf{OO}_\infty \mathbf{O}_n = n\pi$, где n — доля площади отверстия, перекрытой диском (см. задачу 8.3). Выразим по теореме косинусов длину A_1 вектора \mathbf{OO}'_n :

$$A_1^2 = A_0^2 + A_0^2 - 2A_0^2 \cdot \cos(n\pi) = 2A_0^2 \cdot (1 - \cos(n\pi)) = 4A_0^2 \cdot \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

По теореме Пифагора длина A_2 вектора $\mathbf{O}_n\mathbf{O}_3$ равна

$$A_2^2 = (2A_0)^2 - A_1^2 = 4A_0^2 \cdot \cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Поскольку после поворота векторы \mathbf{OO}'_n и $\mathbf{O}_n\mathbf{O}_3$ окажутся либо сонаправленными (если $n < 1$ или $2 < n < 3$), либо направленными в противоположные стороны (если $1 < n < 2$), получим (при аккуратном выборе знаков) для результирующей амплитуды A в точке наблюдения:

$$A = A_1 + A_2 = 2A_0 \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right),$$

а для интенсивности:

$$I = 4I_0 \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right)^2 = 4I_0 (1 + \sin(n\pi)).$$

8.34. $R = \sqrt{\lambda b / 3}.$

8.35. $h_{\min} \approx \frac{\lambda ab}{d(a+b)} \approx 0,1 \text{ мм}.$

Решение. Данный опыт связан с наблюдением пятна Пуассона в центре геометрической тени за непрозрачным диском (в данном случае шариком). Покажем, что для получения резкого изображения необходимо, чтобы высота неровностей на поверхности шарика была меньше ширины зоны Френеля, по которой проходит край непрозрачного шарика.

Допустим, что шаром закрыто m зон Френеля для точки наблюдения, и неровности на его поверхности хаотически располагаются в пределах $(m+1)$ -й зоны. Амплитуда поля в точке за преградой будет равна:

$$A = \langle A_{m+1} \rangle - A_{m+2} + A_{m+3} - A_{m+4} + \dots = \langle A_{m+1} \rangle - \frac{A_{m+2}}{2} - \left(\frac{A_{m+2}}{2} - A_{m+3} + \frac{A_{m+4}}{2} \right) - \left(\frac{A_{m+4}}{2} - A_{m+5} + \frac{A_{m+6}}{2} \right) - \dots$$

Сумма всех слагаемых, стоящих в скобках, приближенно равна нулю, а среднее значение амплитуды поля от $(m+1)$ -й зоны

$\langle A_{m+1} \rangle \approx \frac{A_{m+1}}{2}$ в случае хаотического распределения неровностей,

размеры которых сравнимы с размером $(m+1)$ -й зоны. Отсюда видно, что амплитуда A (и интенсивность) в точке наблюдения близка к нулю, т.е. источник света не будет виден.

Рассчитаем ширину $(m+1)$ -й зоны Френеля $\Delta r = r_{m+1} - r_m$. Радиусы зон Френеля определяются формулами:

$$r_m^2 = \frac{m\lambda}{1/a + 1/b}, \quad r_{m+1}^2 = \frac{(m+1)\lambda}{1/a + 1/b}, \quad \text{откуда}$$

$$r_{m+1}^2 - r_m^2 = (r_m + r_{m+1}) \cdot (r_{m+1} - r_m) \approx d \cdot \Delta r = \frac{\lambda}{1/a + 1/b},$$

где $r_{m+1} + r_m \approx d$ — диаметр диска. Отсюда

$$\Delta r = \frac{\lambda ab}{d(a+b)} \approx h_{\min} \approx 0,1 \text{ мм}.$$

8.36. См. рис. О.8.36.

Решение. При падении плоской волны на отверстие оно открывает $N = \frac{R^2}{b\lambda}$ число зон Френеля. Если расстояние $b = \frac{R^2}{\lambda}$, то

отверстие открывает только первую зону Френеля, при этом амплитуда поля в точке наблюдения равна $A_1 = 2A_0$, где A_0 – амплитуда в отсутствие препятствия, а интенсивность в этой точке равна $I_1 = 4I_0$.

Если $b > R^2 / \lambda$, то в отверстии укладывается только часть первой зоны Френеля, амплитуда поля (и интенсивность) в точке наблюдения будет монотонно уменьшаться с ростом b и стремиться к нулю при $b \rightarrow \infty$. На расстоянии $b = 2R^2 / \lambda$ в отверстии укладывается $1/2$ первой зоны Френеля, амплитуда поля $A = \mathbf{O}_{1/2} \mathbf{O}_\infty$ и интенсивность $I = 2I_0$.

Если $N = 2 \left(b = \frac{R^2}{2\lambda} \right)$, то $I = 0$. При $N = 3 \left(b = \frac{R^2}{3\lambda} \right)$ интен-

сивность I чуть меньше I_0 и т.д. При приближении точки наблюдения к отверстию число открытых зон Френеля будет увеличиваться и интенсивность, осциллируя, будет стремиться к I_0 .

На рис. О.8.36 приведен график зависимости интенсивности I в центре экрана от расстояния b . Для наглядности по горизонталь-

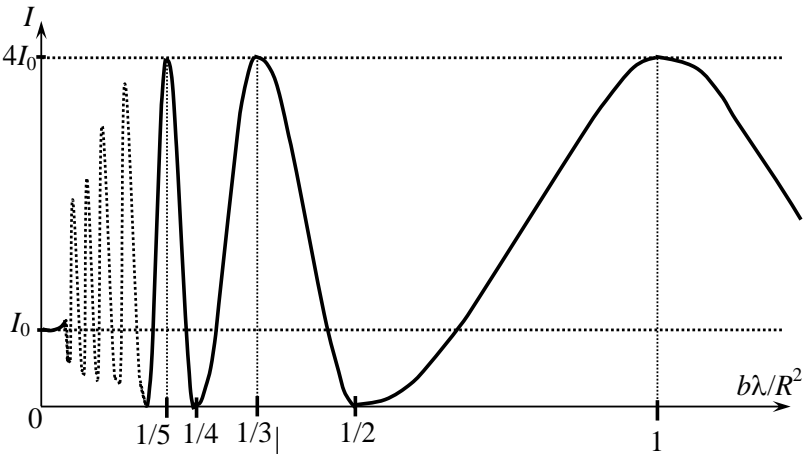


Рис. О.8.36.

ной оси отложена величина $\frac{b\lambda}{R^2} = \frac{1}{m}$, где m – число открытых зон Френеля.

8.37. См. рис. О.8.37; интенсивность нормирована на интенсивность I_0 , регистрируемую в отсутствии препятствия, радиус нормирован на радиус R_1 первой зоны Френеля.

Указание. В случае плоской волны радиус зон Френеля определяется по формуле: $R_n^2 = n\lambda b$. Максимумы интенсивности соответствуют случаю, когда открыто нечетное число зон Френеля, ми-

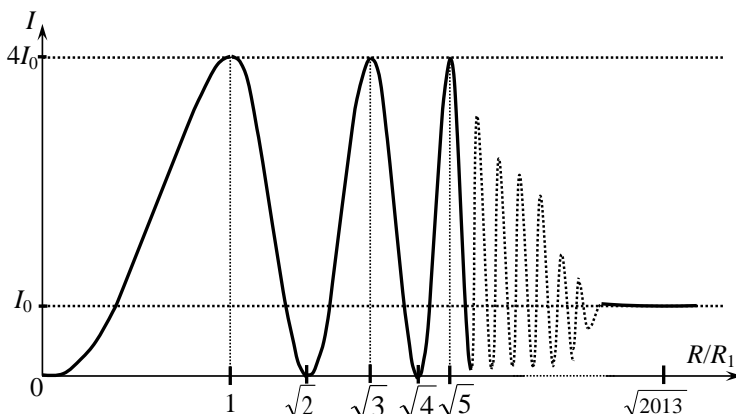


Рис. О.8.37.

нимумы - когда четное.

С ростом радиуса R отверстия расстояние между соседними максимумами и минимумами уменьшается. Это связано с тем, что радиус n -ой зоны пропорционален квадратному корню из номера зоны n , т.е. при увеличении радиуса, например, в 2 раза число открытых зон увеличивается в 4 раза.

8.38. См. рис. О.8.38.

Решение. Используя формулу для радиуса зон Френеля:

$$R_n^2 = \frac{n\lambda}{1/a + 1/b},$$

находим число открытых зон в зависимости от b :

$$n = \frac{R^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Введем обозначение $b = \frac{a}{\varepsilon}$, где ε - произвольное положительное число. Подставляя численные данные, получим:

$$n = \frac{R^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{\varepsilon}{a} \right) = \frac{(0,5\text{мм})^2}{0,5\text{мкм} \cdot 0,5\text{М}} (1 + \varepsilon) = 1 + \varepsilon.$$

Положения максимумов интенсивности, наблюдаемых при нечетном числе открытых зон Френеля, соответствуют значениям ε , равным

$$\varepsilon_{\max} = 0, 2, 4, \dots, 2m, \dots, \text{ т.е. } b_{\max} = \infty, \frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \dots, \frac{a}{2m}, \dots$$

Аналогично для минимумов получаем:

$$\varepsilon_{\min} = 1, 3, 5, \dots, 2m + 1, \dots, \rightarrow b_{\min} = a, \frac{a}{3}, \frac{a}{5}, \dots, \frac{a}{2m + 1}, \dots$$

Источник излучения точечный, распространяющаяся от него волна имеет сферический фронт, следовательно, интенсивность изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния от источника до точки наблюдения:

$$I_0 \sim \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)\right)^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}\right)^2.$$

При бесконечном расстоянии $\varepsilon_{\max} = 0$ и $I_0 = 0$, т.е. максимум, соответствующий открытой первой зоне Френеля, наблюдать не будет. Соотношение интенсивностей в последующих максимумах $\varepsilon_{\max} = 2, 4, 6, \dots, 2m, \dots$ имеет вид:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 : \left(\frac{4}{5}\right)^2 : \left(\frac{6}{7}\right)^2 : \dots : \left(\frac{2m}{2m+1}\right)^2,$$

т.е. величина интенсивности в максимумах возрастает по мере приближения к препятствию. При росте числа открытых зон Френеля интенсивность в максимумах станет меньше $4I_0$, т.к. радиус спирали постепенно уменьшается. Поэтому, начиная с некоторого m_0 , полученное соотношение интенсивностей выполняться не будет.

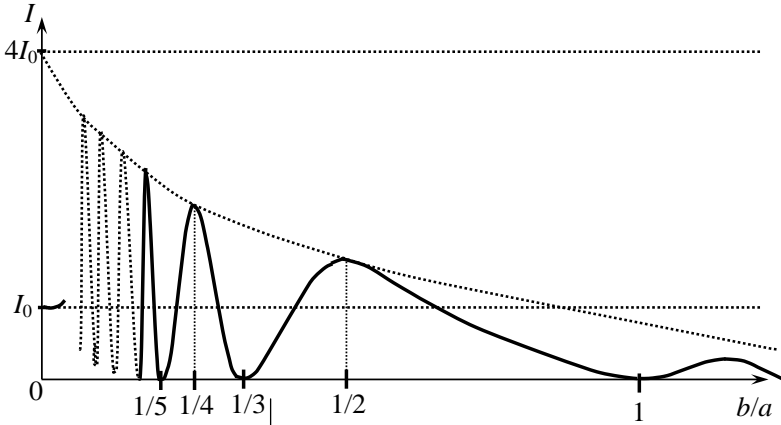


Рис. О.8.38.

График зависимости интенсивности в центре картины при дифракции сферической волны на круглом отверстии от отношения b/a приведен на рис. О.8.38.

$$\mathbf{8.39.} \quad f_m = \frac{S_0}{\pi\lambda(2m-1)}, \quad m = 1, 2, \dots; \quad I(f_1) \approx 4m^2 I_0.$$

Решение. Найдем расстояние b_1 от пластинки, на котором центральная прозрачная зона для точки Р будет совпадать с первой зоной Френеля. Так как для плоской волны $R = \sqrt{nb\lambda}$,

$$b_1 = \frac{r_1^2}{\lambda} = \frac{S_0}{\pi\lambda},$$

где $r_1 = \sqrt{S_0/\pi}$ – радиус центральной зоны.

Так как площади всех колец зонной пластинки одинаковы, то для точки Р будут открыты все нечетные зоны Френеля и закрыты все четные. Векторы вкладов в комплексную амплитуду поля от всех прозрачных колец имеют одно и то же направление, а их длина $A_k \approx A_1 = 2A_0$, где $A_0 \propto \sqrt{I_0}$ – амплитуда поля в отсутствие препятствия. Поэтому комплексная амплитуда поля в т. Р будет равна:

$$A = mA_1 \propto 2m\sqrt{I_0},$$

а интенсивность

$$I(b_1) \approx 4m^2 I_0 \gg I_0,$$

т.е. зонная пластинка увеличивает интенсивность света и действует как собирающая линза с фокусным расстоянием

$$f = b_1 = \frac{S_0}{\pi\lambda}.$$

При приближении точки наблюдения к зонной пластинке число зон Френеля в пределах центральной прозрачной зоны пластинки будет возрастать и для некоторой точки P_3 достигнет трех, т.е. для точки P_3 первые 3 зоны Френеля открыты, следующие 3 – закрыты, и т.д. В этой точке также будет максимум интенсивности, поэтому точку P_3 также называют фокусом зонной пластинки:

$$f_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{r_1^2}{\lambda} = \frac{f}{3},$$

однако интенсивность света в т. P_3 будет меньше, чем в первом фокусе.

Существуют и другие фокусы, для которых центральная зона пластинки открывает $(2m-1)$ первых зон Френеля. Соответствующие фокусные расстояния равны:

$$f_m = \frac{f}{2m-1} = \frac{S_0}{\pi\lambda(2m-1)}, \quad m = 1, 2, \dots$$

8.40. $f = \frac{\alpha^2}{\lambda}$: а) $f = 2,5$ м; б) $f = 1,72$ м; в) $f = 1,32$ м.

Замечание. Фокусные расстояния зонной пластинки различны для разных длин волн, т.е. зонная пластинка обладает хроматизмом.

8.41. $f = \frac{ab}{a+b} = 0,6$ м.

Указание. Переписав формулу для радиуса зон Френеля $R_m^2 = \frac{m\lambda}{1/a + 1/b}$ в виде: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{m\lambda}{R_m^2}$, получим формулу тонкой линзы

ЗЫ

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

где $f = \frac{R_m^2}{m\lambda} = \frac{R_1^2}{\lambda}$ – фокусное расстояние зонной пластинки,

$$R_1^2 = \frac{\lambda}{1/a + 1/b} \quad (R_1 - \text{радиус первой зоны Френеля}) \quad \text{и} \quad R_m^2 = mR_1^2.$$

8.42. $f = \frac{r_5^2}{10\lambda} = 0,45 \text{ м}$; $r_1 = r_5 / \sqrt{10} \approx 0,47 \text{ мм}$; изображения

источника света, расположенные на оси пластинки, отодвинутся от неё.

Указание. Площади всех (открытых и закрытых) колец зонной пластинки одинаковы и равны площадям зон Френеля для точки наблюдения. Радиус внутреннего края пятого открытого кольца равен радиусу десятой зоны Френеля.

8.43. $b_k = \frac{af_k}{a - f_k}$, где $f_k = \frac{ab}{(a + b) \cdot (2k + 1)}$.

8.44. $r_m = \sqrt{\frac{m\lambda}{\left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{R} \right|}}$.

Решение. Построение m -й зоны Френеля показано на рис. О.8.44, где S – источник света, S' – его изображение, O – центр кривизны зеркала. Нахождение радиуса r_m m -й зоны проводим, исходя из того, что разность хода между центральным лучом, проходящим через вершину зеркала, и лучом, проходящим через край m -й зоны, должна составлять $m\lambda/2$:

$$\left| (SM + MS') - (SA + AS') \right| = m\lambda / 2, \quad (*)$$

где $SA = a$, $AS' = b$, а SM и MS' находим из рис. О.8.44:

$$SM^2 = (a - h)^2 + r_m^2; \quad S'M^2 = (b - h)^2 + r_m^2.$$

С учетом того, что $h \leq a$ и $r_m \leq a$, определяем:

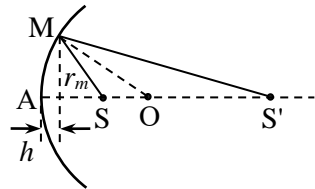


Рис. О.8.44.

$$SM = a + \frac{r_m^2}{2a} - h ; \quad S'M = b + \frac{r_m^2}{2b} - h .$$

Значение h находим из соотношения:

$$r_m^2 = R^2 - (R - h)^2 \approx 2Rh , \text{ откуда } h = \frac{r_m^2}{2R} .$$

Подставляя вычисленные значения в условие (*), получаем:

$$r_m = \sqrt{\frac{m\lambda}{\left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{R} \right|}} .$$

$$8.45. \quad b = \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a} + \frac{4\lambda}{r_4^2} \right)^{-1} = 0,8 \text{ м} .$$

$$8.46. \quad R = \sqrt{\frac{m\lambda}{\left| 1/b - 1/f \right|}} ; \text{ если число зон Френеля } m \text{ нечетное, в}$$

т. Р наблюдается максимум интенсивности, если четное – минимум.

Решение. Линза собирает параллельный пучок лучей в фокусе, поэтому после отверстия пойдет сферическая волна, сходящаяся в точке S' (рис. О.8.46). На фронте этой волны АО теперь и надо строить зоны Френеля для т. Р. Источник света теперь находится в т. S' , расстояние от которой до отверстия равно f . Для падающей волны это мнимый источник (находится по другую сторону отверстия), расстояние f отсчитывается против хода лучей, поэтому его следует брать со знаком "минус", считая $f > 0$. Расстояние r также отсчитывается против хода лучей, его тоже будем брать со знаком "минус", считая $r > 0$.

Разность хода волнами, прошедшими через внешний край m -й зоны и по оси $S'P$, равна

$$\Delta s_{r_m} = (-r + s) - (-f + b) .$$

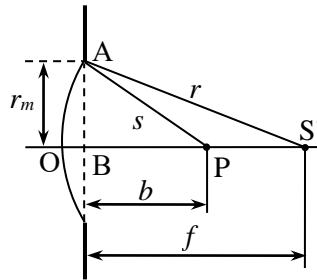


Рис. О.8.46.

Найдем r и s . Поскольку $R \ll b, f$, можно пренебречь сферичностью волнового фронта АО. Тогда можно записать:

$$r = \sqrt{r_m^2 + f^2} = f \sqrt{1 + \frac{r_m^2}{f^2}} \approx f \left(1 + \frac{r_m^2}{2f^2} \right),$$

$$s = \sqrt{r_m^2 + b^2} \approx b \left(1 + \frac{r_m^2}{2b^2} \right).$$

Разность хода между волнами равна:

$$\Delta s_{r_m} = (-r + s) - (-f + b) = -\frac{r_m^2}{2f} + \frac{r_m^2}{2b} = \frac{r_m^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{f} \right).$$

Таким образом, линза вносит дополнительную разность хода

$$\Delta s_f(r) = -\frac{r_m^2}{2f} < 0.$$

Для границы m -ой зоны Френеля $\Delta s_m = m \cdot \frac{\lambda}{2}$, т.е.

$$\frac{r_m^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{f} \right) = \frac{m\lambda}{2}, \text{ откуда находим } r_m = \sqrt{\frac{m\lambda}{|1/b - 1/f|}}.$$

Полагая радиус отверстия равным радиусу m -й зоны Френеля, находим число открытых отверстий зон:

$$m = \frac{R^2}{\lambda} \cdot \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{f} \right|.$$

Если число зон Френеля нечетное, в т. Р наблюдается максимум интенсивности, если четное – минимум.

$$\mathbf{8.47.} \quad I = 9\pi^2 \cdot I_0 \approx 89I_0.$$

Решение. Так как собирающая линза вносит дополнительную разность хода

$$\Delta s_f(r) = -\frac{r^2}{2f} < 0,$$

для вторичного источника, находящегося в плоскости отверстия на расстоянии r от его центра, суммарная разность хода равна (см. задачу 8.46):

$$\Delta s(r) = \frac{r^2}{2} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{f} \right).$$

Если $f = b$, то для всех вторичных источников разность хода $\Delta s(r) = 0$, т.е. участок спирали OO_3 "вытянут" в прямую линию OO'_3 (рис. О.8.47).

Полагая, что радиус спирали R пропорционален $\sqrt{I_0}$ и длина участка спирали OO_3 равна $3\pi R$, для интенсивности в точке Р (в фокальной плоскости линзы) получаем:

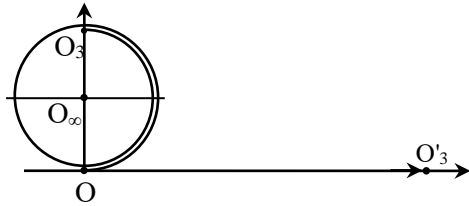


Рис. О.8.47.

$$I = (3\pi R)^2 = 9\pi^2 \cdot I_0 \approx 89I_0.$$

8.48. $I = 8I_0$.

Решение. Для вторичного источника, находящегося в плоскости отверстия на расстоянии r от его центра, разность хода равна (см. задачу 8.46):

$$\Delta s(r) = \frac{r^2}{2} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{f} \right).$$

Если $f = 2b$, то разность хода (при $r = r_0$) составит:

$$\Delta s(r_0) = \frac{r_0^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{2b} \right) = \frac{r_0^2}{4b} = \frac{\Delta s_0(r_0)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\lambda}{2},$$

а соответствующая разность фаз –

$$\psi(r_0) = k \cdot \Delta s(r_0) = \frac{k \cdot \Delta s_0(r_0)}{2} = \frac{3\pi}{2},$$

так как отверстие открывает три зоны Френеля. Следовательно, участок спирали OO_3 "раскрутится" (но не до конца, рис. О.8.48), при этом длина дуги OO'_3 останется равной длине участка спирали OO_3 (число вторичных источников не изменилось).

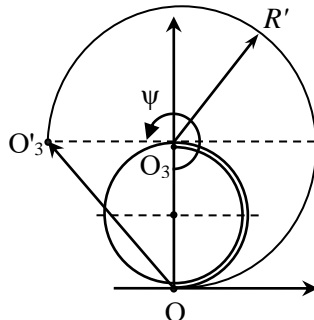


Рис. О.8.48.

Чтобы найти амплитуду A в точке Р (она равна длине вектора \mathbf{OO}'_3), необходимо найти радиус R' дуги соответствующей окружности:

$$3\pi R = \frac{3\pi}{2} R',$$

откуда $R' = 2R$.

Для длины \mathbf{OO}'_3 получаем:

$$|\mathbf{OO}'_3| = 2R' \sin\left(\frac{2\pi - \psi}{2}\right) = 4R \sin\frac{\pi}{4} = 4R \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}R,$$

поэтому при $f = 2b$ интенсивность в точке Р равна

$$I = |\mathbf{OO}'_3|^2 = 8I_0.$$

8.49. Интенсивность уменьшится в $n \approx 22$ раза.

Решение. При $f = b$ интенсивность в т. Р равна (см. задачу 7.47) $I_1 = 9\pi^2 \cdot I_0 \approx 89I_0$.

Если $f = b/2$, то разность хода (при $r = r_0$) составляет:

$$\Delta s(r_0) = \frac{r_0^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{b} - \frac{2}{b}\right) = -\frac{r_0^2}{2b} = -\Delta s_0(r_0),$$

а разность фаз

$$\psi(r_0) = -\psi_0(r_0) = -3\pi.$$

Как видно из рис. О.8.49, в этом случае участок спирали \mathbf{OO}_3 "перераскручивается", и спираль \mathbf{OO}'_3 представляет собой симметричное отражение спирали \mathbf{OO}_3 относительно горизонтальной оси. Поэтому

$$R' = 2R, \quad I_2 = 4I_0.$$

Таким образом, интенсивность уменьшится в

$$n = I_1 / I_2 \approx 89 / 4 \approx 22 \text{ раза.}$$

8.50. $r = \sqrt{\frac{m\lambda fb}{b-f}} = 0,9\sqrt{m} \text{ мм}, m = 1, 3, 5, \dots$

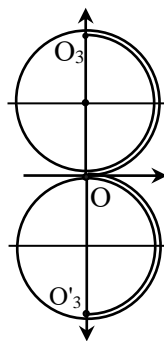


Рис. О.8.49.

§9. Дифракция Фраунгофера

9.1. $I(\varphi) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{kb \sin \varphi}{2} \right)$; $\sin \varphi_m = m\lambda / b$, $m = 1, 2, 3, \dots$

Решение. Направим ось X поперек щели, начало координат совместим с её левым краем (рис. О.9.1 а). Лучи, идущие после щели под углом дифракции φ , собираются линзой в точке B_φ экрана, расположенного в её фокальной плоскости. ОС – фронт волны после щели.

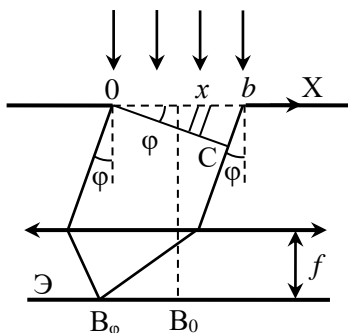


Рис. О.9.1 а.

Разобьем пространство щели на N длинных полосок одинаковой ширины $dx = b / N$, каждая из которых будет являться источником вторичных цилиндрических волн. В точке наблюдения возмущение, приходящее от i -ой полоски, характеризуется комплексным вектором dA_i , длина которого пропорциональна $A_0 dx$, где A_0 – амплитуда падающей волны. Разность хода между волнами, излучаемыми соседними полосками под углом φ к направлению падающей волны, равна (см. рис. О.9.1 а):

$$\delta_\varphi = dx \sin \varphi,$$

а разность фаз

$$d\psi = k \cdot dx \sin \varphi, \text{ где } k = 2\pi / \lambda.$$

Комплексный вектор $A(\varphi) = \sum_{i=1}^N dA_i$.

В центр дифракционной картины ($\varphi = 0$) все вторичные волны приходят в одной фазе, поэтому векторы dA_i сонаправлены и просто суммируются, причем длина получившегося вектора A_0 пропорциональна ширине щели b .

Для угла дифракции φ каждый из одинаковых по длине векторов dA_i повернут

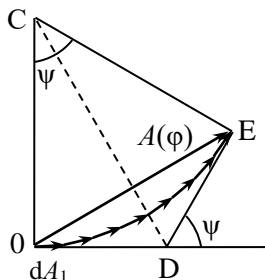


Рис. О.9.1 б.

относительно предыдущего вектора на один и тот же угол $d\psi$. В результате цепочка векторов образует дугу окружности, длина которой приближенно равна A_0 , а угол между крайними векторами равен $\psi = kb \sin \varphi$. Хорда, стягивающая получившуюся дугу, является комплексной амплитудой поля $A(\varphi)$ (рис. О.9.1 б). Пользуясь рисунком, получаем выражение для амплитуды:

$$A(\varphi) = 2R \cdot \sin(\psi / 2),$$

где R – радиус СЕ кривизны дуги. Так как длина дуги равна A_0 , то

$$A(\varphi) = 2 \cdot \frac{A_0}{\psi} \cdot \sin(\psi / 2) = A_0 \cdot \frac{\sin(\psi / 2)}{\psi / 2} = A_0 \cdot \frac{\sin\left(\frac{kb \sin \varphi}{2}\right)}{\frac{kb \sin \varphi}{2}}.$$

Интенсивность $I(\varphi)$ меняется по закону:

$$I(\varphi) = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{kb \sin \varphi}{2}\right),$$

где интенсивность в центре дифракционной картины $I_0 \sim b^2$.

Для направлений φ_m на дифракционные минимумы m -го порядка $A(\varphi_m) = 0$, поэтому сумма векторов dA_i замыкается в окружность после m оборотов (рис. О.9.1 в), при этом разность фаз между волнами, идущими от крайних точек щели, равна $\psi_m = 2\pi m$. Отсюда получаем условие для дифракционных минимумов:



Рис. О.9.1 в.

$$kb \sin \varphi_m = 2\pi m \quad \text{или} \quad b \sin \varphi_m = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

откуда $\sin \varphi_m = m\lambda / b$.

9.2. $\Delta x = \frac{2\lambda f}{b} = 0,44 \text{ мм}$

9.3. $\Delta x = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1) f}{b} \approx 0,7 \text{ мм}; \quad \frac{\delta x}{\Delta x} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \approx 0,3.$

9.4. При $\varphi = 0$ максимум нулевого порядка; далее угловое распределение максимумов находится из условия: $b \sin \varphi \approx (2m + 1) \cdot \lambda / 2$, $m = 1, 2, 3, \dots$

Решение. Максимум нулевого порядка будет наблюдаться при $\varphi = 0$.

