О.Н. Васильева, А.М. Салецкий

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА. СБОРНИК ЗАДАЧ

Рекомендовано Ученым советом физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки ВПО 011200 – «Физика»

Москва
Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
2018

УДК 536
ББК 22.36

О.Н. Васильева, А.М. Салецкий. **Молекулярная физика и термодинамика. Сборник задач** / Учебное пособие. — М.: Физический факультет МГУ, 2018. 400 с.
ISBN 978-5-8279-0148-8

Учебное пособие написано на основе многолетнего опыта проведения занятий по общей физике на физическом факультете МГУ и является составной частью серии учебно-методических разработок кафедры общей физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Учебное пособие, является заключительной третьей частью модуля «Семинарские занятия» серии «Университетский курс общей физики» (первая часть – «Разработка семинарских занятий» , вторая – «Методика решения задач»). В пособии рассматриваются в первую очередь наиболее характерные и типичные задачи. Сборник содержит около 750 задач по разделу «Молекулярная физика и термодинамика» курса общей физики.

Содержание «Сборника задач» разделено на 15 тем с максимальной привязкой к действующему тематическому плану семинаров по молекулярной физике и термодинамике. Каждой теме предшествуют краткие теоретические сведения, в конце сборника приведены справочные таблицы.

Настоящее пособие предназначено для студентов высших учебных заведений и имеет целью помочь им овладеть основными методами и приобрести навыки решения задач молекулярной физики и термодинамики.

Рецензенты: д. ф.-м. н., профессор В.А. Макаров,
д. ф.-м. н., профессор А.В. Уваров

ISBN 978-5-8279-0148-8

© Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2018 г.
© Коллектив авторов, 2018 г.

УНИВЕРСИТЕТСКИЙ КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ
(Предисловие редактора инновационного учебно-методического комплекса)

В настоящее время физика все более глубоко проникает во все области современной науки и техники, появляются ее новые отрасли. В связи с этим возникает проблема подготовки квалифицированных кадров ученых-физиков. Существенную роль в такой подготовке играет преподавание общего курса физики. Для решения этой проблемы на физическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова создан инновационный учебно-методический комплекс (ИУМК) «Университетский курс общей физики», обеспечивающий организационную и содержательную целостность системы подготовки, методов и средств обучения общей физике.

ИУМК «Университетский курс общей физики» создан на основе многолетнего опыта преподавания физики студентам физического факультета Московского университета. Курс охватывает все разделы общей физики. Отличительной особенностью данного курса является то, что в нем в методическом отношении осуществлено единство основных форм обучения физике: лекции, лабораторные работы и семинары. В системе университетского образования теоретический материал излагается в основном в лекционных курсах, а умение решать задачи отрабатывается на семинарских занятиях. Развитие навыков эксперимента и анализа его результатов происходит в процессе занятий в общем физическом практикуме. В связи с этим, каждый раздел курса состоит из шести пособий: «Лекции», «Лекционный эксперимент», «Лабораторный практикум», «Разработка семинарских занятий», «Методика решения задач» и «Сборник задач».

Каждая глава пособия «Лекции» содержит материал базового уровня, соответствующего программе курса, и отражает современные тенденции и технологии физического образования. Цель авторов данного курса – представить общую физику в виде, используемом активно работающими в науке физиками.

Лекции по каждой теме сопровождаются демонстрацией основных физических экспериментов, описание которых представлено в пособии «Лекционный эксперимент». Большая часть описанных экспериментов разработана на кафедре общей физики физического факультета им. М.В. Ломоносова. В тексте пособия имеется

также ряд ссылок на авторские свидетельства на изобретения в области лекционных экспериментов, полученные сотрудниками кафедры. Описание классических опытов и экспериментальных установок, представленное в пособии «Лекционный эксперимент», увеличивает ценность и привлекательность курса.

Для установления единого уровня сложности задач и широты охвата материала на семинарах служит пособие «Разработка семинарских занятий», предназначенное для преподавателя. В данном пособии описаны основные принципы проведения семинара. Рассматривается порядок подачи учебного материала, включающий проверку теоретической подготовки студента, обсуждение метода решения задачи, анализ физического смысла результата, разбор характерных ошибок.

Все формы занятий предполагают значительную самостоятельную внеаудиторную работу студентов. Пособием, позволяющим самостоятельно развивать умение решать физические задачи, является «Методика решения задач». Весь материал пособия разбит на главы. Разбор задач всех глав проводится по единой схеме, причем каждую главу можно прорабатывать независимо от других. Пособие содержит также задачи с решениями повышенной сложности для студентов, желающих более глубоко освоить курс общей физики. Для самостоятельной работы студентов предназначен «Сборник задач», в котором представлены наиболее характерные и типичные задачи.

Неотъемлемой частью курса общей физики служит лабораторный практикум. Материалы пособия «Лабораторный практикум» достаточны для самостоятельной подготовки к выполнению работ. В связи с этим в пособии имеется как общее теоретическое введение, так и более подробное изложение теории к каждой лабораторной работе. Кроме того, для каждой работы сформулированы цель и идея эксперимента, дано описание установки и подробное изложение последовательности проведения эксперимента и обработки результатов. Представленные в пособии лабораторные работы являются результатом работы нескольких поколений преподавателей кафедры общей физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Первые лабораторные работы составили содержание двухтомника «Физический практикум» под редакцией В.И. Ивероновой, вышедшего в свет в 1967 г. В последние годы разработаны и введены в действие новые современные лабораторные работы с использованием современных экспериментальных методов ис-

следования физических процессов. Более 50% лабораторных работ являются автоматизированными с управлением компьютером. В каждом семестре студент выполняет 12 лабораторных работ, причем 60-70% являются обязательными для всех студентов, а остальные распределяются с учетом их пожеланий.

Для повышения эффективности усвоения сути изучаемых физических явлений и законов в тематических лабораториях без расхода времени на ознакомление со стандартной технологией измерений в ИУМК введен раздел «Введение в технику эксперимента», состоящий из двух частей: «Лекции» и «Практикум». Лекции посвящены краткому изложению общих принципов проведения физических измерений, теории ошибок и статистической оценки достоверности полученных результатов, а также основных требований к оформлению полученной информации в виде графиков, номограмм и таблиц. В практической части представлены описания лабораторных работ начального цикла, в которых на сравнительно простых физических явлениях студент знакомится с наиболее распространенными приборами, с методами измерений и с правильной обработкой их результатов, основами анализа погрешностей измерений и правилами представления результатов с учетом его точности.

Курс предназначен не только для физиков, но может быть полезен для будущих инженеров, химиков и биологов.

Все пожелания и замечания по пособиям курса будут с благодарностью приняты и рассмотрены на кафедре общей физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

А.М. Салецкий

СОДЕРЖАНИЕ

	Задачи	Ответы
§1. Элементы теории вероятности. Статистические системы и их характеристики	**8**	**145**
§2. Распределение Максвелла	**21**	**163**
§3. Закон Дальтона	**32**	**183**
§4. Распределение энергии по степеням свободы. Броуновское движение	**36**	**191**
§5. Идеальный газ в поле потенциальных сил. Распределение Больцмана	**41**	**197**
§6. Молекулярно-кинетические характеристики газов	**50**	**215**
§7. Явления переноса	**55**	**225**
§8. Теплоемкость	**71**	**259**
§9. Процессы в идеальном газе	**78**	**271**
§10. Циклические процессы. КПД тепловых машин	**87**	**287**
§11. Второе начало термодинамики. Энтропия	**98**	**306**
§12. Реальные газы и жидкости	**109**	**322**
§13. Поверхностные явления	**120**	**339**
§14. Фазовые переходы	**131**	**362**
§15. Термодинамические потенциалы	**140**	**383**
Приложения		**395**
Литература		**399**

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие написано на основе многолетнего опыта проведения занятий по общей физике на физическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова. За многие годы на кафедре общей физики был создан значительный «архив» задач по курсу общей физики. Такая работа была начата по инициативе первого заведующего кафедрой академика С.И. Вавилова, а издание первого сборника задач было осуществлено в 1949 году под руководством другого заведующего кафедрой, С.Э. Хайкина, [1]. При подготовке следующих изданий Сборника был использован опыт других вузов, в первую очередь, МФТИ и Московского государственного педагогического института. Материал современных, многократно переизданных вариантов Сборника несколько отличается от используемого на физическом факультете Московского университета.

Предлагаемое пособие является составной частью серии учебно-методических пособий кафедры общей физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова «Университетский курс общей физики», и является заключительной, третьей частью модуля «Семинарские занятия» этой серии (первая часть – «Разработка семинарских занятий» [2], вторая – «Методика решения задач» [3]). В пособии рассматриваются, в первую очередь, наиболее характерные и типичные задачи. Сборник содержит около 750 задач (для более 50% из них приведены решения) по разделу «Молекулярная физика и термодинамика» курса общей физики и предназначен для самостоятельной работы студентов.

Содержание «Сборника задач» разделено на 15 тем с максимальной привязкой к действующему тематическому плану семинаров по молекулярной физике и термодинамике. Каждой теме предшествуют краткие теоретические сведения, в конце сборника приведены справочные таблицы.

Авторы выражают благодарность сотрудникам кафедры А.В. Быкову и М.В. Семенову за полезные обсуждения и ценные замечания. Особую признательность авторский коллектив выражает рецензентам пособия В.А. Макарову и А.В. Уварову. Авторы заранее признательны также всем, кто поспособствует улучшению в дальнейшем этого учебно-методического пособия.

§1. Элементы теории вероятности. Статистические системы и их характеристики

- Число перестановок из n элементов P_n – число способов, которыми можно упорядоченно расположить n элементов: $P_n = n!$

- Число размещений из n элементов по m: $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

- Число сочетаний из n элементов по m: $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

- Частотная вероятность P_i какого-либо случайного события равна $P_i = \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{N_i}{N}$, где N_i – число благоприятных исходов, N – общее число испытаний.

- Условие нормировки для частотной вероятности

$$\sum_i P_i = 1 .$$

- Вероятность $P(A+B)$ появления или события A, или события B *(формула сложения вероятностей*):

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) ,$$

где $P(A)$ и $P(B)$ – вероятности событий A и B соответственно, $P(AB)$ – вероятность сложного события, состоящего в осуществлении и события A, и события B.

- Вероятность появления несовместных событий A или B (то есть вероятность появления или события A, или B):

$$P(A+B) = P(A) + P(B) .$$

- Вероятность появления и события A, и события B (*формула умножения вероятностей*):

$$P(AB) = P(B)\cdot P(A/B) = P(A)\cdot P(B/A)),$$

где $P(A/B)$ – вероятность события A при условии, что произошло событие B (ранее или одновременно), $P(B/A)$ – вероятность собы-

тия B при условии, что произошло событие A (ранее или одновременно).

- Вероятность появления независимых случайных событий A и B:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) .$$

- *Функция (закон) распределения* – функция, определяющая вероятность каждого из доступных состояний или плотность вероятности случайной величины.
- Среднее значение функции $\varphi(x_i)$ дискретной случайной величины x:

$$\langle \varphi(x) \rangle = \sum_i \varphi(x_i) P(x_i).$$

- Дисперсия σ_x^2 случайной величины x:

$$\sigma_x^2 = \left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle = \left\langle (x - \langle x \rangle)^2 \right\rangle = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2 ,$$

где $\langle x \rangle = \sum_i x_i P(x_i)$, $\left\langle x^2 \right\rangle = \sum_i x_i^2 P(x_i)$.

- Стандартное отклонение случайной величины от ее среднего значения:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{\left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2} .$$

- Биномиальное распределение:

$$P(n,m) = C_n^m p^m q^{n-m} ,$$

где n – число различных элементов в данном множестве, m – число упорядоченно расположенных элементов из данного множества, p – вероятность благоприятного состояния; $q = 1 - p$ – вероятность неблагоприятного состояния.

- Среднее значение макропараметра m для случайной величины, подчиняющейся биномиальному закону распределения:

$$\langle m \rangle = np .$$

- Дисперсия макропараметра m для случайной величины, подчиняющейся биномиальному закону распределения:

$$\sigma_m^2 = \left\langle \Delta m^2 \right\rangle = npq .$$

- Стандартное отклонение макропараметра m для случайной величины, подчиняющейся биномиальному закону распределения:

$$\sigma_m = \sqrt{npq}\ .$$

- Условие нормировки для плотности распределения $f(x)$ непрерывной случайной величины:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1\,.$$

- Вероятность $P(x_1, x_2)$ того, что значение случайной величины x находится в интервале от x_1 до x_2:

$$P(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x\ .$$

- Среднее значение $\langle\varphi(x)\rangle$ функции $\varphi(x)$ от непрерывной случайной величины x, характеризуемой плотностью вероятности $f(x)$:

$$\langle\varphi(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

- Распределение Пуассона:

$$P(m) = \frac{\langle m\rangle^m}{m!} e^{-\langle m\rangle}\ .$$

- Среднее значение макропараметра $\langle m\rangle$ и дисперсия σ_m^2 для случайной величины, подчиняющейся распределению Пуассона:

$$\langle m\rangle = Np\ ;\ \sigma_m^2 = Npq \approx \langle m\rangle\ .$$

- Функция распределения плотности вероятности Гаусса:

$$f_{\mathrm{G}}(m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} e^{-\frac{(m-\langle m\rangle)^2}{2\sigma^2}}\ .$$

- Среднее значение макропараметра $\langle m\rangle$ и стандартное отклонение σ_m от среднего значения для случайной величины, подчиняющейся распределению Гаусса:

$$\langle m \rangle = Np\,;\ \sigma = \sqrt{Npq}\ .$$

При больших N и малых p стандартное отклонение $\sigma_m \approx \sqrt{\langle m \rangle}$.

1.1. Автомобильный номерной знак включает, кроме номера региона, три цифры и три буквы. При этом недопустим номер с тремя нулями, а буквы выбираются из набора А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х (используются только те буквы кириллицы, написание которых совпадает с латинскими буквами). Сколько различных номерных знаков можно составить с одним номером региона?

1.2. Группа студентов состоит из 6 отличников, 10 хорошо успевающих и 9 слабых студентов. Отличники на экзамене могут получить только отличные оценки. Хорошо успевающие студенты могут получить с равной вероятностью хорошие и отличные оценки. Слабые студенты могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. Для сдачи экзамена вызывается наугад один студент. Какова вероятность того, что он получит хорошую или отличную оценку?

1.3. Студент знает 20 из 30 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент даст правильный ответ на три последовательно предложенные ему один за другим вопроса программы.

1.4. На книжной полке стоит 20 книг, из них 16 книг разных авторов и 4 книги одного автора. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы книги одного автора стояли рядом?

1.5. Каждая из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 написана на одной карточке. Последовательно наугад извлекаются 3 карточки. Найти вероятность того, что полученное трехзначное число окажется четным.

1.6. Студенты курса изучают в каждом семестре 8 предметов. В расписание занятий включаются каждый день по 4 предмета. Сколько различных расписаний можно составить?

1.7. В урне имеется 7 шаров разного цвета. Заранее намечаем извлечь конкретные 3 шара в определенной последовательности. Какова вероятность того, что это удастся сделать при извлечении шаров наугад, без возвращений?

1.8. Из 6 одинаковых карточек, на каждой из которых напечатана одна из следующих букв: "А", "В", "Е", "Л", "О", "Т", вынимаются одна за другой 4 карточки и укладываются в ряд. С какой вероятностью при этом получится слово ″ЛЕТО″?

1.9. Десять участников финала разыгрывают одну золотую, одну серебряную и одну бронзовую медали. Сколькими способами эти награды могут быть распределены между спортсменами?

1.10. Три экзаменатора принимают экзамен у группы из 30 человек, причем первый опрашивает 9 студентов, второй — 6 студентов, а третий — 15 студентов (выбор студентов производится случайным образом из списка). Отношение трех экзаменаторов к слабо подготовившимся различное: шансы таких студентов сдать экзамен у первого преподавателя равны 40%, у второго — только 10%, у третьего — 70%. Найти вероятность того, что слабо подготовившийся студент сдаст экзамен.

1.11. Сколько различных дробей можно составить из чисел 3, 5, 7, 13, 19, 23 так, чтобы в каждую дробь входили 2 различных числа? Сколько среди них будет правильных дробей?

1.12. Из урны, содержащей 5 белых и 3 черных шара, вынимаются 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

1.13. Среди студентов группы, состоящей из 17 студентов, из которых 7 девушек, разыгрываются 7 билетов, причем каждый может выиграть только один билет. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 4 девушки?

1.14. В партии из 14 деталей – 10 стандартных, остальные – нестандартные. Наугад отобраны 5 деталей. Какова вероятность того, что среди отобранных деталей ровно 3 стандартных?

1.15. Сколько существует трёхзначных чисел, которые делятся на 5?

1.16. Для участия в соревнованиях тренер отбирает 5 спортсменов из 12. Сколькими способами он может сформировать команду, если в нее обязательно должны войти 2 самых сильных спортсмена?

1.17. В группе 9 человек. Сколько можно образовать разных подгрупп при условии, что в подгруппу входит не менее 2 человек?

1.18. Из партии, содержащей 100 деталей, последовательно, одна за другой, извлекаются 5 деталей и подвергаются контролю.

Условием непригодности всей партии является появление хотя бы одной бракованной детали среди контролируемых. Какова вероятность того, что партия будет принята, если она содержит 5% неисправных деталей?

1.19. В одном ящике находится 5 белых и 7 черных шаров, в другом – 4 белых и 5 черных. Из каждого ящика вынимают по одному шару. Найти вероятность того, что при этом будет вынут только один белый шар.

1.20. В группе из 40 человек 20 знают английский язык, 10 – немецкий, 15 – французский, причем 5 человек знают одновременно английский и немецкий языки, 6 человек – английский и французский, 4 человека – немецкий и французский, а 2 человека знают все три языка. Найти вероятность того, что случайно выбранный член группы: а) знает английский или немецкий; б) знает английский, немецкий или французский; в) не знает ни одного из перечисленных языков.

1.21. В коробке лежат 6 кубиков, 9 шариков и 12 пирамидок, причем треть предметов каждой группы белого цвета, а 2/3 – синего. Какова вероятность того, что выбранный наугад предмет будет либо кубиком, либо белого цвета?

1.22. В урне 4 белых и 6 красных шаров. Наудачу извлекаются 5 шаров. Найти вероятность того, что среди них окажется не более двух красных шаров.

1.23. При изготовлении партии однотипных деталей вероятность изготовления стандартной детали равна 0,9. Что вероятнее: появление не более одной бракованной детали в партии из 6 деталей или не более 2 бракованных деталей в партии из 12 деталей?

1.24. В магазине продаются 5 отечественных и 3 импортных телевизора. Составить закон распределения случайной величины x – числа импортных из 4 случайно выбранных телевизоров.

1.25. В комплекте 10 деталей, 7 – первого сорта, остальные - второго. Наудачу извлекают 4 детали. Составить закон распределения случайной величины x – числа деталей первого сорта среди отобранных.

1.26. В команде 11 спортсменов, из них 7 первого разряда и 4 второго. Наудачу выбраны 3 спортсмена. Найти закон распределения дискретной случайной величины x – числа спортсменов первого разряда среди отобранных.

1.27. В коробке находится 6 одинаковых карточек, одна сторона которых синяя, а другая – красная. Карточки высыпают из коробки на стол, причем опыт повторяют многократно. Найти закон распределения случайной величины m – числа карточек, верхняя сторона которых оказалась синей. Определить среднее значение $\langle m \rangle$ и стандартное отклонение σ_m от среднего значения.

1.28. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна 1/10. Найти вероятность того, что человек, имеющий 5 билетов: *а*) ничего не выиграет; *б*) выиграет не более, чем по двум билетам.

1.29. Вероятность безотказной работы каждого из 7 независимо работающих элементов некоторого устройства равна 0,85. Найти вероятность того, что выйдут из строя не более 3 элементов.

1.30. Сосуд содержит N молекул идеального газа. Какова термодинамическая вероятность наиболее вероятного распределения N молекул по равным половинам объема A и B сосуда? Определить полное число доступных состояний всей системы и вероятность наиболее вероятного распределения N молекул по объемам A и B в случае $N = 8$. С какой вероятностью N_1 молекул окажутся в объеме A? Найти ее численные значения для $N = 8$ и $N_1 = 0, 1, 2$.

1.31. N молекул идеального газа находятся в сосуде объемом W. Внутри объема W мысленно выделен объем V. Найти вероятность того, что в объеме V будет менее $n = 2$ частиц.

1.32. В сосуде находятся 2 молекулы. Какова вероятность того, что обе молекулы будут находиться: а) в левой половине сосуда; б) в любой из половин; в) в разных половинах сосуда?

1.33. В сосуде находятся 3 молекулы. Какова вероятность того, что а) 2 молекулы будут находиться в левой половине сосуда; б) 2 молекулы будут находиться в одной из половин сосуда; в) в правой половине сосуда не будет ни одной молекулы?

1.34. N молекул идеального газа находятся в некотором сосуде объемом V. Сосуд мысленно делится на две части A и B, объемы которых $V_A = V/3$ и $V_B = 2V/3$. Найти вероятность того, что в части A сосуда окажется n молекул. Рассмотреть случаи: $N = 6$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

1.35. В объеме $V = 1$ см^3 находится $N = 6$ молекул. Определить вероятность того, что все молекулы соберутся в выделенном внутри объеме $V_1 = 100$ мм^3.

1.36. Сосуд с N молекулами идеального газа мысленно разделён на две части, объемы которых V_1 и V_2. Найти вероятность того, что в объёме V_1 окажется N_1 молекул.

1.37. В объеме $2V$ находится $2N$ молекул. Во сколько раз вероятность обнаружить N молекул в объеме $V - V_1$ отличается от вероятности обнаружить N молекул в объеме V?

1.38. С помощью деревянной линейки длиной 10 см измеряется расстояние $l = 4$ м. При этом линейка последовательно укладывается 40 раз, и каждый раз ставится метка, соответствующая концу линейки. Известно, что расстояния между двумя последовательными метками с равной вероятностью находятся в интервале от 9,9 см до 10,1 см и не выходят за эти пределы. Определить полную ошибку измерения, вычислив стандартное отклонение от среднего для полученного отрезка.

1.39. 5 л воды отмеряют, наливая ее в сосуд стаканом, в котором с равной вероятностью может находиться от 195 мл до 205 мл жидкости. Определить: среднее значение отмеренного объема после того, как в сосуд вылили 25 стаканов воды; дисперсию и стандартное отклонение полученного объема от среднего значения.

1.40. Не имея весов, хозяйка отмеряет муку для торта столовой ложкой, в которой с равной вероятностью может быть от 26 до 34 г муки. Для приготовления торта хозяйке требуется $M = 600$ г муки, поэтому она отмерила 20 ложек. Оцените возможную ошибку хозяйки, определив стандартное отклонение полученного количества муки от 600 г.

1.41. Угол $\varphi = 30^\circ$ измеряется путем последовательного приложения эталона – длинного равнобедренного треугольника с углом при вершине 1°. Из-за неточности прикладывания эталона угловое расстояние между двумя последовательными измерениями (метками) с равной вероятностью лежит между $50'$ и $1^\circ 10'$. Найти полную ошибку измерения, вычислив стандартное отклонение для полученного значения угла.

1.42. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,05.

1.43. Плотность вероятности для некоторой непрерывной случайной величины x имеет вид $f = Cx$ (C – неизвестная постоян-

ная) при $0 \le x \le a$. Вне этого интервала $f = 0$. Найти средние значения $\langle x \rangle$ и $\langle x^2 \rangle$, а также дисперсию σ_x^2 случайной величины x.

1.44. Плотность вероятности случайной величины x описывается функцией $f(x) = Bx(a - x)$ (B – неизвестная постоянная) при $0 \le x \le a$. Вне этого интервала $f = 0$. Найти: а) наиболее вероятное значение x и соответствующее значение функции f; б) средние значения $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ и дисперсию σ_x^2.

1.45. Плотность вероятности для некоторой величины x имеет вид $f(x) = C(x^2 - 1)$ (C – неизвестная постоянная) при $1 \le x \le 2$. Вне этого интервала $f = 0$. Найти среднее значение $\langle x \rangle$, дисперсию σ_x^2, а также вероятность того, что значение x находится в диапазоне $1{,}5 \le x \le 2$.

1.46. Плотность вероятности для непрерывной случайной величины x описывается функцией $f(x) = A(x - 1)$ (A – неизвестная постоянная) при $1 \le x \le 3$. Вне этого интервала $f = 0$. Найти: среднее значение x, стандартное отклонение σ_x от среднего значения и вероятность того, что значение x находится в диапазоне $1 \le x \le 2$.

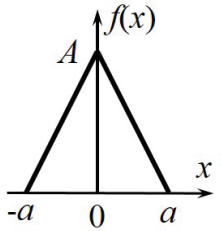


Рис. 1.1. Функция плотности вероятности $f(x)$ некоторой случайной величины x.

1.47. Плотность вероятности для некоторой случайной величины x описывается функцией $f(x) = Cx^3$ (C – неизвестная постоянная) при $0 \le x \le a$. Вне этого интервала $f = 0$. Найти: среднее значение x, дисперсию σ_x^2, стандартное отклонение σ_x от среднего значения и вероятность того, что значение x находится в диапазоне $0 \le x \le a/2$.

1.48. График функции плотности вероятности для некоторой случайной величины x представлен на рис. 1.1. Вне интервала ($-a \le x \le a$) $f = 0$. Найти среднее значение модуля x: $\langle |x| \rangle$.

1.49. В каждом из большого числа сосудов находится одно и то же количество молекул газа N. Сосуды с равной вероятностью

имеют объемы от $V - \Delta V$ до $V + \Delta V$. Найти плотность распределения $\psi(n)$ концентрации n газов в сосудах. Определить среднюю концентрацию молекул в сосудах.

1.50. Кинетическая энергия каждой молекулы идеального газа с равной вероятностью может принимать значения из небольшого диапазона (ε_1, ε_2). Найти плотность распределения для модуля скорости $|\upsilon|$ молекул газа.

1.51. Радиусы изготавливаемых на заводе металлических шариков с равной вероятностью находятся в малом диапазоне от r_1 до r_2. Найти плотность распределения $\psi(V)$ для объемов шариков. Определить средний объем шариков.

1.52. Из-за небольших флуктуаций напряжение в сети с равной вероятностью находится в диапазоне от $u_0 - \Delta u$ до $u_0 + \Delta u$. Определить плотность распределения $\psi(N)$ мощности N, выделяемой нагревателем с сопротивлением R, подключенным к сети.

1.53. На горизонтальном столике лежит небольшой груз, прикрепленный к стене пружиной с коэффициентом жесткости k. Из-за небольшой вибрации столика груз хаотически смещается от положения равновесия, причем его смещение равномерно распределено в диапазоне от $-x_0$ до x_0. Найти плотность распределения $\psi(E)$ для потенциальной энергии E пружины. Трением груза о столик пренебречь.

1.54. Пусть частицы имеют одну степень свободы, а их скорость равновероятно распределена в интервале $[-\upsilon_0, \upsilon_0]$. Найти плотность вероятности $\psi(E)$ для распределения частиц по энергии и рассчитать среднюю энергию частицы. Масса каждой частицы равна m.

1.55. При массовом производстве шестеренок вероятность изготовления годной шестеренки равна 0,9975. Найти вероятность того, что из 800 наугад взятых шестеренок более двух будут бракованными.

1.56. Для продвижения своей продукции на рынок фирма раскладывает по почтовым ящикам рекламные листки. Прежний опыт работы показал, что примерно в одном случае из 2 000 следует заказ. Найти вероятность того, что при размещении 10000 рекламных листков поступит хотя бы один заказ, среднее число поступивших заказов и дисперсию числа поступивших заказов.

1.57. По каналу связи передают 1000 знаков. Каждый знак может быть искажен независимо от других с вероятностью 0,003. Найти вероятность того, что будет искажено не более трех знаков.

1.58. Гидравлическая система автомобиля насчитывает 100 клапанов. Надежность каждого клапана 0,98. Какова вероятность того, что за время испытания откажут не менее двух клапанов, если считать отказ каждого из них независимым?

1.59. Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,005. Найти наиболее вероятное число опоздавших из 600 пассажиров и вероятность этого события.

1.60. Испытывается каждый из 100 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0,96. Найти вероятность того, что выдержат испытание ровно 95 элементов; более 95 элементов.

1.61. Вероятность нарушения герметичности баллона равна 0,005. а) Найти вероятность того, что среди 600 баллонов негерметичными окажутся хотя бы один; менее двух. б) Как изменится вероятность обнаружить хотя бы один негерметичный баллон, если взять 1000 таких же баллонов?

1.62. Некоторый источник испускает сигналы, которые фиксируются со средней частотой $\nu = 36$ сигналов в минуту. Какова вероятность за время $\tau = 5$ с зафиксировать: а) от одного до трех сигналов; б) не менее 2 сигналов?

1.63. Радиоактивный источник испускает α-частицы, которые регистрируются со средней частотой 30 частиц в минуту. Вероятность какого события больше и во сколько раз: зарегистрировать $n_1 = 2$ частицы за время $t_1 = 4$ или $n_2 = 4$ частицы за время $t_2 = 8$ с?

1.64. Среднее число ошибок, которые делает оператор в течение часа работы, равно 2. Найти вероятность того, что за 3 часа работы оператор сделает: а) 4 ошибки; б) не менее трех ошибок; в) хотя бы одну ошибку.

1.65. При движении по проселочной дороге автомобиль испытывает в среднем 60 толчков в течение одного часа. Какова вероятность того, что за 2 минуты не будет ни одного толчка?

1.66. Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно трем. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит: а) пять вызовов; б) менее пяти вызовов.

1.67. Найти концентрацию молекул идеального газа n, если вероятность нахождения в малом объеме $V_0 = 1$ мкм^3 хотя бы одной частицы, равна $p = 0{,}99$.

1.68. В сосуде объемом $V = 1$ м^3 находится $\nu = 10^{-6}$ молей идеального газа. При постоянной температуре объем газа уменьшают в $n = 2$ раза. Во сколько раз изменяется при этом вероятность того, что в малом объеме $w = 1$ мкм^3 не будет ни одной частицы?

1.69. В баллоне с идеальным газом объемом $V = 1$ м^3 среднее число молекул в малом объеме $w = 10^{-24}$ м^3 равно $<m_1>$. Сколько молей газа ν нужно добавить в баллон, чтобы вероятность отсутствия в объеме w молекул уменьшилась в 1,5 раза?

1.70. В сосуде объемом $V = 1$ м^3 находится разреженный газ со средней концентрацией молекул $n = 2 \cdot 10^{18}$ м$^{-3}$. Внутри сосуда мысленно выделен объем w. Каков должен быть размер этого объема, чтобы вероятность того, что внутри него не будет ни одной молекулы, была равна $p = 0{,}01$?

1.71. В сосуде объёмом $V = 10$ м^3 находится идеальный газ со средней концентрацией молекул $n = 2 \cdot 10^{21}$ м$^{-3}$. Какова вероятность того, что в каком-либо малом объёме $w = 1$ мкм^3 этого сосуда окажется $m = 2050$ молекул?

1.72. Идеальный газ находится в сосуде объемом V при постоянной температуре. Среднее число молекул в объеме $V/2$ равно N_1. Найти вероятность обнаружения $(N_1/2 - 4)$ молекул в объеме $V/4$.

1.73. В закрытом сосуде объемом $V = 1$м^3 при нормальных условиях находится идеальный газ. В объеме V выделен малый объем $w = 10^{-6}$ м^3. Определить вероятность $P(\langle m \rangle)$ того, что в объеме w наблюдается среднее для данного объема число $\langle m \rangle$ молекул газа. При нормальных условиях число молекул идеального газа в 1 м^3 равно $N_L = 2{,}68 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$ (число Лошмидта).

1.74. Сосуд большого объема наполнен идеальным газом при нормальных условиях. Оценить вероятность того, что в выделен-

ном объеме $w = 10^{-6}\,\text{м}^3$ этого сосуда плотность газа на $\eta = 5\%$ превышает среднюю плотность. При нормальных условиях число молекул идеального газа в 1 м^3 равно $N_\text{L} = = 2{,}68 \cdot 10^{25}\,\text{м}^{-3}$.

1.75. В двух одинаковых сосудах находится по одному молю идеального газа при нормальных условиях. Сосуды сообщаются между собой через отверстие. Какое число молекул N_1 должно перейти из одного сосуда в другой, чтобы вероятность нового состояния была в 1,3 раза меньше исходной?

§2. Распределение Максвелла

- Распределение Максвелла по *x*-компоненте скорости: $\mathrm{d}P(\upsilon_x) = f\left(\upsilon_x\right)\mathrm{d}\upsilon_x$,

где плотность вероятности:

$$f(\upsilon_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\exp\left(-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}\right).$$

- Распределение Максвелла для абсолютному значению скорости:

$$\mathrm{d}P(\upsilon) = f\left(\upsilon\right)\mathrm{d}\upsilon,$$

где плотность вероятности:

$$f(\upsilon) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT}\right)\cdot 4\pi\upsilon^2.$$

- Распределение Максвелла по абсолютному значению скорости с учетом направления движения:

$$\mathrm{d}P(\upsilon,\theta,\varphi) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT}\right)\sin\theta\,\upsilon^2\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\upsilon,$$

где θ и φ – стандартные углы сферической системы координат.

- Наиболее вероятное значение модуля скорости молекул, подчиняющихся распределению Максвелла:

$$\upsilon_{\text{нв}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}},$$

где m – масса одной молекулы, μ – молярная масса, k – постоянная Больцмана.

- Среднее значение модуля скорости молекул, подчиняющихся распределению Максвелла:

$$\langle\upsilon\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}.$$

- Среднеквадратичное значение модуля скорости молекул, подчиняющихся распределению Максвелла:

$$\upsilon_{\text{скв}} = \sqrt{\langle\upsilon^2\rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

- Среднее значение функции $\varphi(v)$ от абсолютной скорости для максвелловского газа:

$$\langle\varphi(v)\rangle = \int_0^\infty \varphi(v) f(v)\,\mathrm{d}v = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty \varphi(v) \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \cdot 4\pi v^2 \mathrm{d}v .$$

- Среднее значение функции $\varphi(v_x)$ от x-компоненты скорости для максвелловского газа:

$$\langle\varphi(v_x)\rangle = \int_0^\infty \varphi(v_x) f(v_x)\,\mathrm{d}v_x = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \int_0^\infty \varphi(v_x) \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) \mathrm{d}v_x .$$

- Распределение Максвелла по безразмерной абсолютной скорости $\xi = v / v_{\text{нв}}$:

$$\mathrm{d}P(\xi) = f(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2} \xi^2 \mathrm{d}\xi .$$

- Распределение Максвелла по кинетической энергии поступательного движения $\varepsilon = \frac{1}{2} mv^2$:

$$\mathrm{d}P(\varepsilon) = f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon ,$$

где плотность вероятности:

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) .$$

- Наиболее вероятное значение кинетической энергии поступательного движения одной молекулы идеального газа:

$$\varepsilon_{\text{нв}} = \frac{1}{2} kT .$$

- Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы одноатомного идеального газа:

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{3}{2} kT .$$

- Вероятность для частицы максвелловского газа иметь скорость в интервале значений $v_0 - \Delta v/2 \le v \le v_0 + \Delta v/2$ при условии $\Delta v << v_0$:

$$P(\Delta\upsilon) = \int\limits_{\upsilon_0-\Delta\upsilon/2}^{\upsilon_0+\Delta\upsilon/2} f(\upsilon)\,\mathrm{d}\upsilon \approx f(\upsilon_0)\Delta\upsilon\,.$$

- Диапазон концентраций молекул со скоростями в интервале значений $(\upsilon, \upsilon+\mathrm{d}\upsilon)$:

$$\mathrm{d}n\,(\upsilon) = n_0 f(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT}\right)\cdot 4\pi\upsilon^2\mathrm{d}\upsilon\,,$$

где n_0 – средняя концентрация молекул в объеме V.

- Частота ударов о единичную площадку для молекул, подчиняющихся распределению Максвелла:

$$\nu = n_0\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} = \frac{n_0\langle\upsilon\rangle}{4}\,.$$

- Давление газа, подчиняющегося распределению Максвелла (термическое уравнение состояния):

$$p = nkT\,.$$

2.1. При какой температуре t наиболее вероятная скорость молекул кислорода (O_2) равна наиболее вероятной скорости молекул азота (N_2) при температуре t_1 = 50 ºС?

2.2. При какой температуре T среднеквадратичная скорость молекул кислорода (O_2) больше их средней скорости на $\Delta\upsilon$ = 40 м/с?

2.3. Найти температуру T воздуха, при которой средние скорости молекул азота и кислорода отличаются друг от друга на $\Delta\upsilon$ = 35 м/с.

2.4. На какую величину отличается средняя скорость молекул водорода (H_2) от их среднеквадратичной скорости при температуре T = 300 К?

2.5. На сколько процентов среднеквадратичная скорость молекул идеального газа отличается от их наиболее вероятной скорости?

2.6. Найти изменение средней скорости молекул азота при повышении температуры от t_1 = 0 ºС до t_2 = 100 ºС.

2.7. При повышении температуры на ΔT_1 = 150 К среднеквадратичная скорость молекул идеального одноатомного газа увеличилась с υ_1 = 400 м/с до υ_2 = 500 м/с. На какую величину ΔT_2

нужно дополнительно повысить температуру, чтобы увеличить среднеквадратичную скорость молекул газа от $\upsilon_2 = 500$ м/с до $\upsilon_3 = 600$ м/с?

2.8. При некоторой температуре средняя скорость молекул вещества, молярная масса которого μ_1, равна υ_1. Какова при той же температуре средняя скорость молекул вещества, молярная масса которого μ_2?

2.9. Один моль кислорода находится в равновесном состоянии при температуре $T = 300$ К. Определить сумму:

а) компонент υ_x скоростей всех молекул вдоль направления x;

б модулей скоростей всех молекул;

в) квадратов скоростей всех молекул.

2.10. Определить сумму модулей импульсов молекул одного моля азота при температуре $t = 10$ ºС.

2.11. Найти температуру, при которой для молекул азота максимум плотности вероятности $f(\upsilon)$ распределения Максвелла по абсолютному значению скорости имеет место при скорости $\upsilon = 500$ м/с .

2.12. Чему равна максимальная плотность вероятности $f(\upsilon)$ распределения молекул кислорода по x – компоненте скорости при температуре $T = 300$ К?

2.13. Во сколько раз должна измениться температура максвелловского газа, чтобы максимум плотности x-компоненты скорости молекул увеличился в n раз?

2.14. Найти максимальное значение плотности распределения Максвелла $f(\upsilon)$ по абсолютному значению скорости для молекул водорода при температуре $t = 0$ ºС.

2.15. Для молекул максвелловского газа найти отношение значений плотности вероятности $f(\upsilon_{\text{нв}}) : f(\langle\upsilon\rangle) : f(\upsilon_{\text{скв}})$, где $\upsilon_{\text{скв}}$ – среднеквадратичная скорость, $\langle\upsilon\rangle$ – средняя скорость, $\upsilon_{\text{нв}}$ – наиболее вероятная скорость.

2.16. Найти относительную долю молекул газообразного азота, находящегося при температуре $T = 290$ К, которые имеют скорости, отличающиеся не более, чем на $\Delta\upsilon = 1$ м/с от скорости, равной: а) $\upsilon = \upsilon_{\text{нв}}$; б) $\upsilon = 0{,}1\ \upsilon_{\text{нв}}$.

2.17. Найти относительное число молекул, скорости которых отличаются не более чем на $\alpha = 0{,}5\%$ от:

а) наиболее вероятной скорости;

б) средней скорости;

в) среднеквадратичной скорости.

2.18. При какой температуре T_2 плотность вероятности для среднеквадратичной скорости идеального газа равна максимальной плотности вероятности при температуре T_1?

2.19. Найти отношение числа молекул идеального газа, скорости которых при температуре T_1 лежат в интервале $(\upsilon, \upsilon+\Delta\upsilon)$, где $\Delta\upsilon \ll \upsilon$, к числу молекул, скорости которых находятся в том же интервале при температуре $T_2 = 2T_1$, для случая, когда $\upsilon = 0{,}5\upsilon_{\text{нв1}}$. $\upsilon_{\text{нв1}}$ – наиболее вероятная скорость молекул при температуре T_1.

2.20. Оценить относительное число молекул максвелловского газа, скорости которых находятся в интервале от средней $\langle\upsilon\rangle$ до среднеквадратичной $\upsilon_{\text{скв}}$.

2.21. Получить функцию распределения Максвелла в "приведенных параметрах" $F(u)$, где $u = \upsilon / \upsilon_{\text{нв}}$, $\upsilon_{\text{нв}}$– наиболее вероятная скорость.

2.22. В баллоне объемом $V = 1\cdot10^{-2}$ м^3 находится водород (H_2) со средней концентрацией молекул $n_0 = 2{,}4\cdot10^{25}$ м$^{-3}$.·Найти число молекул ΔN, скорости которых находятся в интервале $(1{,}20 \pm 0{,}01)\cdot10^3$ м/с при температуре: а) 0 ºС; б) 3000 К.

2.23. Найти отношение числа молекул ΔN_1 кислорода со скоростями от 195 до 205 м/с к числу молекул ΔN_2, имеющих скорости от 395 до 405 м/с, если температура кислорода $t = 100$ ºС.

2.24. Найти при температуре $T = 300$ К отношение числа молекул азота с компонентами скорости вдоль вертикальной оси z в диапазоне (300 ± 3) м/с к числу молекул с компонентами вдоль той же оси (400 ± 4) м/с.

2.25. Определить вероятность того, что при $T = 300$ К компоненты скорости вдоль осей x, y и z молекулы кислорода находятся в диапазонах 200 ± 2, 300 ± 3 и 400 ± 4 м/с соответственно.

2.26. Найти при температуре $t = 0$ ºС относительное число молекул водорода, у которых модули проекций скорости на произвольную неподвижную плоскость $\upsilon_\perp$ имеют значения в интервале $(1{,}40 \pm 0{,}01)\cdot10^3$ м/с.

2.27. Определить вероятность того, что молекулы азота при температуре $T = 300$ К имеют горизонтальные скорости $\upsilon_{\perp}$ в интервале (300 ± 2) м/с, а вертикальные составляющие скорости υ_z – в интервале (200 ± 1) м/с.

2.28. С какой вероятностью молекулы максвелловского газа имеют положительную проекцию скорости на координатную ось OX ($\upsilon_x > 0$)?

2.29. С какой вероятностью проекции скорости молекулы максвелловского газа на любые две координатные оси положительны.

2.30. Найти среднее значение куба скорости $\langle \upsilon^3 \rangle$ для молекул идеального максвелловского газа при температуре T, если масса каждой молекулы m.

2.31. Найти модуль проекции скорости $\langle \upsilon_{\perp} \rangle$ молекулы максвелловского газа на произвольную неподвижную плоскость. Температура газа T, молярная масса газа μ.

2.32. Найти среднее значение квадрата проекции скорости $\langle \upsilon_{\perp}^2 \rangle$ молекулы максвелловского газа на произвольную неподвижную плоскость при температуре T. Масса одной молекулы m.

2.33. Идеальный газ состоит из молекул массой m и находится при температуре T. Исходя из функции распределения Максвелла по скоростям, определить плотность распределения молекул по кинетическим энергиям $f(\varepsilon)$.

2.34. Найти наиболее вероятную $\varepsilon_{нв}$ и среднюю $\langle \varepsilon \rangle$ кинетическую энергию одной молекулы одноатомного газа, дисперсию и относительную флуктуацию энергии $\delta\varepsilon = \dfrac{\sigma_{\varepsilon}}{<\varepsilon>}$.

2.35. Найти максимальное значение плотности вероятности $f(\varepsilon)$ распределения Максвелла по кинетическим энергиям для молекул одноатомного газа при температуре T.

2.36. Во сколько раз изменится значение максимума функции распределения молекул одноатомного идеального газа по кинетическим энергиям $f(\varepsilon)$, если температура газа увеличится в 2 раза?

2.37. Во сколько раз должна измениться температура газа, чтобы максимум плотности распределения молекул идеального газа по энергии уменьшился в n раз?

2.38. Определить относительную долю молекул идеального одноатомного газа, кинетическая энергия которых отличается от среднего значения не более чем на $\alpha = 0{,}5\%$.

2.39. Найти относительное число молекул идеального газа, кинетические энергии которых изменяются в пределах от наиболее вероятной энергии $\varepsilon_{нв}$ до значения, равного $0{,}1\varepsilon_{нв}$.

2.40. Используя распределение Максвелла по кинетическим энергиям $f(\varepsilon)$, вычислить среднее значение $\left\langle \sqrt{\varepsilon} \right\rangle$ и рассчитать среднюю скорость молекул $\langle v \rangle$. Сравнить полученный результат со значением средней скорости молекул максвелловского газа, полученным с использованием распределения Максвелла по модулям скоростей.

2.41. Идеальный газ из молекул массой m, находившийся при температуре T_1, нагрели до температуры T_2. Для какого диапазона скоростей $(v,\ v+\delta v)$, где $\delta v << v$, относительное число молекул не изменилось?

2.42. При какой скорости v молекул идеального газа вероятность того, что молекула имеет скорость в интервале $(v, v+\delta v)$ $(\delta v << v)$ при температуре T_0, будет такой же, как и при температуре $2T_0$? Масса одной молекулы газа m.

2.43. Смесь азота (N_2) и кислорода (O_2) находится при температуре $T = 300$ К. При каком значении скорости v молекул относительное число молекул этих газов, скорости которых находятся в диапазоне $(v,\ v+\delta v)$, где $\delta v << v$, будет одинаковым?

2.44. Газ состоит из молекул массой m.

а) При какой температуре T_0 газа число молекул с энергиями в заданном малом интервале $(\varepsilon, \varepsilon+\delta\varepsilon)$ максимально?

б) Найти наиболее вероятную скорость молекул при этой температуре.

2.45. Определить частоту столкновений ν_S молекул азота (N_2) с плоским участком поверхности площадью $S = 1$ см^2 при давлении азота $p = 9{,}8\cdot10^4$ Па и температуре $T = 300$ К.

2.46. В газоразрядной трубке находится газ неон при температуре $T = 300$ К и давлении $p = 1$ Па. Определить число атомов газа, ударяющихся за 1 секунду о катод прибора, имеющий форму диска радиусом $r = 5$ мм.

2.47. Максвелловский газ находится в закрытом сосуде сферической формы радиусом R при температуре T. Число частиц газа N, масса одной молекулы m. Чему равно среднее число ударов ν_S молекул газа о стенку сосуда за одну секунду?

2.48. В сферическом баллоне диаметром $d = 1$ м находится гелий при температуре 300 К. Какова средняя частота соударений каждой молекулы со стенкой?

2.49. При испарении вольфрамовой нити в высокий вакуум при температуре $T = 2000$ К масса нити уменьшается со скоростью $\alpha = 1{,}14 \cdot 10^{-12}$ кг/(с·м^2). Вычислить давление насыщенного пара вольфрама при этой температуре.

2.50. Во сколько раз изменится частота ударов молекул идеального газа о стенку сосуда, если температуру газа уменьшить в β раз при неизменной концентрации молекул в сосуде?

2.51. Пустой теплоизолированный сосуд с маленьким отверстием в стенке на длительное время помещают в термостат с неоном. Температура сосуда поддерживается равной T_1, а термостата – T_2. Давление неона в термостате равно p_2 и столь мало, что влетающие и вылетающие из сосуда атомы не сталкиваются в отверстии. Определить давление p_1 неона в сосуде.

2.52. Идеальный газ находится в резиновом шаре. Объем шарика уменьшили на $\alpha = 20\%$ при неизменной температуре. На сколько процентов изменилась частота ударов молекул о стенку шарика?

2.53. Одноатомный максвелловский газ находится в сосуде при температуре T. Определить полную кинетическую энергию E молекул, ударяющихся о поверхность стенки сосуда площадью S в единицу времени. Масса одной молекулы m, средняя концентрация молекул газа в сосуде n_0.

2.54. В сосуде, содержащем одноатомный идеальный газ при температуре T, имеется небольшое отверстие площадью S, через которое молекулы вылетают в вакуум. 1) Найти среднее значение $\langle\varepsilon\rangle$ кинетической энергии вылетевшей молекулы, считая изменение числа молекул в сосуде и температуры газа пренебрежимо малыми. 2) Как изменяется температура газа в сосуде по мере вылета молекул?

2.55. В тонкостенном сосуде, содержащем одноатомный идеальный газ при температуре T_0, образуется малое отверстие площадью S, через которое молекулы вылетают в вакуум. Какой будет температура T газа в сосуде через время τ после образования отверстия? Оценить температуру T через $\tau = 1$ час для $V = 1$ м^3 азота при $T_0 = 300$ К, если площадь отверстия $S = 0{,}01$ мм^2.

2.56. В сосуде объемом V, помещенном в вакуум, находится идеальный газ при температуре T. Масса молекулы газа равна m, средняя концентрация молекул газа n_0. В стенке сосуда образуется очень малое отверстие площадью S. Найти закон изменения концентрации молекул n газа в сосуде с течением времени. Температуру газа в сосуде считать постоянной, а истечение газа происходит настолько медленно, что практически не нарушает равновесность состояния газа в сосуде, за исключением малой области вблизи отверстия.

2.57. В тонкостенном сосуде объемом V находится идеальный газ при температуре T. Молярная масса газа μ. Сосуд помещен в вакуум. В стенке сосуда делается очень малое отверстие площадью S. Определить время t_0, за которое давление газа в сосуде уменьшится на $\alpha = 20\%$. Температуру газа в сосуде считать постоянной.

2.58. В тонкостенном сосуде объемом V находится достаточно разреженная смесь идеальных газов с молярными массами μ_1 и $\mu_2 < \mu_1$ при температуре T. Отношение концентраций компонент смеси равно α. Сосуд помещен в вакуум. В стенке сосуда делается очень малое отверстие площадью S. Определить отношение концентраций компонент смеси n_1/n_2 через время t после образования отверстия. Температуру смеси газов в сосуде считать постоянной.

2.59. В сосуде объемом V, помещенном в вакуум, находится идеальный газ, молярная масса которого μ. Средняя концентрация молекул газа n_0.Температура стенок сосуда поддерживается постоянной и равной T. В стенке сосуда образуется очень малое отверстие площадью S. Какое количество молекул газа покинет сосуд за время t_0?

2.60. В тонкостенном сосуде, помещенном в вакуум, находится водород, температура которого поддерживается постоянной. В стенке сосуда образовалось малое отверстие, через которое газ стал медленно вытекать из сосуда. В результате начальное давление газа p_0 в сосуде понизилось до $p_0/3$. Какое давление было бы в

том же сосуде через то же время, если бы в нем находился гелий при тех же давлении и температуре, что и водород?

2.61. Отношение молярных масс различных газов можно измерить по скорости их эффузии, то есть по скорости истечения газа из сосуда с очень малым отверстием. Пусть в сосуде объемом V, помещенном в вакуум, находится идеальный газ, температура которого поддерживается постоянной и равной T. В стенке сосуда имеется очень малое отверстие площадью S, через которое происходит истечение газа (эффузия). За время наблюдения Δt масса газа в сосуде уменьшилась на 10%. Определить молярную массу газа μ.

2.62. Тонкостенный сосуд объемом V, наполненный идеальным газом с молярной массой μ, поддерживается при постоянной температуре T. Средняя концентрация молекул газа n_0. В стенке сосуда имеется малое отверстие площадью S, через которое молекулы вылетают в вакуум. Какое количество теплоты $Q = Q(t)$ надо подводить к сосуду в единицу времени для поддержания в нем постоянной температуры?

2.63. Полностью откачанный баллон объемом V, стенки которого поддерживаются при постоянной температуре T, помещен в атмосферу идеального газа, находящегося при постоянном невысоком давлении p_0 и той же температуре T. Молярная масса газа μ. В стенке баллона делается очень малое отверстие площадью S, через которое газ начинает натекать в баллон. Как будет меняться со временем давление p газа в баллоне?

2.64. Тонкостенный откачанный сосуд объемом $V = 1$ л, в стенке которого имеется малое отверстие площадью $S = 10^{-4}$ мм^2, находится в воздухе, давление которого $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па и температура $T = 290$ К. За какое время Δt давление воздуха в сосуде:
а) возрастет от $p_1 = 0{,}1$ Па до $p_2 = 10$ Па; б) станет равным 1/3 атмосферного давления? Молярная масса воздуха $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

2.65. Полностью откачанный сосуд объемом V находится в атмосфере из смеси двух газов, молярные массы которых μ_1 и μ_2, а отношение концентраций компонент смеси n_{10}/n_{20} равно α. Смесь газов вне сосуда поддерживается при постоянных температуре T и давлении p_0. В стенке сосуда образуется малое отверстие площадью S, через которое газы начитают медленно втекать в сосуд. Определить отношение концентраций газов n_1/n_2 в сосуде через время t после образования отверстия.

2.66. Откачанный тонкостенный сосуд помещается в атмосферу кислорода, поддерживаемого при постоянной температуре и невысоком давлении p_0. В стенке сосуда образуется малое отверстие, через которое окружающий кислород начинает проникать в сосуд. Через некоторое время давление газа в сосуде повысилось от нуля до $p_0/2$. Во сколько раз изменилось бы время, за которое давление в сосуде стало бы равно $p_0/2$, если бы сосуд был погружен в атмосферу азота, находящегося при тех же температуре и давлении, что и кислород?

2.67. Теплоизолированный сосуд разделен перегородкой на две равные части объемом V каждая. В одной части сосуда находится водород (молярная масса μ_1), а в другой – гелий (молярная масса μ_2) при одинаковых давлениях и температуре T. Газы в сосудах сильно разрежены. В момент времени $t = 0$ в перегородке открывается небольшое отверстие площадью S. Как будет меняться с течением времени t отношение давлений в обеих частях сосуда?

§3. Закон Дальтона

- Парциальное давление газа a в смеси идеальных газов a, b, c, d… – давление, которое создавал бы газ a в отсутствие всех других компонентов (b, c, d…), то есть когда один газ a занимал бы весь объем.
- Закон Дальтона.

Давление p смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений p_i, создаваемых каждым газом:

$$p = \sum_i p_i \text{ , где } i = 1, 2, 3,...$$

- Связь давления идеального газа с его концентрацией:

$$p = nkT \text{ .}$$

3.1. В сосуде объемом $V = 2$ м^3 находится смесь $m_1 = 4$ кг гелия и $m_2 = 2$ кг водорода при температуре $t_1 = 27$ °С. Определить давление p и молярную массу μ смеси газов.

3.2. Определить молярную массу μ газа, свойства которого соответствуют свойствам смеси $m_1 = 160$ г кислорода и $m_2 = 140$ г азота.

3.3. В сосуде объемом V при температуре T находится смесь ν_1 молей водорода, ν_2 молей кислорода и ν_3 молей аргона. Определить давление смеси p и её молярную массу μ.

3.4. Три баллона с объемами $V_1 = 3$ л, $V_2 = 7$ л и $V_3 = 5$ л наполнены соответственно кислородом при давлении $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па, азотом при давлении $p_2 = 3 \cdot 10^5$ Па и углекислым газом при давлении $p_3 = 1 \cdot 10^5$ Па при одной и той же температуре. После соединения баллонов между собой образуется смесь газов той же температуры. Определить давление в смеси.