Интенсивность дифракционной картины на экране определяется формулой (см. задачу 9.1):

$$I(\varphi) = I_0 \cdot \text{sinc}^2 \left(\frac{kb \sin \varphi}{2} \right) = I_0 \left(\frac{\sin(\pi b \sin \varphi / \lambda)}{\pi b \sin \varphi / \lambda} \right)^2.$$

В точках максимумов должно выполняться условие:

$\frac{dI(\varphi)}{d\varphi} = 0$. Найдем эту производную:

$$\begin{aligned} \frac{dI(\varphi)}{d\varphi} &= 2I_0 \cdot \frac{\sin \left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right)}{\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}} \cdot \\ &\cdot \frac{\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \cdot \cos \left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right) \cdot \frac{\pi b \cos \varphi}{\lambda} - \sin \left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right) \cdot \frac{\pi b \cos \varphi}{\lambda}}{\left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right)^2} = \\ &= 2I_0 \frac{\sin \left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right) \cdot \text{ctg} \varphi}{\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}} \cdot \left[\text{ctg} \left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right) - \frac{1}{\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}} \right] \cdot \sin \left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

Приравняв производную нулю, из сомножителя в квадратных скобках получаем трансцендентное уравнение:

$$\text{tg} \alpha = \alpha, \text{ где } \alpha = \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}.$$

Данное уравнение можно приближенно решить графически, построив графики $y_1 = \text{tg} \alpha$ и $y_2 = \alpha$ и найдя точки их пересечения.

Корнями данного уравнения являются:

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1,43\pi, \alpha_3 = 2,46\pi, \alpha_4 = 3,47\pi, \alpha_5 = 4,47\pi \text{ и т.д.}$$

Приближенно можно записать:

$$\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \approx (2m + 1) \cdot \frac{\pi}{2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

откуда получаем условие максимумов интенсивности:

$$b \sin \varphi \approx (2m + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$\mathbf{9.5.} \quad x_1 \approx \pm \frac{3\lambda f}{2b} = \pm 9 \text{ мм}, \quad x_2 \approx \pm \frac{5\lambda f}{2b} = \pm 15 \text{ мм};$$

$$I_0 : I_1 : I_2 \approx 1 : \frac{4}{9\pi^2} : \frac{4}{25\pi^2} \approx 1 : 0,045 : 0,016.$$

Указание. Углы дифракции, при которых наблюдаются максимумы интенсивности, находятся из условия (см. задачу 9.4): $b \sin \varphi \approx (2m + 1) \cdot \lambda / 2$ ($m = 1, 2, 3, \dots$). Интенсивность в максимумах рассчитывается по формуле:

$$I \approx \frac{I_0}{[(2m + 1) \cdot \pi / 2]^2}.$$

$$\mathbf{9.6.} \quad \Delta x_{12} \approx \frac{2}{3} \Delta x_{01} = 2 \text{ мм}.$$

$$\mathbf{9.7.} \quad N = \left[\frac{2b}{\lambda} \right] = 11.$$

9.8. Увеличится в m^2 раз.

$$\mathbf{9.9.} \quad l_1 = l_0 / 6.$$

Указание. Интенсивность в центре дифракционной картины пропорциональна квадрату ширины b щели.

$$\mathbf{9.10.} \quad (n_1 - n_2) d = (m + 1/2) \lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Решение. Каждая из пластин вносит дополнительную разность хода, равную $\Delta_{\text{доп}} = (n - 1) d$. Для минимума в центре необходимо, чтобы волны приходили в противофазе:

$$\Delta_{\text{доп}1} - \Delta_{\text{доп}2} = (n_1 - n_2) d = (m + 1/2) \lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\mathbf{9.11.} \quad I_{\text{экр}} = I_0 \cdot \frac{b^2}{L\lambda} = 0,1 \text{ мВт/см}^2.$$

Решение. Поскольку число открытых зон Френеля, соответствующих ширине щели, равно

$$m \approx \frac{b^2}{\lambda \cdot L} = 0,01 \ll 1,$$

справедливо приближение Фраунгофера. Угловая ширина максимума нулевого порядка $\Delta\varphi \approx \frac{\lambda}{b}$, а линейный размер этого максимума

на экране (расстояние между минимумами интенсивности) равен:

$$\Delta x = 2L \cdot \Delta\varphi.$$

Энергию, прошедшую через щель (в расчете на единицу длины щели), можно оценить по формуле:

$$W = b \cdot I_0.$$

Так как более 90% энергии сосредоточено в максимуме нулевого порядка, можно считать, что вся прошедшая энергия "распределится" по размеру этого максимума на экране. Следовательно,

$$W \approx \frac{I_{\text{экр}}}{2} \cdot \Delta x = I_{\text{экр}} \cdot L \cdot \Delta\varphi = I_{\text{экр}} \cdot \frac{L\lambda}{b},$$

где $I_{\text{экр}}$ - интенсивность в центре экрана ($I_{\text{экр}}/2$ - "среднее" значение интенсивности в пределах максимума).

Для оценки интенсивности в центре экрана получаем:

$$I_{\text{экр}} = I_0 \cdot \frac{b^2}{L\lambda} = m \cdot I_0 = 0,1 \text{ мВт/см}^2.$$

$$\mathbf{9.12.} \quad b = \sqrt{\frac{L\lambda}{n}} = 0,1 \text{ мм}.$$

Указание. См. задачу 9.11.

$$9.13. L \leq \frac{Dd}{1,22\lambda}.$$

Решение. Глаз человека можно рассматривать как оптическую систему, состоящую из круглой диафрагмы (зрачка диаметром d от 2 до 8 мм), собирающей линзы (хрусталика с фокусным расстоянием до 2 см) и экрана для наблюдения (сетчатки глаза). Изображение удаленного объекта формируется вблизи фокальной плоскости хрусталика. В приближении геометрической оптики угловые размеры объекта и изображения одинаковы и равны:

$$\Delta\theta = \frac{D}{L},$$

где D – поперечный размер объекта, L – расстояние от объекта до глаза.

Вследствие дифракции на зрачке угловой размер изображения увеличивается. Угловой радиус центрального дифракционного максимума равен

$$\theta_{\text{дифКр}} \approx \frac{1,22 \cdot \lambda}{d},$$

поэтому для наблюдателя две светящиеся некогерентные точки будут сливаться в одну, если

$$\Delta\theta \leq \theta_{\text{дифКр}}.$$

Таким образом, фары автомобиля будут видны отдельно с расстояния

$$L \leq \frac{Dd}{1,22\lambda}.$$

9.14. Условие главных максимумов: $d \sin \varphi_{\text{max}} = m\lambda$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); условие главных минимумов: $b \sin \varphi_{\text{min}} = n\lambda$ ($m = 1, 2, 3, \dots$): условие добавочных минимумов: $d \sin \varphi_p = \frac{p}{N} \lambda$, $p \neq \alpha N$, где α – целое число.

Решение. Ход лучей изображен на рис. О.9.14 а. Лучи, идущие после решетки под углом дифракции φ , собираются линзой в точке B_φ экрана, расположенного в её фокальной плоскости. ОС – фронт волны после решетки.

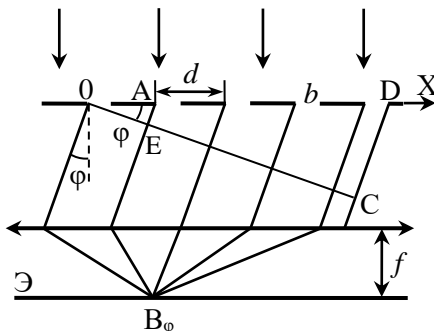


Рис. О.9.14 а.

Для углов дифракции, которые удовлетворяют соотношению $b \sin \varphi_{\min} = n\lambda$, ин-

тенсивность картины от каждой из щелей равна нулю (см. векторную диаграмму на рис. О.9.1б), поэтому интенсивность от всей решетки также будет равна нулю. Это условие **главных минимумов**.

В точке наблюдения возмущение, приходящее от i -ой щели, характеризуется вектором A_i . Разность хода между волнами от соседних щелей, идущими под углом φ к направлению падающей волны, равна (на рис. О.9.14 а это отрезок АЕ):

$$\Delta_\varphi = d \sin \varphi ,$$

а разность фаз составляет

$$\psi_\varphi = k \cdot d \sin \varphi , \text{ где } k = 2\pi / \lambda .$$

Комплексная амплитуда поля от всей решетки $A(\varphi) = \sum_{i=1}^N A_i$.

Если выполняется условие

$$\psi_m = k \cdot d \sin \varphi = 2\pi m , \text{ т.е. } d \sin \varphi_{\max} = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) ,$$

векторы A_i сонаправлены и просто суммируются, т.е. возмущения от всех щелей усиливают друг друга. Таким образом, полученное соотношение является условием **главных максимумов**.

Заметим, что для центрального максимума длина вектора $A_\varphi = NA_0$, где

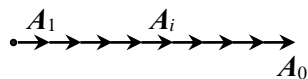


Рис. О.9.14 б.

A_0 – амплитуда падающей волны (см. рис. О.9.14 б), а интенсивность света

$$I(\varphi = 0) \propto A_\varphi^2 = N^2 I_0 .$$

Если углы дифракции, соответствующие главным максимумам, совпадают с углами для главных минимумов, реализуется минимум, т.к. для каждой из щелей при таких углах дифракции $I = 0$.

Для угла дифракции φ каждый из одинаковых по длине векторов A_i повернут относительно предыдущего вектора на один и тот же угол ψ_φ . В результате цепочка векторов образует дугу окружности. Хорда, стягивающая получившуюся дугу, является комплексной амплитудой поля $A(\varphi)$ от всей решетки.

Для направлений φ_p на добавочные дифракционные минимумы $A(\varphi_p) = 0$, поэтому сумма векторов A_i представляет собой окружность (рис. О.9.14 в), при этом разность фаз между волнами, идущими от первой и последней щелей, равна $\psi_p = N\psi_\varphi = 2\pi p$.



Рис. О.9.14 в.

Отсюда получаем условие для **добавочных дифракционных минимумов**:

$$k \cdot Nd \sin \varphi_p = 2\pi p \quad \text{или}$$

$$d \sin \varphi_p = \frac{p}{N} \lambda, \quad p \neq \alpha N, \quad \text{где } \alpha - \text{целое число.}$$

Заметим, что при $p = \alpha N$ условие добавочных минимумов совпадает с условием главных максимумов, а при таких углах дифракции реализуется максимум. Поэтому между двумя главными максимумами находится $(N-1)$ добавочный минимум и $(N-2)$ добавочных максимума малой интенсивности.

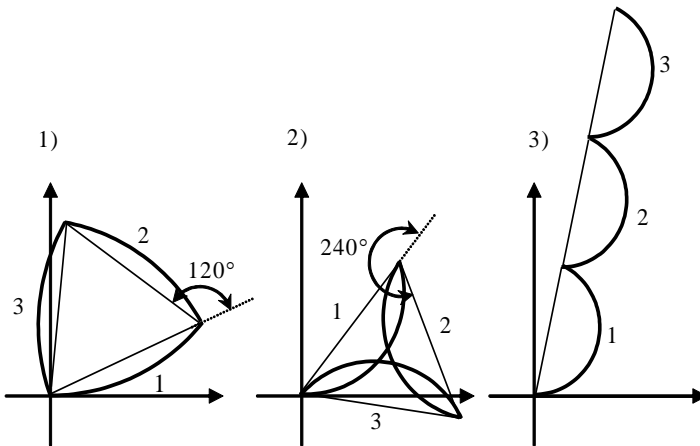


Рис. О.9.14 г.

Пример построения векторных диаграмм для трех щелей приведен на рис. О.9.14 з: для первого (1) и второго (2) интерференционных минимумов и первого дифракционного максимума (3).

$$9.15. d = \frac{2\lambda}{\sin 30^\circ} = 2,8 \text{ мкм} , n = 1/d \approx 3570 \text{ штрихов на 1 см.}$$

$$9.16. \lambda_2 = \lambda_1 \cdot \frac{\sin \varphi_2}{2 \sin \varphi_1} \approx 410 \text{ нм} ; n = \frac{\sin \varphi_1}{\lambda_1} \approx 4970 \text{ см}^{-1} .$$

$$9.17. \lambda_2 = \frac{m_4}{m_3} \lambda_1 = 600 \text{ нм.}$$

$$9.18. m_{\max} = \left[\frac{1}{n\lambda} \right] = 3 .$$

$$9.19. \lambda \approx d\Delta\varphi = 471 \text{ нм} .$$

$$9.20. n = \frac{\sin(\Delta\varphi/2)}{3\lambda} \approx 20 \text{ мм}^{-1} .$$

$$9.21. \Delta\varphi \approx n(2\lambda_2 - \lambda_1) = 0,002 \text{ рад} \approx 7' .$$

$$9.22. \varphi = \arcsin \left(\frac{5\lambda_1}{d} \right) \approx 41^\circ .$$

Решение. Из условия дифракционных максимумов получаем:

$$\sin \varphi = \frac{m_1 \lambda_1}{d} = \frac{m_2 \lambda_2}{d} , \text{ откуда } m_1 \lambda_1 = m_2 \lambda_2 .$$

Следовательно,
$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1,6 = \frac{8}{5} .$$

Так как числа m_1 и m_2 целые, то минимальные значения, удовлетворяющие этому условию, $m_1 = 5$, $m_2 = 8$. Подставляя $m_1 = 5$ в условие дифракционного максимума, находим:

$$\sin \varphi = \frac{m_1 \lambda_1}{d} = 0,654, \text{ откуда } \varphi \approx 41^\circ.$$

$$\mathbf{9.23.} \quad d = \frac{2\lambda_1}{\sin \varphi} = 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ мм.}$$

Указание. Задача решается аналогично задаче 9.22.

$$\mathbf{9.24.} \quad d = \frac{3\lambda}{\sin \varphi} \approx 20 \text{ мкм}, \text{ где } \sin \varphi = 0,87.$$

Решение. Поскольку различие между длинами волн $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ мало, то разность углов $\Delta\varphi$ тоже мала. Запишем условия максимумов для этих волн в третьем порядке в виде:

$$d \sin \varphi = 3\lambda, \quad d \sin(\varphi + \Delta\varphi) = 3(\lambda + \Delta\lambda), \text{ где } \lambda = \lambda_1.$$

Используя формулы тригонометрии, получаем:

$$d \sin(\varphi + \Delta\varphi) = d (\sin \varphi \cos(\Delta\varphi) + \cos \varphi \sin(\Delta\varphi)) = 3\lambda + 3\Delta\lambda.$$

Считая $\sin(\Delta\varphi) \approx \Delta\varphi$ и $\cos(\Delta\varphi) \approx 1$, находим:

$$d \Delta\varphi \cos \varphi = 3\Delta\lambda.$$

Деля почленно уравнение $d \sin \varphi = 3\lambda$ на последнее уравнение, получаем:

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \frac{1}{\Delta\varphi} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}, \text{ откуда}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \Delta\varphi \cdot \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\Delta x}{f} \cdot \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 1,767, \quad \varphi = 60^\circ 30', \quad \sin \varphi = 0,87.$$

Подставляя найденное значение $\sin \varphi$ в условие главного максимума, определяем период решетки:

$$d = \frac{3\lambda}{\sin \varphi} \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 20 \text{ мкм}.$$

$$\mathbf{9.25.} \quad d(\sin \varphi - \sin \theta) = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$d \cos \theta \cdot (\varphi - \theta) = m\lambda$ при углах падения, близких к $\pi/2$.

Решение. На рис. О.9.25 показан ход

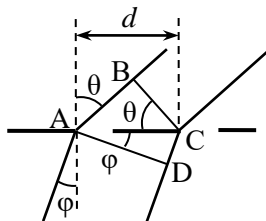


Рис. О.9.25.

лучей при падении волны на решетку под углом θ для угла дифракции φ . BC – фронт падающей волны, AD – фронт дифрагировавшей волны. Разность хода между волнами от соседних щелей, равна:

$$\Delta_{\varphi} = d \sin \varphi - d \sin \theta .$$

Условие дифракционных максимумов теперь примет вид:

$$d(\sin \varphi - \sin \theta) = m\lambda , \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

или

$$2d \cos \frac{\varphi + \theta}{2} \sin \frac{\varphi - \theta}{2} = m\lambda .$$

Если $d \gg \lambda$ и $m \ll d/\lambda$, углы дифракции φ близки к θ , и условие максимумов можно записать в виде:

$$d \cos \theta \cdot (\varphi - \theta) = m\lambda ,$$

т.е. период решетки как бы уменьшился и стал равен $d \cos \theta < d$.

Аналогично, условие для направлений на дифракционные минимумы запишется в виде:

$$b \cdot \cos \theta \cdot (\varphi - \theta) \approx m\lambda ,$$

т.е. ширина щели как бы станет $b \cos \theta < b$.

При этом углы $(\varphi - \theta)$, определяющие направления на максимумы, отсчитываются от направления падающей волны.

$$9.26. \quad \lambda = \frac{d}{2} \cdot \cos \theta \cdot (\varphi - \theta) \approx 0,573 \text{ \AA} .$$

$$9.27. \quad \lambda = \frac{d}{m_4} \cdot \psi \cos \frac{2\theta - \psi}{2} \approx 9,9 \text{ \AA} .$$

$$9.28. \quad m_{\max} = \left[\frac{2d}{\lambda} \right] .$$

Решение. При наклонном падении света на решетку условие максимумов имеет вид:

$$d(\sin \varphi - \sin \theta) = m\lambda .$$

Поскольку $\sin \varphi - \sin \theta \leq 2$, получаем: $m_{\max} = \left[\frac{2d}{\lambda} \right] .$

$$9.29. \Delta\varphi_m = \frac{\lambda}{N\sqrt{d^2 - m^2\lambda^2}}.$$

Решение. Направления на главные дифракционные максимумы определяются из условия:

$$d \sin \varphi_m = m\lambda.$$

Условия добавочных минимумов имеют вид (см. задачу 9.14):

$$d \sin \varphi_p = \frac{p}{N}\lambda, \quad p \neq \alpha N.$$

Ближайшие к дифракционным максимумам минимумы находятся из условий:

$$d \sin \varphi_{m,\min} = \left(m \pm \frac{1}{N}\right)\lambda.$$

Для вычисления $\Delta\varphi_m$ возьмем полный дифференциал от обеих частей уравнения $d \sin \varphi_m = m\lambda$ по переменным φ_m и m при постоянных d и λ :

$$d \cdot \delta(\sin \varphi_m) = \delta m \cdot \lambda.$$

Так как $\delta(\sin \varphi_m) = \cos \varphi_m \cdot \Delta\varphi_m$ и $\delta m = \pm \frac{1}{N}$, получаем:

$$\Delta\varphi_m = \frac{\lambda}{Nd \cos \varphi_m} = \frac{\lambda}{Nd \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_m}} = \frac{\lambda}{N\sqrt{d^2 - m^2\lambda^2}}.$$

Чем больше m , тем больше ширина максимума.

$$9.30. \Delta x = \frac{\lambda f}{L\sqrt{1 - (\lambda n)^2}} \approx 3,3 \text{ мкм}.$$

Указание. См. задачу 9.28.

$$9.31. \frac{d}{b} = \frac{m}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Решение. Если углы дифракции, соответствующие главным максимумам, совпадают с углами для главных минимумов, реализуется минимум. Из условий на главные дифракционные миниму-

мы (см. задачу 9.14) $d \sin \varphi_n = n\lambda$ и максимумы $d \sin \varphi_m = m\lambda$ следует, что

$$\frac{n\lambda}{b} = \frac{m\lambda}{d}, \text{ откуда } \frac{d}{b} = \frac{m}{n}, n = 1, 2, 3, \dots$$

9.32. Увеличится в 4 раза.

$$\mathbf{9.33.} \quad d = \frac{2\lambda}{\sin \varphi_1} = 6 \text{ мкм}, \quad b = \frac{d}{4} = 1,5 \text{ мкм};$$

$$m = 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10.$$

Указание. Пропадают максимумы с номерами m , кратными 4. Общее число наблюдаемых максимумов определяется из условия: $m_{\max} = [d / \lambda]$.

$$\mathbf{9.34.} \quad I = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{kb \sin \varphi}{2} \right), \text{ где } I_0 \sim b^2.$$

Решение. Введем функцию пропускания препятствия $\alpha(x')$ как отношения комплексной амплитуды поля волны в точках, расположенных непосредственно за препятствием, к комплексной амплитуде поля падающей волны в точках, расположенных непосредственно перед препятствием:

$$\alpha(x') = \frac{A_{\text{за}}(x')}{A_{\text{перед}}(x')} = \begin{cases} 1, & |x'| \leq b/2, \\ 0, & |x'| \geq b/2, \end{cases}$$

где x' – координаты в плоскости препятствия.

В этом случае комплексная амплитуда поля за препятствием вычисляется по формуле:

$$A(\sin \varphi) = B \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') \cdot \exp [ik_x x'] dx',$$

которая является пространственным преобразованием Фурье от функции пропускания препятствия $\alpha(x')$, а $k_x = k \sin \varphi$ называют *пространственными частотами*. Подставляя записанную функцию пропускания $\alpha(x')$, получаем:

$$\begin{aligned}
 A(\sin \varphi) &= B \int_{-b/2}^{b/2} e^{ik_x x'} dx' = B \frac{e^{ik_x b/2} - e^{-ik_x b/2}}{ik_x} = \\
 &= Bb \frac{2i \sin(k_x b/2)}{ik_x b} = Bb \frac{\sin(k_x b/2)}{k_x b/2} = Bb \cdot \operatorname{sinc} \left(\frac{kb \sin \varphi}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Распределение интенсивности $I \propto A^2$ имеет вид:

$$I = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{kb \sin \varphi}{2} \right), \text{ где } I_0 \sim b^2.$$

$$9.35. I(\varphi) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{kb \sin \varphi}{2} \right) \cdot \left(\frac{\sin(Nkd \sin \varphi / 2)}{\sin(kd \sin \varphi / 2)} \right)^2,$$

где $I_0 \sim b^2$.

Решение. Запишем функцию пропускания решетки в виде:

$$\alpha(x') = \alpha_0(x') + \alpha_0(x' + d) + \alpha_0(x' + 2d) + \dots + \alpha_0(x' + (N-1)d),$$

где функция $\alpha_0(x')$ — это функция пропускания одной щели шириной b , комплексная амплитуда которой $A(k_x)$ получена в **задаче 9.34**:

$$A_0(k_x) = Bb \cdot \operatorname{sinc} \left(\frac{k_x b}{2} \right), \text{ где } k_x = k \sin \varphi.$$

Используя свойства преобразований Фурье (см. **задачу 3.6**), для решетки можем записать:

$$\begin{aligned}
 A(k_x) &= Bb \operatorname{sinc} \left(\frac{k_x b}{2} \right) \cdot \left(1 + e^{ik_x d} + e^{ik_x \cdot 2d} + \dots + e^{i(N-1)k_x d} \right) = \\
 &= Bb \cdot \operatorname{sinc} \left(\frac{k_x b}{2} \right) \cdot \frac{1 - e^{ik_x Nd}}{1 - e^{ik_x d}} = Bb \cdot \operatorname{sinc} \left(\frac{k_x b}{2} \right) \cdot \frac{e^{ik_x Nd/2}}{e^{ik_x d/2}} \cdot \frac{\sin \left(\frac{Nk_x d}{2} \right)}{\sin \left(\frac{k_x d}{2} \right)}.
 \end{aligned}$$

При преобразованиях использовалась формула суммы членов геометрической прогрессии, которая стоит в круглых скобках, а также формула Эйлера: $\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$.

Интенсивность $I \propto A \cdot A^*$ света за решеткой равна:

$$I(\varphi) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{kb \sin \varphi}{2} \right) \cdot \left(\frac{\sin(Nkd \sin \varphi / 2)}{\sin(kd \sin \varphi / 2)} \right)^2,$$

где I_0 – интенсивность в центре картины при дифракции на одной щели шириной b ($I_0 \sim b^2$).

Заметим, что $I(\varphi = 0) = N^2 I_0 \sim (Nb)^2$.

9.36. См. решение.

Решение. Дополнительными называются объекты, функции пропускания $\alpha_1(x', y')$ и $\alpha_2(x', y')$ которых удовлетворяют условию: $\alpha_1(x', y') + \alpha_2(x', y') = 1$ во всех точках плоскости объекта: $-\infty < x', y' < \infty$. Для первого объекта комплексная амплитуда поля запишется в виде:

$$\begin{aligned} A_1(\sin \varphi_x, \sin \varphi_y) &= B \cdot \int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} \alpha_1(x', y') \cdot \exp [i(k_x x' + k_y y')] dx' dy' = \\ &= B \cdot \int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} (1 - \alpha_2(x', y')) \cdot \exp [i(k_x x' + k_y y')] dx' dy' = \\ &= B \cdot \left[\delta(k_x, k_y) - \int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} \alpha_2(x', y') \cdot \exp [i(k_x x' + k_y y')] dx' dy' \right] = \\ &= B \cdot [\delta(k_x, k_y) - A_2(\sin \varphi_x, \sin \varphi_y)], \end{aligned}$$

где $\delta(k_x, k_y)$ – дельта-функция, не равная нулю только для нулевых углов дифракции ($\varphi_x = \varphi_y = 0$).

Таким образом, во всех остальных точках экрана

$$A_1(\sin \varphi_x, \sin \varphi_y) = -A_2(\sin \varphi_x, \sin \varphi_y).$$

Так как интенсивность света $I \propto A^2$, то интенсивности совпадают для дополнительных объектов везде, кроме нулевых углов дифракции ($\varphi_x = \varphi_y = 0$).

9.38. а) не изменятся; б) уменьшится в 4 раза; в) увеличится в 2 раза.

9.39. Главные дифракционные максимумы и минимумы раздвинутся от центра дифракционной картины, ширина дифракционных максимумов увеличится.

9.40. а) не изменятся; б) главные дифракционные минимумы сдвигаются к центру картины; в) увеличится в 4 раза; г) не изменится.

9.41. а) Главные максимумы сдвинутся к центру картины (если $\sin \varphi_m \approx \varphi_m$, то углы φ_m уменьшатся в 2 раза); б) не изменятся; в) уменьшится в 4 раза; г) не изменится; д) уменьшится с $(N-2)$ до $(N/2-2)$.

9.42. Максимум нулевого порядка дифракционной картины будет наблюдаться при $\varphi = \theta$, а ее параметры будут соответствовать картине от решетки с периодом $d_{\text{накл}} = d \cos \theta < d$ и шириной щели $b_{\text{накл}} = b \cos \theta < b$ (см. задачу 9.25).

9.43. а) $b/d = 1/2$; б) $b/d = 1/4$ или $b/d = 3/4$; в) $b/d = 1/6$, $b/d = 3/6$ или $b/d = 5/6$.

Решение. Главные дифракционные максимумы находятся из условия

$$d \sin \varphi_m = m\lambda,$$

в этом случае в формуле для дифракции Фраунгофера на N щелях

$$I(\varphi) = I_0 \cdot \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N\delta}{\sin \delta} \right)^2$$

сомножитель $\left(\frac{\sin N\delta}{\sin \delta}\right)^2$ равен N^2 , а

$$u = \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} = \frac{\pi d \sin \varphi}{\lambda} \cdot \frac{b}{d} = m\pi \frac{b}{d}.$$

По условию полная ширина решетки L неизменна, отсюда $N = L/d$. Т.к. $I_0 \sim b^2$, то в максимумах

$$I(\varphi_{\max}) \sim b^2 \cdot \left(\frac{\sin(m\pi b/d)}{m\pi b/d}\right)^2 \cdot \left(\frac{L}{d}\right)^2 \sim \sin^2\left(m\pi \frac{b}{d}\right).$$

Так как $\sin^2 x$ принимает максимальные значения, если его аргумент $x = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \dots$, то при $m = 1$ существует единственное решение: $b/d = 1/2$; при $m = 2$ — два решения: $b/d = 1/4$ или $b/d = 3/4$; при $m = 3$ — три решения: $b/d = 1/6$, $b/d = 3/6$ или $b/d = 5/6$.