3.5. Определить плотность ρ смеси $m_1 = 4$ г водорода и $m_2 = 32$ г кислорода при температуре $t = 7$ ºС и давлении $p_0 = 1$ атм.

3.6. Плотность газа в виде смеси гелия и аргона при давлении $p_0 = 1{,}5 \cdot 10^5$ Па и температуре $t = 27$ °С равна $\rho = 2{,}0$ кг/м^3. Найти отношение концентраций аргона и гелия в смеси.

3.7. Топочный газ состоит из $\alpha_1 = 21{,}4\%$ CO_2, $\alpha_2 = 6{,}8\%$ H_2O и $\alpha_3 = 71{,}8\%$ N_2 (по весу). Определить удельный объем этого газа при давлении $p = 1{,}0 \cdot 10^5$ Па и температуре $T = 500$ К.

3.8. В сосуд, содержащий азот массой m, добавили ν молей водорода. При этом температура оставалась неизменной. Во сколько раз изменилось давление?

3.9. В сосуде объемом $V = 5$ л находится $N_1 = 10^{22}$ молекул кислорода, $N_2 = 4 \cdot 10^{22}$ молекул азота и $m = 4$ г аргона. Определить давление смеси газов. Температура смеси $T = 100$ °С.

3.10. В сосуде объемом $V = 10$ л находится смесь водорода и гелия при температуре $t = 27$ °С и давлении $p = 3{,}0$ атм. Масса смеси $m = 3{,}0$ г. Найти отношение массы водорода к массе гелия в данной смеси.

3.11. Баллон объемом $V = 60$ л заполнен смесью водорода и кислорода под давлением $p = 3{,}24$ атм при температуре $t = 27$ °С. Масса смеси газов равна $m = 60{,}0$ г. Определить количество молей каждого газа в смеси.

3.12. В баллоне объемом V_1 при температуре T_1 и давлении p_1 содержится смесь кислорода и азота общей массой m. Смесь газов из первого баллона пропускают во второй объемом V_2 через ловушку, содержащую раскаленные медные стружки. Каким будет давление во втором баллоне при температуре T_2, если весь кислород соединится с медью?

3.13. При температуре T и давлении p плотность воздуха с парами воды равна ρ. Определить парциальное давление водяных паров p_{H_2O} в смеси.

3.14. Определить плотность ρ и концентрацию n молекул смеси, состоящей из N газов с молярными массами μ_1, μ_2, μ_3,… с массами m_1, m_2, m_3,… Температура смеси газов T, давление p.

3.15. Лазерные трубки объемом $V_0 = 60$ см^3 должны заполняться смесью гелия и неона, причем гелия в молярном отношении берется в $n = 5$ раз больше неона. Давление в трубке равно $p_0 = 800$ Па, температура смеси газов $T = 300$ К Определить массу неона и гелия в лазерной трубке.

3.16. В сосудах объемами V_1 и V_2 находятся два различных идеальных одноатомных газа с молярными массами μ_1 и μ_2 при температурах T_1 и $T_2 > T_1$ и давлениях p_1 и p_2 соответственно. Оба объема теплоизолированы от окружающей среды. Какое давление установится в этих сосудах после их соединения?

3.17. В баллоне объемом $V = 2{,}5$ л находится $m = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ г водорода при температуре $T = 2500$ К. При этой температуре часть

$\alpha = 0{,}25$ молекул диссоциирует на атомы. Вычислить давление p в баллоне.

3.18. В закрытом сосуде находится идеальный двухатомный газ. При увеличении температуры в $n = 2{,}5$ раза давление газа увеличилось в $k = 3$ раза. Какая часть молекул α газа диссоциировала на атомы?

3.19. В сосуде содержатся ν_1 молей гелия и ν_2 молей водорода при температуре T_1 и давлении p_1. Смесь газов нагревают до температуры T_2, при этом все молекулы водорода диссоциируют на атомы. Найти новое давление в сосуде.

3.20. В сосуде находится молекулярный водород. При его нагревании до некоторой температуры часть α молекул водорода диссоциировала на атомы, а давление в сосуде оказалось равным p_1. После увеличения температуры в n раз оказалась диссоциирована на атомы часть β первоначального количества молекул. Найти давление в сосуде при этой температуре.

3.21. В закрытом сосуде объемом V находится смесь метана CH_4 и кислорода O_2. Парциальные давления газов одинаковы. После поджига смеси идет реакция $CH_4 + 2O_2 = CO_2 + 2H_2O$. Найти массу m смеси газов, если после остывания содержимого сосуда до температуры $t = 100$ °C на его стенках начинают конденсироваться капли воды. Давление насыщенных паров воды при 100°C равно p_0.

3.22. При комнатной температуре четырехокись азота N_2O_4 частично диссоциирует в двуокись азота NO_2. В откачанный сосуд объемом $V = 0{,}15$ л вводится $m = 1{,}2$ г жидкого N_2O_4 при температуре 0 ºС. Когда температура в сосуде поднялась до $T = 300$ К, жидкость целиком испарилась, а давление стало равным $p = 1{,}26 \cdot 10^5$ Па. Сколько процентов четырехокиси азота при этом подверглось диссоциации?

3.23. В сосуде объемом V, стенки которого поддерживаются при постоянной температуре T, содержится смесь двух идеальных газов с молярными массами μ_1 и μ_2 и одинаковыми концентрациями. Сосуд помещен в вакуумную камеру. В стенке сосуда проделали малое отверстие площадью S. Через какое время τ парциальное давление одного газа в β раз превысит парциальное давление другого?

3.24. В тонкостенном сосуде находится смесь гелия и водорода с одинаковыми концентрациями. Объем сосуда V, температу-

ра поддерживается постоянной. Сосуд помещен в вакуумную камеру, в стенке сосуда имеется малое отверстие площадью S. Определить температуру смеси, если отношение парциальных давлений газов через время τ стало равным η.

3.25. При испытаниях баллон, содержащий некоторое количество азота, разрывается при температуре $t_1 = 627$ °C. Если заполнить такой же баллон смесью втрое меньшего (по массе) количества азота и вдвое меньшего (по массе) количества неизвестного газа, он разорвется при температуре $t_2 = 600$ °C. Найти молярную массу неизвестного газа.

§4. Распределение энергии по степеням свободы. Броуновское движение

- Теорема о равномерном распределении кинетической энергии по степеням свободы.

В состоянии термодинамического равновесия средняя кинетическая энергия в расчете на каждую кинетическую степень свободы равна $kT/2$.

Альтернативная формулировка: в состоянии термодинамического равновесия на каждый квадратичный член в выражении для кинетической энергии частицы в среднем приходится энергия, равная $kT/2$.

- Средняя энергия одной молекулы идеального газа:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT \text{ , где } i = i_{\text{п}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}} ,$$

$i_{\text{п}}$ – число поступательных, $i_{\text{вр}}$ – число вращательных, $i_{\text{кол}}$ – число колебательных степеней свободы.

- Полное число степеней свободы у молекулы из N атомов:

$$i = 3N.$$

- Число колебательных степеней свободы молекулы из N атомов:

для объемной молекулы $i_{\text{кол}} = 3N - 6$;

для линейной молекулы $i_{\text{кол}} = 3N - 5$.

- Характеристическая температура θ.

Это минимальная температура, при которой происходит возбуждение какой-либо (вращательной или колебательной) степени свободы молекулы. Она определяется из условия:

$$U_{\min} = k\theta,$$

где $U_{\min}$ – минимальная энергия возбуждения системы.

- Средний квадрат расстояния $\left\langle \Delta r_t^2 \right\rangle$, пройденного броуновской частицей за время t:

$$\left\langle \Delta r_t^2 \right\rangle = 6Dt ,$$

где D – коэффициент диффузии.

Для шарообразной броуновской частицы радиусом R

$$\left\langle r_t^2 \right\rangle = \frac{kT}{\pi\eta R} t ,$$

где η – коэффициент вязкости среды.

4.1. Вычислить среднюю кинетическую энергию $\langle\varepsilon\rangle$ поступательного движения молекулы азота при температуре t = 27 °С.

4.2. Определить средние энергии поступательного, вращательного и колебательного движений двухатомной молекулы кислорода при температуре T = 4500 К.

4.3. Во сколько раз изменится средняя кинетическая энергия молекулы кислорода при его нагревании от температуры T_1 = 300 К до температуры T_2 = 4000 К? Возбуждение колебаний в молекуле кислорода происходит при 2260 К.

4.4. Чему равна суммарная кинетическая энергия $\langle E\rangle$ теплового движения всех молекул двухатомного газа, который находится в объеме V = 4 л при давлении $p = 1{,}5\cdot10^5$ Па? Какую часть этой энергии составляет энергия поступательного движения молекул $\langle E_{\text{пост}}\rangle$? Считать, что колебания атомов в молекулах не возбуждены, а вращения возбуждены полностью.

4.5. Чему равна энергия вращательного движения молекул азота, находящегося под давлением $p = 10^5$ Па в сосуде объемом V = 2 л, если вращательные степени свободы полностью возбуждены, а колебания атомов в молекуле отсутствуют?

4.6. Азот находится при температуре t = 0 °С и давлении p = 1 атм. Найти суммарную среднюю кинетическую энергию $\langle E\rangle$ молекул азота: а) в объеме υ = 1 см^3; б) для массы азота M = 1 кг.

4.7. Средняя энергия молекул гелия $\langle\varepsilon\rangle = 5{,}0\cdot10^{-21}$ Дж. Давление газа $p = 1{,}8\cdot10^5$ Па. Определить концентрацию молекул газа.

4.8. Двухатомный газ имеет плотность ρ = 5 кг/м^3 и находится при давлении $p = 10^5$ Па и температуре, когда колебательная степень свободы молекул не возбуждена. Масса газа M = 0,5 кг. Найти среднюю суммарную энергию теплового движения молекул.

4.9. При температуре T = 3200 К и давлении $p = 1{,}5\cdot10^5$ Па плотность смеси азота и водорода равна ρ = 0,3 кг/м^3. Найти объемную плотность кинетической энергии молекул азота в смеси.

4.10. Теплоизолированный сосуд с кислородом движется поступательно со скоростью $\upsilon = 100$ м/с. Температура газа $t_0 = 0$ °С. Какой будет средняя энергия поступательного движения молекул газа, если сосуд остановить?

4.11. Определить число и вид степеней свободы молекул газа, средние энергии которых равны: а) $(3/2)kT$, б) $(5/2)kT$, в) $3kT$, г) $(7/2)kT$, д) $6kT$.

4.12. При температуре $T = 1000$ К у 4-атомных молекул некоторого идеального газа возбуждены все степени свободы, включая колебательные. Определить суммарную кинетическую энергию $\langle E \rangle$ теплового движения молекул для одного моля газа.

4.13. Из скольких атомов состоят молекулы газа, если при «замораживании» колебательных степеней свободы средняя энергия молекулы уменьшается в 3 раза?

4.14. При нагревании некоторого газа до температуры, при которой «включены» все колебательные степени свободы, средняя энергия молекулы увеличилась в 1,4 раза. Считая, что при начальной температуре вращательные степени свободы молекул были возбуждены, определить число атомов в молекуле газа.

4.15. Найти среднюю энергию одного моля идеального газа, молекулы которого состоят из 4 атомов, расположенных вдоль одной прямой. Температура газа T выше температур вырождения для вращательных и колебательных степеней свободы.

4.16. Найти среднюю энергию одного моля метана CH_4 при температуре T, превышающей температуры возбуждения вращательных и колебательных степеней свободы.

4.17. Найти значения средней квадратичной круговой частоты вращения молекул водорода (H_2) и кислорода (O_2) при температуре $t = 27$°С, если их моменты инерции относительно оси, перпендикулярной оси симметрии молекулы, равны соответственно: $J_1 = 0{,}47 \cdot 10^{-40}$ г·см^2 и $J_2 = 19{,}2 \cdot 10^{-40}$ г·см^2.

4.18. Расстояние между атомами азота в молекуле N_2 равно $\ell = 0{,}11$ нм. Считая атомы азота материальными точками, определить среднеквадратичную угловую скорость вращения молекулы азота при температуре $T = 300$ К.

4.19. Азот нагрет до температуры $T = 300$ К. Найти характеристическую температуру θ для вращения молекул азота, если мо-

мент инерции молекулы равен $J = 1{,}38 \cdot 10^{-39}$ г·см^2. Минимальную энергию возбуждения вращения молекулы принять равной энергии кванта вращательного движения $\hbar\omega$.

4.20. В молекуле воды реализуются три типа колебаний атомов, частоты которых $\omega_1 = 3{,}0 \cdot 10^{14}$ рад/с, $\omega_2 = 6{,}9 \cdot 10^{14}$ рад/с и $\omega_3 = 7{,}1 \cdot 10^{14}$ рад/с. Оценить температуру θ, при которой возбуждаются колебания всех трех типов. Минимальную энергию возбуждения колебаний атомов в молекуле принять равной $\hbar\omega$.

4.21. Момент инерции линейной молекулы CO_2 (C–O–C) относительно оси, перпендикулярной её оси, $J = 7{,}2 \cdot 10^{-39}$ г·см^2. Частоты двух поперечных нормальных колебаний молекулы, совершаемых во взаимно перпендикулярных плоскостях, одинаковы и равны $\nu_1 = 2{,}00 \cdot 10^{13}$с$^{-1}$, частота синфазных продольных колебаний $\nu_2 = 4{,}16 \cdot 10^{13}$с$^{-1}$, а частота продольных колебаний, при которых атомы кислорода колеблются в противофазе, $\nu_3 = 7{,}05 \cdot 10^{13}$с$^{-1}$. Вычислить характеристические температуры для вращения молекул и всех типов колебаний. Минимальную энергию возбуждения тепловых колебаний атомов в молекуле принять равной энергии кванта колебательного движения $h\nu$.

4.22. На невесомой нерастяжимой нити длиной $l = 2$ м подвешен маленький шарик массой $m = 10$ мг. Маятник может совершать колебания в одной плоскости. Определить среднеквадратичное отклонение маятника от положения равновесия при температуре воздуха $t = 20$ °С.

4.23. Зеркальце гальванометра подвешено на кварцевой нити, модуль кручения которой равен $D = 1{,}38 \cdot 10^{-15}$ Н·м. На зеркальце падает параллельный пучок лучей и, отражаясь от него, попадает на экран. Температура воздуха $T = 300$ К, расстояние до экрана $l = 20$ м. 1) Оценить диаметр d пятна на экране. 2) Во сколько раз изменится размер пятна, если повысить температуру до $T_1 = 600$ К?

4.24. Определить среднеквадратичное горизонтальное перемещение зёрен гуммигута в воде при температуре $t = 20$ °С за время $\tau = 1$ мин. Радиус зёрен $r = 0{,}5$ мкм, коэффициент вязкости воды $\eta = 1 \cdot 10^{-3}$ Па·с.

4.25. Согласно теории Эйнштейна и Смолуховского, число Авогадро N_A можно определить, наблюдая движение броуновских частиц и измеряя их среднеквадратичное перемещение в некотором фиксированном направлении. Рассчитать это число, если за

время $\tau = 5$ мин среднеквадратичное перемещение зёрен гуммигута радиусом $r = 0{,}212$ мкм в глицерине при температуре $t = 20$ °С равно 0,63 мкм. Коэффициент вязкости глицерина $\eta = 1{,}48$ Па·с.

4.26. Среднеквадратичное горизонтальное перемещение молекул формамида при температуре $t = 20$ °С в воде за время $\Delta t = 5$ мин равно ~1 мм. Коэффициент вязкости воды $\eta = 1 \cdot 10^{-3}$ Па·с. Полагая молекулу формамида шарообразной, оценить ее радиус a.

§5. Идеальный газ в поле потенциальных сил. Распределение Больцмана

- Распределение Больцмана для молекул идеального газа в потенциальном поле:

$$\mathrm{d}P_{\mathrm{B}}(x,y,z) = A\exp\left(-\frac{U(x,y,z)}{kT}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,,$$

где $U(x,y,z)$ – потенциальная энергия молекулы, имеющей координаты в интервале значений $(x, x+\mathrm{d}x)$, $(y, y+\mathrm{d}y)$, $(z, z+\mathrm{d}z)$.

- Условие нормировки распределения Больцмана:

$$\int_{\mathrm{V}} \mathrm{d}P_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{r}) = 1\,,$$

то есть

$$\int_{\mathrm{V}} A\exp\left(-\frac{U(\mathbf{r})}{k_{\mathrm{B}}T}\right)\mathrm{d}\tau_{\mathbf{r}} = 1\,,$$

где интегрирование проводится по всему объему V, $\mathrm{d}\tau_r$ – элемент объема в координатном пространстве, находясь в котором молекула имеет потенциальную энергию $U(\boldsymbol{r})$. В декартовых координатах: $\mathrm{d}\tau(\boldsymbol{r}) = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

- Концентрация молекул газа в поле тяжести Земли на высоте z над поверхностью Земли в приближении изотермической атмосферы:

$$n(z) = n(0)\exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) = n(0)\exp\left(-\frac{\mu gz}{RT}\right),$$

где $n(0)$ – концентрация молекул на поверхности Земли, m – масса одной молекулы, μ – молярная масса.

- Парциальное давление молекул газа на высоте z над поверхностью Земли в приближении изотермической атмосферы (барометрическая формула):

$$p(z) = p(0)\exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) = p(0)\exp\left(-\frac{\mu gz}{RT}\right),$$

где $p(0) = n(0)kT$.

- Плотность $\rho(z)$ молекул газа на высоте z над поверхностью Земли в приближении изотермической атмосферы:

$$\rho(z) = \rho(0)\exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) = \rho(0)\exp\left(-\frac{\mu gz}{RT}\right),$$

где $\rho(0) = mn(0) = (\mu/N_A)\,n(0)$, $N_A = 6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$.

- Концентрация молекул газа во вращающемся с угловой скоростью ω цилиндре на расстоянии r от оси вращения:

$$n(r) = n(0)\exp\left(\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}\right) = n(0)\exp\left(\frac{\mu\omega^2 r^2}{2RT}\right),$$

где $n(0)$ – концентрация молекул при $r = 0$.

5.1. Считая атмосферу Земли изотермической, а ускорение свободного падения g = const, определить давление: а) на высоте 1 км;. б) на высоте 10 км; в) в шахте на глубине 1 км. Температура воздуха $T = 293$ К, давление на уровне моря равно p_0. Молярная масса воздуха $\mu = 29\cdot10^{-3}$ кг/моль.

5.2. Самое высокое место, обжитое человеком на Земле, монастырь Ронгбук в Гималаях находится на высоте 5 км над уровнем моря. А самая глубокая в мире угольная шахта «Тау-Тона» вблизи Йоханнесбурга имеет глубину 5 км. На сколько бы отличались давления воздуха в этих местах, если бы температура атмосферы Земли была постоянна и равна 273 К? Давление воздуха на уровне моря считать равным $p_0 = 1{,}01\cdot10^5$ Па. Молярная масса воздуха $\mu = 29\cdot10^{-3}$ кг/моль.

5.3. У поверхности Земли давление воздуха равно $p(0) = 10^5$ Па, температура $t = 0$ °С. Найти массу воздуха в 1 м^3 у поверхности Земли и на высоте $h = 5$ км, считая атмосферу изотермической. Молярная масса воздуха $\mu = 29$ г/моль.

5.4. На какой высоте над уровнем моря плотность воздуха в 1,5 раза меньше своего значения на уровне моря. Температура воздуха равна $t = 0$ °С. Считать, что температура воздуха и ускорение свободного падения не зависят от высоты.

5.5. На какой высоте над уровнем моря плотность воздуха меньше на 1%, чем на поверхности при температуре атмосферы $t = 20$ °С.

5.6. На высоте $h_0 = 1$ км давление воздуха $p_0 = 0{,}9\cdot10^5$ Па, температура $T = 273$ К. Найти разность давлений воздуха на высоте $h_1 = 2$ км и в шахте глубиной $h_2 = 2$ км, считая атмосферу изотермической. Средняя молярная масса воздуха $\mu = 29$ г/моль.

5.7. Давление воздуха на уровне моря $p_0 = 9{,}997 \cdot 10^4$ Па, а на вершине горы $p_H = 7{,}865 \cdot 10^4$ Па. Определить высоту горы H, если температура воздуха везде одинакова и равна $t = 5$ °С. Молярная масса воздуха $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

5.8. По соображениям безопасности планер может подниматься на высоту, где атмосферное давление p составляет 60% от нормального давления $p_0 = 0{,}1$ МПа. Найти предельную высоту полёта планера, считая температуру воздуха за его бортом постоянной и равной $t = 5$ °С.

5.9. Пассажирский самолет совершает полет на высоте $h = 8$ км. В кабине самолета поддерживается постоянное давление, соответствующее высоте $h_0 = 2$ км. Определить разность давлений в кабине самолёта и за бортом, если средняя температура наружного воздуха $t_0 = 0$ °С. Давление воздуха у поверхности Земли нормальное. Молярная масса воздуха $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

5.10. Известно, что газообмен в легких осуществляется благодаря разности парциальных давлений кислорода и углекислого газа в альвеолярном воздухе и в крови. На высоте, в условиях более низкого парциального давления кислорода в атмосфере, насыщение крови кислородом уменьшается, что приводит к гипоксии, получившей название "горной болезни". Определить парциальное давление кислорода в горах на высоте: а) 2 км; б) 5 км. При нормальных условиях на уровне моря содержание кислорода в воздухе равно 20,95%. Считать, что температура воздуха не зависит от высоты и равна $t = 0$ °С.

5.11 У поверхности Земли в 1 см^3 воздуха содержится примерно 10^5 пылинок, а на высоте $h = 3$ км – примерно 10^2. Определить среднюю массу пылинки и её размер, если плотность пылинки $\rho = 1{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3. Считать, что температура воздуха не зависит от высоты и равна $t = 27$ °С.

5.12. Пылинки массой $m = 10^{-18}$г взвешены в воздухе, температура которого постоянна и равна $T = 300$ К. Определить толщину слоя воздуха, в пределах которого концентрация пылинок различается не более чем на $\delta = 1\%$.

5.13. Вблизи поверхности Земли отношение концентраций аргона и кислорода в воздухе составляет $\xi_0 = 0{,}045$. Считая, что температура атмосферы не зависит от высоты и равна $t = 0$ °С, определить ξ на высоте $h = 15$ км.

5.14. У поверхности Земли при температуре $T = 300$ К концентрация молекул аргона ($\mu_{Ar} = 40$ г/моль) превышает концентрация молекул гелия ($\mu_{He} = 4$ г/моль) примерно в $\alpha = 1780$ раз. На какой высоте: а) концентрации этих газов будут равны; б) концентрация водорода превысит концентрацию аргона в $\beta = 2$ раза? Считать атмосферу изотермической.

5.15. Пусть на высоте h_1 концентрация газа с молярной массой μ_1 в α раз больше концентрации газа с молярной массой $\mu_2 > \mu_1$. На какой высоте h_2 концентрация первого газа будет в β раз меньше концентрации второго газа? Использовать модель изотермической атмосферы при температуре T.

5.16. Установленная вертикально и закрытая с обоих концов труба высотой H и объемом V наполнена идеальным газом с молярной массой μ. Температура стенок трубы поддерживается постоянной и равной T. Давление газа внутри трубы вблизи её основания равно p_0. Найти а) давление p вблизи верхнего конца трубы; б) количество N молекул газа в трубе.

5.17. Вычислить массу столба воздуха высотой $h = 1$ км и сечением $S = 1$ м^2, если у поверхности Земли плотность воздуха $\rho_0 = 1{,}293$ кг/м^3, а давление $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па. Считать, что температура воздуха не зависит от высоты.

5.18. Закрытый вертикальный цилиндрический сосуд высотой H и площадью основания S, находящийся в поле силы тяжести, заполнен идеальным газом, масса которого M. Температура газа в сосуде везде одинакова и равна T. Масса молекулы газа m. Определить зависимость плотности газа от высоты $\rho(h)$.

5.19. Закрытый, вертикально установленный, цилиндрический сосуд объемом V с площадью основания S заполнен азотом (молярная масса μ), температура которого T. Разность сил давления газа на дно и крышку сосуда равна ΔF. Найти зависимость давления в сосуде от высоты $p(h)$.

5.20. Идеальный газ находится в вертикальном цилиндрическом сосуде высотой H в поле силы тяжести при температуре T. Найти молярную массу газа, если на высоте $H/3$ концентрация его молекул в β раз меньше концентрации молекул у дна сосуда.

5.21. Один моль идеального газа с молярной массой μ находится в вертикальном цилиндре высотой H в поле силы тяжести при температуре T. На какой высоте находится центр масс газа?

5.22. Показать, что центр тяжести вертикального цилиндрического столба воздуха находится на высоте h_e, на которой плотность газа в e раз меньше, чем на уровне Земли. Считать, что температура воздуха T и ускорение свободного падения g не зависят от высоты.

5.23. Идеальный газ с молярной массой μ находится в очень высоком вертикальном цилиндрическом сосуде в поле силы тяжести при температуре T. Считая, что $g = \text{const}$, определить среднее значение потенциальной энергии молекул газа.

5.24. В высоком вертикальном цилиндре находится смесь азота и гелия. Концентрации молекул газов у дна сосуда одинаковы. Считая, что по всей высоте поддерживается одна и та же температура T=273 К, ускорение свободного падения равно g, найти высоту h, на которой отношение концентраций молекул газов в смеси составит α = 1,001.

5.25. Высокий закрытый цилиндрический сосуд с воздухом находится в однородном поле силы тяжести (ускорение свободного падения равно g). Как должна меняться с высотой температура воздуха, чтобы его плотность везде была одинакова? Дно сосуда поддерживается при температуре T_0. Молярная масса воздуха равна μ.

5.26. С увеличением высоты h над уровнем моря (примерно до 10 км) температура воздуха изменяется по закону: $T = T_0(1 - ah)$, где a – постоянная величина. По какому закону изменяются с высотой давление воздуха p и его плотность ρ? Давление воздуха на уровне моря равно p_0.

5.27. В вертикальном цилиндрическом сосуде высотой H и площадью основания S, находится идеальный газ, молярная масса которого μ. Температура газа линейно возрастает от значения T_1 у нижнего торца цилиндра до значения T_2 у его верхнего торца. Давление воздуха на дне сосуда равно p_0. Как зависит от высоты давление газа.

5.28. Дисперсная коллоидная система из взвешенных в растворителе шарообразных частиц, находится в поле силы тяжести при температуре T. При наблюдении в микроскоп обнаружено, что среднее число коллоидных частиц в слоях, расстояние между которыми Δh, отличается друг от друга в α раз. Плотность растворителя ρ_0, плотность коллоидных частиц ρ. Определить радиус r коллоидных частиц.

5.29. Закрытый цилиндрический сосуд длиной $l = 3$ м заполнен азотом (N_2) при температуре $T = 300$ К и движется с ускорением $a = 30$ м/с^2 вдоль своей оси. Во сколько раз отличаются силы давления газа на противоположные торцы цилиндра?

5.30. Закрытую с обоих торцов горизонтальную трубку длиной l, заполненную смесью двух газов с молярными массами μ_1 и $\mu_2 > \mu_1$, перемещают с постоянным ускорением a вдоль оси трубки. Во сколько раз отличаются отношения концентраций газов вблизи торцов трубки?

5.31. Закрытую с одного торца горизонтальную цилиндрическую трубку длиной l перемещают в воздухе вдоль её оси с ускорением a, направленным вдоль оси трубки от её закрытого торца к открытому. Молярная масса воздуха μ. На каком расстоянии x_0 от открытого торца трубки давление внутри нее в α раз больше атмосферного?

5.32. Вертикально расположенный закрытый цилиндрический сосуд заполнен газообразным азотом при температуре $T = 300$ К. Высота сосуда $H = 10$ м. Сосуд движется вертикально вверх с ускорением a. Давления на верхний и нижний торцы сосуда отличаются на 1%. Определить ускорение сосуда.

5.33. Вертикально расположенная закрытая цилиндрическая трубка высотой H заполнена воздухом при температуре T. Трубку перемещают вертикально вниз с ускорением $a < g$. Во сколько раз отличаются концентрации молекул воздуха вблизи верхнего и нижнего торцов трубки (молярная масса воздуха μ)?

5.34. Идеальный газ заполняет цилиндрический сосуд при температуре T. Радиус цилиндра R, масса одной молекулы m. Цилиндр вращается в угловой скоростью ω вокруг своей оси. На каком расстоянии от оси вращения концентрация молекул в $\beta = 3$ раза меньше, чем возле стенки цилиндра?

5.35. Идеальный газ заполняет цилиндрический сосуд при температуре T. Радиус цилиндра r_0, молярная масса газа μ. С какой угловой скоростью ω надо вращать цилиндр вокруг его оси, чтобы концентрация молекул газа у стенок цилиндра в 1,5 раза превышала концентрацию молекул вблизи оси?

5.36. Вертикальный барабан центрифуги радиусом $r_0 = 0{,}5$ м заполнен газом радоном ^{222}Rn и вращается вокруг своей оси со скоростью $\nu = 50$ об/с. Давление газа в центре барабана равно $p_0 = 10^5$ Па. Температура газа во всем объеме постоянна и равна

$T = 300$ К. 1) Определить давление газа у стенки барабана. 2) По какому закону плотность радона в барабане зависит от расстояния r до его оси?

5.37. Вертикальный цилиндрический сосуд, заполненный идеальным газом, вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Температура газа в сосуде равна T. Концентрации молекул газа на расстояниях r_1 и $r_2 > r_1$ от оси вращения отличаются друг от друга в β раз. Определить молярную массу газа μ.

5.38. Центрифуга с радиусом ротора $r = 0{,}4$ м заполнена газом при температуре $T = 300$ К и вращается с угловой скоростью $\omega = 500$ рад/с. Давление у стенки ротора в $n = 2{,}1$ раза больше давления вблизи оси. Определить, какой газ находится в центрифуге.

5.39. Горизонтально расположенную трубку с закрытыми торцами вращают с постоянной угловой скоростью $\omega = 150$ рад/с вокруг вертикальной оси, проходящей через один из её торцов. В трубке находится азот при температуре $T = 300$ К. Определить длину трубки, если отношение концентраций молекул у её противоположных торцов равно $\beta = 1{,}5$.

5.40. Закрытая с одного конца трубка длиной $l = 2$ м вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через открытый конец трубки, со скоростью $\nu = 10$ оборотов в секунду. Давление окружающего воздуха $p_0 = 1{,}000 \cdot 10^5$ Па, его температура $t = 20$ °С. Определить давление воздуха в середине трубки.

5.41. Горизонтально расположенную трубку длиной l, один конец которой открыт, а другой закрыт, вращают с постоянной угловой скоростью ω_1 вокруг вертикальной оси, проходящей через её открытый конец. Температура окружающего воздуха T, его молярная масса μ. Во сколько раз надо изменить угловую скорость вращения, чтобы давление на закрытый торец трубки уменьшилось в α раз?

5.42. Закрытую с обоих торцов горизонтально расположенную трубку длиной l, наполненную идеальным газом с молярной массой μ, вращают вокруг вертикальной оси, находящейся на расстоянии $l/3$ от одного из её торцов. Температура газа в трубке T. Во сколько раз отличаются силы давления газа на торцы трубки?

5.43. Горизонтально расположенная трубка длиной $l = 2$ м, оба конца которой открыты, вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через её середину, со скоростью $\nu = 30$ оборотов в се-

кунду. Температура воздуха $t = 17$ °С, атмосферное давление $p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па. Определить давление в середине трубки.

5.44. Дисперсная система, состоящая из коллоидных частиц в растворителе, находится в ценрифуге, вращающейся вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Радиус центрифуги a. Плотность растворителя ρ_0, плотность коллоидных частиц ρ, температура системы T. Отношение концентраций коллоидных частиц у стенок центрифуги на расстоянии $r_1 = a$ от оси вращения и на расстоянии $r_2 = a/2$ (в одной плоскости) равно β. Найти молярную массу коллоидных частиц.

5.45. Идеальный газ находится в равновесном состоянии в некотором объеме при температуре T во в потенциальном поле. Потенциальная энергия его молекул равна $u(\boldsymbol{r})$. Концентрация молекул вблизи точки с радиус-вектором $\boldsymbol{r}_0$ равна n_0. Определить концентрацию молекул вблизи точки с радиус-вектором $\boldsymbol{r}$.

5.46. Молекулы идеального газа находятся в равновесии в центрально-симметричном силовом поле. Потенциальная энергия одной молекулы в этом поле равна $\varepsilon_{\text{пот}} = \varepsilon(r)$. Концентрация молекул на расстоянии r_1 от центра поля равна n_1. Найти число молекул в слое $(r, r+\mathrm{d}r)$.

5.47. Потенциальная энергия молекул идеального газа в некотором центрально-симметричном поле зависит от расстояния r до центра поля как $u(r) = \alpha r^2$, где a – положительная постоянная. Температура газа T, концентрация молекул в центре n_0. Найти: а) наиболее вероятное расстояние молекул от центра поля; б) относительное число молекул, находящихся в слое $(r, r+\mathrm{d}r)$.

5.48. Потенциальная энергия молекул идеального газа, находящегося в центрально-симметричном поле зависит от расстояния r до центра поля как $u(r) = ar$, где a – положительная постоянная. Температура газа T. Определить: а) плотность распределения молекул в зависимости от r; б) наиболее вероятное расстояние $r_{\text{нв}}$ молекул от центра поля; в) среднее значение потенциальной энергии одной молекулы газа.

5.49. Молекулы идеального газа находятся в однородном потенциальном поле при температуре T. На расстоянии l вдоль направления поля концентрации молекул изменяется в β раз. Определить силу f, действующую на молекулы со стороны поля.

5.50. Система из N_0 частиц, энергия которых может принимать только два значения ε_1 и ε_2, находится в равновесном состоянии при температуре T. Вычислить суммарную среднюю энергию $\langle E \rangle$ всех частиц.

5.51. При испарении жидкости часть молекул, кинетическая энергия которых больше энергии связи молекул в жидкости, покидает жидкость, переходя в газовую фазу и образуя над жидкостью пар. При этом часть молекул из пара переходит в жидкость. В состоянии термодинамического равновесия пара и жидкости число молекул, покидающих жидкость, равно числу молекул, переходящих из газовой фазы в жидкую. Такой пар называется насыщенным. 1) Оценить концентрацию молекул насыщенного пара при температуре T, если молярная теплота испарения жидкости q, а концентрация молекул жидкости n_0. 2) Найти концентрацию молекул насыщенного пара воды при температуре $t = 100$ °C, если $q = 4 \cdot 10^4$ Дж/моль, а $n_0 = 2 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$. 3) При какой температуре концентрация молекул пара будет равна $n = 2 \cdot 10^{21}$ м$^{-3}$? Концентрация молекул жидкости $n_0 = 2 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

§6. Молекулярно-кинетические характеристики газов

- Вероятность dP столкновения падающей частицы с частицей-мишенью в слое толщиной dx:

$$\mathrm{d}P = \sigma n_0 \mathrm{d}x ,$$

где n_0 – концентрация частиц – мишеней , $\sigma = \pi d^2$ – поперечное сечение рассеяния, d – эффективный (газокинетический) диаметр молекулы.

- Плотность вероятности $P(x)$ пробега молекулой расстояния x без столкновений:

$$P(x) = \exp(-x/l) .$$

- Средняя частота столкновений $\langle \nu \rangle$ одной молекулы с другими:

$$\langle \nu \rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n_0 \langle v \rangle ,$$

где $\langle v \rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$ – средняя скорость молекул газа.

- Средняя длина свободного пробега:

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n_0} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_0} .$$

- Среднее время свободного пробега:

$$\tau = \frac{1}{\langle \nu \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_0 \langle v \rangle} .$$

- Число столкновений молекул идеального газа в объеме 1 м^3 за время 1 с:

$$z = 2n^2 d^2 \sqrt{\pi RT/\mu} .$$

- Степень вакуума в сосуде с характерным размером L:

$\ell < L$ – низкий вакуум;
$\ell \approx L$ – средний вакуум;
$\ell >> L$ – высокий вакуум.

6.1. Рассчитать среднюю длину свободного пробега молекул азота при нормальных условиях ($p = 10^5$ Па, $t = 0$ °С). Эффективный диаметр молекул азота $d = 3{,}6 \cdot 10^{-8}$ см.

6.2. При каком давлении средняя длина свободного пробега молекул водорода составляет $l = 2{,}5$ см при температуре 68 °С? Эффективный диаметр молекул водорода равен $d = 2{,}3 \cdot 10^{-10}$ м.

6.3. При каком давлении средняя длина свободного пробега молекул азота равна $l_1 = 1$ мм, если при нормальном давлении $p_0 = 1$ атм и при той же температуре она равна $l_0 = 6 \cdot 10^{-5}$ мм?

6.4. В газоразрядной трубке объёмом $V = 1$ л находится $m = 2$ г гелия. Эффективный диаметр молекул гелия $d = 2{,}0 \cdot 10^{-10}$ м. Определить длину свободного пробега молекул газа.

6.5. На высоте $h = 100$ км над поверхностью Земли среднегодовая температура $t \approx -77°$ С, а диаметр молекул водорода и гелия на этих высотах можно считать равным $d_0 = 2 \cdot 10^{10}$ м. Оценить длину свободного пробега молекул газов в этих условиях.

6.6. В сосуде объемом V находится кислород массой M. Эффективный диаметр его молекул равен d. Во сколько раз среднее расстояние $\langle a \rangle$ между молекулами кислорода меньше средней длины l свободного пробега молекул? Получить оценку для $V = 10$ л, $M = 15$ г, $d = 2{,}9 \cdot 10^{-10}$ м.

6.7. Определить плотность ρ разреженного азота N_2, если средняя длина свободного пробега молекул $l = 10$ см. Эффективный диаметр молекул азота $d = 3{,}6 \cdot 10^{-10}$м.

6.8. Для молекул кислорода O_2 при атмосферном давлении и температуре $T = 300$ К длина свободного пробега $l = 0{,}98 \cdot 10^{-5}$ см. Найти газокинетический диаметр d молекулы кислорода.

6.9. Найти время свободного пробега молекул углекислого газа CO_2 при давлении $p = 100$ Па и температуре $t = 27$ °С, если эффективный диаметр молекул $d = 4{,}6 \cdot 10^{-10}$ м.

6.10. Оценить средние значения длины и времени свободного пробега для протонов космических лучей в Галактике, считая, что средняя концентрация межзвездного газа $n = 10^4$ частиц/м^3. Скорость космических частиц близка к скорости света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Масса протона практически равна массе атома водорода, а диаметр протона $d \sim 2 \cdot 10^{-15}$ м.

6.11. Эффективный диаметр молекул азота $d = 3{,}6 \cdot 10^{-10}$ м. Температура газа $T = 300$ К, концентрация молекул $n = 10^{20}$ м$^{-3}$. Найти среднее время τ пробега молекул между двумя последовательными столкновениями.

6.12. При давлении $p = 10^5$ Па среднеквадратичная скорость $v_{\text{скв}}$ молекул аргона равна 414 м/с. Эффективный диаметр молекул аргона $d = 3{,}5 \cdot 10^{-10}$ м. Найти среднюю длину свободного пробега молекул и частоту столкновений одной молекулы с другими.

6.13. Сколько столкновений за 1 с испытывает в среднем одна молекула кислорода при нормальных условиях ($p = 10^5$ Па, $t = 0$ °С), если эффективный диаметр молекулы кислорода $d = 3{,}6 \cdot 10^{-10}$ м?

6.14. При некоторой температуре средняя длина свободного пробега молекул газа равна $l_1 = 200$ нм, а средняя скорость молекул $\langle v \rangle = 2{,}15$ км/с. Определить среднюю частоту столкновений одной молекулы газа с другими, если при той же температуре давление газа уменьшить в $\alpha = 1{,}5$ раза.

6.15. Сколько столкновений происходит между молекулами водорода за $\Delta t = 1$ с в объеме $V = 1$ см^3 при температуре $t = 0$ °С, если плотность водорода $\rho = 8{,}5 \cdot 10^{-2}$ кг/м^3? Эффективный диаметр молекул водорода $d = 2{,}7 \cdot 10^{-10}$ м.

6.16. В сосуде объемом $V = 2{,}5$ л находится углекислый газ CO_2 при температуре $t = 127$ °С и давлении $p = 1{,}3 \cdot 10^4$ Па. Найти число молекул N в сосуде и число столкновений Z между молекулами за время $\Delta t = 1$ с. Эффективный диаметр молекул газа $d = 4{,}6 \cdot 10^{-10}$ м.

6.17. В сосуде находится смесь двух газов с молярными массами μ_1 и μ_2. В единице объема смеси содержится n_1 молекул одного сорта и n_2 другого. Радиусы молекул r_1 и r_2. Определить: а) частоту столкновений молекул сорта 1 с молекулами сорта 2; б) частоту столкновений молекулы сорта 2 с молекулами сорта 1; в) среднее значение полного числа соударений молекул одного газа с молекулами другого в единице объема за 1 с.

6.18. В состав воздуха входят азот ($\alpha_1 = 78\%$) и кислород ($\alpha_2 = 21\%$). Газокинетические диаметры молекул азота и кислорода можно считать одинаковыми: $d = 3{,}6 \cdot 10^{-10}$ м. Оценить, сколько раз при температуре $T = 273$ К за 1 с в объеме $V = 1$ см^3 воздуха сталкиваются молекулы азота друг с другом и молекулы азота с молекулами кислорода. В 1 м^3 воздуха при нормальных условиях содержится $N_{\text{L}} = 2{,}7 \cdot 10^{25}$ молекул (число Лошмидта).

6.19. Газ состоит из молекул двух видов с массами m_1 и m_2, концентрации которых равны n_1 и n_2 соответственно. Газокинети-

ческие радиусы молекул равны r_1 и r_2. Определить среднюю длину свободного пробега для молекул обоих видов.

6.20. В смеси водорода (H_2) и углекислого газа (CO_2) концентрации компонент равны $n_1 = 2{,}6\cdot10^{25}$ м$^{-3}$ и $n_2 = 5{,}2\cdot10^{25}$ м$^{-3}$ соответственно. Газокинетические радиусы молекул H_2 и CO_2 равны $r_{01} = 1{,}35\cdot10^{-10}$ м и $r_{02} = 2{,}3\cdot10^{-10}$ м. Найти средние длины свободного пробега этих молекул.

6.21. Идеальный газ в закрытом сосуде нагревают при постоянном давлении. Как зависят от температуры T средняя длина свободного пробега молекул l, средняя частота столкновений $\langle\nu\rangle$ одной молекулы с другими и число столкновений z между молекулами в 1 м^3 за 1 с?

6.22. Идеальный газ постоянной массы сжимают изотермически. Как зависят от давления средняя длина свободного пробега молекул l, средняя частота столкновений $\langle\nu\rangle$ одной молекулы с другими и число столкновений z между молекулами в 1 м^3 за 1 с?

6.23. В результате изохорического процесса давление идеального газа повысилось в α раз. Во сколько раз изменились средняя длина свободного пробега и средняя частота столкновений одной молекулы с другими?

6.24. Некоторое количество азота, находившегося при нормальных условиях, нагревают от температуры $t_1 = 0$ ºС до температуры $t_2 = 100$ ºС. Какими будут средние значения длины l и времени τ свободного пробега молекул, если процесс протекает: а) изохорически; б) изобарически? Эффективный диаметр молекул азота $d = 3{,}6\cdot10^{-8}$ см.

6.25. В результате некоторого процесса объем идеального газа увеличился в α раз. Во сколько раз изменилась средняя частота столкновений одной молекулы с другими, если процесс был: а) изотермический; б) изобарический?

6.26. Идеальный газ сжимают в ходе политропического процесса, при котором давление и объем связаны соотношением: $pV^n = \text{const}$, где $n = \text{const}$. Найти изменение средней длины свободного пробега l и средней частоты $\langle\nu\rangle$ столкновений одной молекулы с другими в зависимости от: а) объема; б) давления; в) температуры.

6.27. В ходе адиабатического процесса давление идеального газа уменьшилось в 2 раза. Как при этом изменились средняя длина

свободного пробега l и средняя частота $\langle \nu \rangle$ столкновений одной молекулы с другими?

Указание. При адиабатическом процессе давление и объем газа связаны соотношением: $pV^{\gamma} = \text{const}$, где $\gamma > 1$ – постоянная величина.

6.28. До какого давления нужно откачивать пространство между стенками дьюаровского сосуда, чтобы там был вакуум? Расстояние между стенками сосуда $L = 8$ мм, температура воздуха снаружи $t = 20$ °С. Эффективный диаметр молекул воздуха считать равным $d = 3{,}5 \cdot 10^{-10}$ м.

6.29. Вакуумный прибор содержит некоторое количество атмосферного воздуха при температуре $t = 100$ °С. Давление в колбе прибора равно $p = 1 \cdot 10^4$ Па. Можно ли считать прибор хорошо вакуумированным, если характерный размер устройства $L = 10$ см? Эффективный средний диаметр молекул воздуха считать равным $d = 3{,}5 \cdot 10^{-8}$ см.

6.30. Сферический сосуд радиусом $r = 10$ см содержит гелий, концентрация атомов которого такова, что они не испытывают столкновений между собой. Какая масса газа находится в сосуде? Эффективный диаметр атомов гелия $d = 2{,}0 \cdot 10^{-10}$м.

6.31. При каком среднем диаметре a пор в пористом веществе, находящемся в атмосфере гелия, достигается вакуум при давлении $p = 10^5$ Па и температуре $t = 0$ °С? Эффективный диаметр атомов гелия $d = 2{,}18 \cdot 10^{-10}$ м.

6.32. Оценить вероятность того, что при температуре $t = 0$ °С и давлении $p = 100$ Па молекула водорода пройдет расстояние $s = 0{,}4$ мм без столкновений. Эффективный диаметр молекул водорода равен $d = 2{,}3 \cdot 10^{-10}$ м.

6.33. Оценить вероятность того, что частица пройдет без столкновений путь, равный удвоенной (утроенной, удесятиренной) длине свободного пробега.

6.34. Какая часть молекул идеального газа пролетает без столкновений расстояние: а) превышающее среднюю длину свободного пробега l; б) от l до $2l$?

6.35. Пусть вероятность того, что молекула испытает столкновение в течение времени $\mathrm{d}t$, равна $\alpha \mathrm{d}t$, где $\alpha = \text{const}$. Определить вероятность того, что молекула не испытает столкновений за время t, а также среднее время между столкновениями.

§7. Явления переноса

- Плотность потока физической величины Y:

$$\boldsymbol{j} = -\zeta \cdot \operatorname{grad} Y ,$$

где ζ – коэффициент переноса.

- Полный поток величины Y через поверхность площадью S за единицу времени:

$$J = \int_{\mathrm{S}} \left(\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \right) = \int_{\mathrm{S}} j_n \mathrm{d}S .$$

- Закон (уравнение) Фурье для теплопроводности.

Плотность потока теплоты равна:

$$\boldsymbol{j}_Q = -\lambda \cdot \operatorname{grad} T .$$

- Коэффициент теплопроводности идеального газа:

$$\lambda = \frac{1}{3} \langle v \rangle \, l \, \bar{c}_V \rho .$$

- Формула Ньютона–Рихмана для количества теплоты, отдаваемого телом окружающей среде в результате теплообмена:

$$Q_{\text{потерь}} = \alpha \left(T_1 - T_0 \right) S ,$$

где α – коэффициент теплообмена, T_1 и T_0 – температуры тела и окружающей среды.

- Выражение для потока теплоты через тепловое сопротивление R_T:

$$J_Q = \frac{T_1 - T_2}{R_T} .$$

- Тепловое сопротивление единицы длины двустенной цилиндрической полой трубы, между стенками которой находится вещество с коэффициентом теплопроводности λ:

$$R_T = \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{R_{\text{внеш}}}{R_{\text{внутр}}} .$$

- Уравнение Ньютона для силы вязкого трения:

$$F_{\text{тр}} = -\eta \cdot \frac{\partial u}{\partial x} S ,$$

где η – коэффициент вязкости, S – площадь поверхности, на которую действует сила вязкого трения, $\frac{\partial u}{\partial x}$ – градиент скорости в направлении, перпендикулярном течению жидкости (газа).

- Плотность потока импульса при течении вязких газов и жидкостей:

$$j_u = -\eta \cdot \frac{\partial u}{\partial x}.$$

- Коэффициент вязкости газов:

$$\eta = \frac{1}{3}\langle v \rangle l \rho .$$

- Формула Пуазейля для расхода (объемного потока) жидкости или газа:

$$J_V = \frac{\delta V}{\delta t} = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8 \eta h},$$

где R, h – радиус и длина трубы соответственно, Δp – разность давлений на концах трубы.

- Гидравлическое сопротивление трубы:

$$Z = \frac{8 \eta h}{\pi R^4}.$$

- Формула Стокса для силы сопротивления при движении шарика в вязкой среде:

$$f_{\text{сопр}} = 6 \pi R \eta v,$$

где R – радиус шарика, v – скорость его движения.

- Число Рейнольдса: $\mathrm{Re} = \frac{\rho u d}{\eta}$,

где u – характерная скорость потока, d – характерный линейный размер (например, диаметр трубы).

- Уравнение Фика для плотности потока молекул при диффузии:

$$\boldsymbol{j}_D = -D \cdot \operatorname{grad} n .$$

- Коэффициент диффузии в газах: $D = \frac{1}{3}\langle v \rangle \ell$.

- Связь коэффициентов переноса в случае газов:

$$\lambda = \eta \bar{c}_V = D\rho \bar{c}_V ,\ D = \eta / \rho = \lambda / \rho \bar{c}_V .$$

- Зависимость коэффициента вязкости жидкостей от температуры (формула Френкеля):

$$\eta = C\exp\left(+\varepsilon_a / (kT)\right),$$

где ε_a – энергия активации перескоков молекул.

- Уравнение нестационарной теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\bar{c}_V \rho} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} .$$

7.1. Вычислить коэффициенты диффузии и вязкости для кислорода при давлении $p = 0{,}2$ МПа и температуре $T = 280$ К. Эффективный диаметр молекул кислорода равен $d = 3{,}6 \cdot 10^{-10}$ м.

7.2. Площадь поперечного сечения рассеяния ионов H_2 в водородной плазме при температуре $T = 10^7$ К равна $\sigma = 4 \cdot 10^{-12}$ м^2. Оценить коэффициент диффузии ионов водорода при концентрации ионов $n = 1 \cdot 10^{21}$ м$^{-3}$.

7.3. Коэффициент теплопроводности аргона при нормальных условиях ($t = 0$°C, $p = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па) равен $\lambda = 1{,}65 \cdot 10^{-2}$ Вт/(м·К). Найти коэффициенты диффузии D и вязкости η аргона при тех же условиях. Удельная изохорическая теплоемкость аргона $\bar{c}_V = \dfrac{3R}{2\mu}$, где $\mu = 40 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса аргона.

7.4. Найти коэффициент вязкости азота при нормальных условиях, если при тех же условиях коэффициент диффузии азота равен $D = 1{,}42 \cdot 10^{-5}$ м^2/с.

7.5. При температуре $t = 20$ °C В сосуде объемом $V = 2$ л находится $N = 4 \cdot 10^{22}$ молекул идеального двухатомного газа, коэффициент теплопроводности которого $\lambda = 1{,}4 \cdot 10^{-2}$ Вт/(м·К). Определить коэффициент диффузии газа.

Указание. Удельная изохорическая теплоемкость двухатомного идеального газа $c_V = \dfrac{5R}{2\mu}$, где μ – молярная масса газа.

7.6. При некоторых условиях коэффициенты диффузии и вязкости водорода равны $D = 1{,}42 \cdot 10^{-4}$ м^2/с и $\eta = 8{,}5 \cdot 10^{-6}$ Па · с. Определить концентрацию молекул водорода.

7.7. Для углекислого газа CO_2 при нормальных условиях коэффициент вязкости равен $\eta = 1{,}4 \cdot 10^{-5}$ Па · с. Найти газокинетический диаметр *d* молекулы углекислого газа.

7.8. При нормальных условиях ($t = 0$ °C, $p = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па) коэффициент диффузии кислорода равен $D = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$ м^2/с. Найти среднюю длину *l* свободного пробега молекул и сравнить ее со средним расстоянием $\langle a \rangle$ между молекулами .

Указание. Среднее расстояние между молекулами оценить с учетом того, что при нормальных условиях один моль кислорода занимает объем $V = 22{,}4$ л.

7.9. При некоторых условиях коэффициенты диффузии и вязкости кислорода равны $D = 1{,}22 \cdot 10^{-5}$ м^2/с и $\eta = 1{,}95 \cdot 10^{-5}$ Па · с. Газокинетический диаметр молекулы кислорода $d = 3{,}6 \cdot 10^{-10}$ м. Определить плотность кислорода ρ, среднюю длину свободного пробега *l* и среднюю скорость молекул $\langle v \rangle$.

7.10. При каком значении градиента плотности углекислого газа за время $t = 1$ час через каждый квадратный метр поверхности почвы продиффундирует в атмосферу масса газа $m = 600$ мг, если коэффициент диффузии $D = 4{,}0 \cdot 10^{-6}$ м^2/с?

7.11. Во сколько раз коэффициент вязкости азота N_2 больше коэффициента вязкости водорода H_2 при заданной температуре? Эффективные диаметры молекул азота и водорода равны соответственно $d_1 = 3{,}6 \cdot 10^{-10}$ м и $d_2 = 2{,}8 \cdot 10^{-10}$ м.

7.12. Аргон Ar и гелий He находятся при одинаковых температурах и давлениях. Газокинетические диаметры молекул Ar и He равны $d_1 = 3{,}6 \cdot 10^{-10}$ м и $d_2 = 2{,}15 \cdot 10^{-10}$ м. Определить отношение коэффициентов диффузии и вязкости для этих газов.

7.13. В результате сжатия идеального газа при постоянной температуре его давление увеличилось в α раз. Во сколько раз изменились при этом коэффициенты вязкости η и диффузии *D* ?

7.14. Объем идеального газа уменьшается в β раз. Во сколько раз изменяются при этом коэффициенты вязкости η и диффузии *D*

газа, если сжатие проводится: а) при постоянной температуре; б) при постоянном давлении?

7.15. Как и во сколько раз изменятся коэффициенты вязкости η и диффузии D идеального одноатомного газа при адиабатическом процессе, если: а) объем газа уменьшить в $\alpha = 4$ раза; б) давление газа уменьшить в $\alpha = 4$ раза; в) температуру газа повысить в $\alpha = 4$ раза.

Указание. При адиабатическом процессе давление и объем газа связаны соотношением: $pV^{\gamma} = \text{const}$. Для одноатомного газа $\gamma = 5/3$.

7.16. Во сколько раз изменится коэффициент теплопроводности азота при повышении его температуры от $t_0 = 0$ °С до $t_1 = 50$ °С при нормальном давлении? Размеры сосуда, в котором находится газ, значительно превосходят длину свободного пробега молекул.

7.17. Две большие параллельные прямоугольные пластины находятся на расстоянии d друг от друга. Пространство между пластинами заполнено жидкостью с коэффициентом вязкости η. Одна из пластин покоится, а другая движется со скоростью υ_0 вдоль одной из сторон (см. рис. 7.1). Найти распределение скоростей жидкости между пластинами и силу вязкого трения, действующую на единицу площади каждой из пластин. Краевыми эффектами пренебречь.