§10. Спектральные приборы. Многоволновая интерференция

$$10.1. D_{\varphi} = \frac{m}{d \sqrt{1 - (m\lambda / d)^2}} .$$

Решение. Условие главных максимумов для дифракционной решетки имеет вид:

$$d \sin \varphi_{m, \max} = \pm m\lambda , \quad m = 0, 1, 2, \dots .$$

Изменение угла дифракции $\delta\varphi_m$ при изменении длины волны на $\delta\lambda$ можно найти, взяв дифференциал от обеих частей записанного уравнения:

$$\delta(d \sin \varphi_m) = d \cos \varphi_m \delta\varphi_m = \delta(m\lambda) = m \cdot \delta\lambda ,$$

откуда для угловой дисперсии получаем:

$$D_{\varphi} = \frac{\delta\varphi_m}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi_m} = \frac{m}{d \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_m}} = \frac{m}{d \sqrt{1 - (m\lambda / d)^2}} .$$

$$10.2. D_{\varphi} = \frac{m}{d \sqrt{1 - (m\lambda / d)^2}} \approx 4,1 \cdot 10^{-4} \text{ рад/нм} .$$

$$10.3. D_{\varphi} = \frac{m_{\max} n}{\sqrt{1 - (m_{\max} \lambda n)^2}} \approx 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ нм}^{-1} , \text{ где } m_{\max} = \left[\frac{d}{\lambda} \right] = 3 .$$

$$10.4. D_x = \frac{f n m}{\cos \varphi_m} \approx f n = 0,2 \text{ мм/нм} .$$

$$10.5. \delta x \approx f n (\lambda_2 - \lambda_1) = 0,12 \text{ мм} .$$

$$10.6. D_{\varphi} = \frac{\text{tg} \varphi}{\lambda} \approx 1,15 \cdot 10^{-3} \text{ рад/нм} \approx 4 \text{ угл. мин/нм} .$$

$$10.7. \delta\varphi_3 = D_\varphi \cdot \frac{\lambda}{N} = \frac{3\lambda}{Nd \sqrt{1 - (3\lambda/d)^2}} \approx 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ рад} .$$

Решение. Под угловой шириной дифракционного максимума $\Delta\varphi_m$ m -го порядка понимают угловое расстояние между главным дифракционным максимумом и ближайшими к нему дифракционными минимумами, определяемыми из условий:

$$d \sin \varphi_{m,\max} = \pm m\lambda , \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$d \sin \varphi_{m,\min} = \left(m \pm \frac{1}{N} \right) \lambda , \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Так как $\varphi_{m,\min} = \varphi_{m,\max} + \Delta\varphi_m$, то

$$d \sin \varphi_{m,\min} \approx d \left(\sin \varphi_{\max} \pm \cos \varphi_{\max} \cdot \Delta\varphi_m \right) = \left(m \pm \frac{1}{N} \right) \lambda ,$$

откуда

$$\Delta\varphi_m = \frac{\lambda}{Nd \cos \varphi_m} = D_\varphi \frac{\lambda}{N} .$$

$$10.8. D_\varphi(\theta) = \frac{m}{d \sqrt{1 - (\sin \theta + m\lambda/d)^2}} .$$

Решение. Угловое положение φ_m главных дифракционных максимумов при наклонном падении света на решетку находится из условия (см. задачу 9.25):

$$d(\sin \varphi_m - \sin \theta) = m\lambda .$$

Возьмем полный дифференциал от обеих частей уравнения по переменным φ_m и λ при постоянных d и m :

$$d \cdot \delta(\sin \varphi_m - \sin \theta) = m \cdot \delta\lambda ,$$

откуда находим выражение для угловой дисперсии:

$$D_\varphi = \frac{\delta\varphi_m}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi_m} , \text{ где}$$

$$\cos \varphi_m = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_m} = \sqrt{1 - (\sin \theta + m\lambda/d)^2} .$$

Окончательно получаем:

$$D_{\varphi}(\theta) = \frac{m}{d \sqrt{1 - (\sin \theta + m\lambda / d)^2}} .$$

$$10.9. \delta x = \frac{f(\lambda_2 - \lambda_1)}{d \sqrt{1 - (\sin \theta + \lambda / d)^2}} \approx 1,4 \text{ мм} .$$

$$10.10. R = \frac{L}{\lambda} \cdot m : a) R = 20000; б) R = 60000.$$

$$10.11. d = \frac{L(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_{\text{ср}}} = 2,2 \cdot 10^{-2} \text{ мм} .$$

$$10.12. \delta \lambda = \frac{\lambda d}{2L} = 0,24 \text{ \AA}.$$

$$10.13. R_{\text{max}} = \frac{L}{\lambda} = 10^5 .$$

Указание. Разрешающая сила достигает максимального значения при максимальном порядке спектра $m_{\text{max}} = \left[\frac{d}{\lambda} \right]$.

10.14. а) Не будут; б) будут.

$$10.15. m_2 = m_1 \cdot \frac{\lambda_{2\text{ср}}}{\Delta \lambda_2} \cdot \frac{\Delta \lambda_1}{\lambda_{1\text{ср}}} = 6, \quad \text{где} \quad \Delta \lambda_1 = \lambda_{12} - \lambda_{11},$$

$\Delta \lambda_2 = \lambda_{22} - \lambda_{21}$, $\lambda_{\text{ср}}$ — средние значения двух близких длин волн.

$$10.16. R = \frac{n\lambda}{\sqrt{d^2 - (m\lambda)^2} \cdot \delta \varphi} = \frac{1}{\delta \varphi} .$$

Решение. Условия максимума и ближайшего к нему минимума имеют вид:

$$d \sin \varphi = m\lambda ; \quad d \sin (\varphi + \delta\varphi) = m\lambda + \frac{\lambda}{N},$$

откуда $d \cos \varphi \cdot \delta\varphi = \frac{\lambda}{N}$.

Число штрихов решетки равно:

$$N = \frac{\lambda}{d \cos \varphi \cdot \delta\varphi} = \frac{\lambda}{d \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} \cdot \delta\varphi} = \frac{\lambda}{\sqrt{d^2 - (m\lambda)^2} \cdot \delta\varphi}.$$

Разрешающая способность решетки в n -м порядке равна:

$$R = nN = \frac{n\lambda}{\sqrt{d^2 - (m\lambda)^2} \cdot \delta\varphi}.$$

Подставляя $m = 3$, $n = 4$, $d = 5\lambda$, получаем:

$$R = \frac{4\lambda}{\sqrt{25\lambda^2 - 9\lambda^2} \cdot \delta\varphi} = \frac{4\lambda}{4\lambda \cdot \delta\varphi} = \frac{1}{\delta\varphi}.$$

10.17. $m_{\max} = \left[\frac{d}{\lambda} \right] = 3$; $\delta\lambda = \frac{\lambda}{m_{\max} N} \approx 0,04\text{Å}$.

10.18. $m = \frac{\lambda_{\text{ср}}}{N(\lambda_2 - \lambda_1)} > 2$, т.е. линии будут разрешены, начиная с 3-го порядка; $\varphi_3 = \arcsin (3\lambda_2 / d) \approx 16^\circ$.

10.19. 1) $m = \frac{\lambda}{\delta\lambda Ln} > 3$, т.е. линии будут разрешены, начиная с 4-го порядка; 2) $\delta\lambda = \frac{\lambda^2}{L} \approx 0,07 \text{Å}$.

10.20. Максимальную разрешающую способность $R_1=50000$ обеспечивает первая решетка.

Решение. Разрешающая способность решетки $R = mN$, где общее число штрихов N равно:

$$N = \frac{L}{d} = Ln .$$

Максимально возможный порядок дифракции определяется из условия дифракционных максимумов:

$$d \sin \varphi_{m,\max} = m\lambda , (m = 0,1,2,\dots),$$

откуда

$$m = \frac{d \sin \varphi_{m,\max}}{\lambda} = \frac{\sin \varphi_{\max}}{\lambda \cdot n} .$$

В результате получаем:

$$R = mN = \frac{\sin \varphi_{\max}}{\lambda \cdot n} \cdot Ln = \sin \varphi_{\max} \cdot \frac{L}{\lambda} ,$$

т.е. разрешающая способность пропорциональна ширине решетки L и не зависит от числа n .

По условию $\varphi_{\max} \approx 15^\circ = \frac{\pi}{12} \approx \sin \varphi_{\max}$. Подставляя численные

значения, получаем:

$$1) m_1 = \left[\frac{\sin \varphi_{\max}}{\lambda n_1} \right] = 5 ; N_1 = L_1 \cdot n_1 = 10000 ; R_1 = m_1 N_1 = 50000 .$$

$$2) m_2 = \left[\frac{\sin \varphi_{\max}}{\lambda n_2} \right] = 1 ; N_2 = L_2 \cdot n_2 = 20000 ; R_2 = 20000 < R_1 .$$

10.21. Разрешающая способность не изменится, область свободной дисперсии уменьшится в 2 раза.

$$10.22. R_{\max} \approx \frac{L}{D} = 100 .$$

Решение. Радиус пространственной когерентности в плоскости решетки равен:

$$r_{\text{ког}} = \frac{\lambda L}{D} .$$

Эффективно работающее число щелей при этом $N_{\text{эфф}} \approx \frac{r_{\text{ког}}}{d}$, где d – период решетки. Максимальная разрешающая способность

решетки

$$R_{\max} = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = m_{\max} N_{\text{эфф}}, \text{ где } m_{\max} \approx \frac{d}{\lambda}.$$

Окончательно получаем:

$$R_{\max} = \frac{d}{\lambda} \cdot \frac{\lambda L}{Dd} = \frac{L}{D} = 100.$$

10.23. $\psi \leq \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ рад}.$

Указание. См. задачу 10.22.

10.24. $D_{\min} = \frac{1,22}{n} \cdot \frac{\lambda}{\delta\lambda} \approx 1,5 \text{ см}.$

Решение. При дифракции на круглом отверстии (в данном случае на линзе) угловая дифракционная расходимость определяется радиусом центрального дифракционного максимума и равна:

$$\theta_{\text{диф.}} \approx \frac{1,22 \cdot \lambda}{D}.$$

При этом радиус пространственной когерентности составляет: $r_{\text{ког}} = \frac{\lambda}{\theta_{\text{диф}}}$, а эффективно работающее число щелей (см. задачу

10.22) равно

$$N_{\text{эфф}} \approx \frac{r_{\text{ког}}}{d} = \frac{\lambda D}{d \cdot 1,22 \lambda} = \frac{Dn}{1,22}.$$

Спектр разрешается в первом порядке ($m = 1$), поэтому требуется разрешающая способность

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN_{\text{эфф}} = \frac{Dn}{1,22},$$

откуда определяем минимальный допустимый диаметр линзы:

$$D_{\min} = \frac{1,22}{n} \cdot \frac{\lambda}{\delta\lambda} \approx 1,5 \text{ см}.$$

$$10.25. \Delta\varphi = \frac{2 \sin(\theta/2)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\theta/2)}} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \cdot \Delta\lambda \approx 0,53'.$$

Решение. При установке призмы под углом наименьшего отклонения угол отклонения φ_0 луча связан с показателем преломления соотношением (см. задачу 1.33):

$$\sin \frac{\varphi_0 + \theta}{2} = n \cdot \sin \frac{\theta}{2}.$$

Дифференцируя это уравнение по φ , находим:

$$\frac{dn}{d\varphi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\theta + \varphi_0}{2}}{\sin(\theta/2)}.$$

Определим угловую дисперсию призмы:

$$D_\varphi = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{d\varphi}{dn} \cdot \frac{dn}{d\lambda} = \frac{2 \sin(\theta/2)}{\cos \frac{\theta + \varphi_0}{2}} \cdot \frac{dn}{d\lambda}.$$

Выражая угол наименьшего отклонения луча φ_0 через угол падения i луча на призму, получаем (см. задачу 1.33):

$$\cos \frac{\theta + \varphi_0}{2} = \cos i = \sqrt{1 - \sin^2 i} = \sqrt{1 - n^2 \sin^2(\theta/2)},$$

и окончательно находим:

$$D_\varphi = \frac{2 \sin(\theta/2)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\theta/2)}} \cdot \frac{dn}{d\lambda}.$$

Угол $\Delta\varphi$, на который будут разведены лучи, равен:

$$\Delta\varphi = D_\varphi \Delta\lambda = \frac{2 \sin(\theta/2)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\theta/2)}} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \cdot \Delta\lambda \approx 1,55 \cdot 10^{-4} \text{ рад} = 0,53'.$$

$$10.26. R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = b \cdot \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|.$$

Решение. Согласно критерию Рэлея для разрешения двух линий максимум линии с длиной волны λ должен совпадать с первым мини-

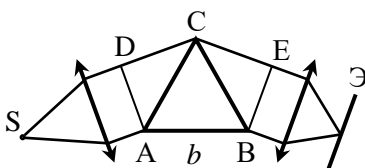


Рис. О.10.26.

мумом линии с $(\lambda + \delta\lambda)$. Запишем эти условия для угла наименьшего отклонения через оптические разности хода двух крайних лучей (рис. О.10.26) (AD и BE – фронт волны до призмы и после неё).

Условие максимума нулевого порядка для длины волны λ (показатель преломления для неё n):

$$bn - (DC + CE) = 0,$$

условие ближайшего к этому максимуму минимума для длины волны $(\lambda + \delta\lambda)$ (для неё показатель преломления $n + \delta n$):

$$b(n + \delta n) - (DC + CE) = \lambda + \delta\lambda.$$

Приравнивая эти разности хода и считая $\delta\lambda \ll \lambda$, получаем:

$$b\delta n \approx \lambda, \text{ откуда } R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = b \cdot \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|.$$

$$10.27. b = \frac{\lambda_{\text{ср}}}{(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot (dn / d\lambda)} \approx 1 \text{ см}.$$

Указание. См. задачу 10.26.

$$10.28. b \approx 20 \text{ см}.$$

$$10.29. R_{\text{max реш}} = \frac{2b}{\lambda} \approx 3,3 \cdot 10^5, \quad \frac{R_{\text{max реш}}}{R_{\text{призмы}}} = \frac{2}{\lambda \cdot dn / d\lambda} \approx 33.$$

Решение. Максимально возможный порядок спектра получается при наклонном падении света на дифракционную решетку и равен (см. задачу 9.28):

$$m_{\text{max}} = \left[\frac{2d}{\lambda} \right].$$

Максимальная разрешающая способность решетки

$$R_{\text{max реш}} = m_{\text{max}} N = \frac{2d}{\lambda} \cdot \frac{b}{d} = \frac{2b}{\lambda} \approx 3,3 \cdot 10^5.$$

Разрешающая способность призмы $R_{\text{призмы}} = b \cdot \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|$, а отношение разрешающих способностей решетки и призмы составляет:

$$\frac{R_{\text{max реш}}}{R_{\text{призмы}}} = \frac{2}{\lambda \cdot dn / d\lambda} \approx 33 .$$

$$\mathbf{10.30.} \quad \Delta x < \frac{2\lambda f}{b} = 2,5 \text{ мкм} .$$

Решение. Оценим угловую ширину максимума, соответствующую теоретической разрешающей способности призмы

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = b \cdot \left| \frac{dn}{d\lambda} \right| ;$$

$$\delta\varphi = D_{\varphi} \delta\lambda = D_{\varphi} \cdot \frac{\lambda}{b \cdot (dn / d\lambda)} ,$$

где D_{φ} – угловая дисперсия призмы, равная (см. **задачу 10.25**):

$$D_{\varphi} = \frac{2 \sin(\theta / 2)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\theta / 2)}} \cdot \frac{dn}{d\lambda} .$$

$$\text{Таким образом, } \delta\varphi = \frac{2\lambda \sin(\theta / 2)}{b \sqrt{1 - n^2 \sin^2(\theta / 2)}} \approx \frac{2\lambda}{b} .$$

Конечная ширина коллиматорной щели приводит к тому, что световой пучок, выходящий из коллиматора, имеет угловую расходимость $\Delta\alpha = \Delta x / f$, что приводит к смещению положения максимума в пределах этого угла. Для реализации теоретической разрешающей способности призмы должно быть

$$\Delta\alpha < \delta\varphi , \text{ т.е. } \frac{\Delta x}{f} < \frac{2\lambda}{b} ,$$

$$\text{откуда находим:} \quad \Delta x < \frac{2\lambda f}{b} = 2,5 \text{ мкм} .$$

$$\mathbf{10.31.} \quad 2h \cdot \cos \theta_m = m\lambda , \quad m = 1, 2, \dots, m_{\text{max}} = \left[\frac{2h}{\lambda} \right] ;$$

$$I_{\text{max}} = I_0, \quad I_{\text{min}} = I_0 \cdot \frac{(1 - \rho)^2}{(1 + \rho)^2} .$$

Решение. Согласно формуле Эйри интенсивность монохроматического излучения, прошедшего через интерферометр Фабри–Перо (ИФП), равна:

$$I = \frac{I_0}{1 + \frac{4\rho}{(1-\rho)^2} \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

где δ – разность фаз между соседними лучами:

$$\delta = k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2h \cos\theta = \frac{4\pi \cdot h}{\lambda} \cos\theta,$$

где θ – угол падения света на зеркала ИФП.

Интенсивность максимальна и равна I_0 , если $\sin(\delta/2) = 0$, т.е.

$$(2\pi h/\lambda) \cos\theta = m\pi.$$

Отсюда получаем условие для направлений θ_m на интерференционные максимумы:

$$2h \cdot \cos \theta_m = m\lambda, \quad m = 1, 2, \dots, m_{\max} = \left[\frac{2h}{\lambda} \right].$$

При выполнении условия $\sin^2(\delta/2) = 1$ значение интенсивности минимально и равно

$$I_{\min} = I_0 \cdot \frac{(1-\rho)^2}{(1+\rho)^2}.$$

10.32. $m = \left[\frac{2d}{\lambda} \right] \approx 36360.$

10.33. $\lambda_{0m} = 2h/m, \quad \theta_m = \sqrt{\frac{2(\lambda_{0m} - \lambda)}{\lambda_{0m}}}.$

Решение. 1) Из условия максимума интенсивности для $\theta_m = 0$ получаем: $2h = m\lambda$, откуда $\lambda_{0m} = 2h/m$.

2) Для $\lambda < \lambda_{0m}$ $2h \cdot \cos \theta_m = m\lambda$. С учетом малости θ_m можно записать:

$$2h \cdot \cos \theta_m = 2h \left(1 - \frac{\theta_m^2}{2} \right) = m\lambda_{0m} \left(1 - \frac{\theta_m^2}{2} \right) = m\lambda,$$

откуда $\theta_m = \sqrt{\frac{2(\lambda_{0m} - \lambda)}{\lambda_{0m}}}$.

10.34. $m_{\max} = \frac{2d}{\lambda} \approx 10^5$; $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m_{\max}} = \frac{\lambda^2}{2d} \approx 10^{-3}$ нм .

10.35. $\theta_{10} = \arccos \left(1 - \frac{(n-1)\lambda}{2h} \right) \approx 1^\circ 12'$, где $n = 10$.

Указание. Расположенное в центре светлое кольцо (или светлое пятно) соответствует максимальному порядку интерференции

$m_{\max} = \left[\frac{2h}{\lambda} \right] = 40000$. Другие кольца соответствуют меньшим порядкам: $(m_{\max} - 1)$ – для второго кольца, $(m_{\max} - 2)$ – для третьего и т.д. Угловой радиус θ_n n -го светлого кольца находим по формуле

$$\theta_n = \arccos \left(\frac{(m_{\max} - n + 1)\lambda}{2h} \right) = \arccos \left(1 - \frac{(n-1)\lambda}{2h} \right).$$

10.36. $\delta\theta_m = \frac{\lambda(1-\rho)}{2\pi h \sqrt{\rho} \sin \theta_m}$.

Решение. Под шириной колец подразумевают ширину области между находящимися по разные стороны от максимума точками, в которых интенсивность уменьшается в два раза. Из формулы Эйри следует, что для границ этой области справедливо соотношение:

$$\frac{4\rho}{(1-\rho)^2} \sin^2 \frac{\delta}{2} = 1.$$

Записав выражение для разности фаз δ в этих точках в виде:

$$\delta = \delta_m \pm \frac{\varepsilon}{2} = 2\pi m \pm \frac{\varepsilon}{2},$$

получим соотношение для дополнительной разности фаз ε :

$$\left| \sin \frac{\delta_m \pm \varepsilon / 2}{2} \right| = \frac{1-\rho}{2\sqrt{\rho}}, \quad \left| \sin \left(\pm \frac{\varepsilon}{4} \right) \right| = \frac{1-\rho}{2\sqrt{\rho}}.$$

Если $\rho \approx 1$, $\left| \sin \left(\pm \frac{\varepsilon}{4} \right) \right| \approx \left| \pm \frac{\varepsilon}{4} \right| = \frac{1-\rho}{2\sqrt{\rho}}$, откуда $\varepsilon = \frac{2(1-\rho)}{\sqrt{\rho}}$.

Продифференцируем выражение для разности фаз δ :

$$d\delta = \frac{4\pi h}{\lambda} \sin \theta_m d\theta_m.$$

Приравняв угловую ширину кольца $\delta\theta_m$ и ε , находим:

$$\delta\theta_m = \frac{\varepsilon\lambda}{4\pi h \sin \theta_m} = \frac{\lambda(1-\rho)}{2\pi h \sqrt{\rho} \sin \theta_m}.$$

Как видно из полученной формулы, с ростом θ_m ширина колец уменьшается.

$$10.37. \delta\theta_{10} = \frac{\lambda(1-\rho)}{2\pi h \sqrt{\rho} \sin \theta_m} \approx 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ рад} \approx 6'',$$

где $m = m_{\max} - 9 = 2h / \lambda - 9$.

$$10.38. r_5 \approx f \sqrt{\frac{(n-1)\lambda}{h}} \approx 4,5 \text{ мм}, \text{ где } n - \text{ номер кольца.}$$

Указание. При условии $\lambda \ll h$ радиус r_n n -го кольца равен:

$$r_n = f \operatorname{tg} \theta_n = f \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta_n} - 1}, \text{ где } \cos \theta_n = 1 - \frac{(n-1)\lambda}{2h} \text{ (см. задачу}$$

10.35).

$$10.39. \frac{dn}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \frac{\lambda}{2h\Delta\lambda}.$$

$$10.40. T_2 = \frac{A}{n_1(1 - \theta_1^2/2) - 1} = 354 \text{ К}, \text{ где } A = 0,08497.$$

Решение. Условие максимума в интерферометре Фабри-Перо имеет вид:

$$2hn \cos \theta_m = m\lambda.$$

Для выбранного кольца $m = \text{const}$, поэтому при изменении температуры получаем:

$$n_1 \cos \theta_1 = n_2 \cos \theta_2 \text{ или } n_1 \left(1 - \frac{\theta_1^2}{2} \right) = n_2 \quad (\theta_2 = 0).$$

Поскольку давление $p = \text{const}$, плотность воздуха $\rho = \frac{\mu p}{RT} \sim \frac{1}{T}$ и по условию задачи $(n-1) \sim \rho$, следовательно, $n-1 = A/T$, где постоянную A находим по значению разности $(n-1)$ при $T_1 = 293 \text{ К}$: $A = 0,08497$.

В итоге получаем:

$$n_1 \left(1 - \frac{\theta_1^2}{2} \right) = n_2 = 1 + \frac{A}{T_2}, \text{ откуда } T_2 = \frac{A}{n_1 \left(1 - \theta_1^2 / 2 \right) - 1} = 354 \text{ К}.$$

$$\mathbf{10.41.} \quad n_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_k - \lambda_3} = 5.$$

Решение. Условие совпадения колец, отвечающих разным длинам волн, запишется в виде:

$$\Delta_1 = m_3 \lambda_3 = m_k \lambda_k,$$

где m_k и m_3 – порядки интерференции для этих длин волн. Для второго совпадения колец получаем:

$$\Delta_2 = (m_3 - n_3 - 1) \lambda_3 = (m_k - n_k - 1) \lambda_k,$$

где n_k и n_3 – подсчитанные значения красных и зеленых колец между совпадениями. Отсюда

$$(n_3 + 1) \lambda_3 = (n_k + 1) \lambda_k$$

Так как $\lambda_3 < \lambda_k$, то зеленые кольца располагаются ближе друг к другу, чем красные, поэтому $n_3 > n_k$. Для второго совпадения

$$n_3 - n_k = 1.$$

В итоге находим:

$$n_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_k - \lambda_3} = 5.$$

$$\mathbf{10.42.} \quad D_\theta = \frac{m}{2h \sin \theta_m} \approx \frac{1}{\lambda \theta_m}; \quad \Delta \lambda = \frac{\lambda^2}{2h}.$$

Решение. Запишем условие образования интерференционных максимумов:

$$2h \cos \theta_m = m\lambda .$$

Возьмем дифференциал от обеих частей этого уравнения по переменным θ_m и λ :

$$- 2h \sin \theta_m d\theta_m = m d\lambda ,$$

откуда находим угловую дисперсию D_θ :

$$D_\theta = \left| \frac{d\theta_m}{d\lambda} \right| = \frac{m}{2h \sin \theta_m} = \frac{m \cos \theta_m}{2h \cos \theta_m \sin \theta_m} = \frac{1}{\lambda \operatorname{tg} \theta_m} \approx \frac{1}{\lambda \theta_m} .$$

Для нахождения области свободной дисперсии запишем условие наложения максимума m -го порядка для длины волны $(\lambda + \Delta\lambda)$ на максимум $(m+1)$ -го порядка для длины волны λ :

$$m(\lambda + \Delta\lambda) = (m + 1)\lambda ,$$

откуда

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} \approx \frac{\lambda}{m_{\max}} = \frac{\lambda^2}{2h} .$$

10.43. $D_\theta = \frac{f}{\lambda \cdot r} .$

10.44. $R = \frac{2h}{\lambda} \cdot \frac{\pi\sqrt{\rho}}{1-\rho} \approx 1,2 \cdot 10^5 ; \Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2h} = 1,25 \cdot 10^{-2} \text{ нм} .$

10.45. $\delta\lambda = \frac{\lambda^2(1-\rho)}{2\pi h\sqrt{\rho}} \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ нм} .$

10.46. Да.

10.47. $h_{\max} = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda} = 0,6 \text{ мм} .$

10.48. $\rho_{\min} = 1 - \frac{\pi\delta\lambda}{\Delta\lambda} = 0,984 .$

Решение. Область свободной дисперсии интерферометра

Фабри-Перо $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2h}$. Чтобы не происходило наложение максимумов разных длин волн из исследуемого диапазона, база интерферометра не должна превышать значения

$$h_{\max} = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}.$$

Максимальная разрешающая способность интерферометра должна быть (поскольку $\rho \approx 1$ принимаем $\sqrt{\rho} \approx 1$):

$$R_{\max} = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{2h_{\max}}{\lambda} \cdot \frac{\pi\sqrt{\rho}}{1-\rho} \approx \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \cdot \frac{\pi}{1-\rho},$$

откуда $\rho_{\min} = 1 - \frac{\pi\delta\lambda}{\Delta\lambda} = 0,984$.

10.49. Второй интерферометр не подходит из-за малой области свободной дисперсии; максимальную разрешающую способность $R_{\max} \approx 477000$ обеспечит третий интерферометр.

$$\mathbf{10.50.} \quad N = \frac{L\sqrt{n^2 - 1}}{2d} = 17.$$

Решение. Расстояние AD между точками выхода из пластинки соседних лучей (рис. О.10.50) равно $AD = 2d \cdot \operatorname{tg} \theta$.

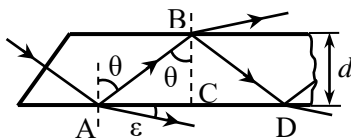


Рис. О.10.50.

Полагая, что лучи выходят под малым углом ϵ к поверхности пластинки, можем считать θ приближенно равным предельному углу полного внутреннего отражения:

$$\sin \theta \approx 1/n,$$

где n – показатель преломления пластинки.

Число интерферирующих лучей приблизительно равно:

$$N \approx \frac{L}{AD} = \frac{L}{2d} \cdot \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}{\sin \theta} = \frac{L\sqrt{n^2 - 1}}{2d} = 17.$$

$$10.51. m_{\min} = \frac{2d\sqrt{n^2 - 1}}{\lambda} \approx 47200, m_{\max} = \frac{2dn}{\lambda} \approx 62400.$$

Указание. Условие интерференционных максимумов для пластинки Льюммера-Герке имеет вид: $2dn \cos \theta_m = m\lambda$.

$$10.52. \Delta \varepsilon \approx \frac{\lambda\sqrt{n^2 - 1}}{2d\varepsilon} \approx 8,65 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 5'22''.$$

Решение. Перепишем условие максимумов для пластинки Льюммера-Герке

$$2dn \cos \theta_m = m\lambda$$

с учетом закона преломления (см. рис. О.10.50)

$$\sin \theta = \frac{1}{n} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) = \frac{1}{n} \cos \varepsilon.$$

В итоге получим: $2d\sqrt{n^2 - \cos^2 \varepsilon} = m\lambda$.

Возьмем полный дифференциал от полученного выражения по ε и m , считая $\lambda = \text{const}$ (зависимостью $n(\lambda)$ пренебрежем):

$$\frac{d \cdot 2 \cos \varepsilon \sin \varepsilon}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \varepsilon}} \cdot d\varepsilon = \lambda dm,$$

Для соседних максимумов $\Delta m = 1$, и угол между направлениями на соседние максимумы равен (т.к. угол ε мал, считаем $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$ и $\cos \varepsilon \approx 1$):

$$\Delta \varepsilon = \frac{\lambda\sqrt{n^2 - \cos^2 \varepsilon}}{2d \cos \varepsilon \sin \varepsilon} \approx \frac{\lambda\sqrt{n^2 - 1}}{2d\varepsilon} \approx 8,65 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 5'22''.$$

$$10.53. D_\varepsilon = \frac{d\varepsilon}{d\lambda} \approx \frac{n^2 - 1}{\lambda\varepsilon}.$$

Указание. Воспользоваться условием максимумов для угла ε $2d\sqrt{n^2 - \cos^2 \varepsilon} = m\lambda$ (см. задачу 10.52).

$$10.54. \Delta \lambda \approx \frac{\lambda^2}{2d\sqrt{n^2 - 1}} = 0,010 \text{ нм}.$$

Решение. Область свободной дисперсии находится из условия, что максимум $(m+1)$ -го порядка для длины волны λ совпадает с максимумом m -го порядка для длины волны $(\lambda+\Delta\lambda)$. Учитывая, что угловое расстояние между соседними максимумами равно (см. задачу 10.52):

$$\Delta \varepsilon \approx \frac{\lambda \sqrt{n^2 - 1}}{2d\varepsilon},$$

рассчитываем $\Delta\lambda$ по формуле: $\Delta\lambda = \frac{\Delta\varepsilon}{D_\varepsilon}$, где угловая дисперсия D_ε

равна (см. задачу 10.53):

$$D_\varepsilon = \frac{d\varepsilon}{d\lambda} \approx \frac{n^2 - 1}{\lambda\varepsilon}.$$

В итоге получаем:

$$\Delta\lambda \approx \frac{\lambda \sqrt{n^2 - 1}}{2d\varepsilon} \cdot \frac{\lambda\varepsilon}{n^2 - 1} \approx \frac{\lambda^2}{2d\sqrt{n^2 - 1}} = \frac{\lambda}{m_{\max}},$$

где $m_{\max} = \frac{2d\sqrt{n^2 - 1}}{\lambda}$ – максимальный порядок интерференции, который получается в центре картины.