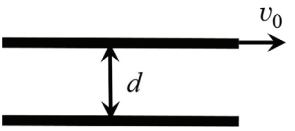


Рис. 7.1. Две пластины, одна (низшая) из которых неподвижная, а другая (верхняя) движется .

7.18. Три горизонтальные трансмиссионные ленты находятся в воздухе на расстоянии $h = 20$ см друг от друга. Нижняя лента движется вправо со скоростью $\upsilon_1 = 50$ м/с, верхняя лента движется влево со скоростью $\upsilon_2 = 10$ м/с. Средняя лента натянута на цилиндрические горизонтальные неподвижные валики, по которым лента может скользить без трения (рис. 7.2). Какую силу надо приложить к средней трансмиссионной ленте (в расчете на единицу площади

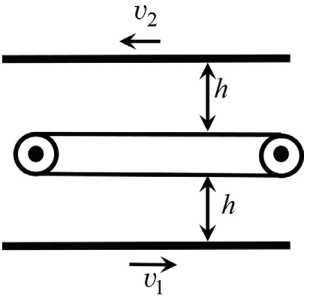


Рис. 7.2. Три горизонтальные трансмиссионные ленты, находящиеся в воздухе.

$S = 1$ м^2), чтобы она оставалась неподвижной? Вязкость воздуха $\eta = 1,7 \cdot 10^{-5}$ Па · с.

7.19. Самолет летит со скоростью υ = 360 км/час. Найти касательную силу f, действующую на единицу поверхности крыла, если толщина слоя воздуха у крыла самолета, увлекаемого вследствие вязкости равна $\Delta x = 4$ см. Температура воздуха $t = 0$ °С, эффективный диаметр молекул $d = 3,6 \cdot 10^{-10}$ м.

7.20. Длинный цилиндр радиусом R_1 движется вдоль своей оси с постоянной скоростью υ_0 внутри коаксиального с ним неподвижного цилиндра радиусом R_2. Пространство между цилиндрами заполнено жидкостью с коэффициентом вязкости η. Считая течение ламинарным, найти зависимость скорости жидкости от расстояния r до оси цилиндров. Какую силу $F_{l=1}$ в расчете на единицу длины надо приложить к внутреннему цилиндру, чтобы он двигался равномерно с указанной скоростью υ_0? Краевыми эффектами пренебречь.

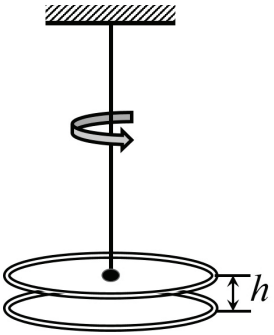


Рис. 7.3. Горизонтальный диск, подвешенный на упругой нити над таким же неподвижным диском.

7.21. Горизонтально расположенный диск подвешен на упругой нити над вторым таким же диском на расстоянии h от него. Оси дисков совпадают. Радиус каждого диска равен a, причем $a >> h$. Модуль кручения нити f. Нижний диск начинают вращать с угловой скоростью ω. При этом верхний диск поворачивается на угол φ. Определить коэффициент вязкости η газа, в котором находятся диски.

7.22. Один из способов измерения вязкости газов заключается в определении скорости затухания крутильных колебаний горизонтального диска, подвешенного на тонкой упругой нити над таким же неподвижным диском. (рис. 7.3). Считая известными радиусы дисков a, массы m, расстояние между дисками d и коэффициент затухания β, найти коэффициент вязкости газа η. Трение в подвесе отсутствует.

7.23. Пространство между двумя длинными коаксиальными цилиндрами с радиусами R_1 и $R_2 > R_1$ заполнено газом с коэффициентом вязкости η. Внешний цилиндр вращается с небольшой угло-

вой скоростью ω. Какой момент внешних сил M_0 надо приложить к единице длины внутреннего цилиндра, чтобы он оставался неподвижным?

7.24. Два одинаковых параллельных диска, оси которых совпадают, расположены на расстоянии h друг от друга. Радиус каждого диска равен a, причем $a >> h$. Диски находятся в сильно разреженном газе с молярной массой μ, при температуре T и давлении p. Один диск вращают с небольшой угловой скоростью ω. Какой момент внешних сил надо приложить к другому диску, чтобы он был неподвижен?

7.25. Горизонтально расположенный диск радиусом R_0 подвешен на тонком вертикальном стержне, проходящем через его центр. Система находится в небольшом сосуде, заполненном газом с молярной массой μ при температуре T, и вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω. Расстояние от диска до стенок сосуда меньше длины свободного пробега молекул газа. Определить давление газа в сосуде, если для поддержания постоянной угловой скорости вращения требуется прикладывать к стержню постоянный момент сил M_0.

7.26. Вычислить скорость v установившегося движения фарфорового шарика радиусом $r = 0{,}5$ мм в глицерине при температуре $T = 300$ К и нормальном давлении. Плотность фарфора $\rho_ф = 2{,}30 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность глицерина $\rho_г = 1{,}26 \cdot 10^3$ кг/м^3, коэффициент вязкости глицерина при указанной температуре $\eta = 0{,}95$ Па·с.

7.27. При скорости ветра $V = 15$ м/с капли дождя падают под углом $\varphi = 12^\circ$ к вертикали. Коэффициент вязкости воздуха $\eta = 1{,}7 \cdot 10^{-5}$ Па·с, плотность воды $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность воздуха $\rho_в = 1{,}3$ кг/м^3. Оценить средний радиус капель r.

7.28. В высокий сосуд, наполненный касторовым маслом, бросают маленькие свинцовые шарики разных диаметров. Опустившись на некоторую глубину, шарики продолжают двигаться равномерно. Коэффициент вязкости касторового масла $\eta = 1{,}0$ Па·с, плотность свинца $\rho_с = 11{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность касторового масла $\rho_м = 0{,}97 \cdot 10^3$ кг/м^3.

1) Определить число Рейнольдса для движения шарика диаметром $d = 0{,}1$ мм, предполагая, что движение масла относительно

шарика является ламинарным. Проверить справедливость этого предположения.

2) Оценить максимальный диаметр шарика, при котором движение масла остается ламинарным.

Указание. При движении шарика переходу от ламинарного движения к турбулентному соответствует значение числа Рейнольдса $\mathrm{Re} \approx 0{,}5$, если в качестве характерного линейного размера брать диаметр шарика.

7.29. В высокий сосуд, наполненный жидкостью с плотностью ρ и с коэффициентом вязкости η, опустили шарик массой m и радиусом R. Найти зависимость скорости и ускорения шарика от времени и определить скорость его установившегося движения υ_y. Считать, что при движении шарика жидкость неподвижна.

7.30. Полагая, что пылинки в воздухе – шарики радиусом $R \approx 1$мкм и плотностью $\rho = 2{,}5\,\text{г}/\text{см}^3$, оценить время оседания пыли в комнате высотой 3 м. Средний размер частичек пыли в воздухе варьируется от 0,2 мкм до 5 мкм. Считать, что воздух неподвижен, броуновское движение пылинок в воздухе не учитывать. Коэффициент вязкости воздуха $\eta = 1{,}7 \cdot 10^{-5}\,\text{Па} \cdot \text{с}$, плотность воздуха $\rho_c = 1\,\text{кг}/\text{м}^3$.

7.31. Найти максимальную скорость ламинарного течения воды при температуре $t = 15$ °С по трубе с внутренним диаметром $d = 2$ см. Определить при такой скорости разность давлений между двумя сечениями внутри трубы, расстояние между которыми $h = 200$ м. Коэффициент вязкости воды при указанной температуре равен $\eta = 1{,}1 \cdot 10^{-3}$ Па·с.

Указание. При увеличении скорости течения жидкости по трубе переход от ламинарного течения к турбулентному происходит при значениях числа Рейнольдса $\mathrm{Re} \approx 3000$, если в качестве характерного линейного размера брать диаметр трубы.

7.32. При изменении температуры жидкости от T_1 до T_2 расход жидкости, протекающей через трубу при постоянном напоре, уменьшился в n раз. Найти энергию активации ε_a перескоков молекул для данной жидкости.

7.33. Во сколько раз изменится расход жидкости, протекающей по трубке радиусом r и длиной h, если температуру жидкости увеличить в α раз? Разность давлений на концах трубки считать неизменной.

7.34. Баллон объемом $V = 1$ л наполнен углекислым газом при давлении $p_1 = 2{,}1 \cdot 10^5$ Па. После открытия крана, позволяющего газу вытекать из баллона через капилляр длиной $l = 10$ см и радиусом $r = 5 \cdot 10^{-5}$ м, через время $t = 22$ мин давление в баллоне понизилось до $p_2 = 1{,}8 \cdot 10^5$ Па. Наружное давление $p_0 = 0{,}98 \cdot 10^5$ Па. Считать, что процесс происходит при постоянной температуре. Определить коэффициент вязкости η углекислого газа.

7.35. Жидкость с коэффициентом вязкости η находится в цилиндрическом сосуде, высота которого H, а площадь поперечного сечения S. Возле дна сосуда в боковой стенке имеется отверстие с горизонтальным отводным капилляром длиной l и площадью поперечного сечения S_0, перекрытым краном. До какой высоты h_0 за время τ опустится уровень жидкости в сосуде после открытия крана?

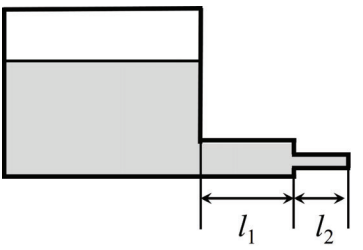


Рис. 7.4. Сосуд с горизонтальной капиллярной трубкой, состоящей из двух звеньев.

7.36. Широкий сосуд снабжен внизу горизонтальной капиллярной трубкой, состоящей из двух звеньев (рис. 7.4). Первое звено имеет длину l_1 и внутренний радиус r_1, второе – длину l_2 и внутренний радиус r_2. В сосуд налита жидкость с плотностью ρ и коэффициентом вязкости η. Уровень жидкости находится на высоте h над капиллярами. Какой объем жидкости вытекает из сосуда через капилляры за 1 с? Понижением уровня жидкости в сосуде пренебречь.

7.37. Между двумя неподвижными параллельными горизонтальными плоскостями, находящимися на расстоянии h друг от друга, течет жидкость с коэффициентом вязкости η. Перепад давления в потоке составляет Δp на единицу длины в направлении движения жидкости. Найти распределение скорости жидкости $u(x)$ в поперечном сечении потока, ведя отсчет от его середины.

7.38. В условиях предыдущей задачи определить объемный расход жидкости на единицу ширины потока.

7.39. В дне большого сосуда с жидким азотом образовалась небольшая щель шириной $\delta = 1$ мкм и длиной $l = 5$ см. Толщина дна сосуда $d = 0{,}5$ см. Высота уровня азота над дном сосуда

$h = 20$ см. Найти максимальную скорость, вытекающего из щели азота и полный объемный расход жидкости. Плотность жидкого азота $\rho = 808$ кг/м^3, коэффициент вязкости $\eta = 1{,}58 \cdot 10^{-4}$ Па·с. Понижением уровня азота в сосудом пренебречь.

7.40. Наружная поверхность кирпичной стены площадью $S = 25$ м^2 и толщиной $D = 37$ см имеет температуру $T_1 = 259$ К, а внутренняя поверхность $T_2 = 293$ К. Помещение отапливается электроплитой. Определить ее мощность N, если температура в помещении поддерживается постоянной. Коэффициент теплопроводности кирпича $\lambda = 0{,}4$ Вт/(м·К).

7.41. Между двумя параллельными прямоугольными пластинками площадью $S = 0{,}01$ м^2, расположенными на расстоянии $\Delta x = 1$ мм друг от друга, находится азот. Пластинки соединены по краям с помощью плохо проводящих тепло сплошных пластин. Между пластинками поддерживается разность температур $\Delta T = 1$ К. Эффективный диаметр молекул азота $d = 3{,}6 \cdot 10^{-10}$ м, средняя температура газа между пластинками $T_0 = 283$ К. Какое количество теплоты Q передается вследствие теплопроводности азота от одной пластинки к другой за время $\tau = 10$ мин?

7.42. Металлическая сфера радиуса R окружена теплоизолирующим материалом небольшой толщины δR с коэффициентом теплопроводности λ. Температура окружающей среды T_0. Какая мощность W теплового нагревателя требуется для поддержания постоянной температуры T_1 внутри сферы?

7.43. Какое количество теплоты Q теряет помещение за время $\tau = 1$ час через окно из-за теплопроводности воздуха, находящегося между рамами? Площадь каждой рамы $S = 4$ м^2, расстояние между рамами $D = 10$ см. Температура внутри помещения поддерживается равной $t_1 = 20$ °С, температура воздуха снаружи $t_2 = -10$ °С. Эффективный диаметр молекул воздуха $d = 3{,}6 \cdot 10^{-10}$ м, удельная изохорическая теплопроводность воздуха $c_V = 720$ Дж/(кг·К). Теплопроводность стекла считать очень большой.

7.44. Найти распределение температур в теплоизолированном стержне постоянного сечения и длиной l, если его концы поддерживаются при температурах T_1 и $T_2 < T_1$. Теплопроводность стержня зависит от температуры: $\lambda(T) = \lambda_0 / (1 + bT)$, где b – постоянная размерностью К$^{-1}$.

7.45. Коэффициент теплопроводности теплоизолированного диэлектрического стержня длиной l изменяется с температурой по закону $\lambda = \alpha/T$, где α – константа. Найти температуру в центре стержня, если температуры торцов постоянны и равны T_1 и $T_2 < T_1$.

7.46. Теплоизолированный стержень расположен вдоль оси OX , причем торцы стержня имеют координаты x_1 и $x_2 > x_1$. Коэффициент теплопроводности теплоизолированного стержня изменяется в интервале $[x_1, x_2]$ по закону $\lambda = \alpha x^2$, где α – константа. Температуры торцов стержня постоянны и равны T_1 при x_1 и $T_2 < T_1$ при $x_2 > x_1$. Найти распределение температуры вдоль оси стержня.

7.47. Теплоизолированный стержень расположен вдоль оси OX , причем торцы стержня имеют координаты x_1 и $x_2 > x_1$. Коэффициент теплопроводности теплоизолированного стержня изменяется в интервале $[x_1, x_2]$ по закону $\lambda = \alpha x$, где α – константа. Температуры торцов стержня поддерживаются постоянными и равны T_1 при x_1 и $T_2 < T_1$ при $x_2 > x_1$. Найти температуру в центре стержня.

7.48. Длинная цилиндрическая труба радиусом R_1 находится в асбестовой оболочке с внешним радиусом R_2. Коэффициент теплопроводности оболочки $\lambda = \text{const}$. Температуры трубы и внешней поверхности оболочки поддерживаются постоянными и равны $T(R_1) = T_1$, $T(R_2) = T_2 < T_1$. Найти: а) закон распределения температуры в оболочке $T(r)$; б) количество теплоты Q, отдаваемое единицей длины системы во внешнее пространство за время τ.

7.49. Пространство между двумя коаксиальными цилиндрами длиной L, радиусы которых R_1 и $R_2 > R_1$, заполнено гелием. Температуры внутреннего и внешнего цилиндров постоянны и равны T_1 и $T_2 < T_1$ соответственно. Расстояние между цилиндрами намного больше длины свободного пробега молекул газа. Эффективный диаметр атомов гелия d. Найти полный поток теплоты J_Q через боковые поверхности цилиндров. Краевыми эффектами пренебречь.

7.50. Пространство между двумя концентрическими сферами (радиусы R_1 и $R_2 > R_1$, T_1 и $T_2 < T_1$) заполнено однородным веществом с коэффициентом теплопроводности λ. Найти полный поток теплоты через поверхность внешней сферы и распределение температур между сферами.

7.51. Между двумя металлическими стенками, температуры которых T_1 и $T_2 < T_1$, зажаты пластинки толщиной d_1 и d_2, коэффициенты теплопроводности которых λ_1 и λ_2 соответственно (см.

рис. 7.5). Торцы пластин теплоизолированы. Найти температуру T_0 поверхности соприкосновения пластин.

7.52. Три пластинки одинакового размера расположены так, как показано на рис. 7.6. Коэффициент теплопроводности двух крайних пластинок λ_1, а средней λ_2. Внешние стороны одинаковых пластинок имеют температуры T_0 и $T_3 < T_0$ соответственно. Найти температуры T_1 и T_2 поверхностей соприкосновения пластин.

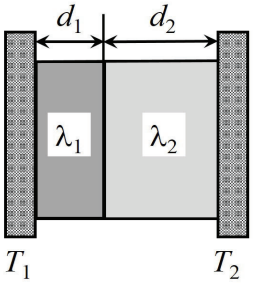


Рис. 7.5. Две пластинки, зажатые между двумя металлическими стенками.

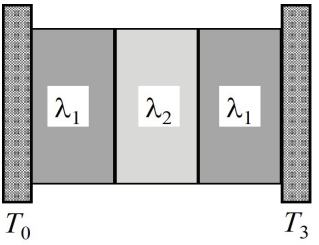


Рис. 7.6. Три пластинки, зажатые между двумя металлическими стенками.

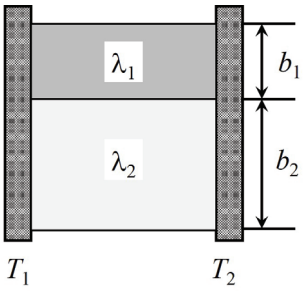


Рис. 7.7. Две пластины разной толщины с разными коэффициентами теплопроводности зажатые между двумя металлическими стенками.

7.53. Две пластины разной толщины b_1 и b_2 с разными коэффициентами теплопроводности λ_1 и λ_2 соответственно расположены так, как показано на рис. 7.7. Боковые поверхности пластин теплоизолированы и имеют температуры T_1 и T_2. Определить теплопроводность λ такой системы.

7.54. Две пластины разной толщины с разными коэффициентами теплопроводности расположены так, как показано на рис. 7.8 (*а* и *б*). Толщина первой пластины b_1, коэффициент теплопроводности материала, из которого она сделана, равен λ_1, соответствующие параметры для второй пластины - b_2 и λ_2. В каком случае и во сколько раз теплопроводность системы больше? Каково будет отношение коэффициентов

теплопроводности систем в случае, если пластины одинаковой толщины?

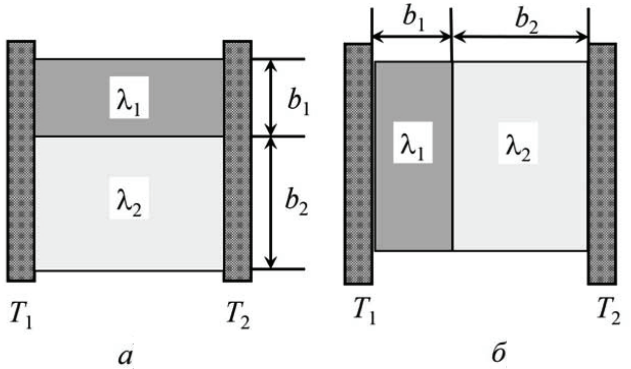


Рис. 7.8. Две пластины разной толщины с разными коэффициентами теплопроводности.

7.55. Пространство между тремя одинаковыми тонкими металлическими пластинами, расположенными горизонтально одна над другой, как показано на рис. 7.9, заполнено двумя жидкостями с разной теплопроводностью. Расстояния между пластинами d_1 и d_2. Коэффициент теплопроводности жидкости, находящейся между нижней и средней пластинами, равен λ_1. Температуры верхней и нижней пластин поддерживаются равными T_1 и $T_3 > T_1$, а температура средней пластины в установившемся состоянии оказалась равной T_2. Определить коэффициент теплопроводности λ_2 верхней жидкости. Считать, что потери тепла через вертикальные стенки кювет отсутствуют.

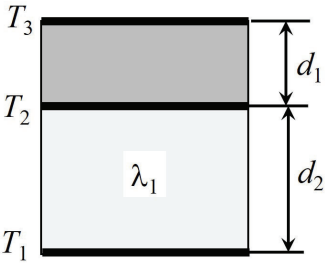


Рис. 7.9. Пространство между тремя одинаковыми тонкими металлическими пластинами заполнено двумя жидкостям.

7.56. Пространство между двумя концентрическими сферами с радиусами R и $3R$ и постоянными температурами T_1 и $T_2 < T_1$ заполнено двумя прилегающими вплотную друг к другу сферическими слоями теплопроводящих материалов. Внешний радиус первого слоя равен $2R$, теплопроводности внутреннего и внешнего

слоев равны λ_1 и λ_2 соответственно. Найти температуру T_0 поверхности соприкосновения теплопроводящих слоев.

7.57. Длинная цилиндрическая труба радиусом R_1 окружена двуслойной теплоизоляцией. Внешние радиусы первого и второго слоев изоляции – R_2 и R_3, они сделаны из материалов с коэффициентами теплопроводности λ_1 и λ_2 соответственно. Температура трубы поддерживается равной T_1, температура окружающей среды – T_2. Определить количество теплоты, проходящей через единицу длины теплоизоляции за единицу времени.

7.58. Две трубы одинаковых диаметров и длины окружены двуслойной изоляцией. Коэффициенты теплопроводности материалов, из которых сделаны слои, отличаются в 2 раза. Толщина обоих слоев равна радиусу трубы. В первой трубе внутренним слоем теплоизоляции служит слой с большей теплопроводностью, во второй – с меньшей. Во сколько раз отличаются количества теплоты, проходящие сквозь теплоизоляцию труб за единицу времени, если перепад температуры между поверхностью трубы и внешней средой в обоих случаях одинаков?

7.59. Какое количество теплоты теряет 1 м^2 стены дома в течение $\tau = 1$ час при температуре воздуха в помещении $t_1 = 25$ °С и температуре воздуха снаружи $t_2 = -15$ °С? Толщина стены $d = 15$ см, коэффициент теплопроводности материала стены $\lambda = 0{,}7$ Вт/(м·К), коэффициент теплообмена на границе стены с воздухом $\alpha = 8{,}4$ Вт/(м^2·К).

7.60. Для теплоизоляции стен помещения используется плоская теплоизоляционная пластина из материала с коэффициентом теплопроводности λ. Площадь стены S, толщина пластины d. Коэффициент теплоотдачи внешней стенки α. На сколько следует увеличить мощность теплового нагревателя, чтобы поддерживать постоянной температуру в помещении при понижении температуры снаружи на ΔT?

7.61. Два куска металла, теплоемкости которых C_1 и C_2, соединены стержнем длинjq l, с площадью поперечного сечения S и достаточно малым коэффициентом теплопроводности λ. Вся система теплоизолирована. В начальный момент разность температур кусков металла равна ΔT_0. Как будет меняться эта разность температур с течением времени? Через какое время τ разность температур уменьшится в 3 раза? Теплоемкостью стержня пренебречь.

7.62. Тонкостенный закрытый металлический сосуд объемом $V = 5$ л и с общей площадью поверхности $S = 0{,}2$ м^2 доверху заполнили водой при температуре $t_1 = 100$ °С. Температура окружающего воздуха $t_0 = 20$ °С. Плотность воды при 100°С $\rho = 950$ кг/м^3, удельная теплоемкость $c = 4{,}2$ кДж/(кг · К), коэффициент теплообмена на границе металл-воздух $\alpha = 13$ Вт/(м^2·К). 1) До какой температуры охладится вода за время $\tau = 30$ мин? 2) Через какое время t вода охладится до температуры $t_2 = 60$ °С?

7.63. Сколько воды, имеющей температуру T_1, надо налить в закрытый тонкостенный сосуд с общей поверхностью S, чтобы спустя время τ она остыла до температуры T_2? Температура окружающего воздуха T_0, коэффициент теплообмена на границе металл-воздух равен α, удельная теплоемкость воды c.

7.64. Пространство между двумя концентрическими металлическими сферами, радиусы которых r_1 и $r_2 > r_1$, заполнено однородным веществом с коэффициентом теплопроводности λ. Система помещена в термостат с температурой T_0. Коэффициент теплоотдачи внешней сферы равен α. Определить температуру T_2 внешней сферы, если температура внутренней сферы $T_1 = \text{const}$.

7.65. По длинной металлической трубе с внутренним и внешним радиусами r и R соответственно, течет горячая вода, температура которой $T_1 = \text{const}$. Температура окружающей среды T_0. Коэффициент теплопроводности металла λ, коэффициент теплообмена на границе металл – воздух равен α, а на границе металл – вода бесконечно большой. Определить температуру T_2 внешней стенки трубы.

7.66. Между стенками дьюаровского сосуда находится разреженный воздух при низком давлении p. Расстояние между стенками сосуда много меньше его радиуса и превышает среднюю длину свободного пробега молекул. Площадь стенок сосуда S. В сосуд наливают жидкий азот, имеющий температуру T_1. Температура окружающего воздуха T_2. Молярная изохорическая теплоемкость воздуха C_V. Определить количество теплоты, подводимой к внутренней стенке сосуда за 1 с. Температуры внутренней и внешней стенок сосуда считать постоянными.

7.67. Внутренняя поверхность баллона термоса $S = 700$ см^2. Расстояние между стенками термоса значительно меньше его радиуса. Пространство между стенками заполнено азотом при темпе-

ратуре $t_о = 21$ °С и давлении $p_0 = 0{,}1$ Па. Температура вне термоса равна $t_1 = 20$ °С. Термос заполняют кипятком массой $m = 1$ кг с температурой $t_{2н} = 100$ °С. Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг · К). Оценить время τ, за которое вода в термосе остынет до $t_{2к} = 70$ °С.

7.68. Найти массу M азота, прошедшего вследствие диффузии через площадку площадью $S = 0{,}01$ м^2 за время $t = 10$ с, если градиент плотности газа в направлении, перпендикулярном площадке, равен $\frac{\partial \rho}{\partial x} = 1{,}26$ кг/м^4. Температура азота $t = 27$ °С, средняя длина свободного пробега молекул $l = 10$ мкм.

7.69. Два сосуда с объемами $V_1 = 2V$ и $V_2 = V$ заполнены одинаковыми газами, соединены между собой цилиндрическим капилляром с площадью поперечного сечения S и длиной l, на котором имеется кран. Концентрация газа в первом сосуде на Δn_0 больше, чем во втором. После открытия крана через капилляр при постоянной температуре начинается диффузия газа из одного сосуда в другой. Коэффициент диффузии равен D. Через какое время τ разность концентраций молекул в сосудах уменьшится в 2 раза?

7.70. В сосудах объемом V и $1{,}5V$ находится один и тот же газ, причем концентрация газа в первом сосуде на Δn_0 меньше, чем во втором. Сосуды соединены между собой цилиндрическим капилляром радиусом r и длиной l, на котором имеется кран. После открытия крана и диффузии газа из одного сосуда в другой разность концентраций молекул в сосудах время t уменьшилась в α раз. Определить коэффициент диффузии D, считая, что процесс протекает при постоянной температуре.

7.71. Полый шар радиусом R помещают в атмосферу газа, молекулы которого могут диффундировать внутрь шара через его оболочку. Толщина оболочки d, равновесная концентрация молекул газа n_0. Коэффициент диффузии молекул равен D. Как будет меняться концентрация молекул внутри шара? Через какое время t она составит α% от равновесной концентрации газа снаружи?

§8. Теплоемкость

- Удельная теплоемкость:

$$c = \frac{\delta Q}{m\mathrm{d}T}, \qquad \text{где } m \text{ – масса вещества.}$$

- Молярная теплоемкость:

$$C = \frac{\delta Q}{\nu \mathrm{d}T} = \frac{1}{\nu} C_S,$$

где ν – число молей вещества, $C_S = \dfrac{\delta Q}{\mathrm{d}T}$ – теплоемкость системы.