Подставляя численные данные, находим: $\Delta\lambda \approx 0,010$ нм .

$$10.55. R = \frac{L(n^2 - 1)}{\lambda} = 8,45 \cdot 10^5.$$

Решение. Угловая ширина максимума $\delta\varepsilon$, получающегося при интерференции N лучей примерно равной интенсивности, в N раз меньше углового расстояния $\Delta\varepsilon$ между соседними максимумами:

$$\delta\varepsilon \approx \Delta\varepsilon / N.$$

Согласно критерию Рэлея можно разрешить две близкие линии, отличающиеся по длине волны на $\delta\lambda$, если угловое расстояние между максимумами длин волн λ_1 и λ_2 не меньше угловой ширины максимума

$\delta\lambda = \frac{\delta\varepsilon}{D_\varepsilon}$, D_ε – угловая дисперсия пластинки. Следова-

тельно, разрешающая способность равна:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\lambda}{\delta\varepsilon} D_\varepsilon = \frac{\lambda}{\Delta\varepsilon} ND_\varepsilon.$$

Подставляя $\Delta\varepsilon \approx \frac{\lambda\sqrt{n^2-1}}{2d\varepsilon}$ и $D_\varepsilon = \frac{d\varepsilon}{d\lambda} \approx \frac{n^2-1}{\lambda\varepsilon}$ (см задачи

10.52 и **10.53**), получаем:

$$R = \frac{\lambda \cdot 2d\varepsilon}{\lambda\sqrt{n^2-1}} \cdot \frac{n^2-1}{\lambda\varepsilon} N = \frac{2d\sqrt{n^2-1}}{\lambda} N.$$

Число интерферирующих лучей в пластинке Люммера-Герге равно (см. задачу **10.50**):

$$N = \frac{L\sqrt{n^2-1}}{2d}.$$

В итоге окончательно получаем:

$$R = \frac{L(n^2-1)}{\lambda} = 8,45 \cdot 10^5.$$

10.56. $L_{\min} = \frac{\lambda^2}{\delta\lambda(n^2-1)} \approx 2,5 \text{ см}.$

10.57. Сможет.

10.58. а) R не изменится, $\Delta\lambda$ уменьшится в 2 раза; б) R увеличится в 2 раза, $\Delta\lambda$ не изменится.

§11. Дисперсия света

$$11.1. u = \frac{d\omega}{dk}.$$

Решение. При сложении волн напряженность E равна:

$$E = E_1 + E_2 = E_0 \cos(\omega t - kx) + E_0 \cos(\omega' t - k' x) =$$

$$= 2E_0 \cos \left[\frac{(\omega' - \omega)t}{2} - \frac{(k' - k)x}{2} \right] \cdot \cos \left[\frac{(\omega' + \omega)t}{2} + \frac{(k' + k)x}{2} \right].$$

Так как $\omega' \approx \omega$ и $k' \approx k$, можно считать

$$\omega' - \omega \approx d\omega, \quad k' - k \approx dk, \quad \frac{k' + k}{2} \approx k, \quad \frac{\omega' + \omega}{2} \approx \omega.$$

Тогда
$$E = 2E_0 \cos \left(\frac{d\omega}{2} t - \frac{dk}{2} x \right) \cdot \cos(\omega t - kx).$$

Первый сомножитель представляет собой медленно меняющуюся амплитуду огибающей волнового пакета, которая достигает максимальных значений при условии:

$$\frac{d\omega}{2} t - \frac{dk}{2} x = m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Скорость перемещения максимальной амплитуды (т.е. скорость перемещения огибающей) равна:

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk}.$$

Величина u называется групповой скоростью.

$$11.2. a) u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}; \quad б) u = v \left(1 + \frac{\lambda}{n} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \right).$$

Решение. а) По определению фазовой скорости $v = \omega/k$, где $k = 2\pi/\lambda$.

Следовательно, $\omega = kv$. Тогда

$$u = \frac{d\omega}{dk} = v + \frac{dv}{dk} \cdot k = v - \frac{dv}{d\lambda} \cdot \lambda,$$

т.к. $\frac{dk}{d\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda^2} = -\frac{k}{\lambda}$, или $\frac{dk}{k} = -\frac{d\lambda}{\lambda}$.

б) Подставляя в полученную формулу Рэлея $n = \frac{c}{v}$, находим:

$$u = v \left(1 + \frac{\lambda}{n} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \right).$$

11.3. $u = (1 - \alpha)v$.

Решение. В соответствии с формулой Рэлея:

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} = (1 - \alpha)v.$$

11.4. а) $u = v$; б) $u = v/2$; в) $u = 3v/2$; г) $u = 2v$; д) $u = c^2/v$.

Решение. д) По формуле Рэлея

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} = \sqrt{c^2 + b^2\lambda^2} - \lambda \cdot \frac{b^2\lambda}{\sqrt{c^2 + b^2\lambda^2}} = \frac{c^2}{\sqrt{c^2 + b^2\lambda^2}} = \frac{c^2}{v}.$$

11.5. $\frac{c}{u} = \frac{n}{1 + \frac{\lambda}{n} \cdot \frac{dn}{d\lambda}} = 1,76$.

11.6. $u = \frac{c\lambda^2(a\lambda^2 - b)}{(a\lambda^2 + b)^2}$.

11.7. $u = \frac{v}{1 + \frac{\omega}{n} \cdot \frac{dn}{d\omega}}$.

Решение. В соответствии с определением фазовой скорости

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n(\omega)}.$$

Возьмем полный дифференциал от обеих частей соотношения $ck = \omega n(\omega)$:

$$cdk = d\omega \cdot n(\omega) + \omega \cdot dn(\omega);$$

$$\frac{1}{u} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} \cdot \left(n + \omega \cdot \frac{dn}{d\omega} \right),$$

откуда

$$u = \frac{c}{n + \omega \cdot \frac{dn}{d\omega}} = \frac{v}{1 + \frac{\omega}{n} \cdot \frac{dn}{d\omega}}.$$

11.8. $u = c^2 / v$.

Решение. По условию $\omega^2 n^2 = \omega^2 - \omega_0^2$. Т.к. по определению $v = \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k}$, то $\omega n = ck$, тогда $c^2 k^2 = \omega^2 - \omega_0^2$.

Берем дифференциал от обеих частей:

$$c^2 \cdot 2kdk = 2\omega d\omega; \quad c^2 = \frac{\omega}{k} \cdot \frac{d\omega}{dk} = u \cdot v \quad \rightarrow \quad u = \frac{c^2}{v}.$$

11.9. $v \sim \frac{1}{\lambda^2}$

Указание. Использовать определение групповой и фазовой скоростей: $u = \frac{d\omega}{dk}$, $v = \frac{\omega}{k}$.

11.10. $u = \beta v$.

Решение. По определению $v = \frac{\omega}{k} = ak^{\beta-1}$, тогда

$$u = \frac{d\omega}{dk} = a\beta k^{\beta-1} = \beta v.$$

11.11. $\omega(k) = \text{const} \cdot k^{1/4}$.

Указание. См задачу 11.9.

$$11.12. \quad u = \frac{v^2}{v - \omega(dv/d\omega)}.$$

Решение. Поскольку $k = \frac{\omega}{v}$, перепишем выражение для групповой скорости в виде:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{dv} \cdot \frac{dv}{dk} = \frac{1}{dv/d\omega} \cdot \frac{1}{dk/dv}.$$

Подставляя производную

$$\frac{dk}{dv} = \frac{v(d\omega/dv) - \omega}{v^2}$$

в выражение для групповой скорости, получаем:

$$u = \frac{v^2}{v - \omega(dv/d\omega)}.$$

$$11.13. \quad u = v/3.$$

$$11.14. \quad u = c^2/v.$$

Указание. См. задачи 11.8 и 11.12.

$$11.15. \quad \varepsilon(\omega) = 1 + \frac{A}{\omega^2}, \text{ где } A = \text{const.}$$

Решение. Запишем дисперсионное уравнение $c^2 k^2 = \varepsilon \omega^2$ и возьмем производную по ω от обеих частей:

$$c^2 \cdot 2k \cdot \frac{dk}{d\omega} = \frac{d\varepsilon}{d\omega} \cdot \omega^2 + \varepsilon \cdot 2\omega \text{ или}$$

$$c^2 \cdot \frac{k}{\omega} \cdot \frac{dk}{d\omega} = \frac{d\varepsilon}{d\omega} \cdot \frac{\omega}{2} + \varepsilon.$$

С учетом условия задачи $vi = c^2$ левая часть полученного

соотношения равна:

$$c^2 \cdot \frac{k}{\omega} \cdot \frac{dk}{d\omega} = \frac{c^2}{v \cdot u} = 1,$$

откуда получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega} \cdot \frac{\omega}{2} + \varepsilon = 1.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon - 1} = -\int \frac{2d\omega}{\omega}, \quad \rightarrow \quad \ln(\varepsilon - 1) = -2 \ln \omega + \ln A,$$

где $A = \text{const}$. Потенцируя полученное выражение, находим:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{A}{\omega^2}, \quad \text{где } A \text{ — любая константа.}$$

Заметим, что константа A может быть как положительной, так и отрицательной. Например, в задаче **11.8** $\varepsilon = n^2 = 1 - \omega_0^2 / \omega^2$, откуда $A = -\omega_0^2 < 0$, а в задаче **11.14**

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{1 + \alpha^2 / \omega^2}}; \quad n = \sqrt{1 + \alpha^2 / \omega^2}; \quad \varepsilon = 1 + \frac{\alpha^2}{\omega^2},$$

откуда $A = \alpha^2 > 0$.

11.16. $u = 3v / 2$.

Решение. Так как $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, то для фазовой скорости получаем:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{a}{\omega \cdot \lambda^2} = \frac{b \cdot k^2}{\omega},$$

откуда $\omega^2 = bk^3$.

Взяв дифференциал, находим:

$$2\omega d\omega = 3bk^2 dk; \quad \rightarrow \quad u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2} \cdot \frac{bk^2}{\omega} = \frac{3v}{2}.$$

11.17. а) $v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$, $u = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$; б) $v = \frac{h}{2m\lambda}$, $u = \frac{h}{m\lambda}$.

$$11.18. v = \sqrt{\alpha/k + \beta k}, u = \frac{\alpha + 3\beta k^2}{2\sqrt{\alpha k + \beta k^3}}.$$

$$11.19. v = V/2, u = V.$$

Решение. Кинетическая энергия частицы равна

$$E = \frac{mV^2}{2} = \frac{p^2}{2m}.$$

Поскольку частота и волновое число волны де Бройля связаны с энергией и импульсом частицы соотношениями

$$E = \hbar\omega, p = \hbar k,$$

для фазовой и групповой скоростей получаем:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = \frac{p}{2m} = \frac{V}{2}, u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} = V.$$

$$11.20. v_2 = \frac{c}{n_2} = 1,83 \cdot 10^8 \text{ м/с}, u_2 = \frac{c}{n_2} \cdot \left(1 + \frac{\lambda_2}{n_2} \cdot \frac{dn}{d\lambda}\right) = 1,7 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Решение. Фазовая скорость для волны с длиной $\lambda = \lambda_2$ равна:

$$v_2 = c/n_2 = 1,83 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Чтобы воспользоваться формулой для групповой скорости $u = \frac{c}{n} \cdot \left(1 + \frac{\lambda}{n} \cdot \frac{dn}{d\lambda}\right)$, надо найти производную $dn/d\lambda$ в данной точке.

Для построения графика $n(\lambda)$ трех точек недостаточно, поэтому задача может быть решена только приближенно. Если выполняется соотношение:

$$\frac{n_2 - n_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \approx \frac{n_3 - n_2}{\lambda_3 - \lambda_2},$$

функцию $n(\lambda)$ в диапазоне от λ_1 до λ_3 можно считать близкой к линейной, тогда для $\lambda = \lambda_2$ производная $dn/d\lambda$ равна среднему из двух отношений.

Рассчитаем отношения:

$$\frac{n_2 - n_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = -2,80 \cdot 10^{-6} \text{ нм}^{-1}, \quad \frac{n_3 - n_2}{\lambda_3 - \lambda_2} = -2,50 \cdot 10^{-6} \text{ нм}^{-1}.$$

Расхождение значений составляет $\sim 11\%$, поэтому можно взять среднее значение: $\frac{dn}{d\lambda} \approx -2,65 \cdot 10^{-6} \text{ нм}^{-1}$. Знак "минус" показывает, что с ростом λ показатель преломления уменьшается (область нормальной дисперсии).

Подставляя найденное значение $dn/d\lambda$, λ_2 и n_2 в формулу для групповой скорости, находим групповую скорость волнового пакета, содержащего волны с длинами от λ_2 до $\lambda_2 + \Delta\lambda$, где $\Delta\lambda \ll \lambda_2$:

$$u_2 = \frac{c}{n_2} \cdot \left(1 + \frac{\lambda_2}{n_2} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \right) = 1,7 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

11.21.
$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2 / (\epsilon_0 m)}{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\delta\omega}.$$

Решение. Будем считать, что поведение связанных электронов в атомах и молекулах подчиняется законам Ньютона. При отклонении от положения равновесия на них действует квазиупругая возвращающая сила $F_{\text{упр}} = -kr$, где r – радиус-вектор смещения электрона от положения равновесия.

В процессе колебаний электрон излучает электромагнитные волны, которые уносят энергию. Имеются и другие причины потерь энергии электроном, движущимся в атоме. Эти потери энергии можно учесть, введя "силу трения" $F_{\text{тр}} = -\Gamma\dot{r}$.

В поле электромагнитной волны на электрон также действует сила Лоренца $F_{\text{Л}} = eE + e[vB]$, где e – заряд электрона. Если скорость электрона много меньше скорости света, действием магнитного поля на электрон можно пренебречь. Тогда уравнение движения электрона запишется в виде:

$$m\ddot{r} = eE - \Gamma\dot{r} - kr.$$

Применяя для плоской монохроматической волны комплексную форму записи $E = E_0 e^{-i\omega t}$, перепишем уравнение движения электрона в виде:

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2\delta\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t},$$

где $\delta = \Gamma / (2m)$, $\omega_0^2 = k / m$.

Решение уравнения будем искать в виде: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}$, где \mathbf{r}_0 – амплитуда смещения электрона. Подставляя \mathbf{r} в уравнение движения, находим:

$$\mathbf{r}_0 = \frac{(e/m)\mathbf{E}_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\delta\omega}.$$

В результате действия внешнего электрического поля у атома возникает дипольный момент $\mathbf{p} = e\mathbf{r} = \varepsilon_0\alpha(\omega)\mathbf{E}$, где $\alpha(\omega)$ – комплексная поляризуемость атома, а поляризация среды характеризуется вектором

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p} = \frac{N(e^2/m)}{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\delta\omega}\mathbf{E} = \varepsilon_0\chi(\omega)\mathbf{E},$$

где N – число атомов (молекул) в единице объема, $\chi(\omega)$ – диэлектрическая восприимчивость среды.

При этом диэлектрическая проницаемость ε равна:

$$\varepsilon = 1 + \chi = 1 + \frac{Ne^2/(\varepsilon_0 m)}{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\delta\omega}.$$

Поскольку $n = \sqrt{\varepsilon}$, для показателя преломления получаем:

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2/(\varepsilon_0 m)}{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\delta\omega}.$$

Оценки показывают, что в случае разреженных сред (газах) второе слагаемое в выражении для n^2 много меньше единицы, поэтому

$$n = \sqrt{n^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{Ne^2/(\varepsilon_0 m)}{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\delta\omega}.$$

$$\mathbf{11.22.} \quad n^2 \approx 1 - \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m \omega^2}.$$

Решение. Действительная часть комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon = n^2$ имеет вид (см. задачу 11.21):

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2 / (\varepsilon_0 m) \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}.$$

Для высокочастотных колебаний $\omega \gg \omega_0$, поэтому можно пренебречь членами с ω_0^2 и ω^2 по сравнению с членами, содержащими ω^4 . В итоге получаем:

$$n^2 \approx 1 - \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m \omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \text{ где } \omega_p = \sqrt{\frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m}} -$$

так называемая "плазменная" частота.

$$11.23. \quad 1 - n = \frac{e^2 N \lambda^2}{8\pi^2 c^2 \varepsilon_0 m} \approx 6,5 \cdot 10^{-7}.$$

Замечание. Полученное значение $n \approx 1$, значит, алюминий практически прозрачен для рентгеновских лучей.

В то же время, $n < 1$, т.е. для рентгеновских лучей металл является оптически менее плотным, чем воздух, следовательно, при определенных углах падения лучей может наблюдаться явление полного внутреннего отражения.

$$11.24. \quad N_1 = \frac{N}{n} = \frac{4\pi^2 v^2 \varepsilon_0 m \mu_{Ag}}{e^2 N_A \rho} = 0,4, \text{ где } N - \text{ концентрация}$$

свободных электронов, $n = \frac{N_A \rho}{\mu_{Ag}}$ – концентрация атомов Ag в пленке, N_A – число Авогадро.

$$11.25. \quad v \cdot u = c^2.$$

Решение. Для ионосферной плазмы $\omega_0 = 0$ и $\omega \gg \delta$. Пренебрегая затуханием, положим $\delta = 0$. Тогда из формулы для $\varepsilon(\omega)$ (см. задачу 11.21) получим:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \text{ где } \omega_p = \sqrt{\frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m}}.$$

Учитывая, что волновое число $k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c/n} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon}$, получим закон дисперсии в случае ионосферы в виде:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \varepsilon = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}.$$

Взяв дифференциал от обеих частей, находим:

$$2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2} \rightarrow c^2 = \frac{\omega}{k} \cdot \frac{d\omega}{dk}, \text{ т.е. } v \cdot u = c^2.$$

Так как $v = c/n > c$, то групповая скорость $u = cn < c$.

11.26. Радиоволны с частотами $\omega > \omega_p = \sqrt{\frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m}} = 1,8 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$

будут проходить через ионосферу, а с частотами $\omega < \omega_p$ ($\nu < 10^6 \text{ Гц}$) будут отражаться.

Решение. В случае ионосферы зависимость диэлектрической проницаемости от частоты волны имеет вид (см. задачу 11.25):

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \text{ где } \omega_p = \sqrt{\frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m}}.$$

Если частота волны $\omega > \omega_p$, то значение ε лежит в пределах от нуля до единицы, показатель преломления n вещественный и лежит в тех же пределах, фазовая скорость $v = c/n$ больше скорости света c . В этом случае ионосфера прозрачна для радиоволн.

Если $\omega < \omega_p$, то диэлектрическая проницаемость $\varepsilon < 0$, а показатель преломления – чисто мнимый. Волны в такой среде быстро затухают, но это не связано с поглощением, поскольку $\omega \gg \delta$. В этом случае имеет место полное внутреннее отражение радиоволн от ионосферы.

Проведем численную оценку:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 N}{\epsilon_0 m}} = 1,8 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}.$$

Следовательно, радиоволны с частотами $\nu < 10^6$ Гц будут отражаться ионосферой.

$$11.27. \quad v = \frac{c}{n} \approx 3,2 \cdot 10^8 \text{ м/с}; \quad u = cn \approx 2,9 \cdot 10^8 \text{ м/с};$$

$$N = \frac{8\pi^2 \epsilon_0 m (1-n)v^2}{e^2} \approx 10^{13} \text{ м}^{-3}.$$

Указание. Воспользоваться формулой для показателя преломления при $\omega_0 = \delta = 0$ (см. задачу 11.21):

$$n = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{Ne^2 / (\epsilon_0 m)}{\omega^2},$$

а также см. задачу 11.25.

$$11.28. \quad N = \frac{4\pi^2 \epsilon_0 m v^2}{e^2} \approx 2 \cdot 10^{12} \text{ м}^{-3}.$$

11.29. а) Да; б) нет; в) нет.

Указание. Чтобы радиоволна могла достигнуть Земли, её длина волны должна быть

$$\lambda < c \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0 m \cdot 4\pi^2}{e^2 N}} = \frac{3,3 \cdot 10^7}{\sqrt{N}} \approx 2,3 \text{ м}.$$

$$11.30. \quad v = \frac{c}{n} \approx \sqrt{c^2 + \frac{Ne^2}{4\pi^2 \epsilon_0 m}} \lambda^2.$$

$$11.31. \quad k = \frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}.$$

Решение. Положив $\delta = 0$, для диэлектрической проницаемо-

сти получаем (см. задачу 11.21):

$$n^2 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \text{ где } \omega_p = \sqrt{\frac{e^2 N}{\epsilon_0 m}}.$$

Подставляя $n = \frac{c}{v} = \frac{c}{\omega/k} = \frac{c}{\omega} k$, находим закон дисперсии:

$$c^2 k^2 = \omega^2 \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \rightarrow k = \frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}.$$

$$11.32. u = c \cdot \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}} \Big/ \left(1 + \frac{\omega_p^2 \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \right).$$

$$11.33. n = \sqrt{1 + \frac{p}{kT} \alpha} \approx 1,00013.$$

Указание. Диэлектрическая восприимчивость χ вещества равна: $\chi = N \cdot \alpha$, где α – поляризуемость молекулы, $N = \frac{p}{kT}$ – концентрация молекул (k – постоянная Больцмана). Показатель преломления

$$n = \sqrt{\epsilon} = \sqrt{1 + \chi}.$$

$$11.34. d = \frac{\ln \eta_\tau}{(\eta_d - 1) \mu} \approx 13,5 \text{ м, где } \mu = 0,17.$$

Решение. Представим комплексный показатель преломления среды (см. задачу 11.21) в виде

$$n = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{Ne^2 / (\epsilon_0 m)}{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\delta\omega} = n' + in'', \text{ где}$$

$$n' = 1 + \frac{\omega_p^2}{2} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}, \quad n'' = \omega_p^2 \cdot \frac{\delta \cdot \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}.$$

При концентрации свободных электронов $N = 10^{12} \text{ м}^{-3}$ плазменная частота ω_p равна:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 N}{\epsilon_0 m}} = 5,67 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}.$$

Так как частота волны $\omega = 2\pi\nu = 50,3 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$, то диэлектрическая проницаемость плазмы на этой частоте равна

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = -0,272 < 0,$$

т.е. $n' = 0$, $n'' = \sqrt{-\epsilon} = 0,508$.

В соответствии с законом Бугера-Ламберта-Бера:

$$I(d) = I_0 \exp(-\mu \cdot d), \quad I(\eta_d d) = I_0 \exp(-\mu \cdot \eta_d d),$$

где $\mu = \frac{2\omega}{c} n'' = 0,17$ – коэффициент поглощения.

По условию задачи:

$$\frac{I(d)}{I(\eta_d d)} = \eta_\tau, \quad \text{откуда } d = \frac{\ln \eta_\tau}{(\eta_d - 1)\mu} \approx 13,5 \text{ м}.$$

11.35. $\beta = \alpha^3 = 8$.

11.36. а) На 0,5%; б) на 1,0%; в) на 63%.

11.37. $\frac{I_0 - I}{I_0} = 1 - \exp\left(-\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \cdot d\right) = 0,1 = 10\%$.

11.38. Уменьшится в $e^{\mu d} = 60$ раз.

11.39. $d_2 = 0,3 \text{ мм}$.

11.40. $d = \ln 2 / \mu = 8 \text{ мм}$.

11.41. $L = \frac{c\Delta t}{v_p^2} \cdot \frac{2v_1^2 v_2^2}{v_2^2 - v_2^2} \approx 7 \cdot 10^{18} \text{ м} \approx 700 \text{ св. лет}$.

Решение. В области прозрачности плазмы групповая скорость излучения равна (см. задачу 11.24):

$$u = cn(\omega),$$

$$\text{где } n^2 = 1 - \frac{v_p^2}{v^2}, \quad v_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{e^2 N}{\epsilon_0 m}}.$$

Следовательно, задержка Δt между импульсами составляет:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = L \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) = \frac{L}{c} \cdot \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} \right),$$

а расстояние до пульсара:

$$L = \frac{c\Delta t}{1/n_1 - 1/n_2}.$$

Так как $v_1, v_2 \gg v_p$, то

$$n \approx 1 - \frac{v_p^2}{2v^2}, \quad \frac{1}{n} \approx 1 + \frac{v_p^2}{2v^2}, \text{ откуда}$$

$$L = \frac{c\Delta t}{v_p^2} \cdot \frac{2v_1^2 v_2^2}{v_2^2 - v_1^2} \approx 7 \cdot 10^{18} \text{ м} \approx 700 \text{ св. лет}.$$

$$11.42. \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{\omega_{\min}^2 + \omega_{\max}^2}{2}} = 2,81 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1};$$

$$N = \frac{\epsilon_0 m}{e^2} \omega_p^2 = 2,86 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}, \text{ где } \omega_p^2 = (3,18 \cdot 10^{15})^2 \text{ с}^{-2};$$

$$n = \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2}} = 1,51.$$

Решение. В соответствии с формулой Лоренца-Лоренца линейная оптическая восприимчивость χ твердого тела и электронная поляризуемость α атома связаны соотношением:

$$\chi = \epsilon - 1 = \frac{N\alpha}{1 - N\alpha/3},$$

где N – эффективное число оптических электронов в единице объема;

$$\alpha(\omega) = \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\delta\omega}.$$

При этом комплексная диэлектрическая проницаемость ε твердых тел равна:

$$\varepsilon = 1 + \chi = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2 - \omega^2 - 2i\delta\omega},$$

где $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \omega_p^2/3$, $\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m}}$ — "плазменная" частота.

С увеличением частоты действительная часть ε' диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon' = 1 + \frac{\omega_p^2 (\omega_1^2 - \omega^2)}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}$$

сначала возрастает, достигая максимального значения при частоте ω_{\max} , потом убывает вблизи линии поглощения до значения $\varepsilon' = 0,25$ при частоте ω_{\min} и затем снова возрастает (рис. Т11.1).

Из условия $\frac{\partial \varepsilon'(\omega)}{\partial \omega} = 0$ для ω_{\max} и ω_{\min} получаем:

$$\omega_{\max}^2 = \omega_1^2 - 2\delta\omega_1, \quad \omega_{\min}^2 = \omega_1^2 + 2\delta\omega_1,$$

откуда определяем:

$$\omega_1^2 = \frac{\omega_{\min}^2 + \omega_{\max}^2}{2}.$$

Используя численные данные, находим: $\omega_1 = 2,81 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$.

Подставляя в выражение для ε' значение $\varepsilon' = 0,25$ при $\omega = \omega_{\min} = 3,60 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ и найденное значение ω_1 , определяем $\omega_p^2 = (3,18 \cdot 10^{15})^2 \text{ с}^{-2}$, следовательно, $N = \frac{\varepsilon_0 m}{e^2} \omega_p^2 = 2,86 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$.

В области низких частот ($\omega \ll \omega_1$), вдали от линии поглощения, мнимой частью ε'' можно пренебречь, поэтому

$$\varepsilon \approx \varepsilon' \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2}, \text{ откуда } n = \sqrt{\varepsilon} = 1,51.$$

$$11.43. \langle Q \rangle = \omega \varepsilon''(\omega) \cdot \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}.$$

Решение. Рассматривая связанные электроны атомов как ансамбль изотропных гармонических осцилляторов с собственной частотой ω_0 и коэффициентом затухания δ , находим радиус-вектор смещения электрона (см. задачу 11.21):

$$\mathbf{r}(t) = \frac{e}{m} \cdot \frac{\mathbf{E}(t)}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\delta\omega}.$$

Переходя от комплексного представления к обычному, запишем закон движения:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{e\mathbf{E}_0}{m} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\cos \omega t + 2\delta \cdot \omega \sin \omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta \cdot \omega)^2}$$

и закон изменения скорости:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = -\omega \cdot \frac{e\mathbf{E}_0}{m} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\sin \omega t - 2\delta \cdot \omega \cos \omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta \cdot \omega)^2}.$$

Поскольку мгновенное значение мощности "силы трения" для одного осциллятора равно $Q_1 = 2\delta \cdot m\dot{r}^2$, то для N осцилляторов в единице объема среднее за период значение $\langle Q \rangle$ составляет:

$$\langle Q \rangle = N \cdot 2\delta \cdot m \langle \dot{r}^2(t) \rangle = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \cdot \frac{2\delta\omega^0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta \cdot \omega)^2} \cdot \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}.$$

Для рассматриваемой среды комплексная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega)$ представима в виде:

$$\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'' = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\delta \cdot \omega}, \text{ где } \omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}},$$

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \cdot \frac{2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta \cdot \omega)^2}.$$

Следовательно, $\langle Q \rangle = \omega \varepsilon''(\omega) \cdot \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2},$

т.е. диссипация энергии гармонической световой волны в среде с дисперсией напрямую связана с мнимой частью комплексной диэлектрической проницаемости.

§12. Оптические явления на границе раздела диэлектриков. Формулы Френеля

12.1. См. решение.

Решение. 1) Пусть падающая волна поляризована в плоскости падения. Тогда вектор \mathbf{H} параллелен границе раздела сред. Запишем граничные условия для нормальных и тангенциальных компонент векторов \mathbf{E} и \mathbf{D} $E_{1\tau} = E_{2\tau}$; $D_{1n} = D_{2n}$ с учетом того, что $D = \varepsilon E$:

$$\begin{cases} E_{10}^p \cos \theta_1 - E_{00}^p \cos \theta_1 = E_{20}^p \cos \theta_2; \\ \varepsilon_1 (E_{10}^p \sin \theta_1 + E_{00}^p \sin \theta_1) = \varepsilon_2 E_{20}^p \sin \theta_2; \end{cases}$$

Учитывая закон преломления: $\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$, перепишем

второе уравнение в виде:

$$(E_{10}^p + E_{00}^p) \sin \theta_2 = E_{20}^p \sin \theta_1.$$

Подставляя E_{20}^p из первого уравнения, получаем:

$$(E_{10}^p + E_{00}^p) \sin \theta_2 = \sin \theta_1 \left(\frac{E_{10}^p - E_{00}^p}{\cos \theta_2} \cdot \cos \theta_1 \right), \text{ откуда}$$

$$E_{00}^p (\sin \theta_1 \cos \theta_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_2) = E_{10}^p (\sin \theta_1 \cos \theta_1 - \sin \theta_2 \cos \theta_2).$$

Применяя формулы тригонометрии

$$\sin \theta_1 \cos \theta_1 \pm \sin \theta_2 \cos \theta_2 = \sin(\theta_1 \pm \theta_2) \cdot \cos(\theta_1 \mp \theta_2),$$

определяем:

$$E_{00}^p = E_{10}^p \cdot \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\cos(\theta_1 - \theta_2)} \cdot \frac{\cos(\theta_1 + \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} = E_{10}^p \cdot \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)} \text{ или}$$

$$r_p^E = - \frac{\operatorname{tg} \theta_1 - \theta_2}{\operatorname{tg} \theta_1 + \theta_2}.$$

Далее находим E_{20}^p :

$$E_{20}^p = (E_{10}^p + E_{00}^p) \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = E_{10}^p \left(1 + \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_1 - \sin \theta_2 \cos \theta_2}{\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2} \right) \cdot \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} =$$

$$= E_{10}^p \cdot \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}, \text{ откуда}$$

$$t_p^E = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}.$$

2). Пусть падающая волна поляризована перпендикулярно плоскости падения. Запишем граничные условия для тангенциальных компонент векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} $E_{1\tau} = E_{2\tau}$, $H_{1\tau} = H_{2\tau}$, учитывая, что $H = \sqrt{\epsilon} E$:

$$\begin{cases} E_{10}^s + E_{00}^s = E_{20}^s \\ \sqrt{\epsilon_1} (E_{10}^s \cos \theta_1 - E_{00}^s \cos \theta_1) = \sqrt{\epsilon_2} E_{20}^s \cos \theta_2. \end{cases}$$

С учетом закона преломления: $\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$ перепишем

второе уравнение в виде:

$$(E_{10}^s - E_{00}^s) \cdot \cos \theta_1 = E_{20}^s \cdot \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \cdot \cos \theta_2 = \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_2}{\sin \theta_2} (E_{10}^s + E_{00}^s),$$

откуда

$$E_{00}^s (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1) = E_{10}^s (\sin \theta_2 \cos \theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_2).$$

Применяя формулы тригонометрии, находим:

$$E_{00}^s = -E_{10}^s \cdot \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \text{ или } r_s^E = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Далее определяем E_{20}^s :

$$\begin{aligned} E_{20}^s &= E_{10}^s + E_{00}^s = E_{10}^s \left(1 + \frac{\sin \theta_2 \cos \theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_2}{\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1} \right) = \\ &= E_{10}^s \cdot \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \text{ или } t_s^E = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{12.2.} \quad r_p^E = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}; \quad t_p^E = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}; \quad r_s^E = -\frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}; \quad t_s^E = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}.$$

Решение. При малых углах падения θ_1 света на границу раздела сред можно считать $\sin \theta \approx \operatorname{tg} \theta \approx \theta$, а $\cos \theta \approx 1$. Закон преломления при этом запишется так:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \approx \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Тогда формулы Френеля в форме, полученной в задаче 12.1, будут иметь вид:

$$\begin{aligned} r_p^E &= \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)} \approx \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}, \\ t_p^E &= \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)} \approx \frac{2\theta_2}{\theta_1 + \theta_2} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}; \\ r_s^E &= -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \approx -\frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} = -\frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}; \\ t_s^E &= \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \approx \frac{2\theta_2}{\theta_1 + \theta_2} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}. \end{aligned}$$

Разница знаков для r -компонент объясняется выбором положительного направления осей координат (см. рис. T12.1).

$$\mathbf{12.3.} \quad R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \right)^2; \quad T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}.$$

Решение. Интенсивность отраженной и преломленной волн вычисляется как сумма интенсивностей компонент, параллельных и перпендикулярных плоскости падения, которые были рассчитаны в задаче 12.2. Так как $I \sim nE_0^2$, получаем:

$$\begin{aligned} I_{\text{отр}} &= n_1 (E_{00}^{p2} + E_{00}^{s2}) = n_1 (E_{10}^{p2} + E_{10}^{s2}) \cdot \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \right)^2 = I_{\text{пад}} \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \right)^2, \\ I_{\text{прел}} &= n_2 (E_{20}^{p2} + E_{20}^{s2}) = n_2 (E_{10}^{p2} + E_{10}^{s2}) \cdot \frac{4}{(n_1 + n_2)^2} = \\ &= I_{\text{пад}} \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{4n_1^2}{(n_1 + n_2)^2} = I_{\text{пад}} \cdot \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}. \end{aligned}$$

Коэффициенты отражения и пропускания по интенсивности равны:

$$R = \frac{I_{\text{отр}}}{I_{\text{пад}}} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \right)^2, \quad T = \frac{I_{\text{прел}}}{I_{\text{пад}}} = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}.$$

Замечание. Коэффициенты отражения и пропускания по энергии и по интенсивности вычисляются по разным формулам, однако при близком к нормальному падении волны на границу раздела сред эти формулы совпадают.

12.4. $R = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2, \quad T = \frac{4n}{(n+1)^2}$: а) $R = 0,02, T = 0,98$;

б) $R = 0,04, T = 0,96$.

12.5. а) $I = (1 - R)^2 I_0 = 0,9025 I_0$; б) $I = \frac{1 - R}{1 + R} \cdot I_0 \approx 0,9048 I_0$.

Указание. При учете вторичных отражений от нижней и верхней поверхностей пластинки следует учесть, что интенсивности прошедших пластинку волн после первого, второго и т.д. отражений от нижней, а потом от верхней поверхностей убывают по закону:

$$I_1 : I_2 : I_3 : I_4 : \dots = 1 : R^2 : R^4 : R^6 : \dots$$

12.6. $I = (1 - R)^2 e^{-\mu d} I_0$.

12.7. Под углом Брюстера $\varphi_{\text{Бр}} = \text{arctg } n = 57^\circ 5'$; максимальная степень поляризации отраженного света $\Delta = +1$.

12.8. Если свет поляризован в плоскости падения, показатель преломления призмы $n = \sqrt{3} \approx 1,73$, и свет падает на боковую грань призмы под углом $\theta = 60^\circ$.

Решение. Чтобы свет не испытал отражений ни на первой, ни на второй боковой

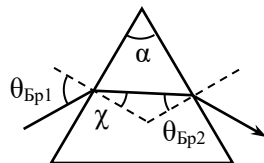


Рис. О.12.8.

поверхности призмы, он должен быть поляризован в плоскости падения и падать на обе поверхности под углом Брюстера (своим для каждой грани) (рис. О.12.8):

$$\operatorname{tg} \theta_{\text{Бр1}} = n, \quad \operatorname{tg} \theta_{\text{Бр2}} = 1/n.$$

Угол преломления $\chi = \frac{\pi}{2} - \theta_{\text{Бр1}}$. Для призмы $\chi + \theta_{\text{Бр2}} = \alpha$ (см.

задачу 1.31). Подставляя χ , получаем:

$$\theta_{\text{Бр2}} + \frac{\pi}{2} - \theta_{\text{Бр1}} = \alpha \quad \text{или} \quad \theta_{\text{Бр1}} - \theta_{\text{Бр2}} = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Возьмем tg от обеих частей уравнения и используем формулу:

$$\operatorname{tg}(\beta - \gamma) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma}{1 + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma}. \quad \text{В итоге находим:}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_{\text{Бр1}} - \operatorname{tg} \theta_{\text{Бр2}}}{1 + \operatorname{tg} \theta_{\text{Бр1}} \cdot \operatorname{tg} \theta_{\text{Бр2}}} = \frac{n - 1/n}{1 + n \cdot (1/n)} = \frac{n^2 - 1}{2n} = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Решая получившееся уравнение

$$\sqrt{3}n^2 - 2n - \sqrt{3} = 0, \quad \text{определяем: } n = \sqrt{3} \approx 1,73.$$

При этом угол падения света $\theta_{\text{Бр1}} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = 60^\circ$.

$$\mathbf{12.9.} \quad \operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{\cos(\theta_1 - \theta_2)}{\cos(\theta_1 + \theta_2)} \cdot \operatorname{tg} \alpha_1; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \cos(\theta_1 - \theta_2) \cdot \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Решение. По определению азимута:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{E_1^s}{E_1^p}, \quad \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{E_0^s}{E_0^p}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{E_2^s}{E_2^p}.$$

С учетом формул Френеля получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{r_s E_1^s}{r_p E_1^p} = -\frac{\cos(\theta_1 - \theta_2)}{\cos(\theta_1 + \theta_2)} \cdot \operatorname{tg} \alpha_1,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{t_s E_2^s}{t_p E_2^p} = \cos(\theta_1 - \theta_2) \cdot \operatorname{tg} \alpha_1.$$

$$12.10. I_{\text{отр}} = I_0 \cdot \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^2.$$

Решение. Поскольку свет падает на границу раздела сред под углом Брюстера, $\text{tg} \theta_1 = n$, $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$, т.е. $\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_1$.

По формулам Френеля находим:

$$\begin{aligned} r_s &= -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta_1\right) = \cos(2\theta_1) = 2\cos^2\theta_1 - 1 = \\ &= \frac{2}{1 + \text{tg}^2\theta_1} - 1 = \frac{2}{1 + n^2} - 1 = \frac{1 - n^2}{1 + n^2}. \end{aligned}$$

Используя определение коэффициента отражения по интенсивности $R = I_{\text{отр}} / I_{\text{пад}} = r^2$, получаем:

$$I_{\text{отр}} = I_0 r^2 = I_0 \cdot \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^2.$$

$$12.11. I_{\text{прел}} = I_0 \text{ctg} \alpha = \sqrt{3} I_0.$$

Решение. Так как

$$\text{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{n}, \text{ а } \theta_{\text{Бр}} = \text{arctg} \frac{n_2}{n_1},$$

то пучок падает на границу раздела под углом Брюстера. Пучок поляризован в плоскости падения, поэтому отраженной волны не будет, световая энергия падающей волны проходит полностью:

$$S_{n, \text{пад}} = S_{n, \text{прел}}.$$

$$\text{При этом } I_{\text{пад}} = I_{\text{прел}} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \alpha},$$

где $\beta = 90^\circ - \alpha = 60^\circ$ – угол преломления. В результате получаем:

$$I_{\text{прел}} = I_{\text{пад}} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos(90^\circ - \alpha)} = I_0 \cdot \text{ctg} \alpha = \sqrt{3} I_0 > I_0,$$

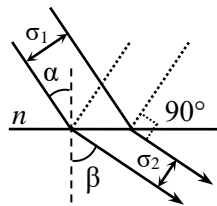


Рис. О.12.11.

т.е. интенсивность преломленного пучка больше интенсивности падающего. Это связано с тем, что интенсивность пропорциональна отношению энергии к площади поперечного сечения пучка. В данном случае энергия пучка не изменилась, а площадь сечения уменьшилась (см. рис. О.12.11).

$$12.12. I_{\text{прел}} = I_0(1 - R)/n \approx 0,53I_0.$$

$$12.13. R = I_0 \cdot \left(\frac{1 - n^2}{1 + n^2} \right)^2 \sin^2 \alpha.$$

$$12.14. \Delta_2 = \frac{4n^2 - (n^2 + 1)^2}{4n^2 + (n^2 + 1)^2} = -0,08.$$

Решение. Будем рассматривать естественный свет как суперпозицию двух некогерентных пучков с s - и p -поляризацией и одинаковой интенсивностью:

$$I^s = I^p = I_0 / 2.$$

По определению степень поляризации преломленного света

$$\Delta_2 = \frac{I_2^s - I_2^p}{I_2^s + I_2^p}.$$

Учитывая, что $I_2^s = t_s^2 n I^s$, $I_2^p = t_p^2 n I^p$, а $I^s = I^p$, приходим к формуле:

$$\Delta_2 = \frac{t_s^2 - t_p^2}{t_s^2 + t_p^2}.$$

Поскольку $\theta_1 = \theta_{\text{Бр}}$, по формулам Френеля получаем:

$$\begin{aligned} t_s &= \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} = 2 \cos \theta_1 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) = 2 \cos^2 \theta_1 = \\ &= \frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_1} = \frac{2}{1 + n^2}. \end{aligned}$$

$$t_p = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{t_s}{\sin(2\theta_1)} = \frac{t_s}{2 \sin \theta_1 \cos \theta_1} =$$

$$= \frac{t_s (n^2 + 1)^2}{2n} = \frac{1}{n}.$$

В итоге находим:

$$\Delta_2 = \frac{4n^2 - (n^2 + 1)^2}{4n^2 + (n^2 + 1)^2} = -0,08.$$

12.15. $I_{\text{отр}} = 0$.

Указание. Доказать, что волна падает на диэлектрик под углом Брюстера.

$$\mathbf{12.16.} \quad I_{\text{отр}} = \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha - 1}{\operatorname{tg} \alpha + 1} \right)^2 I_0 = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \right)^2 I_0 = (2 - \sqrt{3})^2 I_0 \approx 0,07 I_0.$$

$$\mathbf{12.17.} \quad \Delta = \frac{\cos^2(\theta_1 + \theta_2) - \cos^2(\theta_1 - \theta_2)}{\cos^2(\theta_1 + \theta_2) + \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \approx -0,82,$$

где $\theta_2 = 27,5^\circ$.

Решение. Определим угол преломления θ_2 из закона преломления:

$$\sin \theta_2 = \frac{\sin \theta_1}{n} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 1,53} \approx 0,462, \text{ откуда } \theta_2 = 27,5^\circ.$$

Будем рассматривать естественный свет как суперпозицию двух пучков с s - и p -поляризацией одинаковой интенсивности:

$$I^s = I^p = I_0 / 2.$$

По определению степень поляризации отраженного света

$$\Delta = \frac{I_{\text{отр}}^s - I_{\text{отр}}^p}{I_{\text{отр}}^s + I_{\text{отр}}^p}.$$

Так как $I_{\text{отр}}^{s,p} = r_{s,p}^2 I_{\text{пад}}^{s,p}$, получаем: $\Delta = \frac{r_s^2 - r_p^2}{r_s^2 + r_p^2}$.

Используя формулы Френеля

$$r_p = -\frac{\operatorname{tg} \theta_1 - \theta_2}{\operatorname{tg} \theta_1 + \theta_2}, \quad r_s = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)},$$

находим:

$$\Delta = \frac{\cos^2(\theta_1 + \theta_2) - \cos^2(\theta_1 - \theta_2)}{\cos^2(\theta_1 + \theta_2) + \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \approx -0,82.$$

$$\mathbf{12.18.} \quad \Delta = \frac{\cos^2(\theta_1 - \theta_2) - 1}{\cos^2(\theta_1 - \theta_2) + 1} \approx -0,017, \text{ где } \theta_2 = 19,5^\circ.$$

$$\mathbf{12.19.} \quad \Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = \frac{\rho}{1 - \rho} = 0,087, \quad \Delta_3 = 1,$$

$$\Delta_4 = \frac{2\rho(1 - \rho)}{1 - 2\rho(1 - \rho)} = 0,17.$$

$$\mathbf{12.20.} \quad I_2 = I_0 \cdot \frac{4n}{(n^2 + 1)^2} = 0,568 I_0; \quad I_4 = I_0 \cdot \frac{16n^4}{(n^2 + 1)^4} = 0,726 I_0.$$

Решение. Для угла Брюстера $\theta_{\text{пад}} + \theta_{\text{отр}} = \pi/2$, $\operatorname{tg} \theta_{\text{Бр}} = n$, а коэффициент отражения от каждой поверхности пластинки равен (см. задачу 12.10):

$$R = \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^2.$$

В соответствии с формулой

$$I_{\text{пад}} = I_{\text{отр}} + I_{\text{прел}} \cdot \frac{\cos \theta_{\text{прел}}}{\cos \theta_{\text{пад}}}$$

для I_2 находим:

$$I_2 = I_{\text{прел}} = \frac{\cos \theta_{\text{пад}}}{\cos \theta_{\text{прел}}} \cdot (I_{\text{пад}} - I_{\text{отр}}) = \frac{1}{n} \cdot I_{\text{пад}} (1 - R).$$

После двух отражений интенсивность I_4 вышедшей волны равна:

$$I_4 = \frac{\cos \theta_{\text{прел}}}{\cos \theta_{\text{пад}}} \cdot I_2(1 - R) = I_{\text{пад}}(1 - R)^2 = I_0(1 - R)^2.$$

Подставляя в полученные для I_2 и I_4 формулы выражение для R , получаем ответ.

Замечание. Обратите внимание, что интенсивность света после прохождения первой преломляющей границы оказалась меньше, чем после прохождения двух преломляющих поверхностей. Это связано с изменением площади поперечного сечения пучка света, так как интенсивность света определяется как среднее по времени значение проекции вектора Умова-Пойнтинга S на направление распространения света.

$$12.21. \Delta^{(4)} = \frac{16n^4 - (1 + n^2)^4}{16n^4 + (1 + n^2)^4}.$$

Решение. Пучок света падает на первую и вторую поверхности пластины под углом Брюстера: $\theta_1 = \theta_{\text{Бр}}$, $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$. Естественный свет рассматриваем как суперпозицию двух пучков с s - и p -поляризацией одинаковой интенсивности:

$$I^s = I^p = I_0/2.$$

По определению степень поляризации света, прошедшего первую поверхность пластины, равна:

$$\Delta_1 = \frac{I_1^s - I_1^p}{I_1^s + I_1^p}.$$

Учитывая, что $I_1^s = t_s^2 n I^s$, $I_1^p = t_p^2 n I^p$, а $I^s = I^p$, приходим к формуле:

$$\Delta_1 = \frac{t_s^2 - t_p^2}{t_s^2 + t_p^2} = \frac{(t_s/t_p)^2 - 1}{(t_s/t_p)^2 + 1} = \frac{\cos^2(\theta_1 - \theta_2) - 1}{\cos^2(\theta_1 - \theta_2) + 1}.$$

Так как $\theta_{\text{Бр}} + \theta_2 = \pi/2$ и $\text{tg} \theta_{\text{Бр}} = n$, получаем:

$$\cos^2(\theta_{\text{Бр}} - \theta_2) = \cos^2\left(2\theta_{\text{Бр}} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin^2(2\theta_{\text{Бр}}) =$$

$$= 4 \cos^2 \theta_{\text{Бр}} \cdot (1 - \cos^2 \theta_{\text{Бр}}) = \frac{4 \operatorname{tg}^2 \theta_{\text{Бр}}}{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_{\text{Бр}})^2} = \frac{4n^2}{(1 + n^2)^2} = \gamma^2,$$

где $\gamma = \frac{2n}{1 + n^2}$. В итоге находим:

$$\Delta_1 = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 + 1}.$$

После прохождения второй поверхности пластины, на которую свет также падает под углом Брюстера, степень поляризации света равна:

$$\Delta_2 = \frac{I_2^s - I_2^p}{I_2^s + I_2^p}.$$

Учитывая, что $I_1^s = t_s^2 n I^s$, $I_1^p = t_p^2 n I^p$, находим:

$$I_2^s = t_s^2 n I_1^s = t_s^2 n \cdot t_s^2 n I^s = n^2 t_s^4 I^s,$$

$$I_2^p = t_p^2 n I_1^p = t_p^2 n \cdot t_p^2 n I^p = n^2 t_p^4 I^p,$$

откуда при $I^s = I^p$ получаем:

$$\Delta_2 = \frac{t_s^4 - t_p^4}{t_s^4 + t_p^4} = \frac{(t_s / t_p)^4 - 1}{(t_s / t_p)^4 + 1} = \frac{\gamma^4 - 1}{\gamma^4 + 1}.$$

Подставляя γ , находим:

$$\Delta^{(4)} = \frac{16n^4 - (1 + n^2)^4}{16n^4 + (1 + n^2)^4}.$$

12.22. $\Delta_N = \frac{\gamma^{4N} - 1}{\gamma^{4N} + 1}$, где $\gamma = \frac{2n}{1 + n^2}$.

Решение. В задаче 12.21 была определена степень поляризации естественного света, прошедшего одну пластину. Сравнивая формулы для поляризации света после прохождения одной границы раздела сред Δ_1 и после двух границ раздела Δ_2 , можно увидеть, что после прохождения n -ой границы степень поляризации света будет равна:

$$\Delta_n = \frac{\gamma^{2n} - 1}{\gamma^{2n} + 1}, \text{ где } \gamma = \frac{2n}{1 + n^2} < 1.$$

Так как стопа Столетова из N пластин содержит $n = 2N$ границ, то степень поляризации прошедшего света составляет:

$$\Delta_N = \frac{\gamma^{4N} - 1}{\gamma^{4N} + 1}.$$

Таким образом, с ростом числа N пластин степень поляризации прошедшего света возрастает (но интенсивность его при этом падает).

$$12.23. \Delta_N = \frac{\gamma^{4N} - 1}{\gamma^{4N} + 1}, \text{ где } \gamma = \frac{2n}{1 + n^2} :$$

а) $-0,31$; б) $-0,67$; в) $-0,92$.

$$12.24. \Delta = -0,015; -0,091; -0,176; -0,402.$$

$$12.25. \Delta = \frac{R_s - R_p}{1 - R_s R_p}, \text{ где } R_s = \frac{\sin^2(\theta_1 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)}, R_p = \frac{\text{tg}^2(\theta_1 - \theta_2)}{\text{tg}^2(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Решение. Естественный свет рассматриваем как суперпозицию двух пучков с s - и p -поляризацией одинаковой интенсивности:

$$I_0^s = I_0^p = I_0 / 2.$$

При каждом отражении теряется часть интенсивности $RI_{\text{пад}}$, поэтому интенсивности прошедших пластинку пучков после первого, второго и т.д. отражений от нижней, а потом от верхней поверхностей убывают по закону:

$$I_1 : I_2 : I_3 : I_3 : \dots = 1 : R^2 : R^4 : R^6 : \dots$$

Интенсивности прошедшего пластинку света с s - и p -поляризацией будут равны:

$$I_s = T_s^2 (1 + R_s^2 + R_s^4 + \dots) I_0^s = \frac{(1 - R_s)^2}{1 - R_s^2} I_0^s = \frac{1 - R_s}{1 + R_s} I_0^s;$$

$$I_p = T_p^2 (1 + R_p^2 + R_p^4 + \dots) I_0^p = \frac{(1 - R_p)^2}{1 - R_p^2} I_0^s = \frac{1 - R_p}{1 + R_p} I_0^p,$$

где $T = 1 - R$ – коэффициент пропускания поверхности.

Учитывая, что $I_0^s = I_0^p$, находим степень поляризации Δ прошедшего света:

$$\Delta = \frac{I_s - I_p}{I_s + I_p} = \frac{R_s - R_p}{1 - R_s R_p}.$$

Коэффициенты отражения R_s и R_p для компонент с s - и p -поляризацией находятся по формулам Френеля:

$$R_s = r_s^2 = \frac{\sin^2(\theta_1 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)}; \quad R_p = r_p^2 = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}^2(\theta_1 + \theta_2)}.$$

12.26. См. решение.

Решение. Запишем формулы Френеля для отраженных волн с s - и p -поляризацией в виде (см. задачу 12.1):

$$E_{00}^p = -E_{10}^p \frac{\operatorname{tg} \theta_1 - \theta_2}{\operatorname{tg} \theta_1 + \theta_2}; \quad E_{00}^s = -E_{10}^s \cdot \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}.$$

При $\theta_1 + \theta_2 < \pi/2$ $\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2) > 0$ и $\sin(\theta_1 + \theta_2) > 0$.

Если $n_2 > n_1$, $\theta_1 > \theta_2$ и $\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2) > 0$, $\sin(\theta_1 - \theta_2) > 0$, т.е. знаки E_{00}^s и E_{10}^s разные (фазы волн различаются на π), знаки E_{00}^p и E_{10}^p одинаковы, но это означает, что их фазы тоже различаются на π (см. рис. T12.1). Так как обе компоненты (с s - и p -поляризацией) отраженной волны приобрели дополнительную разность фаз π , то произошел скачок фазы всей волны на π , т.е. при отражении появилась дополнительная разность хода $\lambda/2$.

Если $n_2 < n_1$, $\theta_1 < \theta_2$ и $\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2) < 0$, $\sin(\theta_1 - \theta_2) < 0$, т.е. знаки E_{00}^s и E_{10}^s одинаковы (фазы волн одинаковы), знаки E_{00}^p и E_{10}^p различны, но это означает, что их фазы одинаковы (см. рис. T12.1). Таким образом, в этом случае скачка фазы не происходит, дополнительной разности хода при отражении не появляется.

12.27. $I_{\text{отр}} = I_{\text{пад}}$

Решение. Перепишем формулы Френеля

$$E_{00}^p = -E_{10}^p \frac{\operatorname{tg} \theta_1 - \theta_2}{\operatorname{tg} \theta_1 + \theta_2}; \quad E_{00}^s = -E_{10}^s \cdot \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \quad \text{в виде:}$$

$$E_{00}^p = E_{10}^p \cdot \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_1 - \sin \theta_2 \cos \theta_2}{\sin \theta_1 \cos \theta_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_2};$$

$$E_{00}^s = -E_{10}^s \cdot \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1}.$$

Поскольку происходит полное внутреннее отражение, $n_2 < n_1$, а угол θ_1 превышает угол полного внутреннего отражения $\theta_m = \arcsin(n_1/n_2)$. Формально можно записать:

$$\sin \theta_2 = \frac{\sin \theta_1}{n_1/n_2} > 1, \quad \cos \theta_2 = \pm i \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_1}{n_1/n_2} - 1} \quad \text{— мнимый.}$$

Подставив эти значения в формулы Френеля, и сохраняя перед квадратным корнем только знак "плюс", получим:

$$E_{00}^p = E_{10}^p \cdot \frac{(n_1/n_2)^2 \cos \theta_1 - i \sqrt{\sin^2 \theta_1 - (n_1/n_2)^2}}{(n_1/n_2)^2 \cos \theta_1 + i \sqrt{\sin^2 \theta_1 - (n_1/n_2)^2}};$$

$$E_{00}^s = -E_{10}^s \cdot \frac{\cos \theta_1 - i \sqrt{\sin^2 \theta_1 - (n_1/n_2)^2}}{\cos \theta_1 + i \sqrt{\sin^2 \theta_1 - (n_1/n_2)^2}}.$$

Видно, что амплитуды отраженных волн — комплексные величины, причем $|E_{00}^s| = |E_{10}^s|$ и $|E_{00}^p| = |E_{10}^p|$. Поскольку $I \sim n |E|^2$,

$$I_{\text{отр}} = I_{\text{отр}}^s + I_{\text{отр}}^p = I_{\text{пад}}^s + I_{\text{пад}}^p = I_{\text{пад}}.$$

Замечание. На самом деле то, что амплитуды отраженных волн — комплексные величины, следует из соотношений для векторов \mathbf{k} (см. решение задачи 12.28).

12.28. $\varphi = \pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{\cos \theta_1 \sqrt{\sin^2 \theta_1 - (n_2/n_1)^2}}{\sin^2 \theta_1}.$

Решение. При падении волны из оптически более плотной среды ($n_1 > n_2$) под углом, большем угла полного внутреннего отражения $\theta_m = \arcsin(n_1/n_2)$, уравнение преломленной волны с волновым вектором $\mathbf{k}_2 = k_{1x}\mathbf{e}_x - ik''_{2z}\mathbf{e}_z$ (см. рис. Т12.2) имеет вид:

$$\mathbf{E}_2(r, t) = \mathbf{E}_{20} e^{-k''_{2z}z} e^{i(\omega t - k_{1x}x)}, \text{ где}$$

$$k''_{2z} = \frac{\omega}{c} \sqrt{(n_1 \sin \theta_1)^2 - n_2^2} = \pm ik''_{2z}.$$

Запишем формулы Френеля через компоненты волновых векторов падающей \mathbf{k}_1 и отраженной \mathbf{k}_2 волн:

$$r_s^E = \frac{k_{1z} + ik''_{2z}}{k_{1z} - ik''_{2z}} = e^{i\varphi_s}, \quad r_p^E = -\frac{\frac{k_{1z}}{\varepsilon_1} + i\frac{k''_{2z}}{\varepsilon_2}}{\frac{k_{1z}}{\varepsilon_1} - i\frac{k''_{2z}}{\varepsilon_2}} = -e^{i\varphi_p}.$$

Сдвиг φ_{\perp} для s -компоненты равен

$$\varphi_{\perp} \equiv \varphi_s = 2 \operatorname{arctg} \frac{k''_{2z}}{k_{1z}} = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(n_1 \sin \theta_1)^2 - n_2^2}}{n_1 \cos \theta_1},$$

а сдвиг φ_{\parallel} для p -компоненты равен $\varphi_{\parallel} = \pi + \varphi_p$, где

$$\varphi_p = 2 \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon_1 k_{2z}''}{\varepsilon_2 k_{1z}} = 2 \operatorname{arctg} \frac{n_1 \sqrt{(n_1 \sin \theta_1)^2 - n_2^2}}{n_2^2 \cos \theta_1} \quad (\text{см. рис. О.12.28}).$$

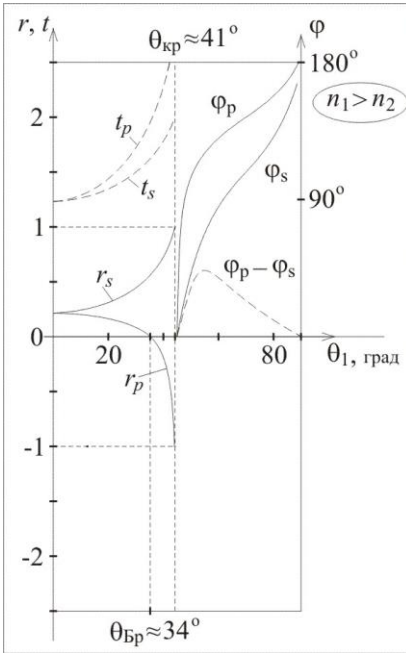


Рис. О.12.28. Коэффициенты r и t для волн s - и p -поляризации в зависимости от угла падения θ_1 на поверхность раздела двух сред ($n_1 > n_2$, $n_1=1,5n_2$); φ_p и φ_s – набег фазы при полном внутреннем отражении.