- Связь удельной и молярной теплоемкостей:

$$C = \mu c.$$

- Формула Майера для идеального газа:

$$C_p = C_V + R.$$

- Молярная изохорическая теплоемкость C_V идеального газа:

$$C_V = \left(\frac{\delta Q}{\mathrm{d}T}\right)_V = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} = \frac{i}{2} R.$$

где $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}}$ – полное число степеней свободы молекулы.

- Внутренняя энергия ν молей идеального газа:

$$U = \nu C_V T.$$

- Молярная теплоемкость идеального газа в произвольном процессе:

$$C = C_V + p\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}.$$

- Молярная теплоемкость идеального газа в произвольном процессе, заданном в p–T-переменных:

$$C = C_p - \frac{RT}{p} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}.$$

- Связь теплоемкости идеального газа в политропическом процессе с показателем политропы n:

$$C = C_V \frac{n - \gamma}{n - 1}.$$

- Выражение показателя политропы n через теплоемкость C газа в политропическом процессе:

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V}.$$

- Выражение молярной теплоемкости C_V идеального газа через показатель адиабаты γ:

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1}.$$

- Первое начало термодинамики:

$$\mathrm{d}U = \delta Q + \delta A',$$

где $\delta A'$ – работа внешних сил. Работа термодинамической системы, $\delta A = -\delta A'$.

- Уравнение политропического процесса:

$$pV^n = \text{const} \ \text{(в переменных } p\text{-}V\text{)},$$

$$TV^{n-1} = \text{const} \ \text{(в переменных в } T\text{-}V\text{)},$$

$$pT^{n/(1-n)} = \text{const} \ \text{(в переменных } p\text{-}T\text{)}.$$

- Молярная теплоемкость твердых тел (закон Дюлонга–Пти):

$C_V = 3R$ (при температурах выше температуры Дебая).

8.1. Определить число и характер степеней свободы молекул газа, для которого показатель адиабаты γ равен: а) 1,67; б) 1,40; в) 1,33; г) 1,29; д) 1,17.

8.2. Из скольких атомов состоят линейные молекулы газа, если при "замораживании" колебательных степеней свободы показатель адиабаты γ увеличивается в 49/45 раз?

8.3. При высокой температуре у четырехатомных молекул некоторого идеального газа оказываются возбужденными все степени свободы, включая колебательные. Определить показатель адиабаты γ газа при данной температуре.

8.4. При температуре $T = 1100$ К у молекул четыреххлористого углерода CCl_4 возбуждены все степени свободы, включая колебательные. Определить внутреннюю энергию U одного моля газа.

8.5. При давлении $p = 2 \cdot 10^5$ Па внутренняя энергия одного моля азота равна $U = 6{,}225$ кДж. Температура азота ниже характеристической температуры возбуждения колебаний атомов в молекулах. Определить плотность ρ газа.

8.6. Плотность некоторого двухатомного газа при нормальных условиях ($p = 10^5$ Па, $t = 0$ °С) равна $\rho = 1{,}25$ кг/м^3. Найти удельные теплоемкости c_p и c_V этого газа.

8.7. Удельные теплоемкости некоторого идеального газа при постоянном объеме и при постоянном давлении равны соответственно $c_V = 733$ Дж/(кг · К) и $c_p = 1026$ Дж/(кг · К). Определить молярную массу μ этого газа и число степеней свободы i его молекул.

8.8. Во сколько раз изменится внутренняя энергия моля газообразного хлора Cl_2 при увеличении температуры от $T_1 = 300$ К до $T_2 = 850$ К? Температура возбуждения колебательных степеней свободы молекул хлора равна 801 К.

8.9. Вычислить удельные теплоемкости c_V и c_p смеси газов, состоящей из $m_1 = 9$ г водяного пара (H_2O) и $m_2 = 16$ г кислорода (O_2), при температуре 300 К.

8.10. Вычислить показатель адиабаты γ для газовой смеси, состоящей из $\nu_1 = 3{,}0$ молей водорода и $\nu_2 = 5{,}0$ молей аргона, при температуре 300 К.

8.11. Определить удельную теплоемкость c_p смеси газов, состоящей по весу из 20% гелия, 30% азота и 50% аммиака NH_3. Смесь находится при температуре $T = 300$ К.

8.12. Найти удельные теплоемкости c_V и c_p парообразного иода I_2, если часть его молекул диссоциирована на атомы. Степень диссоциации $\alpha = 0{,}4$. Молярная масса I_2 $\mu = 0{,}254$ кг/моль.

Примечание. Степенью диссоциации называется отношение числа диссоциированных молекул к их общему числу.

8.13. Найти, какая часть α молекул водорода при некоторых условиях диссоциирована на атомы, если при этом показатель адиабаты водорода $\gamma = c_p/c_V = 1{,}45$.

8.14. Определить, какая часть α молекул кислорода диссоциирована на атомы при высокой температуре, если при этом его удельная изобарическая теплоемкость $c_p = 980$ Дж/(кг·К).

8.15. Газовая смесь состоит из $\nu_1 = 5$ молей азота и некоторой массы аргона. При нормальных условиях удельная изохорическая теплоемкость смеси $c_V = 450$ Дж.(кг·К). Определить массу m_2 аргона в смеси.

8.16. Молярная теплоемкость идеального газа в политропическом процессе равна $C = 2R$. Показатель политропы $n = 3$. Про-

цесс проходит при температурах, близких к комнатной. Определить количество степеней свободы у молекулы газа.

8.17. Идеальный газ с показателем адиабаты γ, расширяется, а его давление меняется в зависимости от объема по закону: $p \sim \sqrt{V}$. Определить молярную теплоемкость газа C в данном процессе.

8.18. Идеальный одноатомный газ участвует в процессе, в ходе которого зависимость его объема от давления имеет вид: $V = \beta p^{\alpha}$, где α и β – постоянные. Найти молярную теплоемкость C газа в данном процессе.

8.19. В ходе некоторого процесса давление идеального газа изменяется с температурой по закону: $p \sim T^{\alpha}$, где $\alpha = \text{const}$. Чему равна молярная теплоемкость газа в этом процессе, если показатель адиабаты равен γ?

8.20. В ходе процесса, температура идеального двухатомного газа изменяется по закону: $T = \alpha p^3$, где $\alpha = \text{const}$. Чему равна молярная теплоемкость газа в этом процессе при невысоких температурах ?

8.21. В процессе нагревания идеального одноатомного газа его объем меняется по закону: $V = \alpha T^{3/4}$, где α = const. Определить молярную теплоемкость газа в этом процессе, если изменения происходят при невысоких температурах

8.22. Идеальный одноатомный газ участвует в процессе, в ходе $T = \alpha V^{5/2}$. Определить молярную теплоемкость газа.

8.23. Идеальный двухатомный газ участвует в политропическом процессе при температурах, когда колебательные степени свободы в молекулах не возбуждены. Как зависит давление газа p от температуры T в этом процессе, если молярная теплоемкость газа равна: а) $C = R$; б) $C = 3R/2$; в) $C = -R$?

8.24. В ходе политропического процесса объем гелия уменьшился в $\alpha = 2$ раза, а его давление возросло в $\beta = 4$ раза. Определить молярную теплоемкость гелия в этом процессе.

8.25. В ходе политропического процесса азот расширился от начального объема $V_1 = 1$ л до конечного объема $V_2 = 7{,}5$ л. При этом температура газа уменьшилась от $T_1 = 350$ К до $T_2 = 287$ К. Найти теплоемкость C_0 всей массы азота, если в начале процесса давление азота было $p_1 = 1 \cdot 10^5$ Па.

8.26. Внутренняя энергия одного моля идеального двухатомного газа изменяется в зависимости от давления по закону $U \sim p^{3/2}$. Найти молярную теплоемкость газа в этом процессе.

8.27. Идеальный газ, показатель адиабаты которого равен γ, сжимается так, что его внутренняя энергия $U \sim 1/V$. Найти молярную теплоемкость газа в этом процессе.

8.28. Нагревается или охлаждается идеальный газ, если он расширяется по закону $pV^{3/2} = \text{const}$? Какова его молярная теплоемкость в этом процессе? Изохорическую молярную теплоемкость газа C_V считать известной.

8.29. Считая известной молярную теплоемкость идеального газа при постоянном объеме C_V, найти молярную теплоемкость этого газа в процессе: $p = \alpha/T^3$, где $\alpha = \text{const}$. Увеличится или уменьшится объем газа при его нагревании в данном процессе?

8.30. Найти молярную теплоемкость идеального газа (молярная теплоемкость C_V известна) как функцию его объема V, если газ участвует в процессе: а) $p = p_0 + \alpha\sqrt{V}$, где α и p_0 – постоянные; б) $T = T_0 + \beta V^2$, где β и T_0 – постоянные.

8.31. Найти молярную теплоемкость идеального газа как функцию его температуры T, если газ участвует в $p = p_0 + \beta T^2$, где β и p_0 – постоянные. Молярная теплоемкость газа C_p известна.

8.32. Идеальный газ участвует в процессе: $T = T_0 e^{\alpha p}$, где α и T_0 – постоянные. Считая молярную теплоемкость газа C_p известной, определить молярную теплоемкость газа в данном процессе как функцию от давления.

8.33. Один моль идеального газа участвует в процессе, изображенном на p-V-диаграмме (рис. 8.1). Показатель адиабаты газа γ. Определить зависимость молярной теплоемкости газа от объема в указанном процессе.

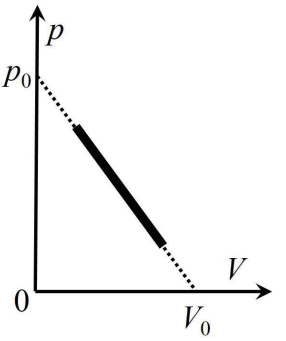


Рис. 8.1. p–V-диаграмма процесса для идеального газа.

8.34. Найти уравнение процесса в переменных T и V, при котором молярная теплоемкость идеального газа из-

меняется по закону: а) $C = C_V + \beta\sqrt{V}$; б) $C = C_V + \dfrac{RT}{T+\alpha}$, где α и β – постоянные.

8.35. Найти уравнение процесса в переменных p и T, при котором молярная теплоемкость идеального газа изменяется по закону: а) $C = C_p - \dfrac{RT}{T+\beta}$; б) $C = C_p + \dfrac{\alpha}{p}$, где α и β – постоянные.

8.36. Молярная теплоемкость идеального газа в некотором процессе изменяется по закону: $C = C_V + \dfrac{Rp}{2p+a}$. Найти уравнение процесса в переменных p и V.

8.37. Молярная теплоемкость идеального газа с показателем адиабаты γ в некотором процессе изменяется с температурой по закону $C = \alpha T^2$, где $\alpha = \text{const}$. Найти уравнение, связывающее параметры p и V в данном процессе.

8.38. В процессе нагревания ν молей идеального газа его теплоемкость изменяется по закону: $C = C_V + a/T$. Какое количество теплоты надо сообщить газу, чтобы увеличить его начальную температуру T_0 в n раз?

8.39. Идеальный газ объемом V_1 находится при температуре T_1 и давлении p_1. Какое количество теплоты надо сообщить газу, чтобы повысить его температуру до T_2, если в процессе нагревания его молярная теплоемкость меняется с температурой по закону: $C = \alpha\sqrt{T}$?

8.40. Один моль гелия находится в левой половине цилиндра (см. рис. 8.2). Справа от поршня – вакуум. Если газ откачать, поршень будет находиться около левого торца цилиндра, а пружина не будет деформирована. Боковые стенки цилиндра и поршень теплоизолированы, трения нет. Газ начинают медленно нагревать через левый торец цилиндра. Найти молярную теплоемкость гелия в этом процессе.

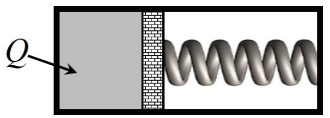


Рис. 8.2. Цилиндр с поршнем и пружиной.

8.41. Для бромистого калия KBr температура Дебая равна $T_D(\mathrm{KBr}) \approx 177$ К. Определить удельную теплоемкость KBr при температуре $T = 300$ К.

8.42. Согласно закону Дебая молярная теплоемкость твердых тел при температурах ниже характеристической температуры Дебая (своей для каждого вещества) зависит от температуры по закону: $C = AT^3$. Какое количество теплоты надо подвести к образцу массой m, чтобы его температура увеличилась от T_1 до T_2 при условии, что эти температуры ниже температуры Дебая? Молярная масса вещества μ.

§9. Процессы в идеальном газе

- Первое начало термодинамики:

$$\mathrm{d}U = \delta Q + \delta A' ,$$

где $\delta A'$ – работа внешних сил, δA – работа термодинамической системы, $\delta A' = -\delta A$.

- Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона–Менделеева):

$$pV = \frac{m}{\mu} RT .$$

- Изменение внутренней энергии идеального газа при его переходе из состояния 1 в состояние 2:

$$\Delta U_{12} = \nu C_V (T_2 - T_1) .$$

- Полная механическая работа системы при её переходе из состояния 1 в состояние 2:

$$A_{12} = \int_1^2 \delta A = \int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V .$$

- Работа газа при изотермическом переходе из состояния 1 в состояние 2:

$$A_{12} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1} .$$

- Элементарное количество теплоты δQ:

$$\delta Q = \nu C \mathrm{d}T .$$

Для *идеального газа* $\delta Q = \nu C_V \mathrm{dT} + p\mathrm{d}V$.

- Уравнение адиабатического процесса

$$pV^{\gamma} = \text{const} \ \text{(в } p\text{-}V\text{-)},$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{const} \ \text{(в переменных } T\text{-}V\text{)},$$

$$pT^{\gamma/(1-\gamma)} = \text{const} \ \text{(в переменных } p\text{-}T\text{)}.$$

- Уравнение политропического процесса:

$$pV^{n} = \text{const} \ \text{(в переменных } p\text{-}V\text{)},$$

$$TV^{n-1} = \text{const} \ \text{(в переменных } T\text{-}V\text{)},$$

$$pT^{n/(1-n)} = \text{const} \ \text{(в переменных } p\text{-}T\text{)}.$$

9.1. Водород, находившийся при температуре $T_1 = 273$ К, адиабатически сжимается, в результате чего его давление увеличивается в $\alpha = 5$ раз. До какой температуры T_2 нагревается газ?

9.2. При адиабатическом сжатии азота его давление увеличилось от $p_1 = 50$ кПа до $p_2 = 500$ кПа. Затем при неизменном объеме температуру газа понизили до первоначальной. Определить давление p_3 газа в конце процесса.

9.3. Некоторое количество гелия адиабатически сжимают и его начальное давление p_0 возрастает в $n = 4$ раза. Затем газ изотермически расширяется до первоначального объема. Во сколько раз конечное давление $p_к$ газа отличается от его начального значения?

9.4. Некоторый идеальный газ, занимавший объем V_1 при температуре T_1, адиабатически расширили до объема V_2. При этом температура газа стала равной T_2. Определить изохорическую молярную теплоемкость газа C_V.

9.5. Кислород из исходного состояния при нормальных условиях ($t_0 = 0$ °С, $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па) адиабатически сжимают уменьшая объем в $n = 10$ раз. Какой станет средняя энергия вращательного движения молекул газа?

9.6. При адиабатическом расширении объем идеального газа увеличивается в $\alpha = 2$ раза, а температура уменьшается в $\beta = 1{,}32$ раза. Определить число степеней свободы у молекул газа.

9.7. В ходе политропического процесса объем идеального двухатомного газа увеличился в α раз. Молярная теплоемкость газа в этом процессе равна $C = R/2$. Во сколько раз изменилось при этом давление газа?

9.8. Идеальный одноатомный газ участвует в политропическом процессе, в котором его молярная теплоемкость $C = 3R$. Во сколько раз изменится объем газа, если его температура во время процесса уменьшится в $\alpha = 1{,}5$ раза?

9.9. Идеальный одноатомный газ, находившийся при температуре $T_1 = 300$ К и давлении $p_1 = 1 \cdot 10^5$ Па, участвует в политропическом процессе, в котором его молярная теплоемкость $C = 2R$. В ходе процесса давление газа возрастает до $p_2 = 2 \cdot 10^5$ Па. Определить температуру газа в конце процесса.

9.10. U-образная трубка, один конец которой запаян, а другой открыт, заполнена жидкостью (см. рис. 9.1). В запаянной части трубки над жидкостью находится идеальный газ. При начальной

температуре его объем равен V_0, а уровни жидкости в левой и правой частях трубки совпадают. Наружное давление равно p_0. Газ в левой части трубки начинают медленно нагревать. Найти уравнение процесса. Будет ли этот процесс политропическим?

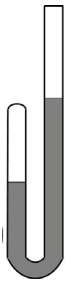


Рис. 9.1. U-образная трубка с открытым концом, заполненная жидкостью.

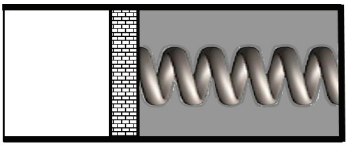


Рис. 9.2. Цилиндр с поршнем и пружиной.

9.11. Идеальный газ находится в правой половине цилиндра и отделен от открытого торца поршнем с прикрепленной к нему пружиной (рис. 9.2). Давление вне цилиндра постоянно и равно p_0. Пружина не растянута, когда объем газа в цилиндре равен V_0. Газ начинают медленно нагревать через правый торец цилиндра. Боковые стенки и поршень теплоизолированы. Является ли процесс нагревания газа политропическим?

9.12. Показать, что процесс, при котором работа идеального газа пропорциональна изменению его температуры, то есть является политропическим может быть описан уравнением $pV^n = \text{const}$, где n – постоянная.

9.13. При изобарическом расширении идеальный двухатомный газ совершает работу A. Найти изменение внутренней энергии газа.

9.14. Нарисовать для идеального газа примерные графики изохорического, изобарического, изотермического и адиабатического процессов на (U-V)- и (U-p)-диаграммах, откладывая внутреннюю энергию газа U по оси ординат. Начальной для всех графиков взять общую точку.

9.15. В результате изотермического расширении $\nu = 5$ молей метана при температуре $T = 273$ К давление газа уменьшилось от

$p_1 = 10 \cdot 10^5$ Па до $p_2 = 1 \cdot 10^5$ Па. Определить количество полученной газом теплоты Q.

9.16. Некоторый идеальный газ находится в закрытом сосуде объемом $V = 10$ л при давлении $p = 1$ атм и температуре $T_0 = 293$ К. При нагревании газа на $\Delta T = 50$ К ему сообщили количество теплоты $Q = 0{,}52$ кДж. Найти показатель адиабаты γ газа.

9.17. В закрытом объеме при комнатной температуре находится смесь $\nu_1 = 3$ молей водорода и $\nu_2 = 3$ молей гелия. Какое количество теплоты Q выделится при охлаждении этой смеси на $\Delta T = 20$ К?

9.18. В закрытом сосуде находится мяч, нагреватель и ν_1 молей аргона при температуре T_1. В мяче находится ν_2 молей аргона. Мяч не растягивается и обладает хорошей теплопроводностью. Первоначально давление газа в мяче $p_{м1}$ больше давления аргона p_{c1} в сосуде. Через некоторое время после включения нагревателя мяч лопнул. Какое количество теплоты Q было подведено к аргону, если мяч выдерживает избыточное давление Δp, которое в n раз больше первоначального?

9.19. Газообразный аммиак (NH_3) массой $m = 34$ г, находившийся при температуре $T_1 = 300$ К, адиабатически сжали так, что его объем уменьшился в $\alpha = 2$ раза. Найти работу, которая была совершена над газом.

9.20. Температура одного моля идеального газа с показателем адиабаты γ повышается на ΔT. Определить работу газа, если процесс проходил: а) изобарически; б) изохорически; в) адиабатически.

9.21. Один моль идеального одноатомного газа, находившийся при температуре $T_1 = 300$ К, расширяется так, что его давление уменьшается в $\beta = 3$ раза. Найти работу, совершенную газом, если процесс расширения проходил: а) изотермически; б) адиабатически. В каком случае работа газа больше?

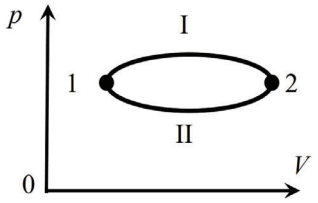


Рис. 9.3. Переход идеального газа из состояния 1 в состояние 2 двумя процессами I и II.

9.22. Идеальный газ переводится из состояния 1 в состояние 2 один раз в результате процесса I, а

другой раз посредством процесса II (рис. 9.3). В ходе какого процесса количество полученной газом теплоты больше?

9.23. В цилиндре под поршнем находится кислород массой $m = 0{,}32$ кг при начальной температуре $t_1 = 27$ °С. Кислород сначала расширили адиабатически, увеличив его объем в $n = 5$ раз, а затем сжали изотермически до начального объема. Найти работу, совершенную газом.

9.24. Некоторое количество водорода было переведено из состояния с объемом $V_1 = 4$ л при давлении $p_1 = 1 \cdot 10^5$ Па в состояние с объемом $V_2 = 2$ л при давлении $p_2 = 3 \cdot 10^5$ Па посредством двух процессов: а) в первом случае сначала изохорически увеличили давление, а потом изобарически уменьшили объем; б) во втором случае последовательность процессов была обратной: сначала изобарическое уменьшение объема, а затем изохорическое увеличение давления. Определить изменение внутренней энергии ΔU газа, совершенную газом работу A и количество подведенной к газу теплоты Q. Почему результаты расчетов в случаях а) и б) различны?

9.25. При нагревании $m = 1$ кг неизвестного газа на $\Delta T = 5$ К при постоянном давлении требуется $Q_1 = 4560$ Дж теплоты, а при нагревании при постоянном объеме – $Q_2 = 3260$ Дж. Определить, о каком газе идет речь.

9.26. ν молей идеального газа с показателем адиабаты γ, находившегося при температуре T_1, изотермически сжали так, что его объем уменьшился в α раз. После изобарического расширения объем газа стал равен первоначальному. Определить количество теплоты Q, полученное газом.

9.27. Найти зависимость коэффициента теплопроводности λ идеального газа от давления при его адиабатическом сжатии.

9.28. Один моль идеального газа участвует в процессе, при котором его давление меняется с изменением объема по закону: $p = \alpha V$, где α – постоянная. Определить зависимости давления и объема газа от температуры T.

9.29. Идеальный газ находится в сосуде объемом V_1 под давлением p_1. Затем газ сжимают до объема $V_2 = V_1/3$ так, что его давление изменяется по закону $p \sim 1/V^2$. Определить внешнюю работу по сжатию газа в этом процессе.

9.30. Идеальный газ с показателем адиабаты γ расширяется в политропическом процессе, причем давление газа прямо пропор-

ционально его объему ($p \sim V$). Начальный объем V_1, давление p_1, конечный объем $V_2 = 4V_1$. Найти изменение внутренней энергии и работу газа в указанном процессе.

9.31. В ходе процесса $pV^{3/2} = \text{const}$ азот, занимавший при давлении $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па объем $V = 6$ л, расширяется до объема, вдвое большего. Найти изменение внутренней энергии газа ΔU, работу A, совершенную газом при расширении, и количество теплоты Q, которым газ обменивается с окружающей средой. Колебательные степени свободы атомов в молекулах азота не возбуждены.

9.32. Гелий массой $m = 20$ г увеличил свой объем в политропическом процессе с показателем политропы $n = 1{,}2$. При этом температура газа изменилась на $\Delta T = -20$ К. Найти количество полученной газом теплоты и совершенную газом работу.

9.33. Идеальный газ с показателем адиабаты γ, занимавший первоначально объем V_1, расширили по закону $V = a\sqrt{p}$, где a – известная постоянная. В результате расширения объем газа увеличился в β раз. Найти количество теплоты Q, полученное газом.

9.34. При расширении от объема V_1 давление идеального одноатомного газа изменяется по закону: $p = \beta\sqrt[3]{V}$, где β – постоянная. Во сколько раз увеличился объем газа, если при расширении к одного моля газа было подведено количество теплоты Q?

9.35. Объем моля идеального газа с показателем адиабаты γ изменяют по закону $V = aT^2$, где a – постоянная. Найти работу, совершенную газом в этом процессе, если его температура увеличилась на ΔT.

9.36. ν молей идеального газа с показателем адиабаты γ участвует в процессе, при котором давление газа меняется с температурой по закону $p = \alpha\sqrt{T}$, где α – постоянная. Найти изменение внутренней энергии газа и работу, совершенную газом, при изменении температуры на ΔT.

9.37. Объем, занимаемый идеальным одноатомным газом увеличили в $\alpha = 1{,}5$ раза по политропе с молярной теплоемкостью $C = 2R$. Первоначально газ имел объем V_1 при давлении p_1. Во сколько раз изменилась температура газа? Какая работа была совершена газом в данном процессе?

9.38. Идеальный газ с показателем адиабаты γ участвует в процессе, при котором его внутренняя энергия $U \sim V^{\alpha}$, где α – по-

стоянная. При расширении газ совершил работу A. Найти изменение его внутренней энергии ΔU.

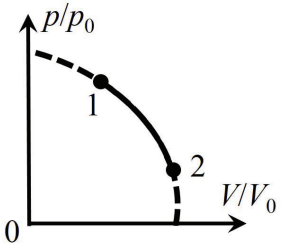


Рис. 9.4. p–V-диаграмма процесса перевода идеального газа из состояния 1 в состояние 2.

9.39. Один моль идеального газа переводят из состояния 1 в состояние 2 в процессе, который в некотором масштабе на p–V-диаграмме имеет вид дуги окружности (рис. 9.4). Определить максимальную температуру газа $T_{\max}$ в ходе процесса. Постоянные p_0 и V_0 известны.

9.40. Нагревается или охлаждается идеальный газ, если он расширяется по закону $p = p_0 + \alpha / \sqrt{V}$, где α и p_0 – постоянные?

9.41. Увеличится или уменьшится объем газа при его нагревании в процессе $p = p_0 + \beta T^2$, где β и p_0 – постоянные?

9.42. Один моль идеального одноатомного газа участвует в процессе $p = p_0 + \alpha\sqrt{V}$, где α и p_0 – постоянные. Найти изменение внутренней энергии газа, совершенную им работу и полученное газом количество теплоты при увеличении его объема от V_1 до $V_2 = 2V_1$.

9.43. ν молей идеального двухатомного газа участвует в процессе $p = p_0 + \alpha V^3$, где α и p_0 – постоянные. Найти изменение внутренней энергии газа при его сжатии от объема V_1 до объема V_2.

9.44. Идеальный газ, имевший первоначально объем V_1, расширяется в процессе $p = p_0 e^{\alpha V}$, где α и p_0 – постоянные. Во сколько раз изменился объем газа, если при расширении газ совершил работу A?

9.45. Один моль идеального газа, молярная теплоемкость C_V которого известна, участвует в процессе $T = T_0 + \beta V$, где β и T_0 – постоянные. При расширении газа его начальный объем V_1 увеличился в $n = 3$ раза. Найти изменение внутренней энергии газа и совершенную им при расширении работу.

9.46. ν молей одноатомного идеального газа участвует в процессе $T = T_0 + \alpha / V$, где α и T_0 – постоянные. При сжатии газа его

начальный объем V_1 уменьшился в n раз. Найти суммарное количество теплоты, отданное (или полученное) газом в этом процессе.

9.47. При нагревании одного моля аргона его объем изменялся с температурой по закону: $V = \sqrt{\alpha T}$, где α – известная размерная постоянная. При этом давление газа возросло от p_1 до p_2. Определить полученное газом количество теплоты Q.