Поскольку $\operatorname{tg} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} - \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}}$, разность $\varphi_p - \varphi_s$ мо-

жет быть найдена по формуле:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_p - \varphi_s}{2} = \frac{\cos \theta_1 \sqrt{\sin^2 \theta_1 - (n_2/n_1)^2}}{\sin^2 \theta_1}.$$

Искомый сдвиг фаз φ для p - и s -компонент отраженной волны равен:

$$\varphi = \varphi_{\parallel} - \varphi_{\perp} = \pi + \varphi_p - \varphi_s = \pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{\cos \theta_1 \sqrt{\sin^2 \theta_1 - (n_2/n_1)^2}}{\sin^2 \theta_1}.$$

Поскольку компоненты отраженного света испытывают различные сдвиги фаз, линейно поляризованный свет при полном внутреннем отражении в общем случае превращается в эллиптически поляризованный.

12.29. $n \approx 2,42$.

Решение. Используя результат задачи 12.28, найдем угол $\theta_{1\max}$, соответствующий максимальной разности фаз φ между p - и s -компонентами отраженной волны из условия:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi_p - \varphi_s}{2} \right) = 0.$$

В результате получаем:

$$\sin^2 \theta_{1\max} = \frac{2n_{21}^2}{1 + n_{21}^2}, \text{ где } n_{21} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Сдвиг фаз между p - и s -компонентами при $\theta_{1\max}$ составляет:

$$(\varphi_p - \varphi_s)_{\max} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1 - n_{21}^2}{2n_{21}}.$$

Чтобы свет при отражении стал циркулярно поляризованным, должно быть $(\varphi_p - \varphi_s)_{\max} = \pi/2$, следовательно,

$$\frac{1 - n_{21}^2}{2n_{21}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1, \text{ откуда } n_{21} = \sqrt{2} - 1 \approx 0,414.$$

Для воздуха $n_2 = 1$, поэтому $n_{21} = 1/n$ и $n = 1/0,414 \approx 2,42$. Таким показателем преломления обладает алмаз.

12.30. $\theta = 48^\circ 37'$ и $\theta = 54^\circ 37'$.

Решение. Используя формулу

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_p - \varphi_s}{2} = \frac{\cos \theta_1 \sqrt{\sin^2 \theta_1 - (n_2/n_1)^2}}{\sin^2 \theta_1},$$

полученную в задаче 12.28, для искомого угла θ получим уравнение:

$$\sin^4 \theta - \frac{n^2 + 1}{n^2} \cos^2 \frac{\pi}{8} \cdot \sin^2 \theta + \frac{1}{n^2} \cos^2 \frac{\pi}{8} = 0.$$

При $n = 1,51$ решениями этого уравнения являются значения:

$$\theta = 48^{\circ}37' \text{ и } \theta = 54^{\circ}37' .$$

$$12.31. \quad n = \frac{1 + \sin \frac{3\pi}{8}}{\cos \frac{3\pi}{8}} = 5,028 .$$

Указание. Использовать формулу $(\varphi_p - \varphi_s)_{\max} = 2 \arctg \frac{1 - n_{21}^2}{2n_{21}}$

(см. задачу 12.29).

12.32. Свет после отражения будет иметь круговую поляризацию; если азимут поляризации $\alpha = +45^{\circ}$, то круговая поляризация левая, а если $\alpha = -45^{\circ}$, то правая.

Решение. При сложении двух волн, плоскости поляризации которых взаимно перпендикулярны, получается в общем случае эллиптически поляризованный свет, причем конец результирующего вектора \mathbf{E} описывает эллипс в направлении от вектора, опережающего по фазе, к вектору, отстающему по фазе. При полном внутреннем отражении $r_p = -r_s$ ($|r_p| = |r_s| = 1$) и $\varphi_p - \varphi_s \geq 0$. Поэтому свет после отражения будет иметь круговую поляризацию; если азимут поляризации $\alpha = +45^{\circ}$, то поляризация левая, а если $\alpha = -45^{\circ}$, то правая.

12.33. $\theta = 6^{\circ}29'$ или $\theta = 44^{\circ}38'$; правая.

Указание. См задачу 12.30.

$$12.34. \quad \Delta z = \frac{\lambda}{2\pi \sqrt{(n \sin \theta)^2 - 1}} = 0,28 \text{ мкм} .$$

Решение. Так как для границы "стекло–воздух" предельный угол $\theta_{\text{пред}} = \arcsin(1/n) \approx 42^\circ$, то при выходе световой волны из призмы реализуется условие полного внутреннего отражения.

Глубина проникновения световой волны в отражающую среду при полном внутреннем отражении:

$$\Delta z = \frac{c}{\omega \sqrt{(n_1 \sin \theta_1)^2 - n_2^2}} = \frac{\lambda}{2\pi \sqrt{(n \sin \theta)^2 - 1}} = 0,28 \text{ мкм} .$$

§13. Оптика анизотропных сред. Кристаллооптика

13.1. а). См рис. О.13.1 а, $n_x = \sqrt{\epsilon_x} = 2$; $n_y = \sqrt{\epsilon_y} = \sqrt{3}$;
 $n_z = \sqrt{\epsilon_z} = \sqrt{2}$; б) см. рис. О.13.1 б);
 $v_x = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_x}} = \frac{c}{2}$; $v_y = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_y}} = \frac{c}{\sqrt{3}}$; $v_z = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_z}} = \frac{c}{\sqrt{2}}$; в) сечения луче-

вой поверхности плоскостями $z = 0$, $y = 0$ и $x = 0$ соответственно показаны на рис. О.13.1 в; направления на оптические оси кристалла OO_1 и OO_2 (лежат в плоскости $y = 0$) соответствуют точкам пересечения лучевых поверхностей.

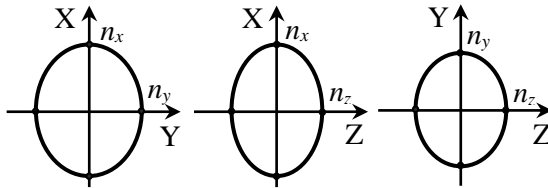


Рис. О.13.1а.

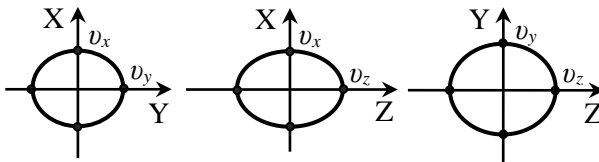


Рис. О.13.1 б).

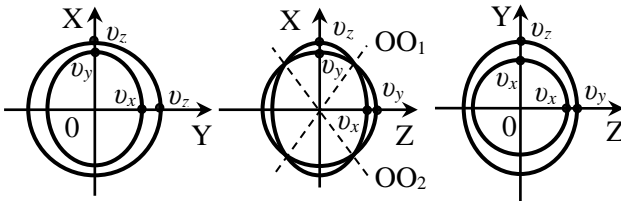


Рис. О.13.1 в).

Заметим, что лучевые скорости при распространении вдоль обеих оптических осей кристалла одинаковы и равны главной скорости v_y (средней по величине из трех главных скоростей, $v_x < v_y < v_z$).

13.2. Построения аналогичны проведенным в задаче 13.1;

$$\theta = \pm \arccos \sqrt{\frac{\varepsilon_z - \varepsilon_y}{\varepsilon_z - \varepsilon_x}} = \pm \frac{\pi}{4}.$$

Решение. Построим сечение лучевого эллипсоида плоскостью, перпендикулярной направлению \mathbf{S}_{00} (рис. О.13.2). Так как лучевая скорость распространения волн вдоль оптических осей v_{00} равна v_y , эта плоскость должна проходить через ось OY . Поэтому на сечении лучевого эллипсоида плоскостью XOZ зададим искомое направление \mathbf{S}_{00} и угол θ между \mathbf{S}_{00} и осью OZ (рис. О.13.2). В этом случае линия, перпендикулярная \mathbf{S}_{00} , (OA на рис. О.13.2), должна отсекать на лучевом эллипсоиде отрезок длиной v_y .

Уравнение лучевого эллипсоида при $y = 0$ запишется в виде:

$$\frac{x^2}{v_x^2} + \frac{z^2}{v_z^2} = 1.$$

В направлении OA , перпендикулярном \mathbf{S}_{00} , длина соответствующего отрезка равна v_y . Подставляя $x = v_y \cdot \cos \theta$ и $z = -v_y \cdot \sin \theta$, получим:

$$\frac{v_y^2}{v_x^2} \cos^2 \theta + \frac{v_y^2}{v_z^2} \sin^2 \theta = 1.$$

Решая уравнение, находим:

$$\cos^2 \theta = \frac{(v_y^2 - v_z^2) \cdot v_x^2}{(v_x^2 - v_z^2) \cdot v_y^2}.$$

Так как $v_i = c / n_i$, в результате преобразований получаем:

$$\cos^2 \theta = \frac{n_z^2 - n_y^2}{n_z^2 - n_x^2} = \frac{\varepsilon_z - \varepsilon_y}{\varepsilon_z - \varepsilon_x} = \frac{4 - 3}{4 - 2} = \frac{1}{2}; \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Направления на оптические оси кристалла соответствуют углам θ и $(-\theta)$.

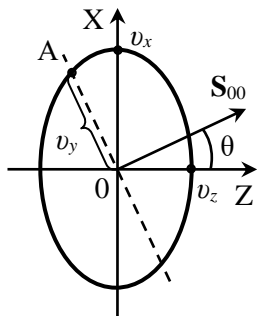


Рис. О.13.2.

$$13.3. v' = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_z}} = \frac{c}{\sqrt{3}}; v'' = \frac{\sqrt{5}}{4} c.$$

Решение. Для нахождения фазовых скоростей в направлении $N = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right\}$ приведем уравнение Френеля к общему

знаменателю и запишем в виде:

$$N_x^2 (v^2 - v_y^2)(v^2 - v_z^2) + N_y^2 (v^2 - v_x^2)(v^2 - v_z^2) + N_z^2 (v^2 - v_x^2)(v^2 - v_y^2) = 0.$$

Так как $N_z = 0$, одно из решений

$$v' = v_z = \frac{c}{n_z} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_z}} = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Второе решение находим из уравнения:

$$N_x^2 (v^2 - v_y^2) + N_y^2 (v^2 - v_x^2) = 0,$$

откуда:

$$(v'')^2 = \frac{v_x^2 + 3v_y^2}{4} = \frac{c^2}{4} \left(\frac{1}{n_x^2} + \frac{3}{n_y^2} \right) = \frac{c^2}{4} \left(\frac{1}{\epsilon_x} + \frac{3}{\epsilon_y} \right) = \frac{5}{16} c^2, \quad v'' = \frac{\sqrt{5}}{4} c.$$

$$13.4. u' = v_x = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_z}} = \frac{c}{\sqrt{2}}; u'' = \frac{2v_y v_z}{\sqrt{3v_y^2 + v_z^2}} = \frac{2c}{\sqrt{3\epsilon_y + \epsilon_z}} = \frac{2}{3} c.$$

Указание. Привести уравнение Френеля для лучевых скоростей $\sum_i \frac{S_i^2 v_i^2}{u^2 - v_i^2} = 0$ к общему знаменателю. Далее решение аналогично проведенному в задаче 13.3.

$$13.5. v' = \frac{c}{n_y} = \sqrt{\frac{2}{5}} c; v'' = c \sqrt{\frac{1}{n_x^2} + \frac{1}{n_z^2}} = \sqrt{\frac{5}{6}} c.$$

$$13.6. D_1 \perp D_2.$$

Решение. Запишем 2 уравнения Максвелла для диэлектрической немагнитной среды, если $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$ и $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Подставляя в эти уравнения \mathbf{E} , \mathbf{D} и \mathbf{H} в виде плоских волн

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}}_0 \exp \{i(\omega t - \mathbf{k}r)\},$$

где $\tilde{\mathbf{A}}_0$ – комплексная амплитуда, $\mathbf{k} = \frac{\omega}{v} \mathbf{N}$ – волновой вектор, \mathbf{N} – единичный вектор нормали к фронту волны, приходим к системе уравнений:

$$[\mathbf{k}, \mathbf{E}] = \mu_0 \omega \mathbf{H}, \quad [\mathbf{k}, \mathbf{H}] = -\omega \mathbf{D}.$$

Так как $\mathbf{k} = \frac{\omega}{v} \mathbf{N}$, уравнения преобразуются к виду:

$$\mathbf{D} = -\frac{1}{v} \cdot [\mathbf{N}, \mathbf{H}], \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 v} \cdot [\mathbf{N}, \mathbf{E}].$$

Исключая \mathbf{H} из первого уравнения, получаем:

$$\mathbf{D} = -\frac{1}{\mu_0 v^2} \cdot [\mathbf{N}, [\mathbf{N}, \mathbf{E}]].$$

Раскрывая двойное векторное произведение по формуле:

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

находим:

$$\mathbf{D} = -\frac{1}{\mu_0 v} \cdot [\mathbf{N}(\mathbf{N}, \mathbf{E}) - \mathbf{E}(\mathbf{N}, \mathbf{N})] = \frac{c^2 \varepsilon_0}{v^2} [\mathbf{E} - (\mathbf{E}, \mathbf{N})\mathbf{N}].$$

Пусть в некотором направлении \mathbf{N} бегут две волны \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_2 с фазовыми скоростями v_1 и v_2 соответственно. Полученные уравнения для векторов \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_2 волн 1 и 2 умножим скалярно соответственно на \mathbf{D}_2 и \mathbf{D}_1 и вычтем одно из другого. В результате получим:

$$(v_1^2 - v_2^2) \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2 = c^2 \varepsilon_0 (\mathbf{E}_1 \mathbf{D}_2 - \mathbf{E}_2 \mathbf{D}_1) = 0,$$

поскольку $\mathbf{E}_1 \mathbf{D}_2 = \mathbf{E}_2 \mathbf{D}_1$ в силу симметрии тензора $\hat{\varepsilon}$ ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$).

Таким образом, если $v_1 \neq v_2$, то $\mathbf{D}_1 \perp \mathbf{D}_2$.

$$13.7. \sum_i \frac{N_i^2}{v^2 - v_i^2} = 0.$$

Решение. Запишем формулу $\mathbf{D} = \frac{c^2 \varepsilon_0}{v^2} [\mathbf{E} - (\mathbf{E}, \mathbf{N})\mathbf{N}]$ (см.

задачу 13.6) в проекциях на главные направления кристалла:

$$\frac{D_i v^2}{c^2 \varepsilon_0} = E_i - (\mathbf{E}, \mathbf{N}) N_i.$$

Так как $E_i = \frac{D_i}{\varepsilon_0 \varepsilon_i} = \frac{D_i}{\varepsilon_0 n_i^2} = \frac{D_i v_i^2}{\varepsilon_0 c^2}$, последняя формула преоб-

разуется к виду:

$$\frac{D_i}{c^2 \varepsilon_0} (v_i^2 - v^2) = (\mathbf{E}, \mathbf{N}) N_i \quad \text{или} \quad \frac{D_i}{c^2 \varepsilon_0} = (\mathbf{E}, \mathbf{N}) \cdot \frac{N_i}{v_i^2 - v^2}.$$

Умножая обе части последнего уравнения на N_i , суммируя по i и учитывая, что $(\mathbf{N}, \mathbf{D}) = \sum_{i=x,y,z} N_i D_i = 0$, получим уравнение Френеля для фазовых скоростей:

$$\sum_i \frac{N_i^2}{v^2 - v_i^2} = 0.$$

13.8.
$$\sum_i \frac{S_i^2 v_i^2}{u^2 - v_i^2} = 0.$$

Решение. Представим вектор \mathbf{D} в виде суммы ортогональных компонент:

$$\mathbf{D} = (\mathbf{D}, \mathbf{e}) \mathbf{e} + (\mathbf{D}, \mathbf{S}) \mathbf{S},$$

где \mathbf{e} – единичный вектор в направлении вектора \mathbf{E} , \mathbf{S} – единичный вектор в направлении вектора $[\mathbf{E}, \mathbf{H}]$. Так как

$$(\mathbf{D}, \mathbf{e}) = \varepsilon_0 \varepsilon (\mathbf{d}, \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{d}, \mathbf{e}) = \varepsilon_0 \varepsilon E (\mathbf{d}, \mathbf{e})^2,$$

где \mathbf{d} – единичный вектор в направлении \mathbf{D} , то

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon \cos^2 \alpha} [\mathbf{D} - (\mathbf{D}, \mathbf{S}) \mathbf{S}],$$

где α – угол поляризации. Запишем последнюю формулу в проекциях на главные направления кристалла:

$$E_i = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon \cos^2 \alpha} [D_i - (\mathbf{D}, \mathbf{S}) S_i]$$

и преобразуем её, учитывая, что $D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_i E_i$, к виду:

$$E_i = \frac{1}{\varepsilon_0 (\varepsilon_i - \varepsilon \cos^2 \alpha)} (\mathbf{D}, \mathbf{S}) S_i.$$

Умножая обе части на S_i , суммируя по i и учитывая, что $(\mathbf{S}, \mathbf{E}) = \sum_{i=x,y,z} S_i E_i = 0$ и лучевая скорость $\mathbf{u} = \frac{v}{\cos \alpha} \mathbf{S}$, получим уравнение Френеля для лучевых скоростей:

$$\sum_i \frac{S_i^2 v_i^2}{u^2 - v_i^2} = 0.$$

$$13.9. v^2 = \sum_i d_i^2 v_i^2.$$

Решение. Воспользуемся формулой (см. задачу 13.6):

$$\mathbf{D} = \frac{c^2 \varepsilon_0}{v^2} [\mathbf{E} - (\mathbf{E}, \mathbf{N}) \mathbf{N}].$$

Умножим обе части уравнения скалярно на \mathbf{D} и учтем, что $(\mathbf{N}, \mathbf{D}) = 0$ и

$$(\mathbf{E}, \mathbf{D}) = \sum_i E_i D_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i \frac{D_i^2}{\varepsilon_i} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i \frac{D_i^2}{n_i^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i \frac{D_i^2 v_i^2}{c^2}.$$

Обозначив $d_i \equiv \frac{D_i}{D}$, для скорости v получаем искомую формулу:

$$v^2 = \sum_i d_i^2 v_i^2.$$

$$13.10. \frac{1}{u^2} = \sum_i \frac{e_i^2}{v_i^2}.$$

Указание. Использовать формулу (см. задачу 13.8):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon \cos^2 \alpha} [\mathbf{D} - (\mathbf{D}, \mathbf{S}) \mathbf{S}],$$

обе части которой умножить скалярно на \mathbf{S} и учесть, что $(\mathbf{E}, \mathbf{S}) = 0$

и $\mathbf{u} = \frac{v}{\cos \alpha} \mathbf{S}$, где α – угол поляризации.

$$13.11. \quad u_1 = \frac{c}{\sqrt{2}}, \quad u_2 = \frac{2}{\sqrt{13}} c;$$

$$\mathbf{E}_1 = E_1 \mathbf{e}_y \cos \left[\omega \left(t - \frac{\sqrt{2}(x + \sqrt{3}z)}{c} \right) \right],$$

$$\mathbf{E}_2 = E_2 \left(-\frac{1}{2} \mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{e}_z \right) \cos \left[\omega \left(t - \frac{\sqrt{13}(3\sqrt{3}x + 4z)}{5c} \right) \right].$$

Решение. Используя уравнение Френеля для лучевых скоростей, получаем (см. задачу 13.4):

$$u_1 = v_y = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_y}} = \frac{c}{\sqrt{2}}; \quad u_2 = \frac{2v_x v_z}{\sqrt{3v_x^2 + v_z^2}} = \frac{2c}{\sqrt{\varepsilon_x + 3\varepsilon_z}} = \frac{2}{\sqrt{13}} c.$$

Первая волна поляризована вдоль оси y : $\mathbf{E}_1 = E_1 \mathbf{e}_y$; в этом случае вектор \mathbf{D}_1 сонаправлен с \mathbf{E}_1 , следовательно, и \mathbf{N}_1 сонаправлен с \mathbf{S} . Уравнение этой плоской волны запишется в виде:

$$\mathbf{E}_1 = E_1 \mathbf{e}_y \cos \left[\omega \left(t - \frac{\frac{x}{u_1} + \frac{\sqrt{3}z}{2}}{1} \right) \right] = E_1 \mathbf{e}_y \cos \left[\omega \left(t - \frac{\sqrt{2}(x + \sqrt{3}z)}{c} \right) \right].$$

Для второй волны направления векторов \mathbf{D}_2 и \mathbf{E}_2 различны, как и векторов \mathbf{S} и \mathbf{N}_2 (рис. О.13.11 а). Для записи уравнения волны требуется найти \mathbf{N}_2 :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{D_x}{D_z} = \frac{\varepsilon_x E_x}{\varepsilon_z E_z} = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} \operatorname{tg} \theta = \frac{4\sqrt{3}}{9},$$

$$\begin{aligned} \frac{(N \cdot r)}{v_2} &= \frac{x \cos \varphi + z \sin \varphi}{u_2 \cos \alpha} = \frac{x + z \operatorname{tg} \varphi}{u_2 (\cos \theta - \sin \theta \cdot \operatorname{tg} \varphi)} = \\ &= \frac{6\sqrt{3}x + 8z}{5u_2} = \frac{\sqrt{13}(3\sqrt{3}x + 4z)}{5c}, \end{aligned}$$

где $\theta = \alpha + \varphi$, $\cos \alpha = \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi$ (рис. О.13.11 б).

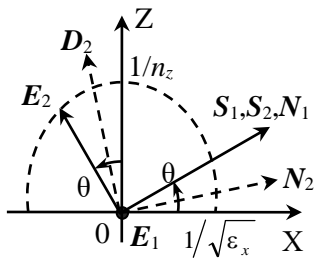


Рис. О.13.11 а.

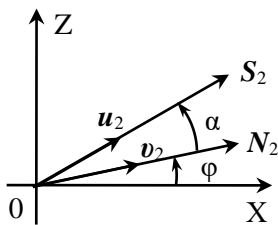


Рис. О.13.11 б.

В результате получаем:

$$E_2 = E_2 \left(-\frac{1}{2} e_x + \frac{\sqrt{3}}{2} e_z \right) \cos \left[\omega \left(t - \frac{\sqrt{13}(3\sqrt{3}x + 4z)}{5c} \right) \right].$$

$$13.12. v_1 = v_x = \sqrt{\frac{2}{5}} c; v_2 = \sqrt{\frac{v_y^2 + v_z^2}{2}} = \sqrt{\frac{5}{12}} c;$$

$$D_1 = D_1 e_x \cos \left[\omega \left(t - \frac{\sqrt{5}x + \sqrt{5}y}{2c} \right) \right],$$

$$D_2 = D_2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} e_x + \frac{1}{\sqrt{2}} e_y \right) \cos \left[\omega \left(t - \frac{\sqrt{6}x + \sqrt{6}y}{\sqrt{5}c} \right) \right].$$

Указание. Ориентация векторов D_1 и D_2 относительно эллипсоида показателей преломления показана на рис. О.13.12. Для записи уравнения плоской волны использовать формулу:

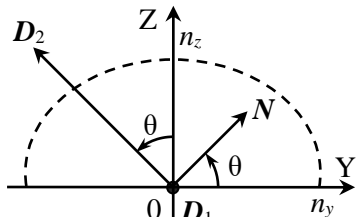


Рис. О.13.12.

$$A(t, \mathbf{r}) = A_0 \cos \left\{ \omega \left(t - \frac{N\mathbf{r}}{v} \right) \right\}.$$

$$13.13. E_1 = E_1 e_z \cos \left[\omega \left(t - \frac{\sqrt{2}(x+y)}{c} \right) \right];$$

$$E_2 = E_2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} e_x + \frac{1}{\sqrt{2}} e_y \right) \cos \left[\omega \left(t - \frac{\sqrt{5}(3x+2y)}{c} \right) \right].$$

13.14. Волна, поляризованная вдоль оси OX , имеет максимальную фазовую (и лучевую) скорость, равную главной скорости $v_x = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_x}} = \frac{c}{\sqrt{2}}$. Направление распространения такой волны – произвольное, но перпендикулярное оси OX . Например, при распространении вдоль оси OZ уравнение волны имеет вид:

$$D = D_0 e_z \cos \left[2\pi\nu \left(t - \frac{z}{v_x} \right) \right] = D_0 e_z \cos \left[2\pi\nu \left(t - \frac{\sqrt{2}z}{c} \right) \right].$$

13.15. Кристалл одноосный, положительный, оптическая ось направлена вдоль оси OX ; $\varepsilon_x = \varepsilon_{||} = 12$, $\varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{\perp} = 3$; $v_o = \frac{c}{\sqrt{3}}$,

$v_e = \frac{c}{2\sqrt{3}}$; сечения лучевой поверхности, лучевого эллипсоида и эллипсоида показателей преломления показаны на рис. О.13.15 а, б.

Решение. Кристалл одноосный, оптическая ось направлена вдоль оси OX .

Скорость распространения обыкновенной волны не зависит от направления и всегда равна $v_o = c/\sqrt{3}$. С такой же скоростью распространяются и волны, поляризованные вдоль главных оптических осей OY и OZ (перпендикулярно оптической оси):

$$v_o = \frac{c}{\sqrt{3}} = v_y = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_y}} = v_z = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_z}},$$

т.е. $\varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{\perp} = 3$.

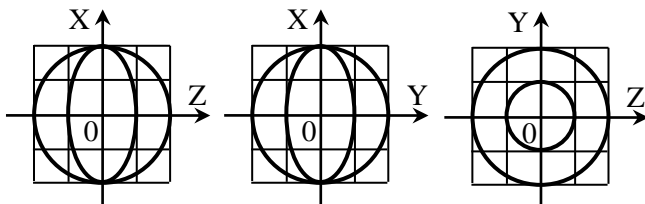


Рис. О.13.15 а.

Скорость волны, поляризованной вдоль оптической оси OX и распространяющейся вдоль оси OZ , как следует из рис. 13.1, в 2 раза меньше:

$$v_e = v_x = \frac{v_o}{2} = \frac{c}{2\sqrt{3}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_x}},$$

т.е. $\varepsilon_x = \varepsilon_{\parallel} = 12$.

Так как $\varepsilon_{\parallel} > \varepsilon_{\perp}$, то кристалл **положительный**. Следовательно, лучевая поверхность необыкновенной волны вытянута вдоль оптической оси OX и вписана в сферу, соответствующую обыкновенной волне. Сечения лучевой поверхности показаны на рис. О.13.15 а.

Так как $\varepsilon_x > \varepsilon_y = \varepsilon_z$, то эллипсоид показателей преломления

вытянут вдоль оптической оси. У лучевого эллипсоида длина полуосей пропорциональна $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_i}}$, поэтому он

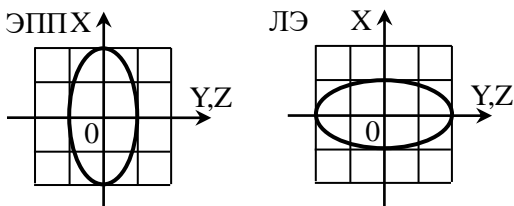


Рис. О.13.15 б.

сплюснут вдоль опти-

ческой оси. Сечения эллипсоидов представлены на рис. О.13.15 б; они симметричны относительно поворота вокруг оптической оси.

13.16. Кристалл отрицательный, пластинка вырезана параллельно оптической оси, лежащей первоначально в плоскости падения луча.

13.17. Оба показателя преломления имеют постоянные значения, соответствующие минимальному $n_e = 1,642$ и максимальному $n_o = 1,646$ значениям.

13.18. См. рис. О.13.18.

Решение. При построении Гюйгенса следует построить лучевые поверхности в кристалле, центром которых является точка падения луча на кристалл. Затем надо провести луч, параллельный падающему, который окажется в точке В на поверхности кристалла в момент времени, соответствующий построенным лучевым поверхностям.