9.48. В вертикальном цилиндре с теплопроводящими стенками под невесомым поршнем площадью $S = 10$ см^2 находится воздух. Пространство над поршнем открыто, наружное давление $p_0 = 1$ атм. Начальная высота столба воздуха под поршнем $h_0 = 20$ см. Какую работу нужно совершить, чтобы медленно поднять поршень на высоту $h_1 = 10$ см? Трения нет. Температура во время поднятия поршня остается постоянной.

9.49. В вертикальном цилиндре под поршнем находится идеальный газ. На поршень медленно насыпают столько песка, чтобы объем газа уменьшился в $n = 4$ раза. Какую часть песка нужно убрать, чтобы объем газа увеличился в $k = 2$ раза? Температуру газа считать постоянной.

9.50. В вертикальной трубке с невесомым поршнем находится воздух. Край поршня совпадает с верхним краем трубки. На поршень наливают жидкость с плотностью ρ. Когда высота столба жидкости стала равна h, высота столба воздуха в трубке оказалась такой же. Давление воздуха снаружи трубки равно p. Определить максимально возможную высоту x_m столба жидкости в трубке. Температуру воздуха считать постоянной.

9.51. В вертикальной, открытой с обоих концов гладкой трубке находятся два одинаковых поршня массой m и площадью S. Пространство между поршнями заполнено гелием. Внешнее давление равно p_0. Газу сообщили количество теплоты Q. Насколько увеличится расстояние между поршнями? Процесс теплопередачи считать изобарическим.

9.52. Внутри закрытого горизонтального цилиндра с теплопроводящими стенками находится легкоподвижный теплопроводящий поршень, который может перемещаться в цилиндре без трения (рис. 9.5). При равновесии поршень делит цилиндр на две равные

Рис. 9.5. Горизонтальный цилиндр с теплопроводящими стенками с теплопроводящимим поршнем.

части объемом V_0 каждая, в которых находится идеальный газ при одинаковом давлении p_0. Поршень начали медленно перемещать. Какую работу нужно совершить, чтобы изотермически сжать газ в одной половине цилиндра до половины его начального объема?

9.53. Решить задачу 9.52 при условии, что стенки цилиндра теплоизолированы. Показатель адиабаты газа равен γ.

9.54. Решить предыдущую задачу при условии, что и стенки цилиндра, и поршень теплоизолированы.

9.55. В теплоизолированном цилиндре длиной 2ℓ и площадью основания S может свободно перемещаться легкий теплоизолирующий поршень. Первоначально поршень находится в центре сосуда, а в обеих частях сосуда – по ν молей идеального газа с показателем адиабаты γ при давлении p_0. Затем поршень начали медленно перемещать. Найти температуры газа в обеих частях сосуда в зависимости от смещения x поршня от начального положения.

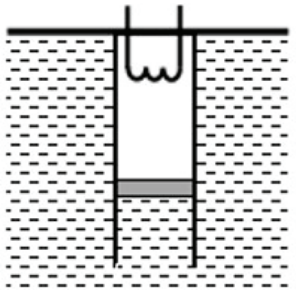


Рис. 9.6. Цилиндр с теплоизолированными стенками, опущенный в бассейн с водой.

9.56. Цилиндр с теплоизолированными стенками, закрытый сверху и открытый снизу, опущен вертикально в широкий бассейн, как показано на рис. 9.6. В верхней части цилиндра находится один моль аргона, отделенный от воды невесомым теплоизолирующим поршнем, площадь которого S. Первоначально поршень находится на расстоянии $2h$ от закрытого торца цилиндра. Газ начинают медленно нагревать. Какое количество теплоты надо подвести к газу, чтобы поршень сместился вниз на расстояние h, оставаясь при этом в цилиндре?

§10. Циклические процессы. КПД тепловых машин

- Коэффициент полезного действия (КПД) теплового двигателя:

$$\eta_{\text{тд}} = \frac{\oint \delta A}{Q^+} = 1 - \frac{\left|Q^-\right|}{Q^+}.$$

- Эффективность холодильной машины (холодильный коэффициент):

$$\eta_{\text{х}} = \frac{Q^+_{\text{хм}}}{\left|\oint \delta A\right|} = \frac{Q^+_{хм}}{\left|Q^+_{хм} + Q^-_{хм}\right|} = \frac{1}{\left|1 + Q^-_{хм} / Q^+_{хм}\right|}.$$

- Эффективность теплового насоса:

$$\eta_{\text{тн}} = \frac{Q^-_{\text{тн}}}{\oint A} = \frac{Q^-_{\text{тн}}}{Q^+_{\text{тн}} + Q^-_{\text{тн}}} = \frac{1}{1 + Q^+_{\text{тн}} / Q^-_{\text{тн}}}.$$

- КПД цикла Карно:

$$\eta_{\text{тдК}} = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}.$$

- Связь КПД, холодильного коэффициента и эффективности теплового насоса тепловой машины, работающей по обратимому циклу:

$$\eta_{\text{тд}} = \frac{1}{\eta_{\text{тн}}} = \frac{1}{1 + \eta_{\text{хм}}}.$$

- Эффективность холодильной машины, работающей по циклу Карно:

$$\eta_{\text{х}} = \frac{T_{\min}}{T_{\max} - T_{\min}}.$$

10.1. Тепловая машина с кислородом в качестве рабочего вещества совершает цикл Карно. При изотермическом расширении газа его объём увеличивается в $\alpha = 2$ раза, а при последующем адиабатическом расширении совершается работа $A^* = 3$ кДж. Определить работу A, совершенную газом за цикл.

10.2. В ходе цикла Карно рабочее вещество получает от нагревателя теплоту $Q_1 = 200$ кДж. Температуры нагревателя и холо-

дильника равны $T_1 = 500$ К и $T_2 = 300$ К соответственно. Определить работу A, совершенную рабочим веществом за цикл.

10.3. Тепловая машина с идеальным одноатомным газом в качестве рабочего вещества совершает цикл Карно. В ходе изотермического расширения при температуре T_1 объем газа увеличивается от V_1 до V_2. Работа, совершаемая газом за цикл, равна A. Найти работу внешних сил A^*_{41} по адиабатическому сжатию газа.

10.4. Один моль идеального одноатомного газа используется в качестве рабочего вещества в тепловом двигателе, работающем по циклу Карно. Температура нагревателя $T_1 = 500$ К. При адиабатическом сжатии совершается внешняя работа $A = 3{,}0$ кДж. Определить КПД двигателя.

10.5. Один моль идеального газа с показателем адиабаты $\gamma = 1{,}4$ совершает цикл Карно в качестве рабочего вещества тепловой машины при температурах нагревателя и холодильника $T_1 = 600$ К и $T_2 = 300$ К соответственно. Отношение максимального за цикл давления к минимальному $p_{\max}/p_{\min} = \beta = 20$. Определить количество теплоты Q_1, полученное от нагревателя, и количество теплоты Q_2, отданное холодильнику.

10.6. Тепловая машина, рабочим веществом которой является азот массой $m = 1{,}5$ кг, работает по циклу Карно. Температуры нагревателя и холодильника равны $T_1 = 500$ К и $T_2 = 293$ К соответственно. Давление азота в конце изотермического расширения равно давлению в начале адиабатического сжатия. Длительность цикла 1 с. Определить количество теплоты Q^+, ежесекундно подводимой к тепловой машине, и мощность машины N.

10.7. Тепловая машина с водородом (H_2) в качестве рабочего вещества работает по циклу Карно. При адиабатическом расширении газа его объем увеличивается в $n = 3$ раза. Насколько изменится КПД цикла, если водород заменить гелием?

10.8. Тепловую машину, работающую по циклу Карно с КПД $\eta = 35\%$, начинают использовать при тех же нагревателе и холодильнике как холодильную машину. Какую механическую работу нужно совершить, чтобы эта машина отвела от холодильника $Q_2 = 20$ кДж теплоты?

10.9. Холодильная установка работает по циклу Карно в интервале температур $t_1 = +10$ ºС и $t_2 = -5$ ºС. Как изменится холодильный коэффициент, если температура t_1 увеличится, а температура t_2 уменьшится на одну и ту же величину $\Delta t = 2$ ºС?

10.10. Тепловая машина Карно используется в качестве холодильной машины для поддержания температуры в кладовой $t_2 = 5$ °С при температуре окружающего воздуха $t_1 = 30$ °С. Какую механическую работу надо совершить, чтобы вывести из кладовой $Q_2 = 100$ кДж теплоты?

10.11. Холодильная машина, работающая по обратному циклу Карно, забирает тепло у воды и передает её окружающей среде, температура которой $t_1 = 20$ ºС. Какую механическую работу нужно совершить, чтобы заморозить $m = 200$ г воды при температуре $t_2 = 0$ ºС? Удельная теплота плавления льда при 0 ºС $\overline{L}_{\text{пл}} = 330$ кДж/кг.

10.12. Идеальная машина, работающая по обратному циклу Карно, забирает тепло у воды, имевшей начальную температуру $T_1 = 273$ К, и передает её кипятильнику, имеющему температуру $T_2 = 373$ К. Какая масса m_2 льда образуется при испарении $m_1 = 1$ кг воды? Удельная теплота плавления льда при 273 К $\overline{L}_{\text{пл}} = 330$ кДж/кг, удельная теплота парообразования воды при 373 К $\overline{L}_{\text{пар}} = 2260$ кДж/кг.

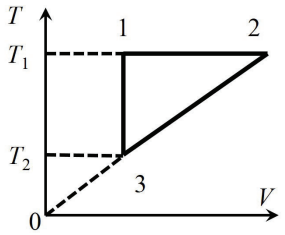


Рис. 10.1. Цикл тепловой машины с одним молем идеального газа.

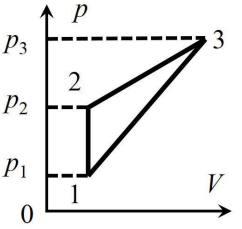


Рис. 10.2. Цикл тепловой машины с одним молем идеального одноатомного газа.

10.13. Тепловая машина с одним молем идеального газа в качестве рабочего вещества совершает цикл, показанный на рис. 10.1. Изобразить этот цикл на (p-V)-диаграмме. Какая работа совершается газом за цикл? Известные параметры состояний указаны на рисунке.

10.14. Один моль идеального одноатомного газа совершает цикл, показанный на рис. 10.2. Давления в точках 1 и 3 отличаются

от давления в точке 2 на одинаковую величину. Определить количество теплоты Q^-, отдаваемое газом за цикл.

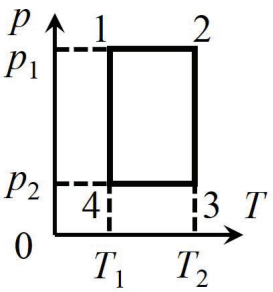


Рис. 10.3. Цикл тепловой машины с одним молем идеального газа.

10.15. Тепловая машина с одним молем идеального газа в качестве рабочего вещества совершает цикл, показанный на рис. 10.3. Изобразить этот цикл на (p-V)-диаграмме. Какая работа совершается газом за цикл? Известные параметры состояний указаны на рисунке.

10.16. Один моль идеального двухатомного газа, находящийся под давлением $p_1 = 0{,}1$ МПа при температуре $T_1 = 300$ К, нагревают при постоянном объеме, пока его давление не увеличится до $p_2 = 0{,}2$ МПа. После этого газ изотермически расширяется, пока давление не станет равным первоначальному, а затем изобарно сжимается до начального объема. Построить график цикла на (p-V)-диаграмме. Определить температуру T газа для характерных точек цикла и его КПД. Колебательные степени свободы в молекулах газа при температурах цикла не возбуждены.

10.17. Найти работу, совершенную идеальным газом за цикл, показанный на рис. 10.4. В точке 1 цикла $V_1 = 10$ л, давление $p_1 = 10^4$Па. Давление p_2 в $n = 4$ раза превышает p_1. Температуры газа в точках 2 и 4 одинаковы.

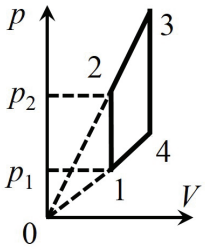


Рис. 10.4. Цикл тепловой машины с идеальным газом.

10.18. Найти КПД цикла, проводимого с одним молем идеального двухатомного газа и состоящего из двух изотерм ($T_1 > T_2$) и двух изохор с объемами V_1 и $V_2 = 3V_1$.

10.19. Идеальный одноатомный газ в качестве рабочего вещества теплового двигателя участвует в циклическом процессе, изображенном на рис. 10.5. Отношение максимальной температуры газа к минимальной в этом цикле равно $n = 4$, температуры в точках 2 и 4 совпадают. Определить КПД теплового дви-

гателя.

10.20. Идеальный двухатомный газ участвует в цикле, состоящем из двух изобар и двух адиабат (рис. 10.6). Минимальное и максимальное давления в цикле равны p_1 и p_2 соответственно. Определить КПД цикла.

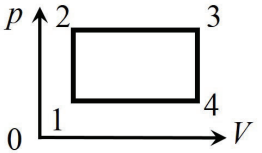


Рис. 10.5. Цикл тепловой машины с идеальным газом.

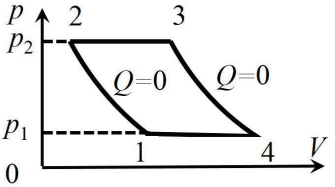


Рис. 10.6. Цикл тепловой машины с идеальным двухатомным газом.

10.21. Обратимый цикл теплового двигателя состоит из изотермы, изобары и изохоры. Изотермический процесс происходит при максимальной температуре цикла $T_1 = 400$ К. Отношение максимального и минимального объемов в цикле $V_{max}/V_{min} = n = 3$. Найти работу, совершаемую газом за цикл, и КПД двигателя η. Рабочим веществом служат ν = 2 моля идеального одноатомного газа.

10.22. Тепловой двигатель с идеальным газом в качестве рабочего вещества совершает цикл, состоящий из изотермы, изобары и изохоры, причем изотермический процесс происходит при минимальной температуре цикла. Показатель адиабаты газа равен γ. Отношение максимального и минимального давлений в пределах цикла $p_{max}/p_{min} = n$. Определить КПД двигателя.

10.23. Идеальный двухатомный газ участвует в цикле, показанном на рис. 10.7. Температуры газа в состояниях 1 и 3 равны T_1 и T_3. Между какими температурами совершается цикл? Определить КПД машины, работающей по такому циклу.

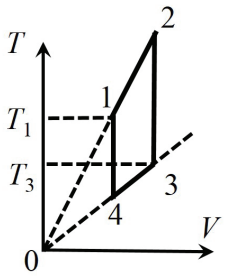


Рис. 10.7. Цикл тепловой машины с двухатомным газом.

10.24. Тепловая машина с одним молем идеального двухатомного газа в качестве рабочего вещества участвует в цикле,

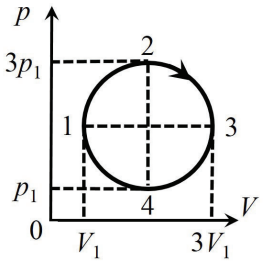


Рис. 10.8. Цикл тепловой машины с двухатомным идеальным газом.

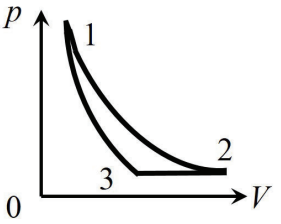


Рис. 10.9. Цикл идеального газа.

который на (p-V)-диаграмме в специально подобранном масштабе имеет вид окружности (рис. 10.8). Известные параметры состояния газа приведены на рисунке. Определить совершаемую газом за цикл работу и КПД цикла.

10.25. Тепловой двигатель с идеальным газом в качестве рабочего вещества совершает обратимый цикл, состоящий из изотермы, изобары и адиабаты, причем изотермический процесс происходит при максимальной температуре цикла (рис. 10.9). Показатель адиабаты газа равен γ. Отношение максимального и минимального давлений в пределах цикла $p_{max}/p_{min} = n$. Определить КПД двигателя.

10.26. Решить предыдущую задачу при условии, что изотермический процесс протекает при минимальной температуре цикла.

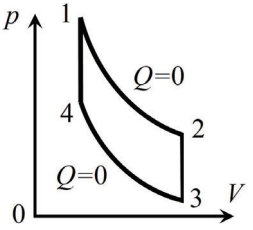


Рис. 10.10. Цикл двигателя внутреннего сгорания, состоящий из двух изохор и двух адиабат.

10.27. Один моль одноатомного газа участвует в циклическом процессе, состоящим из адиабаты 1-2, изобары 2-3 и изохоры 3-1. КПД цикла равен η. Максимальная температура цикла T_1 достигается на адиабате. Минимальная температура в цикле равна T_3. Определить внешнюю работу при изобарическом сжатии газа.

10.28. Цикл двигателя внутреннего сгорания состоит из двух изохор и двух адиабат (рис. 10.10). Рабочим веществом является идеальный газ с

показателем адиабаты γ. Определить КПД цикла как функцию отношения максимального и минимального объемов в цикле $V_{max}/V_{min} = n$. Во сколько раз изменится КПД двигателя, если увеличить n в 3 раза?

10.29. Один моль аргона участвует в цикле, состоящем из адиабаты 1-2, изобары 2-3 и изохоры 3-1. Максимальная разность температур аргона в адиабатическом процессе равна ΔT. Минимальная температура достигается при изобарическом сжатии газа. Полная работа газа за цикл равна A. Найти количество теплоты, которым обменивается аргон с внешними телами при изобарическом процессе.

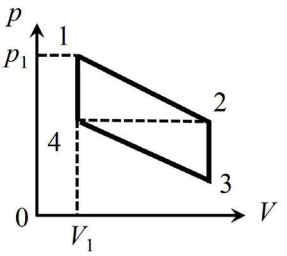


Рис. 10.11. Цикл тепловой машины, в качестве рабочего вещества в которой используется один моль идеального одноатомного газа.

10.30. Один моль идеального одноатомного газа используется в качестве рабочего вещества тепловой машины, цикл которой показан на рис. 10.11. В начале цикла объем газа V_1, давление p_1. В точке 4 цикла температура газа T_4. Давления газа в точках 2 и 4 одинаковы. Определить КПД цикла.

10.31. Один моль идеального одноатомного газа в качестве рабочего вещества двигателя совершает цикл, состоящий из двух адиабат, изохоры и изобары (рис. 10.12). КПД двигателя равен η. Минимальная и максимальная температуры в ходе изобарического процесса равны T_1 и T_2 соответственно. Определить количество теплоты Q^-, отдаваемое газом за цикл.

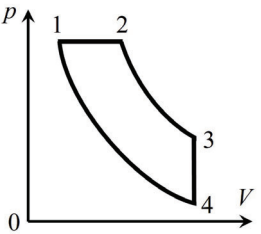


Рис. 10.12. Цикл тепловой машины, в качестве рабочего вещества в которой используется один моль идеального одноатомного газа.

10.32. Тепловой двигатель с идеальным одноатомным газом в качестве рабочего вещества совершает цикл, состоящий из двух изотерм и двух изохор. Изотермические процессы проходят при температурах T_1 и $T_2 > T_1$. Объем газа в пределах цикла изменяется в α раз. Определить КПД цикла.

10.33. Тепловой двигатель, рабочим веществом которого является идеальный одноатомный газ, совершает циклический процесс, изображенный на рис. 10.13, где участок 2-3 – адиабатическое расширение. Определить КПД двигателя, если в процессе 1-2 давление газа увеличивается в $n = 2$ раза, а в процессе 3-1 объем газа уменьшается в $m = 3$ раза.

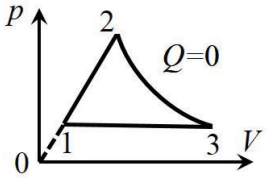


Рис. 10.13. Цикл тепловой машины, в качестве рабочего вещества в которой используется один моль идеального одноатомного газа.

10.34. Гелий в качестве рабочего вещества теплового двигателя совершает процесс, который на p-V-диаграмме в определенном масштабе имеет вид ромба с диагоналями, параллельными осям $0p$ и $0V$ (рис. 10.14). КПД двигателя равен η. Известна температура газа T_2 в точке 2. Максимальная температура в цикле достигается в точке 3, а минимальная – в точке 1. Определить температуру газа в точке 4.

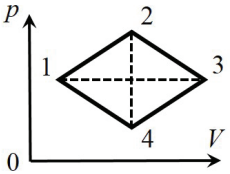


Рис. 10.14. Цикл тепловой машины, в качестве рабочего вещества в которой используется гелий.

10.35. Один моль идеального одноатомного газа используется в качестве рабочего вещества двигателя, который совершает цикл, состоящий из адиабаты, изотермы и изохоры. КПД двигателя η = 20%. При изотермическом сжатии совершается работа $A = 2{,}5$ кДж. Определить, между какими температурами совершается цикл.

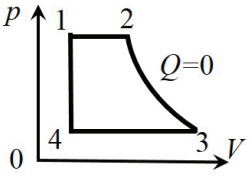


Рис. 10.15. Цикл тепловой машины, в качестве рабочего вещества в которой используется идеальный газ.

10.36. Найти КПД теплового двигателя, работающего по циклу, состоящему из двух изобар, изохоры и адиабаты (рис. 10.15). Рабочим веществом является идеальный газ с показателем адиабаты γ. Известны температуры цикла T_1, T_2, T_3 и T_4.

10.37. Обратимый цикл теплового двигателя состоит из изобары 1-2, изохоры 2-3 и изотермы 3-1 (рис. 10.16). Рабочим веще-

ством является идеальный газ с показателем адиабаты γ. Найти КПД двигателя η, выразив его как функцию максимальной T_2 и минимальной T_1 температур цикла.

10.38. Обратимый цикл с идеальным двухатомным газом состоит из изотермического 1-2, изохорического 2-3 и политропического 3-1 процессов. Теплоемкость газа в политропическом процессе $C = 1{,}5R$. Изотермический процесс протекает при максимальной температуре цикла. Объем газа в пределах цикла изменяется в β раз. Найти КПД тепловой машины, работающей по этому циклу.

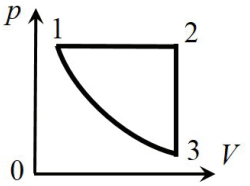


Рис. 10.16. Обратимый цикл тепловой машины, в качестве рабочего вещества в которой используется идеальный газ.

10.39. Обратимый цикл теплового двигателя состоит из адиабаты 1-2, изохоры 2-3 и политропического процесса 3-1 с показателем $n = 2$ (рис. 10.17). Рабочим веществом является одноатомный идеальный газ. Известны температуры $T_1 = 500$ К и $T_2 = 300$ К. Определить КПД двигателя.

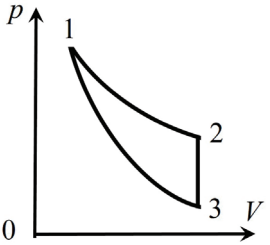


Рис. 10.17. Обратимый цикл тепловой машины, в качестве рабочего вещества в которой используется одноатомный идеальный газ.

10.40. Холодильная машина с одним молем идеального газа в качестве рабочего вещества совершает цикл, состоящий из изобары 1-2, изохоры 2-3 и адиабаты 3-1. Показатель адиабаты газа равен γ. Минимальная температура цикла T_1 достигается в адиабатическом процессе. Определить холодильный коэффициент машины η_x, выразив его через максимальную T_2 и минимальную T_1 температуры.

10.41. Холодильная машина с одним молем идеального газа в качестве рабочего вещества совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изотерм ($T_1 = 293$ К и $T_2 = 450$ К, рис. 10.18). В ходе цикла объем газа изменяется в $n = 2$ раза. Какое количество теплоты за цикл отбирает холодильная машина у охлаждаемого вещества, если её холодильный коэффициент равен $\eta_x = 3$?

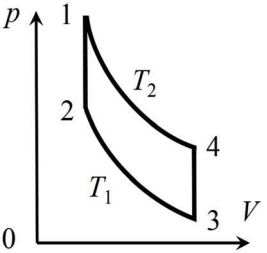


Рис. 10.18. Цикл холодильной машины с одним молем идеального газа.

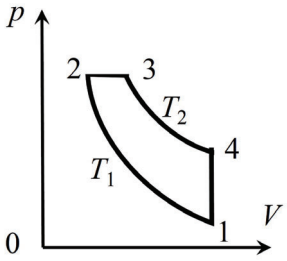


Рис. 10.19. Обратимый цикл тепловой машины, в качестве рабочего вещества в которой используется один моль одноатомного идеального газа.

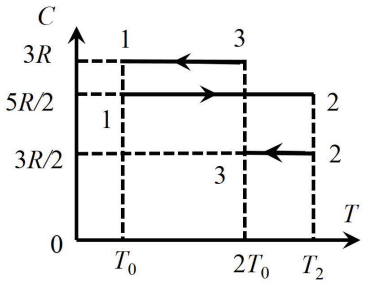


Рис. 10.20. Цикл тепловой машины, в качестве рабочего вещества в которой используется один моль одноатомного идеального газа.

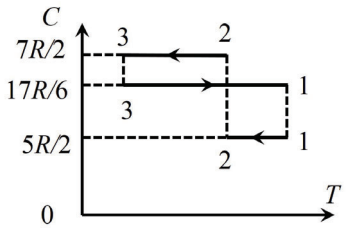


Рис. 10.21. Цикл тепловой машины, в качестве рабочего вещества в которой используется один моль двухатомного идеального газа.

10.42. Тепловая машина забирает теплоту воды, имевшей начальную температуру $t_1 = 0$ ºС, и передает её кипятильнику, имеющему температуру $t_2 = 100$ ºС. При этом часть воды замерзает, а выделяющаяся при этом теплота передается тепловой машиной воде в кипятильнике, поддерживая её кипение. Цикл тепловой машины состоит из двух изотерм, изобары и изохоры (рис. 10.19). Рабочим веществом служит один моль идеального одноатомного газа. Найти эффективность такой машины, если известны отношения $V_3/V_4 = 2$ и $p_1/p_2 = 4$.

10.43. Цикл тепловой машины, в которой в качестве рабочего вещества используется один моль идеального одноатомного газа, приведен на рис. 10.20 в координатах молекулярной теплоемкости C и температуры T. Известны значения теплоемкостей в процессах (указаны на рис. 10.20) и температура T_0 (температура T_2 не известна). Найти эффективность тепловой машины.

10.44. Цикл тепловой машины, в которой в качестве рабочего вещества используется один моль идеального двухатомного газа, задан в параметрах молярной теплоемкости C и температуры T (рис. 10.21). Значения теплоемкостей в процессах указаны на рисунке. Колеба-

тельные степени свободы атомов в молекулах газа не возбуждены. Отношение максимальной и минимальной температур $T_1/T_3 = \alpha$. Определить КПД тепловой машины η.

10.45. Цикл тепловой машины, в которой в качестве рабочего вещества используется один моль неона, задан в параметрах молярной теплоемкости C и температуры T (рис. 10.22). Отношение максимального и минимального объемов неона в данном цикле равно $n = 4$, а отношение максимального и минимального давлений составляет $k = 10$. Определить КПД тепловой машины η.

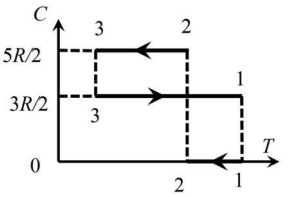


Рис. 10.22. Цикл тепловой машины, в качестве рабочего вещества в которой используется один моль неона.