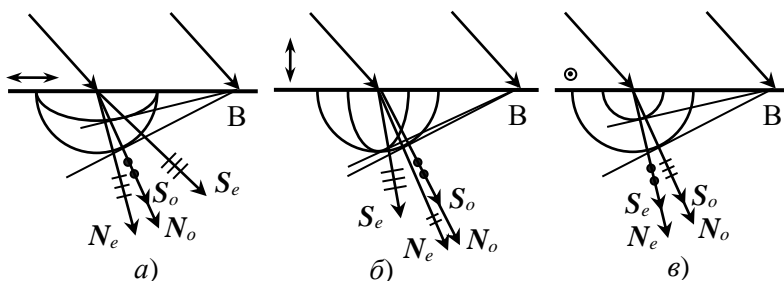


Рис. О.13.18.

Проведем из точки В касательные к лучевым поверхностям, преломленные лучи S_o и S_e пройдут через точки касания (рис. О.13.18). Направление нормали N_o для обыкновенной волны совпадает с S_o . Нормаль N_e для необыкновенной волны перпендикулярна к соответствующей касательной, которая является фронтом необыкновенной волны.

Обыкновенный луч поляризован перпендикулярно оптической оси, вектор E необыкновенного луча лежит в той же плоскости, что и оптическая ось (на рис. О.13.18 направления векторов E указаны кружками и черточками на преломленных лучах, направления векторов D показаны черточками на векторах нормалей N_e).

13.19. Построения выполняются аналогично проделанным в задаче 13.18.

13.20. а) См. рис. О.13.20.

б) Построение выполняется аналогично пункту а).

13.21. См. рис. О.13.21.

Решение. Проводим луч нормально к поверхности кристалла и строим сечения лучевых поверхностей плоскостью, проходящей через луч и оптическую ось (рис. О.13.21). Так как кристалл положительный, то сечение лучевой поверхности необыкновенного луча (эллипс) лежит внутри сечения лучевой поверхности обыкновенного луча (окружность), а оптическая ось проходит через точки касания эллипса и окружности. Затем проводим плоскости, параллельные границе раздела и касательные к обеим лучевым поверхностям: 1 – к окружностям (это фронт обыкновенной волны) и 2 – к эллипсам (это фронт необыкновенной волны). В точки касания из точек на поверхности кристалла проводим преломленные лучи.

Как видно из рисунка, обыкновенный луч S_o не меняет своего направления и идет по нормали к поверхности, а необыкновенный луч S_e изменяет направление в кристалле. При этом направления нормалей к фронтам обеих волн совпадают, они перпендикулярны поверхности.

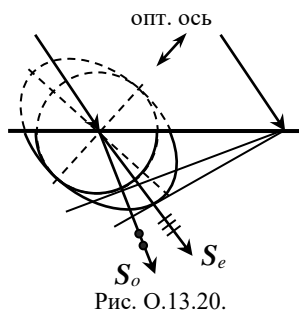


Рис. О.13.20.

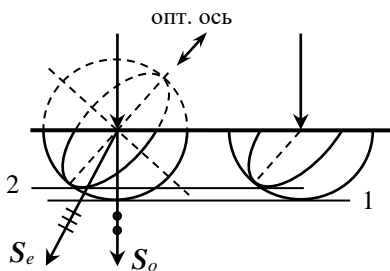


Рис. О.13.21.

$$13.22. \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{(\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel}) \operatorname{tg} \theta}{\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{\parallel} \operatorname{tg}^2 \theta} \operatorname{tg} \alpha .$$

Решение. Так как для необыкновенной волны углы φ и θ связаны соотношением (см. рис. 13.4):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{D_z}{D_x} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel} E_z}{\varepsilon_0 \varepsilon_{\perp} E_x} = \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} \operatorname{tg} \theta,$$

то для угла поляризации α получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha \equiv \operatorname{tg}(\theta - \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \theta} = \frac{(\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel}) \operatorname{tg} \theta}{\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{\parallel} \operatorname{tg}^2 \theta}.$$

$$\mathbf{13.23.} \quad \alpha_{\max} = \operatorname{arctg} \frac{n_o^2 - n_e^2}{2n_o n_e} = 6^{\circ} 15'.$$

Указание. См задачу 13.22.

$$\mathbf{13.24.} \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{(n_o^2 - n_e^2) \operatorname{tg} \theta}{n_o^2 + n_e^2 \operatorname{tg}^2 \theta} \approx 6^{\circ} 14'.$$

$$\mathbf{13.25.} \quad \Delta = d (n_o - n_e) = 0,00516 \text{ мм}.$$

13.26. $d' = d \cdot \frac{\Delta n}{\Delta n'} \approx 0,19 \text{ мм}$; на выходе из исландского шпата необыкновенный луч (e) будет опережать обыкновенный (o), а на выходе из кварца – наоборот.

$$\mathbf{13.27.} \quad \Delta = dn_o \left(1 - \frac{n_e}{\sqrt{(n_o \cos \gamma)^2 + (n_e \sin \gamma)^2}} \right).$$

$$\mathbf{13.28.} \quad v_e(\varphi) = c \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{\sin^2 \varphi}{\varepsilon_{\parallel}}}.$$

Решение. Пусть оптическая ось направлена вдоль оси Z . Изобразим сечение эллипсоида показателей преломления плоскостью $y = 0$ для необыкновенной волны в положительном одноосном

кристалле (рис. О.13.28) (для отрицательного кристалла получится аналогичный результат). Его уравнение имеет вид:

$$\frac{x^2}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{z^2}{\varepsilon_{\parallel}} = 1.$$

Подставляя в это уравнение

$$x = -n \cdot \sin \varphi, \quad y = n \cdot \cos \varphi,$$

получаем:

$$n(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{\sin^2 \varphi}{\varepsilon_{\parallel}}}}.$$

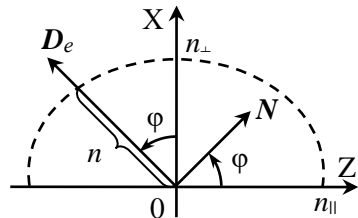


Рис. О.13.28.

Фазовая скорость волны равна:

$$v_e(\varphi) = \frac{c}{n(\varphi)} = c \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{\sin^2 \varphi}{\varepsilon_{\parallel}}}.$$

$$13.29. \quad v_1 = \frac{c}{n_o}, \quad v_2 = c \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{n_o^2} + \frac{2}{n_e^2} \right)}.$$

13.30. $\varphi = 5^{\circ}17'$; см. рис. О.13.30.

Решение. На первую призму неполяризованный луч падает нормально. Преломленные лучи будут распространяться в том же направлении, что и падающий, но с различными скоростями. Обыкновенный луч поляризован перпендикулярно плоскости главного сечения, и его скорость (как лучевая, так и фазовая) равна

$v_o = u_o = \frac{c}{n_o}$. Необыкновенный луч поляризован в плоскости главного сечения, и его скорость (как лучевая, так и фазовая) равна

$v_e = u_e = \frac{c}{n_e}$. Оба луча падают на границу раздела двух призм под

углом α .

13.31. $\varphi = 5^\circ 45'$; см. рис. О.13.31.

13.32. См. рис. О.13.32.

13.33. $\alpha = 72^\circ$.

Решение. В призме Николя разрез BC перпендикулярен граням AB и CD (см. рис. О.13.33).

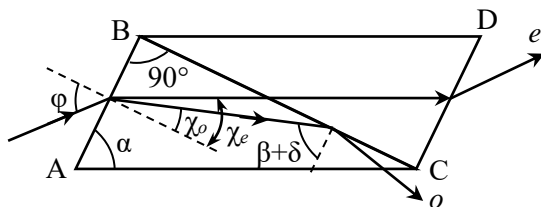


Рис. О.13.33.

Запишем закон преломления на границе AB для обыкновенного и необыкновенного лучей:

$$\sin \chi_o = \frac{1}{n_o} \sin \varphi, \quad \sin \chi_e = \frac{1}{n_e} \sin \varphi, \quad \rightarrow \quad \frac{\sin \chi_e}{\sin \chi_o} = \frac{n_e}{n_o}.$$

По условию задачи необыкновенный луч распространяется параллельно длинному ребру призмы, поэтому

$$\alpha = 90^\circ - \chi_e.$$

Угол полного внутреннего отражения β для обыкновенного луча на границе BC определяется из соотношения:

$$\sin \beta = n / n_o \approx 0,929 \quad \rightarrow \quad \beta = 68^\circ 15'.$$

По условию задачи

$$\chi_o = 90^\circ - (\beta + \delta) = 20^\circ.$$

Из закона преломления находим χ_e :

$$\sin \chi_e = \frac{n_e}{n_o} \sin \chi_o = 0,3127, \quad \rightarrow \quad \chi_e \approx 18^\circ.$$

Следовательно, $\alpha = 90^\circ - \chi_e = 72^\circ$.

13.34. Необыкновенный.

13.35. а) вторая; б) в обоих случаях $37^\circ 6' < \alpha < 42^\circ 18'$.

§14. Поляризация света

14.1. а) $P = 0,5$; б) $P = 0,91$.

$$14.2. I = I_0 \cos^2 \alpha_1 \cos^2 (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{3}{16} I_0.$$

14.3. Интенсивность уменьшится в $\eta = \frac{\cos^2 \alpha_1}{\cos^2 \alpha_2} = 1,5$ раза.

$$14.4. I = I_0 \cos^4 \alpha.$$

$$14.5. I = 0,5 I_0 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha.$$

Указание. Свет, поляризованный по кругу, можно рассматривать как суперпозицию двух линейно поляризованных волн с одинаковой амплитудой и с разностью фаз $\pi/2$, с ортогональными векторами напряженности электрического поля \mathbf{E} .

$$14.6. \eta = \frac{(\cos \varphi)^{2(N-1)}}{2} \approx 0,12.$$

$$14.7. I \approx I_0 (1 - N\alpha^2).$$

Указание. Воспользоваться разложением $\cos(\alpha)$ в ряд Тейлора, ограничившись двумя первыми членами разложения из-за малости угла α .

$$14.8. I_1 = 0 \text{ или } I_2 = \frac{3}{8} I_0.$$

14.9. Уменьшится в 1,5 раза.

Решение. По условию задачи $P = \frac{I_{\text{лин}}}{I_{\text{лин}} + I_{\text{ест}}} = 0,5$, поэтому

$$I_{\text{лин}} = I_{\text{ест}}.$$

При ориентации николя на максимум пропускания

$$I_{\text{макс}} = I_{\text{лин}} + 0,5 I_{\text{ест}} = 1,5 I_{\text{ест}},$$

а после поворота николя на 60° интенсивность прошедшего света равна:

$$I = I_{\text{лин}} \cos^2 \theta + 0,5I_{\text{ест}} = I_{\text{ест}}.$$

Следовательно, интенсивность уменьшится в 1,5 раза.

$$14.10. I = 0,8 (I_1 + I_2).$$

$$14.11. P = 0,8.$$

Указание. Интенсивность света, прошедшего через поляририд, равна $I(\theta) = I_{\text{лин}} \cos^2 \theta + 0,5I_{\text{ест}}$, где θ – угол между плоскостью поляризации линейно поляризованной компоненты и плоскостью пропускания николя. Максимальное пропускание света соответствует $\theta = 0$, и по условию задачи $I_{\text{max}} = \eta \cdot I_{\alpha}$. Из этих данных можно определить отношение интенсивностей $I_{\text{ест}} / I_{\text{лин}}$.

$$14.12. W_T = \frac{\pi I_0 S}{\omega}.$$

Решение. По закону Малюса мгновенное значение мощности $P(t)$ на выходе равно

$$P(t) = I_0 S \cdot \cos^2 \theta(t),$$

где $\theta(t) = \omega t + \theta_0$ – угол между плоскостью поляризации света и плоскостью пропускания поляризатора.

Поэтому энергия, которую пропускает поляризатор за один оборот, равна

$$W_T = \int_0^T P(t) dt = I_0 S \langle \cos^2 \theta \rangle_T \cdot T = I_0 S \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi I_0 S}{\omega}.$$

$$14.13. P_1 = 0,25.$$

$$14.14. \theta = \arccos \left(\frac{\sqrt{\eta_2}}{\eta_1 \sqrt{2}} \right) \approx 29^\circ.$$

Решение. Идеальный поляроид пропускает 50% естественного света. Если поляроид *неидеальный*, то на его выходе интенсивность линейно поляризованного света равна

$$I_1 = 0,5 \cdot \gamma \cdot I_{\text{ест}},$$

где γ – коэффициент изотропного пропускания материала, из которого изготовлен поляроид. Так как по условию задачи

$$I_1 = \eta_1 I_{\text{ест}}, \text{ то } \gamma = 2\eta_1.$$

По закону Малюса интенсивность света на выходе второго поляроида равна

$$I_2 = \gamma \cdot I_1 \cos^2 \varphi.$$

Поскольку по условию задачи:

$$I_2 = \eta_2 I_{\text{ест}}, \text{ то } \cos^2 \theta = \frac{\eta_2}{2\eta_1^2},$$

$$\theta = \arccos \left(\frac{\sqrt{\eta_2}}{\eta_1 \sqrt{2}} \right) \approx \arccos(0,875) \approx 29^\circ.$$

14.15. Яркость второй поверхности в 10 раз больше.

Решение. Пусть интенсивность света, идущего от первой поверхности, равна $I^{(1)}$, а от второй $I^{(2)}$.

Так как свет естественный, интенсивность света, прошедшего через первый николь, равна:

$$I_1 = \left(1 - \frac{p}{100} \right) \cdot \frac{1}{2} I^{(2)} = 0,9 \cdot \frac{1}{2} I^{(2)} = 0,45 I^{(2)}.$$

Через второй николь пройдет свет с интенсивностью

$$I_2 = I_1 \left(1 - \frac{p}{100} \right) \cos^2 \varphi = 0,45 \cdot 0,9 \cdot \cos^2 \varphi \cdot I^{(2)} \approx 0,10 \cdot I^{(2)}.$$

По условию задачи поверхности кажутся одинаково освещенными, т.е. $I_2 = I^{(1)}$, откуда получаем: $I^{(2)} = 10 I^{(1)}$.

$$\mathbf{14.16.} \quad \frac{I_{\text{лин}}}{I_{\text{круг}}} = \frac{\eta^2 - 1}{2} = 1,5; \theta \approx 54^\circ.$$

$$\mathbf{14.17.} \quad \frac{I_{\text{круг}}}{I_{\text{лин}}} = \frac{\sin^2 \alpha - p/100}{p/200} = 0,5.$$

14.18. Конец вектора E будет двигаться в плоскости XOY по эллипсу, уравнение которого имеет вид:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 2 \cdot \frac{xy}{ab} \cdot \cos \varphi = \sin^2 \varphi, \text{ где } x \equiv E_{1x}, y \equiv E_{2y}.$$

Решение. Перепишем уравнения волн в виде:

$$x \equiv E_{1x} = a \cos(\omega t - kz),$$

$$y \equiv E_{2y} = b \cos(\omega t - kz + \varphi)$$

и далее преобразуем второе уравнение:

$$\frac{y}{b} = \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi.$$

После подстановки в него из первого уравнения $\cos \omega t = \frac{x}{a}$, получаем:

$$\sin \omega t \sin \varphi = \frac{x}{a} \cos \varphi - \frac{y}{b}.$$

Возведем последнее уравнение в квадрат и учтем, что

$$\sin^2 \omega t = 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2.$$

После несложных преобразований получаем:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 2 \cdot \frac{xy}{ab} \cdot \cos \varphi = \sin^2 \varphi$$

– уравнение эллипса, вписанного в прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$.

Таким образом, конец вектора E будет двигаться в плоскости XOY по эллипсу, т.е. получается в общем случае эллиптически поляризованная волна. Направление движения зависит от значения φ . Например, в момент времени $t = 0$ координаты точки равны: $x = a$ и $y = b \cos \varphi$, а проекции скорости – $\dot{x} = 0$ и $\dot{y} = -b \sin \varphi$. Следовательно, если смотреть навстречу направлению оси Z , то движение происходит по часовой стрелке, когда $0 \leq \varphi \leq \pi$, и против часовой стрелки, если $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$.

14.19. а) Волна линейно поляризована; б), в) и г) волны имеют правую эллиптическую поляризацию; д) волна линейно поляризована; е) волна имеет левую эллиптическую поляризацию; см. рис. О.14.19.

Решение. а) При $\varphi = 0$ уравнение эллипса приобретает вид:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 2 \cdot \frac{xy}{ab} \cdot \cos \varphi = 0 \rightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0 \rightarrow y = \frac{b}{a}x,$$

т.е. эллипс вырождается в отрезок прямой (*линейная поляризация*); плоскость поляризации такой волны ориентирована под углом $\alpha = \arctg(b/a)$ к оси OX (рис. О.14.19 а).

б) Если $\varphi = \pi/2$, уравнение эллипса преобразуется к виду:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Вектор $E(t)$ будет вращаться в плоскости XOY по часовой стрелке с угловой скоростью ω , а его конец будет описывать эллипс с полуосями a и b , ориентированными вдоль осей X и Y соответственно (рис. О.14.19 б). Волна является правополяризованной.

в, г) Волны с правой эллиптической поляризацией (рис. О.14.19 в, г).

д) При $\varphi = \pi$ уравнение эллипса приобретает вид:

$$y = -\frac{b}{a}x,$$

т.е. эллипс вырождается в отрезок прямой (*линейная поляризация*);

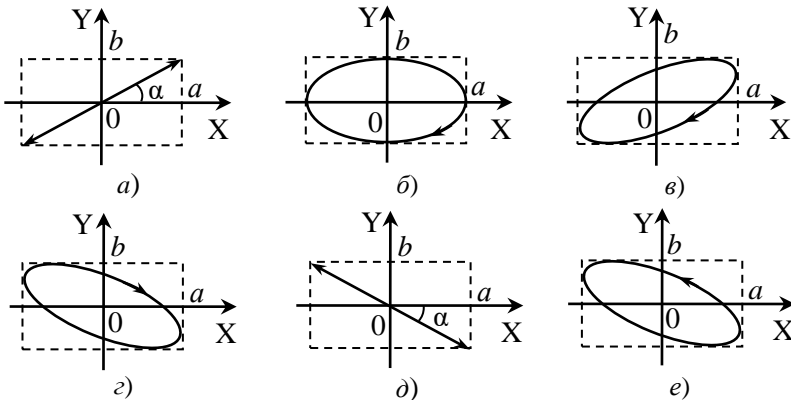


Рис. О.14.19.

плоскость поляризации такой волны ориентирована под углом $\alpha = -\arctg(b/a)$ к оси OX (рис. О.14.19 δ).

е) Волна с левой эллиптической поляризацией (конец вектора $E(t)$ движется по эллипсу против часовой стрелки) (рис. О.14.19 e).

14.20. а) Свет поляризован по левому кругу; б) свет поляризован по правому эллипсу, большая ось которого лежит в плоскости $y = x$; в) свет линейно поляризован в плоскости $y = -x$.

Решение. а). По условию задачи

$$E_y = E \sin(\omega t - kz) = E \cos\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}\right).$$

Амплитуды E_x и E_y одинаковы, а $\varphi_y - \varphi_x = -\frac{\pi}{2}$. Следовательно, свет поляризован по левому кругу.

б) Амплитуды E_x и E_y одинаковы, а $\varphi_y - \varphi_x = \frac{\pi}{4}$. Следовательно, свет поляризован по правому эллипсу, большая ось которого лежит в плоскости $y = x$.

в) Амплитуды E_x и E_y одинаковы, а $\varphi_y - \varphi_x = \pi$, свет линейно поляризован в плоскости $y = -x$.

14.21. а) $E_x = E \cos(\omega t - kz)$, $E_y = -E \sin(\omega t - kz)$;

б) $E_x = E \cos(\omega t - kz)$, $E_y = E \cos(\omega t - kz - \varphi)$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

14.22. См. рис. О.14.22; $A = \sqrt{6}a/2 \approx 1,22a$, $B = a/\sqrt{2} \approx 0,7a$; большая ось эллипса ориентирована под углом 45° к оси X .

Решение. Для определенности будем рассматривать траекторию конца вектора E в плоскости $z = 0$. Разность фаз $\varphi = -\pi/3$, эллипс поляризации "вписан" в квадрат со стороной $2a$. Можно построить эллипс по характерным точкам:

точки 1 и 2 пересечения с осью Y (рис.О.14.22):

$$y_1(\omega t_1 = 0) = a \sin(-\pi/3) = -a\sqrt{3}/2,$$

$$y_2(\omega t_2 = \pi) = a \sin(\pi - \pi/3) = a\sqrt{3}/2;$$

точки 3 и 4, соответствующие максимальному и минимальному значениям E_x :

$$E_x\left(\omega t_3 = \frac{\pi}{2}\right) = a, \quad E_y\left(\omega t_3 = \frac{\pi}{2}\right) = a \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{a}{2} > 0;$$

$$E_x\left(\omega t_4 = -\frac{\pi}{2}\right) = -a, \quad E_y\left(\omega t_4 = -\frac{\pi}{2}\right) = a \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{a}{2} < 0;$$

точки 5 и 6, соответствующие максимальному и минимальному значениям E_y :

$$E_y\left(\omega t_5 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = a, \quad E_x(\omega t_5) = a \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{a}{2} > 0;$$

$$E_y\left(\omega t_6 = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -a, \quad E_x(\omega t_6) = a \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{a}{2} < 0.$$

Поскольку при увеличении времени точки на эллипсе перемещаются против часовой стрелки, волна является *правополяризованной*. Оси эллипса ориентированы под углом 45° к осям X и Y.

Для нахождения полуосей эллипса используем уравнение

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 2 \cdot \frac{xy}{ab} \cdot \cos \varphi = \sin^2 \varphi.$$

Положив $b = a$ и $\varphi = -\pi/3$, находим:

$$x^2 + y^2 - xy = 3a^2/4.$$

В максимально удаленной от начала координат точке эллипса $x_{\max} = y_{\max}$, и уравнение эллипса принимает вид:

$$x_{\max}^2 = 3a^2/4, \quad x_{\max} = y_{\max} = \sqrt{3}a/2.$$

В минимально удаленной точке эллипса $x_{\min} = -y_{\min}$, откуда

$$3x_{\min}^2 = 3a^2/4, \quad x_{\min} = a/2.$$

Для полуосей эллипса получаем:

$$A = \sqrt{2}x_{\max} = \sqrt{6}a/2 \approx 1,22a; \quad B = \sqrt{2}x_{\min} = a/\sqrt{2} \approx 0,7a.$$

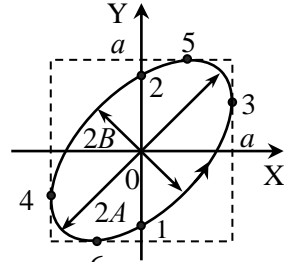


Рис. О.14.22.

14.23. Волна имеет левую эллиптическую поляризацию; оси

эллипса ориентированы вдоль осей X и Y, эллипс вытянут вдоль оси X; отношение полуосей равно 3.

$$14.24. \quad E_x = E \cos \alpha \cos (\omega t - kz - \alpha - \varphi), \\ E_y = E \sin \alpha \cos (\omega t - kz - \alpha - \varphi).$$

Решение. Если круговая поляризация правая, то

$$E_x = E \cos (\omega t - kz), \quad E_y = E \sin (\omega t - kz).$$

Тогда на выходе из поляризатора получаем:

$$E_\alpha = E \cos \alpha \cos (\omega t - kz - \varphi) + E \sin \alpha \sin (\omega t - kz - \varphi),$$

где φ – дополнительная разность фаз, приобретаемая в результате прохождения волны через николь.

Воспользовавшись формулами тригонометрии, находим:

$$E_\alpha = E \cos (\omega t - kz - \alpha - \varphi),$$

или в проекциях на координатные оси:

$$E_x = E \cos \alpha \cos (\omega t - kz - \alpha - \varphi), \quad E_y = E \sin \alpha \cos (\omega t - kz - \alpha - \varphi).$$

$$14.25. \quad \operatorname{tg} 2\theta_0 = \frac{2ab}{a^2 - b^2} \cos \varphi.$$

Решение. Запишем уравнение эллипса в полярной системе координат ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$):

$$r^2 \left[\left(\frac{\cos \theta}{a} \right)^2 + \left(\frac{\sin \theta}{b} \right)^2 - \frac{\sin 2\theta}{ab} \cos \varphi \right] = \sin^2 \varphi$$

и продифференцируем обе части по θ :

$$2r \cdot \frac{\partial r}{\partial \theta} \left[\left(\frac{\cos \theta}{a} \right)^2 + \left(\frac{\sin \theta}{b} \right)^2 - \frac{\sin 2\theta}{ab} \cos \varphi \right] + \\ + r^2 \left[- \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{a^2} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{b^2} - \frac{2 \cos 2\theta}{ab} \cos \varphi \right] = 0.$$

Направление на экстремум (максимум или минимум) находится из условия равенства нулю производной $\frac{\partial r}{\partial \theta}$:

$$- \frac{\sin 2\theta}{a^2} + \frac{\sin 2\theta}{b^2} - \frac{2 \cos 2\theta}{ab} \cos \varphi = 0,$$

откуда
$$\operatorname{tg} 2\theta_0 = \frac{2ab}{a^2 - b^2} \cos \varphi,$$

или
$$\operatorname{tg} 2\theta_0 = \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \cos \varphi, \text{ где } \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

14.26.
$$\left(\frac{B}{A}\right)^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \varphi}}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \varphi}}, \text{ где } \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Решение. Перейдем от системы координат XOY , в которой записано уравнение эллипса, к системе координат $X'OY'$, оси которой совпадают с осями эллипса поляризации (рис. О.14.26). Эта система повернута на некоторый угол θ относительно исходной.

В новых координатах уравнение эллипса имеет вид:

$$\left(\frac{x'}{A}\right)^2 + \left(\frac{y'}{B}\right)^2 = 1.$$

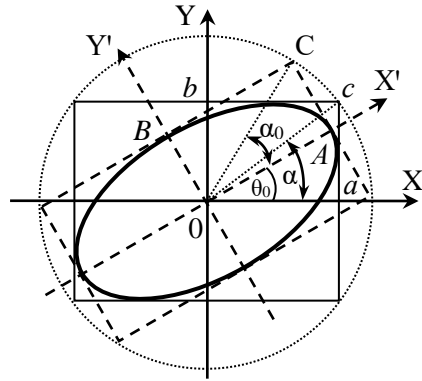


Рис. О 14.26.

Это возможно в том случае, когда проекции на оси координат системы $X'OY'$ изменяются по закону:

$$x' = a' \cos(\omega t + \varphi'), \quad y' = b' \cos(\omega t + \varphi'').$$

Новые компоненты x' , y' связаны с прежними x , y формулами:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta, \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta = a' \cos(\omega t + \varphi'), \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta = b' \cos(\omega t + \varphi''). \end{aligned}$$

Поскольку a' и b' не зависят от времени, то при $\omega t = 0$ и $\omega t = -\pi/2$ имеем:

$$\begin{aligned} a' \cos \varphi' &= a \cos \theta + b \sin \theta \cos \varphi, & a' \sin \varphi' &= b \sin \theta \sin \varphi, \\ b' \cos \varphi'' &= -a \sin \theta + b \cos \theta \cos \varphi, & b' \sin \varphi'' &= b \cos \theta \sin \varphi. \end{aligned}$$

Из полученных формул следует, что

$$a'^2 = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta + ab \sin 2\theta \cos \varphi,$$

$$b'^2 = a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta - ab \sin 2\theta \cos \varphi,$$

т.е.

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2,$$

$$a'^2 - b'^2 = (a^2 - b^2) \cos 2\theta + 2ab \sin 2\theta \cos \varphi.$$

Кроме того, из записанных уравнений также вытекает, что

$$a'b' \sin(\varphi' - \varphi'') = -ab \sin \varphi.$$

Если $\theta = \theta_0$, то $\varphi' - \varphi'' = \pm \frac{\pi}{2}$, следовательно:

$$AB = ab |\sin \varphi|.$$

Так как $B = C \sin \alpha_0$, $A = C \cos \alpha_0$, $b = c \sin \alpha$, $a = c \cos \alpha$

и

$$C^2 = A^2 + B^2 = a^2 + b^2 = c^2 \propto I_0, \text{ т.е. } C = c,$$

получаем:

$$\sin 2\alpha_0 = \sin 2\alpha |\sin \varphi|.$$

Отношение длин главных полуосей эллипса может быть найдено по формуле (см. рис. О.14.26):

$$\left(\frac{B}{A}\right)^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha_0 = \frac{1 - \cos 2\alpha_0}{1 + \cos 2\alpha_0} = \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \varphi}}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \varphi}}.$$

$$14.27. \quad x^2 + 4y^2 - 2xy = 3a^2; \quad \theta_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2}{3};$$

$$\frac{B}{A} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{13}}{1 + \sqrt{13}}} \approx 0,4.$$

Указание. Использовать формулы, полученные в задачах 14.25 и 14.26.

$$14.28. \quad d_{\min} = \frac{\lambda}{4(n_e - n_o)} = 0,014 \text{ мм}.$$

Решение. Свет, поляризованный по кругу, описывается уравнением:

$$E_x^2 + E_y^2 = a^2.$$

Эллипс поляризации становится окружностью, если $a = b$ и $\sin \varphi = \pm 1$, т.е.

$$\varphi = (2m + 1) \cdot \frac{\pi}{2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Поскольку для двоякопреломляющего кристалла

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d(n_e - n_o),$$

получаем:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot d(n_e - n_o) = (2m + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad \rightarrow \quad d = \frac{(2m + 1)\lambda}{4(n_e - n_o)}.$$

Минимальная толщина пластинки равна:

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4(n_e - n_o)} = 0,014 \text{ мм}.$$

14.29. См. рис. О.14.29; интенсивность не изменится.

Решение. Падающую волну можно представить как две линейно поляризованные вдоль главных направлений (оси OX и OY) волны с амплитудами

$$a = c \cdot \cos \alpha; \quad b = c \cdot \sin \alpha,$$

где c – амплитуда падающей волны.

Разность фаз между этими волнами на входе в пластинку равна нулю, т.к. падающая волна линейно поляризована; после прохождения пластинки она становится равной $\pm \pi/2$ (а) или $\pm \pi$ (б).

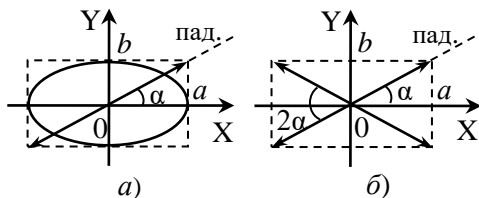


Рис. О.14.29.

В случае а) волна станет эллиптически поляризованной, оси эллипса, равные a и b , будут ориентированы вдоль осей OX и OY (рис.О.14.29 а), направление вращения вектора \mathbf{E} в волне зависит от знака разности фаз.

В случае б) волна останется линейно поляризованной, но направление поляризации изменится на угол 2α (или на $\pi - 2\alpha$) (рис.О.14.29 б).

В обоих случаях интенсивность света не изменится:

$$I \sim (a^2 + b^2) = c^2 \sim I_0.$$

$$14.30. \alpha_1 = -\frac{\pi}{4} + \frac{\delta}{2} = -35^\circ, \alpha_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\delta}{2} = 55^\circ.$$

Решение. После первого николя N_1 свет линейно поляризован вдоль его оси (рис. О.14.30), и угол между оптической осью пластинки OX и вектором E прошедшего света равен α . После прохождения пластинки $\lambda/2$ волна останется линейно поляризованной, но направление поляризации изменится на угол 2α (или на $\pi - 2\alpha$) (на рисунке $E_{\lambda/2}$ — направление плоскости поляризации прошедшей через пластинку волны) (см. задачу 14.29).

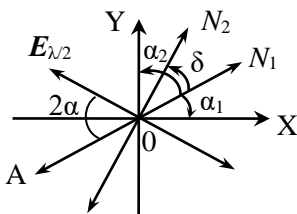


Рис. О.14.30.

Свет не пройдет через второй николю N_2 , если вектор $E_{\lambda/2}$ перпендикулярен плоскости пропускания этого николя: $0E_{\lambda/2} \perp 0N_2$. Следовательно, оптическая ось пластинки OX должна

быть ориентирована по биссектрисе $\angle E_{\lambda/2} 0A = \frac{\pi}{2} - \delta$ или

$\angle E_{\lambda/2} 0N_1 = \frac{\pi}{2} + \delta$ (ось OY), а для искомого угла α получаем (счита-

ем углы положительными, если они отсчитываются против часовой стрелки от направления оси первого николя N_1):

$$\alpha_1 = -\frac{\pi}{4} + \frac{\delta}{2} = -35^\circ, \alpha_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\delta}{2} = 55^\circ.$$

$$14.31. d = \frac{\lambda}{4(n_1 - n_2)} = 0,027 \text{ мм}.$$

14.32. Свет будет поляризован по левому кругу.

$$14.33. \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = \operatorname{ctg}^2 \alpha = 3.$$

$$14.34. \frac{I_{\text{круг}}}{I_{\text{ест}}} = \frac{\eta - 1}{2} = 2.$$

Решение. После пластинки в четверть волны получается смесь естественного света с интенсивностью $I_{\text{ест}}$ и линейно поляризованного света с интенсивностью $I_{\text{лин}} = I_{\text{круг}}$. Максимальная интенсивность света, прошедшего через анализатор, равна

$$I_{\text{max}} = I_{\text{лин}} + \frac{1}{2} I_{\text{ест}} = I_{\text{круг}} + \frac{1}{2} I_{\text{ест}},$$

а минимальная — $I_{\text{мин}} = I_{\text{ест}} / 2$.

Таким образом,

$$\frac{I_{\text{max}}}{I_{\text{мин}}} = \eta = \frac{I_{\text{круг}} + I_{\text{ест}} / 2}{I_{\text{ест}} / 2} = 2 \frac{I_{\text{круг}}}{I_{\text{ест}}} + 1,$$

откуда
$$\frac{I_{\text{круг}}}{I_{\text{ест}}} = \frac{\eta - 1}{2} = 2.$$

14.35. $\lambda_1 = \frac{4d\Delta n}{2m_1 + 1} = 430 \text{ нм}$, где $m_1 = 2$.

Указание. Для пластинки в четверть волны должно выполняться соотношение: $d\Delta n = \lambda / 4 + m\lambda / 2 = \lambda(m / 2 + 1 / 4)$, где m — целое число.

14.36. $I = I_0 \left[\cos^2(\alpha - \beta) - \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2} \right]$.

Решение. На рис. О.14.35 плоскость чертежа перпендикулярна падающему пучку света. Пусть оптическая ось кристалла ориентирована вдоль оси X, плоскость поляризации падающего пучка (обозначена П0), задаваемая поляризатором, образует с осью X угол α , а плоскость пропускания анализатора (обозначена А0) — угол β .

После прохождения поляризатора свет становится линейно поляризованным в направлении П0. Обозначим интенсивность волны после поляризатора I_0 , ее амплитуду — c , тогда соответствующие амплитуды необыкновенной (ориентирована вдоль оси X) и обыкновенной (ориентирована вдоль оси Y) волн будут соответственно $a = c \cdot \cos \alpha$ и $b = c \cdot \sin \alpha$.

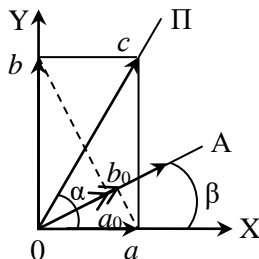


Рис. О.14.35.

После прохождения поляризатора свет становится линейно поляризованным в направлении П0. Обозначим интенсивность волны после поляризатора I_0 , ее амплитуду — c , тогда соответствующие амплитуды необыкновенной (ориентирована вдоль оси X) и обыкновенной (ориентирована вдоль оси Y) волн будут соответственно $a = c \cdot \cos \alpha$ и $b = c \cdot \sin \alpha$.

После прохождения пластины амплитуды не изменятся, по-явится лишь разность фаз δ . Анализатор пропустит лишь слагающие с колебаниями, направленными по А0, в результате их амплитуды будут равны

$$a_0 = c \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta, \quad b_0 = c \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

Эти две волны будут интерферировать, так как плоскости их поляризации совпадают. В итоге для интенсивности результирующей волны можно записать:

$$I = a_0^2 + b_0^2 + 2a_0 \cdot b_0 \cdot \cos \delta = c^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta + c^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta + 2c^2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \delta.$$

Используя формулу $\cos \delta = 1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}$, для интенсивности прошедшего света получим:

$$I = I_0 \left[(\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta)^2 - 4 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2} \right] = I_0 \left[\cos^2 (\alpha - \beta) - \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2} \right].$$

Если $\alpha = \beta$ (поляризатор и анализатор параллельны), то

$$I = I_0 \cdot \left(1 - \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2} \right).$$

Если $\alpha - \beta = \pi/2$ (поляризатор и анализатор скрещены), то

$$I = I_0 \cdot \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}.$$

14.37. $I = \frac{I_0}{2} \cdot \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2} = 0,19 I_0$, где $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d(n_e - n_o)$.

14.38. $I = I_0 / 8$.

14.39. $d_{\min} = \frac{\lambda}{4(n_o - n_e)} = 0,03 \text{ мм}$.

Указание. Интенсивность света, прошедшего через систему, не будет меняться, если после кристаллической пластинки свет будет иметь круговую поляризацию.

$$14.40. \delta = 2 \arccos 1/\eta = 120^\circ.$$

Указание. Максимально возможная интенсивность I_0 наблюдается, если любое из главных направлений пластинки совпадает с направлением пропускания поляризатора и анализатора.

$$14.41. \lambda_1 = 670 \text{ нм}; \lambda_2 = 500 \text{ нм}; \lambda_3 = 400 \text{ нм}.$$

Указание. Излучение не будет проходить через систему, если разность хода обыкновенной и необыкновенной волн кратна целому числу длин волн.

$$14.42. \Delta m = \frac{d(n_{eF} - n_{oF})}{\lambda_F} - \frac{d(n_{eD} - n_{oD})}{\lambda_D} + 1 = 13.$$

Решение. Для скрещенных поляроидов при $\alpha = 45^\circ$ интенсивность прошедшего света равна:

$$I = I_0 \cdot \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2} = I_0 \sin^2 \frac{\delta}{2}.$$

Темная полоса получается, когда $\delta = 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

$$\text{т.е.} \quad \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d\Delta n = 2\pi m, \quad \rightarrow \quad d\Delta n = m\lambda.$$

Для длин волн λ_D и λ_F порядки темных полос составляют:

$$m_D = \frac{d(n_{eD} - n_{oD})}{\lambda_D} = 45, \quad m_F = \frac{d(n_{eF} - n_{oF})}{\lambda_F} = 57.$$

Для света с длинами волн между λ_D и λ_F темные полосы будут наблюдаться при условии $d\Delta n = m\lambda$. Общее число темных полос равно:

$$\Delta m = m_D - m_F + 1 = 13.$$

$$14.43. k = \frac{d(n_e - n_o) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1 \lambda_2} \approx 10.$$

$$14.44. \Delta n = \frac{\lambda}{\alpha \Delta x} = 0,009.$$

$$14.45. d_1 - d_2 = \frac{m\lambda}{2(n_e - n_o)} \quad (\text{см. рис. О.14.45}).$$

Решение. Пусть свет падает на компенсатор снизу нормально к его граням (рис. О.14.45). Обозначим толщины клиньев в некотором месте компенсатора d_1 и d_2 . Так как $n_e > n_o$, в первом клине обыкновенный луч будет опережать по фазе необыкновенный на величину

$$\delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (n_e - n_o) d_1.$$

Во втором клине обыкновенный луч станет необыкновенным и будет отставать по фазе от второго луча на величину

$$\delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (n_e - n_o) d_2.$$

Фазовый сдвиг между двумя лучами после компенсатора будет равен

$$\delta = \delta_1 - \delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (n_e - n_o) \cdot (d_1 - d_2).$$

В тех местах компенсатора, где эта разность фаз будет равна $\delta = m\pi$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), свет выйдет линейно поляризованным с определенным направлением вектора \mathbf{E} . Если ось анализатора будет перпендикулярна этому направлению, то свет через анализатор не пройдет, и будет наблюдаться система темных полос. Таким образом, темные полосы наблюдаются в тех местах, где

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot (n_e - n_o) \cdot (d_1 - d_2) = m\pi \rightarrow d_1 - d_2 = \frac{m\lambda}{2(n_e - n_o)}.$$

14.46. 5,97 и 28,57.

Указание. См задачу 14.45.

14.47. $d = 1,5$ мм.

14.48. Интенсивность будет изменяться в пределах от нуля до $I_0/4$, четыре раза за один оборот достигая минимума и четыре раза максимума.

14.49. После первого поляризатора свет становится линейно поляризованным. В кристаллической пластинке он распадается на две волны, поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях и распространяющиеся с различными скоростями. В результа-

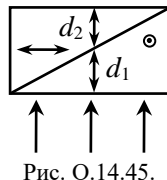


Рис. О.14.45.

те после пластинки между волнами возникнет разность фаз $\delta = k \cdot \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta$, от которой зависит состояние поляризации результирующей волны.

Поэтому в случае некогерентного источника для каждой длины волны будет свой эллипс поляризации; в частности, для некоторых длин волн свет может остаться и линейно поляризованным. Доля света, проходящая через анализатор, зависит от параметров эллипса и его ориентации относительно плоскости пропускания анализатора. Поэтому если падающий свет белый, то различные монохроматические компоненты его в различной степени будут пропущены системой, с чем и связана окраска пластинки.

14.50. Нет.

14.51. 1) Когда главные направления пластинки совпадают с главными плоскостями николей; 2) когда пластинка вырезана перпендикулярно к оптической оси; 3) когда разность хода, сообщаемая пластинкой, равна четному числу полуволн.

14.52. $I = I_0/2$; свет будет поляризован по правому кругу.

Решение. После поляризатора свет становится линейно поляризованным, плоскость поляризации составляет угол $\alpha_1 = 30^\circ$ с осью X. Интенсивность света станет $I_1 = I_0/2$.

Пластинка $\lambda/2$ поворачивает плоскость поляризации на угол $\beta_1 = 2(\alpha_2 - \alpha_1) = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$, свет остается линейно поляризованным, плоскость поляризации расположится под углом $\alpha_4 = \alpha_1 + \beta_1 = 90^\circ$ к оси X, т.е. вектор \mathbf{E} будет направлен по оси Y. Интенсивность света не изменится: $I_2 = I_1$.

Пластинка $\lambda/4$, расположенная под углом $\alpha_3 = 45^\circ$ к направлению вектора \mathbf{E} , преобразует линейно поляризованный свет в свет с правой круговой поляризацией. Интенсивность света после пластинки не изменится: $I_3 = I_2 = I_0/2$.

14.53. $I = I_0/2$; свет будет поляризован по левому кругу.

14.54. $I = 3I_0/8$; свет будет линейно поляризован, плоскость поляризации составляет угол $\beta = 45^\circ$ с осью X.

$$14.55. d = \frac{(2m + 1)\lambda}{n - 1} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots); I_{\max} = 5I_0.$$

Решение. Наличие поляроидного диска вносит дополнительную разность фаз для той части фронта волны, которая находится в пределах первой зоны Френеля. Воспользуемся спиралью Френеля (рис. О.14.55 а). Вектор \mathbf{OO}_1 характеризует вклад в комплексную амплитуду поля от первой зоны Френеля, вектор $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_\infty$ — от второй и всех последующих зон. Видно, что для достижения максимальной интенсивности вектор \mathbf{OO}_1 следует повернуть на угол π против часовой стрелки. Поэтому поляроидный диск должен внести разность фаз

$$\delta = \pi + 2\pi m = \pi(2m + 1).$$

При этом дополнительная разность хода составит:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d(n - 1) = \pi(2m + 1),$$

откуда
$$d = \frac{(2m + 1)\lambda}{n - 1} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Определим интенсивность света в т. Р. Свет, поляризованный по кругу, можно представить как суперпозицию двух линейно поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях волн с разностью фаз $\pi/2$, каждая с интенсивностью $I_0/2$. После прохождения диска фаза волны, прошедшей поляририд, изменится на π и исчезнет одна из её составляющих, перпендикулярная плоскости пропускания поляририда (рис. О.14.55 б).

Поскольку $I \propto E_0^2$, для интенсивности получаем:

$$I_{\max} = \frac{I_0}{2} \cdot (3^2 + 1^2) = 5I_0.$$

14.56. $I = 2I_0$; свет поляризован линейно.

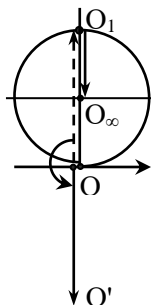


Рис. О.14.50 а.

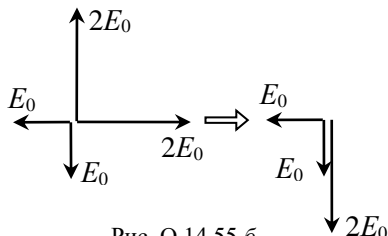


Рис. О.14.55 б.

$$14.57. I = 2I_0.$$

$$14.58. I = 5I_0.$$

$$14.59. I = 8I_0.$$

$$14.60. \Delta n = \frac{\alpha \lambda_0}{\pi} \approx 7,2 \cdot 10^{-5}.$$

Решение. Линейно поляризованную волну можно представить как сумму двух компонент, поляризованных по левому и правому кругам. Вращение плоскости поляризации в анизотропном кристалле объясняется различием в скоростях распространения по-разному поляризованных волн. Проекция вектора \mathbf{E} на оси координат можно тогда представить в виде суммы проекций векторов \mathbf{E} этих волн:

$$E_x = E_{x1} + E_{x2} = \frac{E_0}{2} \cos \varphi_1 + \frac{E_0}{2} \cos \varphi_2;$$

$$E_y = E_{y1} + E_{y2} = \frac{E_0}{2} \sin \varphi_1 - \frac{E_0}{2} \sin \varphi_2,$$

$$\text{где} \quad \varphi_1 = \omega t + \frac{\omega}{v_1} h, \quad \varphi_2 = \omega t + \frac{\omega}{v_2} h,$$

v_1 и v_2 – скорости распространения света с левой и правой круговой поляризацией, h – толщина пластинки.

Используя тригонометрические формулы, получаем:

$$E_x = E_0 \cos \left(\frac{\omega h}{2c} \Delta n \right) \cos \left[\omega t + \frac{\omega h}{2} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right) \right];$$

$$E_y = E_0 \sin \left(\frac{\omega h}{2c} \Delta n \right) \cos \left[\omega t + \frac{\omega h}{2} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right) \right],$$

$$\text{где} \quad \Delta n = n_1 - n_2 = \frac{c}{v_1} - \frac{c}{v_2}.$$

Отношение E_y/E_x дает значение тангенса угла поворота ψ плоскости поляризации:

$$\frac{E_y}{E_x} = \operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \left(\frac{\omega h}{2c} \Delta n \right), \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\omega h}{2c} \Delta n = \frac{\pi \Delta n}{\lambda_0} h = \alpha h,$$

где λ_0 – длина волны света в вакууме.

Отсюда получаем:

$$\Delta n = \frac{\alpha \lambda_0}{\pi} \approx 7,2 \cdot 10^{-5}.$$

14.61. $\Delta n = \frac{\Delta \varphi \lambda}{\pi h} \approx 1,1 \cdot 10^{-8}.$

§15. Тепловое излучение

$$15.1. T = \frac{b}{\lambda_{\max}} = 10^4 \text{ К} .$$

15.2. Увеличилась в 2 раза.

$$15.3. T_2 = \frac{bT_1}{b + T_1\Delta\lambda} \approx 1750 \text{ К} .$$

$$15.4. M_{\odot} = \frac{4C}{\theta^2} = 64,7 \text{ МВт/м}^2 ; T = \left(\frac{4C}{\theta^2} \right)^{1/4} \approx 5800 \text{ К} ;$$

$$\lambda_{\max} = b/T = 500 \text{ нм} .$$

Решение. Пусть радиус Солнца равен r_c , а расстояние от Солнца до Земли l_3 . Тогда $\frac{r_c}{l_3} \approx \text{tg} \frac{\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2}$.

Если энергетическая светимость Солнца M_{\odot} , то полная энергия, излучаемая Солнцем в единицу времени, равна:

$$W = M_{\odot} \cdot 4\pi r_c^2 .$$

Количество энергии, получаемое сферой радиусом l_3 за единицу времени, равно количеству энергии, излучаемой за единицу времени Солнцем:

$$W = M_{\odot} \cdot 4\pi r_c^2 = C \cdot 4\pi l_3^2 ,$$

откуда определяем:

$$M_{\odot} = C \left(\frac{l_3}{r_c} \right)^2 = \frac{C}{(\theta/2)^2} = \frac{4C}{\theta^2} = 64,7 \text{ МВт/м}^2 .$$

По закону Стефана-Больцмана находим температуру верхних слоев Солнца:

$$T = \left(\frac{M_{\odot}}{\sigma} \right)^{1/4} = \left(\frac{4C}{\theta^2} \right)^{1/4} \approx 5800 \text{ К} .$$

По закону смещения Вина получаем:

$$\lambda_{\max} = b/T = 500 \text{ нм} .$$

$$15.5. C = \frac{\sigma T^4 r^2}{R^2} \approx 1,5 \text{ кВт/м}^2.$$

$$15.6. T = \left(\frac{P}{4\pi r^2 \sigma} \right)^{1/4} \approx 544 \text{ К}.$$

$$15.7. T = (I_c / \sigma)^{1/4} \approx 365 \text{ К} = 92^\circ\text{С}.$$

Решение. Считаем, что нагревание тела ограничивает его собственное тепловое излучение. В условиях теплового баланса для малого элемента поверхности тела площадью dS мощности излучения падающего на этот участок солнечного света $dP_{\text{пад}}$ и испускаемого им собственного теплового излучения $dP_{\text{изл}}$ равны:

$$dP_{\text{пад}} = dP_{\text{изл}},$$

причем $dP_{\text{пад}} = I_c dS$, где I_c – интенсивность солнечного света.

Используя закон Стефана-Больцмана

$$M_{\text{э}} = \frac{dP_{\text{изл}}}{dS} = \sigma T^4, \text{ где } \sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 c^2 \hbar^3} \cong 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4},$$

получаем: $\sigma T^4 = I_c$, откуда $T = (I_c / \sigma)^{1/4} \approx 365 \text{ К} = 92^\circ\text{С}$.

Заметим, что путем концентрации солнечного света с помощью линз и зеркал можно значительно увеличить температуру нагрева тела.

$$15.8. T_3 = T_0 \sqrt{\frac{r_c}{2R}} \approx 266 \text{ К}.$$

Решение. Поток энергии, излучаемый поверхностью Солнца:

$$W = M_{\text{э}} \cdot 4\pi r_c^2 = \sigma T_0^4 \cdot \pi r_c^2.$$

Найдём часть этого потока энергии, которая поглощается Землёй. Плотность потока энергии излучения на расстоянии R от центра Солнца равна (см. решение задачи 15.4):

$$I = \frac{\sigma T_0^4 r_c^2}{R^2}.$$

Выделим на освещаемой поверхности Земли кольцо малой шириной $dr = r_3 d\theta$, которое видно из центра Земли под углом θ (рис. О.15.8). Площадь этого кольца равна $dS = 2\pi r_3^2 \sin \theta d\theta$. Поток световой энергии, поглощаемый этим кольцом, равен:

$$dW = IdS \cos \theta = I \cdot 2\pi r_3^2 \sin \theta \cos \theta d\theta .$$

Световой поток, поглощаемый всей полусферой земной поверхности, составляет:

$$W = Ir_3^2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = I\pi r_3^2 = \frac{\sigma T_0^4 r_c^2 \pi r_3^2}{R^2} .$$

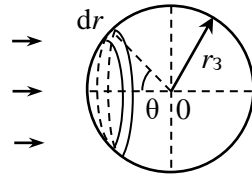


Рис. О.15.8.

Так как Земля находится в состоянии теплового равновесия, то она излучает такой же поток энергии, который поглощает. Пусть $M_{з3}$ – энергетическая светимость Земли, тогда излучаемый поток энергии равен:

$$W = M_{з3} \cdot 4\pi r_3^2 .$$

Считая Землю абсолютно чёрным телом, по закону Стефана-Больцмана получим: $M_{з3} = \sigma T_3^4$. Приравнявая выражения для W , находим:

$$\frac{\sigma T_0^4 r_c^2}{R^2} \cdot \pi r_3^2 = \sigma T_3^4 \cdot 4\pi r_3^2 ,$$

откуда получаем температуру Земли:

$$T_3 = T_0 \sqrt{\frac{r_c}{2R}} \approx 266 \text{ К} .$$

15.9. $T = \left(\frac{P}{\sigma S} \right)^{1/4} \approx 1150 \text{ К} .$

15.10. $P = \sigma S \left(\frac{b}{\lambda_{\max}} \right)^4 \approx 3,1 \cdot 10^7 \text{ Вт} .$

$$15.11. S = \frac{P}{\sigma} \cdot \left(\frac{\lambda_{\max}}{b} \right)^4 \approx 3,2 \text{ М}^2.$$

$$15.12. \frac{M_{\text{э пов}}}{M_{\text{э абс. черн. тела}}} = \frac{I}{\sigma T^4} \approx 0,5.$$

$$15.13. \text{Увеличилась в } (\lambda_{\max 1} / \lambda_{\max 2})^4 \approx 2,07 \text{ раз.}$$

$$15.14. T_x = T / \sqrt[4]{2}.$$

Указание. В стационарных условиях мощность теплового излучения внутренней плоскости равна мощности поглощаемого ей теплового излучения внешних плоскостей. Для вычисления температур плоскостей использовать закон Стефана-Больцмана.

$$15.15. T_x = T \sqrt[4]{17/2} \text{ (см. Указание к решению задачи 15.14).}$$

$$15.16. \text{а) } u(\omega, T) = \frac{kT\omega^2}{\pi^2 c^3}; \text{ б) } u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right).$$

Решение. а) При малых частотах (высоких температурах), когда $\hbar\omega \ll kT$, экспоненту в знаменателе формулы Планка

$$u(\omega, T) = \frac{1}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\hbar\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

можно разложить в ряд:

$$\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{kT},$$

откуда получаем формулу Рэлея-Джинса:

$$u(\omega, T) = \frac{kT\omega^2}{\pi^2 c^3}.$$

б) При больших частотах (низких температурах), когда $\hbar\omega \gg kT$, можно пренебречь единицей в знаменателе формулы Планка. В результате получаем формулу Вина:

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \exp\left(-\frac{\hbar \omega}{kT}\right).$$

$$15.17. \sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 c^2 \hbar^3} \cong 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4}.$$

Решение. Исходя из определения энергетической светимости

$$M_{\text{э}} = \int_0^{\infty} \varepsilon(\omega, T) d\omega,$$

для абсолютно черного тела с учетом связи его излучательной способности $\rho(\omega, T)$ со спектральной плотностью равновесного теплового излучения $u(\omega, T)$: $\rho(\omega, T) = \frac{c}{4} u(\omega, T)$, получаем:

$$M_{\text{э}} = \frac{c}{4} \int_0^{\infty} u(\omega, T) d\omega.$$

Используя формулу Планка $u(\omega, T) = \frac{1}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\hbar \omega^3}{e^{\hbar \omega / kT} - 1}$,

находим:

$$M_{\text{э}} = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \int_0^{\infty} \frac{\omega^3 d\omega}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1}.$$

Введем безразмерную переменную $x = \frac{\hbar \omega}{kT}$. Делая замену

$$\omega = \frac{kTx}{\hbar}, \quad d\omega = \frac{kT}{\hbar} dx, \quad \text{получаем закон Стефана–Больцмана:}$$

$$M_{\text{э}} = T^4 \cdot \frac{k^4}{4\pi^2 c^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \sigma T^4.$$

Используя значение интеграла $\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$, определяем по-

стоянную σ :

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 c^2 \hbar^3} \cong 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4}.$$

$$15.18. u(\nu, T) = \frac{16\pi^2}{c^3} \cdot \frac{\hbar \nu^3}{e^{2\pi\hbar\nu/kT} - 1}.$$

$$15.19. u(\lambda, T) = \frac{16\pi^2 \hbar c}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}\right) - 1},$$

$$\rho(\lambda, T) = \frac{4\pi^2 \hbar c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}\right) - 1}.$$

Решение. Учитывая однозначную связь круговой частоты ω и длины волны λ : $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$, можно записать для мощности излучения dW :

$$dW = u(\omega, T) |d\omega| = u(\lambda, T) |d\lambda|,$$

откуда следует, что

$$u(\lambda, T) = u(\omega, T) \left| \frac{d\omega}{d\lambda} \right|.$$

Подставляя $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ и $\left| \frac{d\omega}{d\lambda} \right| = \frac{2\pi c}{\lambda^2}$ в формулу Планка для $u(\omega, T)$, получаем:

$$u(\lambda, T) = \frac{16\pi^2 \hbar c}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}\right) - 1}.$$

Используя связь $\rho(\lambda, T) = \frac{c}{4} u(\lambda, T)$, для излучательной способности абсолютно черного тела в зависимости от длины волны λ находим:

$$\rho(\lambda, T) = \frac{4\pi^2 \hbar c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}\right) - 1}.$$

15.20. $T\lambda_{\max} = b$, где $b = \frac{hc}{4,965k} \cong 0,0029$ м·К.

Решение. Используем формулу для излучательной способности абсолютно черного тела в зависимости от длины волны λ (см. задачу 15.19):

$$\rho(\lambda, T) = \frac{4\pi^2 \hbar c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}\right) - 1}.$$

Продифференцируем $\rho(\lambda, T)$ по λ и приравняем нулю производную:

$$\frac{d\rho(\lambda, T)}{d\lambda} = \frac{14\pi^2 \hbar c^2}{\lambda^6} \cdot \frac{-5 \exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{kT\lambda}\right) + 5 + \frac{2\pi\hbar c}{kT\lambda} \exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{kT\lambda}\right)}{\left[\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{kT\lambda}\right) - 1\right]^2} = 0.$$

Введя безразмерную переменную $y = \frac{2\pi\hbar c}{kT\lambda}$, приходим к уравнению:

$$5 - y = 5e^{-y}.$$

Корень этого уравнения $y = 4,965$ позволяет получить закон смещения Вина:

$$T\lambda_{\max} = b,$$

где $b = \frac{hc}{4,965k} \cong 0,0029$ м·К – постоянная Вина.

15.21. $u(\lambda, T) \sim T^5$.

Указание. Использовать формулу для $u(\lambda, T)$, полученную в задаче 15.19, и закон смещения Вина.

$$15.22. \quad \Delta P = \frac{4\pi^2 \hbar c^2 T^5 \Delta\lambda}{b^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{kb}\right) - 1} = 3100 \text{ Вт/м}^2, \quad \text{где}$$

b – постоянная в законе смещения Вина.