§11. Второе начало термодинамики. Энтропия

- Статистическое определение энтропии: $S = k \ln\Gamma$, где $\Gamma(E,V,N) \sim V^N E^{\frac{3N}{2}}$
- Термодинамическое определение энтропии:
$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T}.$$
- Первое начало термодинамики для обратимых процессов:
$$T\mathrm{d}S = \mathrm{d}U + \delta A.$$
- Изменение энтропии при обратимых процессах:
$$\Delta S_{12} = \int_1^2 \mathrm{d}S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}.$$
- Изменение энтропии идеального газа:
$$\Delta S = S(T,V) - S(T_1,V_1) =$$
$$= \nu\left(R\ln\frac{V}{V_1} + C_V \ln\frac{T}{T_1}\right) \text{ (в переменных } T\text{-}V\text{);}$$
$$\Delta S = \nu\left(C_p \ln\frac{V}{V_1} + C_V \ln\frac{p}{p_1}\right) \text{ (в переменных } p\text{-}V\text{);}$$
$$\Delta S = \nu\left(C_p \ln\frac{T}{T_1} - R\ln\frac{p}{p_1}\right) \text{ (в переменных } p\text{-}T\text{).}$$
- Связь теплоемкости с энтропией:
$$C = \frac{T\mathrm{d}S}{\mathrm{d}T} = T\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}T}.$$
- Изменение энтропии вещества в политропических процессах:
$$\Delta S_{12} = \nu C \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right).$$

• Количество теплоты, получаемое (отдаваемое) системой при переходе из состояния 1 в состояние 2:
$$Q_{12} = \int_1^2 T\mathrm{d}S.$$

- Полный дифференциал энтропии как характеристической термодинамической функции:

$$\mathrm{d}S(U,V)=\frac{\mathrm{d}U}{T}+p\frac{\mathrm{d}V}{T}.$$

11.1. Один моль идеального одноатомного газа находится в сосуде при температуре T_1. Газ изохорически нагревают до температуры T_2. Во сколько раз изменится термодинамическая вероятность Г состояния газа? Воспользовавшись статистическим определением, определить изменение энтропии.

11.2. Один моль идеального одноатомного газа, находящегося в сосуде при температуре $T_0 = 300$ К, изохорически нагрели на $\Delta T = 1$ К. Во сколько раз изменилась при этом термодинамическая вероятность состояния газа? Определить изменение его энтропии в данном процессе.

11.3. Начальный объем V_1 двух молей идеального одноатомного газа изотермически увеличили на ΔV. Во сколько раз изменилось термодинамическая вероятность состояния газа? Воспользовавшись статистическим определением, найти изменение энтропии ΔS. Показать, что использование термодинамического определения энтропии приводит к такому же результату.

11.4. Какое количество теплоты Q^- следует отвести от идеального газа в изотермическом процессе при температуре T_0, чтобы уменьшить термодинамическую вероятность его состояния в n раз?

11.5. При переходе термодинамической системы из состояния 1 в состояние 2 термодинамическая вероятность состояния увеличилась с $\Gamma_1 = 1\cdot10^{100}$ до $\Gamma_2 = 5\cdot10^{100}$. Чему равно относительное изменение энтропии $\Delta S/S_0$ при таком переходе?

11.6. Один моль воды испарился при температуре $t_0 = 100$ ºС. Молярная теплота парообразования воды $L = 40{,}7$ кДж/моль. Определить, во сколько раз изменилась термодинамическая вероятность состояния воды.

11.7. Энтропия $m_1 = 1$ г кислорода при температуре $T_1 = 298$ К и давлении $p_1 = 1\cdot10^5$ Па равна $S_1 = 7{,}24$ Дж/(г·К). Определить энтропию $m_2 = 3$ г кислорода при температуре $T_2 = 373$ К и давлении $p_2 = 1{,}5\cdot10^5$ Па.

11.8. ν молей идеального газа изотермически сжимают от объема V_1 до объема $V_2 = V_1/2$. Найти изменение энтропии газа в этом процессе.

11.9. Азот и водород, имеющие одинаковые массы и занимающие одинаковые объемы, изотермически расширяют, увеличив объем каждого газа в 3 раза. Для какого газа изменение энтропии будет больше и во сколько раз?

11.10. Изменение энтропии азота массой $m = 160$ г при изотермическом расширении равно $\Delta S = 60$ Дж/К. Во сколько раз увеличивается объем газа в этом процессе?

11.11. Идеальный газ, расширяясь при постоянной температуре $T = 373$ К, совершает работу $A = 600$ Дж. Определить изменение энтропии газа в этом процессе.

11.12. Один моль аммиака NH_3 нагревают от температуры $T_1 = 273$ К до $T_2 = 473$ К первый раз – изохорически, а второй раз изобарически. На какую величину будут отличаться приращения энтропии газа в первом и втором процессах?

11.13. В результате нагревания азота массой $m = 22$ г его температура увеличилась от T_1 до $T_2 = 1{,}27T_1$, а энтропия возросла на $\Delta S = 4{,}19$ Дж/К. При каких условиях проводилось нагревание азота: при постоянном объеме или при постоянном давлении?

11.14. Найти изменение энтропии ν молей идеального газа с показателем адиабаты γ, если в результате некоторого процесса температура газа увеличилась в α раз, а его давление возросло в β раз.

11.15. Расширение одного моля идеального одноатомного газа происходит первый раз при постоянном давлении, а второй раз при постоянной температуре, причем начальные и конечные объемы газа в обоих случаях одни и те же. При изобарическом расширении приращение энтропии газа оказывается на ΔS больше, чем при изотермическом. Во сколько раз увеличивался объем газа?

11.16. Два моля идеального одноатомного газа сначала адиабатически сжимают, вследствие чего давление газа возрастает в два раза. Затем газ при постоянном объеме охлаждают до первоначальной температуры. Определить изменение энтропии газа в результате указанных процессов.

11.17. Водород массой m расширяется изотермически в α раз, а затем при постоянном давлении его объем уменьшается в β раз. Определить изменение энтропии газа.

11.18. В двух сосудах находится по $\nu = 2$ моля идеального газа с показателем адиабаты $\gamma = 1{,}4$. Объем первого сосуда в $\alpha = 2$ раза больше объема второго, а давление газа в нем в $\beta = 1{,}5$ раза меньше, чем во втором сосуде. Найти разность энтропий газа в этих сосудах.

11.19. Найти приращение энтропии $m = 32$ г газообразного кислорода в процессе, в результате которого коэффициент теплопроводности λ увеличился в 1,5 раза, а коэффициент диффузии η не изменился.

11.20. Один моль идеального одноатомного газа участвует в политропическом процессе $p = AV^2$, где $A = \text{const}$. В результате абсолютная температура газа увеличивается с $T_1 = 293$ К до $T_2 = 373$ К. Найти приращение энтропии газа.

11.21. Идеальный одноатомный газ в количестве $\nu = 3$ молей в ходе политропического процесса с молярной теплоемкостью $C = R/2$ сжимается от объема $2V_0$ до объема V_0. Определить изменение энтропии газа ΔS.

11.22. Цикл, состоящий из двух изохор и двух изотерм (см. рис. 11.1), реализуется с участием одного моля идеального газа с показателем адиабаты γ. В пределах цикла отношение максимального и минимального объемов равно $V_{\max}/V_{\min} = n$. Известны температуры T_1 и T_2 изотермических процессов. В каких точках цикла энтропия газа: а) максимальна; б) минимальна? Найти разность максимального $S_{\max}$ и минимального $S_{\min}$ значений энтропии газа в данном цикле.

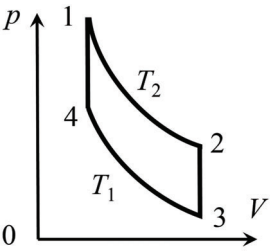


Рис. 11.1. Цикл, реализуемый одним молем идеального газа.

11.23. Обратимый цикл, состоящий из изотермы, изобары и адиабаты проводится над ν молями идеального газа (рис. 11.2). Изотермическому процессу соответствует максимальная температура. Отношение максимального и минимального давлений в пределах цикла $p_{\max}/p_{\min} = n$. В каких процессах цикла энтропия газа возрастает и на какую величину?

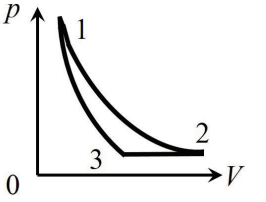


Рис. 11.2. Обратимый цикл, реализуемый ν молями идеального газа.

11.24. Цикл, показанный на рис. 11.3, реализуется с одним молем идеального газа с показателем адиабаты γ. Процесс 2-1 – адиабатический, линия 1-2 – прямая. Известны минимальный V_1 и максимальный V_2 объемы газа в пределах цикла, а также давление p_1 газа в состоянии 1. При каком объеме V_x газа его энтропия в данном цикле максимальна?

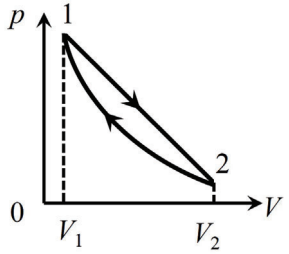


Рис. 11.3. Цикл, реализуемый одним молем идеального газа.

11.25. В процессе $p = p_0 e^{\alpha V}$ (α и p_0 – постоянные) участвует один моль идеального газа с показателем адиабаты γ. Определить изменение энтропии газа при увеличении его объема от V_1 до V_2.

11.26. В процессе $p = p_0 + \alpha/V$ (α и p_0 – постоянные) с участием одного моля одноатомного идеального газа его объем увеличился в η раз по отношению к начальному значению V_1. Определить изменение энтропии газа.

11.27. В процессе $T = T_0 + \alpha V^2$ (α и T_0 – постоянные) участвуют ν молей идеального газа, молярная теплоемкость C_V которого известна. При расширении газа его начальный объем V_1 увеличился в n раз. Найти изменение энтропии газа.

11.28. Один моль идеального газа с показателем адиабаты γ участвует в процессе $T = T_0 - \beta V$ (β и T_0 – постоянные). При каком значении объема V_m энтропия газа будет максимальной?

11.29. Два моля идеального одноатомного газа обратимо нагреваются от температуры $T_1 = 300$ К до $T_2 = 400$ К. В процессе нагревания давление газа изменяется по закону: $p = p_0 e^{\alpha T}$, где $\alpha = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ 1/К. Определить изменение энтропии газа.

11.30. В процессе нагревания одного моля одноатомного идеального газа его давление изменялось по закону: $p = p_0 + \alpha T$, где α и p_0 – постоянные. Температура газа увеличилась в n раз от первоначального значения T_1. На какую величину изменилась энтропия газа?

11.31. В начальном состоянии один моль идеального газа с показателем адиабаты γ занимал объем V_0 при температуре T_0. Газ участвует в процессе, в котором изменение его энтропии с темпе-

ратурой происходит по закону: $\Delta S = aR\,(T - T_0)$, где a – положительная константа. Найти зависимость объема газа от температуры $V(T)$ в этом процессе.

11.32. В процессе с участием одного моля идеального газа, его энтропия S изменяется по закону $S = \alpha T^2$ (α – постоянная). Найти молярную теплоемкость газа как функцию температуры T. Какое количество теплоты получит газ при повышении его температуры от T_1 до T_2?

11.33. В некотором процессе с одним молем идеального одноатомного газа его температура зависит от энтропии S как $T = \beta S^2$. Найти работу газа при увеличении его начальной температуры T_1 в 2 раза.

11.34. Молярная теплоемкость некоторого вещества меняется с температурой по закону: $C = \alpha\sqrt{T}$. Найти изменение энтропии ν молей вещества при изменении его температуры от T_1 до T_2.

11.35. Определить изменение энтропии куска железа массой $m = 1$ кг при его нагревании от $T_1 = 200$ К до $T_2 = 600$ К. В данном диапазоне температур удельная теплоемкость железа изменяется линейно от значения $c_1 = 400$ Дж/(кг · К) до $c_2 = 580$ Дж/(кг · К).

11.36. Теплоемкость вещества в некотором политропическом процессе равна C. Найти зависимость температуры от энтропии в этом процессе, если при температуре T_1 энтропия равна S_1.

11.37. Идеальный газ обратимо адиабатически расширяется в процессе 1-2 (рис. 11.4), после чего необратимым образом переходит в новое равновесное состояние 3 и обратимо в ходе изотермического сжатия при температуре $T = 300$ К возвращается в первоначальное состояние. На изотермическое сжатие газа затрачивается работа $A_{31} = 6$ Дж. Определить изменение энтропии газа в процессе 2-3.

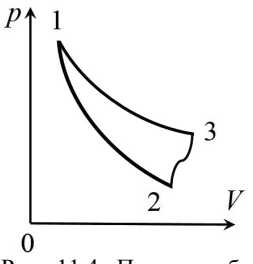


Рис. 11.4. Процесс обратимого адиабатического расширения идеального газа.

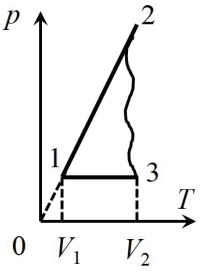


Рис. 11.5. Цикл, реализуемый с ν молями идеального газа.

11.38. Цикл, показанный на рис. 11.5 реализуется с участием ν молей идеального газа. Температура газа в состоянии 1 равна T_1,

температуры в состояниях 2 и 3 одинаковы и равны T_2. Процесс 2-3 необратимый. Определить изменение энтропии на всех участках цикла.

11.39. Теплоизолированный сосуд разделен перегородкой на две одинаковые части, в каждой из которых находится по одному молю аргона. Температура газа в первом сосуде T_1, во втором $T_2 > T_1$. Перегородку убирают, и газы перемешиваются. Найти изменение энтропии аргона, считая его идеальным газом.

11.40. Теплоизолированный сосуд разделен перегородкой на две равные по объему части. В одной половине находится идеальный газ массой m_1, молярная масса которого μ_1, во второй – другой газ массой m_2 с молярной массой μ_2. Давления газов и их температуры одинаковы. В перегородке открыли отверстие, и газы перемешались. Определить изменение ΔS энтропии системы.

11.41. В двух теплоизолированных сосудах объемами V_1 и V_2 находится одинаковое число молей ν_0 идеального газа. Температуры газов одинаковы, а давления различны. Сосуды соединены короткой трубкой с краном. После открытия крана газы перемешиваются. Определить изменение энтропии системы ΔS и показать, что $\Delta S > 0$.

11.42. Два сосуда объемами V_0 и nV_0 соединены трубкой с краном и теплоизолированы от окружающей среды. В меньшем по объему сосуде находится аргон под давлением p_1, в большем – кислород под давлением p_2. Температуры газов одинаковы и равны T_0. Считая газы идеальными, найти изменение энтропии системы после открытия крана и перемешивания газов.

11.43. Два адиабатически изолированных баллона объемами $V_1 = 1$ л и $V_2 = 2$ л соединены небольшой трубкой с закрытым краном. Первый баллон содержит $\nu = 2$ моля гелия при давлении $p_1 = 1$ атм, второй – $\nu = 2$ моля неона при давлении $p_2 = 2$ атм. Считая газы идеальными, определить изменение энтропии системы после открытия крана и перемешивания газов.

11.44. Горизонтально расположенный теплоизолированный цилиндр разделен на две равные части закрепленным легким теплоизолированным поршнем. В каждой части сосуда находится по одному молю водорода. Температура в правой части в 1,5 раза больше, чем в левой: $T_2 = 1{,}5T_1$. После освобождения поршня и установления равновесия объем одной из частей оказался в 2 раза больше другого. Определить суммарное изменение энтропии газа.

11.45. Теплоизолированный цилиндр разделен двумя закрепленными невесомыми поршнями на три одинаковых части, в одной из которых находится один моль идеального одноатомного газа при температуре T_0, а в других – вакуум. Сначала освободили один поршень. После установления равновесия и освобождения второго поршня создаются условия для равновесного расширения газа. Определить изменение энтропии газа и его конечную температуру.

11.46. Теплоизолированный цилиндр разделен двумя закрепленными невесомыми поршнями на три части, причем центральная часть в два раза больше других. В центральной части при температуре T_0 находятся ν молей идеального газа с показателем адиабаты γ, а в других - вакуум. Сначала, освободив первый поршень, создают условия для равновесного расширения газа до торца цилиндра. Затем освобождают второй поршень, и газ самопроизвольно расширяется до другого торца цилиндра. Определить конечную температуру и изменение энтропии газа.

11.47. В термостат наливают $V = 2$ л воды с температурой $t_1 = 20$ ºС и столько же воды, температура которой $t_2 = 40$ ºС. Через некоторое время устанавливается единая температура воды в термостате. Считая, что плотность воды $\rho = 995$ кг/м^3 и ее удельная теплоемкость $c_p = 4{,}19$ кДж/(кг·К) в данном диапазоне температур постоянны, а теплоемкость калориметра мала, определить приращение энтропии системы.

11.48. Кусок меди массой m_1, нагретый до температуры T_1, и кусок железа массой m_2, нагретый до температуры T_2, помещают в адиабатическую жесткую оболочку и приводят в тепловой контакт друг с другом. Удельные теплоемкости меди и железа (c_{p1} и c_{p2}) постоянны в данном диапазоне температур. Найти изменение энтропии системы в результате установления теплового равновесия, считая, что давление p = const.

11.49. Идеальный газ, имевший, в исходном состоянии при температуре T_1 энтропию S_1, переходит в состояние с энтропией $S_2 > S_1$, совершая обратимый процесс: *а*) изотермически; *б*) изобарически; *в*) изохорически. Изобразить на *S*–*T* диаграмме примерные графики зависимости энтропии от температуры в этих процессах.

11.50. Один моль идеального газа, находившийся в состоянии с энтропией S_1 при температуре T_1, переходит в состояние с температурой $T_2 > T_1$ при: *а*) изобарическом; *б*) изохорическом; *в*) адиабатическом обратимых процессах. Изобразить процессы на (T–S)-диаграмме. При каком процессе изменение энтропии газа наибольшее?

11.51. Цикл с участием идеального газа состоит: а) из двух изотерм (1-2 и 3-4) и двух изохор (2-3 и 4-1); *б*) из двух изобар (1-2 и 3-4) и двух изохор (2-3 и 4-1). Изобразить циклы на T–S -диаграмме.

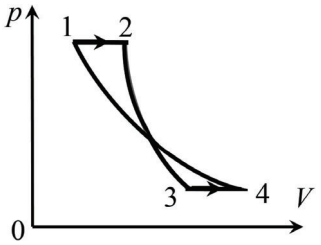


Рис. 11.6. Круговой цикл, реализуемый с участием идеального газа.

11.52. Круговой процесс с участием идеального газа состоящий из изотермы, адиабаты и дух изобар, представлен на рис. 11.6. Изобразить этот процесс на T–S -диаграмме.

11.53. Изобразить на (T–S) -диаграмме циклы, реализуемые с участием идеального газа и представленные на (p-V)-диаграммах на рис. 11.7. В цикле (*а*) процесс 1-2 – изотермический, процесс 3-1 – адиабатический. В цикле (*б*) процесс 3-1 – адиабатический. Цикл (*в*) состоит из изобарического, изохорического и двух изотермических процессов.

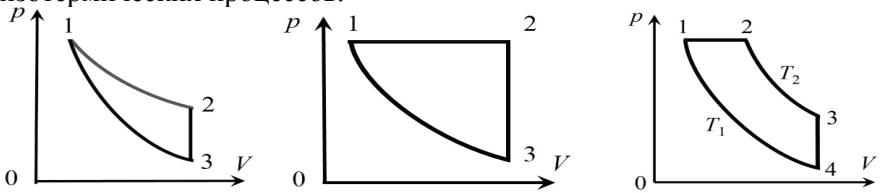


Рис. 11.7. Циклы, реализуемые с участием идеального газа.

11.54. Найти изменение энтропии на всех участках цикла, представленного на рис. 11.8. Цикл осуществляется с участием одного моля идеального двухатомного газа. Считать известными T_1, T_2, а также p_1 и p_2. Изобразить этот цикл в переменных S–T, S–p и S–V.

11.55. Циклический процесс с участием идеального газа представлен в координатах T-S на рис. 11.9. Максимальная и ми-

нимальная температуры газа в цикле равны T_1 и T_2 соответственно. Найти КПД тепловой машины, работающей по данному циклу. Сравнить с КПД цикла Карно, проводимого в том же интервале температур.

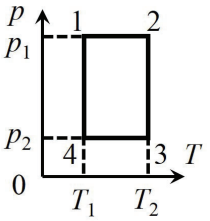


Рис. 11.8. Цикл, реализуемый с участием одного моля идеального газа.

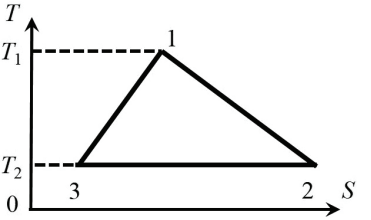


Рис. 11.9. Цикл, реализуемый с участием идеального газа.

11.56. Изменение энтропии в цикле Карно на участке между двумя адиабатами равно $\Delta S = 3{,}0$ кДж/К. Разность температур между двумя изотермами составляет $\Delta T = 100$ К. Какое количество полученной теплоты превращается в работу в этом цикле?

11.57. С рабочим веществом совершают цикл, в пределах которого абсолютная температура изменяется в n раз, а сам цикл имеет вид, показанный на рис. 11.10, где T – температура, S – энтропия. Найти КПД цикла.

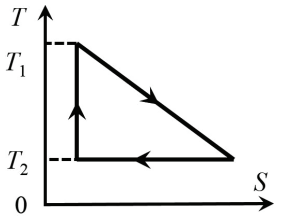


Рис. 11.10. Цикл, совершаемый с рабочим веществом.

11.58. Доказать с помощью T-S диаграмм, что КПД любого обратимого цикла, совершающегося в интервале температур от T_1 до T_2 ($T_1 > T_2$), меньше КПД цикла Карно, проводимого в том же диапазоне температур.

11.59. Циклический процесс, реализуемый с идеальным газом, представлен в координатах T-S на рис. 11.11. Считая известными температуры T_1, T_2, T_3 и T_4, определить КПД тепловой машины.

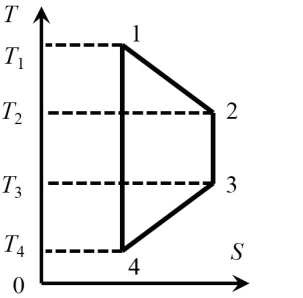


Рис. 11.11. Циклический процесс, реализуемый с идеальным газом.

11.60. Обратимый цикл, реализуемый с некоторой термодинамической системой, имеет на диаграмме T-S вид, показанный на рис. 11.12. Известны тем-

пературы T_1, T_2, T_3 и T_4 в соответствующих точках цикла. Найти КПД цикла.

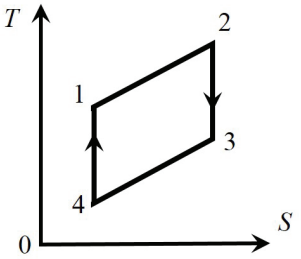


Рис. 11.12. Цикл процесс, реализуемый с некоторой термодинамической системой.

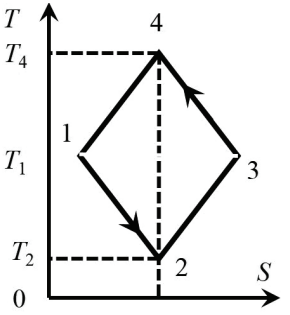


Рис. 11.13. Циклический процесс, реализуемой в машине с идеальным газом в качестве рабочего вещества

11.61. Циклический процесс, реализуемой в машине с идеальным газом в качестве рабочего вещества, на *T*-*S* диаграмме имеет вид ромба (см. рис. 11.13). Считая известными максимальную T_4 и минимальную T_2 температуры газа в цикле, определить эффективность тепловой машины.

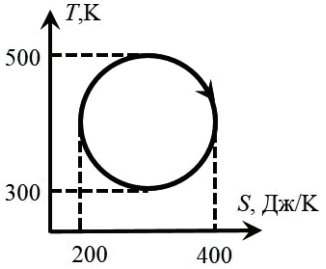


Рис. 11.14. Циклический процесс, реализуемой в машине с идеальным газом в качестве рабочего вещества.

11.62. Тепловая машина с идеальным газом в качестве рабочего вещества совершает циклический процесс, который на *T*-*S* диаграмме в некотором масштабе имеет вид окружности (рис. 11.14). Используя данные, приведенные на рис. 11.14, определить работу *A* газа за цикл.

§12. Реальные газы и жидкости

- Уравнение состояния газа Ван-дер-Ваальса:

$$\left(p+\nu^2\frac{a}{V^2}\right)\left(V-\nu b\right)=\nu RT\,.$$

- Внутренняя энергия газа Ван-дер-Ваальса:

$$U(T,V)=\nu C_V T-\nu^2\frac{a}{V}\,.$$

- Молярная теплоемкость реального газа в произвольном процессе:

$$C=\frac{\delta Q}{\mathrm{d}T}=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V+\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T+p\right]\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}\,.$$

- Вириальное уравнение состояния реального газа:

$$p=nk_{\mathrm{B}}T(1+nB+2n^2C+\ldots)\,.$$

- Уравнение состояния ν молей вещества в критической точке:

$$p_{\text{кр}}V_{\text{кр}}=\frac{3}{8}\nu RT_{\text{кр}}\,.$$

- Выражение критических параметров газа через постоянные Ван-дер-Ваальса:

$$V_{\text{кр}}=3b\,;$$

$$p_{\text{кр}}=a/(27b^2)\,;$$

$$T_{\text{кр}}=8a/(27Rb)$$

- Выражение постоянных Ван-дер-Ваальса через критические параметры:

$$a=3p_{\text{кр}}V_{\text{кр}}^2=\frac{9}{8}RT_{\text{кр}}V_{\text{кр}}\,;$$

$$b=V_{\text{кр}}/3\,.$$

- Закон соответственных состояний:

$$\left(\pi+\frac{3}{\varphi^2}\right)\left(\varphi-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{3}\tau\,,$$

где $\pi=p/p_{\text{кр}}$, $\varphi=V/V_{\text{кр}}$ и $\tau=T/T_{\text{кр}}$ – приведенные параметры.

- Энтальпия H:

$$H = U + pV .$$

- Полный дифференциал энтальпии в естественных переменных:

$$\mathrm{d}H(S, p) = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p .$$

- Свободная энергия (Гельмгольца) F:

$$F = U - TS$$

- Связь молярной теплоемкости при постоянном давлении с энтальпией:

$$C_p = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}T}\right)_p .$$

- Коэффициент Джоуля – Томсона для дифференциального эффекта:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{V}{C_p}\left[\alpha_p T - 1\right],$$

где $\alpha_p = \frac{1}{V}\left[\frac{\partial V}{\partial T}\right]_p$ – коэффициент объемного теплового расширения, C_p – молярная теплоемкость при постоянном давлении, V – молярный объем газа.

- Дифференциальный эффект Джоуля – Томсона для газа Ван-дер-Ваальса:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H \approx \frac{1}{C_p}\left(\frac{2a}{RT} - b\right).$$

- Интегральный эффект Джоуля – Томсона для газа Ван-дер-Ваальса:

$$\Delta T = \frac{\Delta p}{C_p}\left(\frac{2a}{RT} - b\right).$$

- Температура инверсии для газа Ван-дер-Ваальса:

$$T_i = \frac{2a}{Rb}\left(1 - \frac{b}{V}\right).$$

- Связь температуры инверсии и критической температуры газа Ван-дер-Ваальса:

$$T_i = \frac{27}{4} T_{\text{кр}}.$$

12.1. Углекислый газ CO_2 массой $m = 88$ г находится в сосуде емкостью $V = 10$ л. Определить давление газа и собственный объем $V_{\text{собст}}$ молекул. Для углекислого газа $a = 0{,}361$ Па·м^6/моль^2, $b = 4{,}28 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

12.2. В баллоне объемом $V = 8$ л находится кислород массой $m = 0{,}3$ кг при температуре $T = 300$ К. Какую часть объема сосуда составляет собственный объем молекул газа? Определить отношение дополнительного давления $p_{\text{доп}}$ к давлению p газа на стенки сосуда. Постоянные Ван-дер-Ваальса для кислорода: $a = 0{,}136$ Па·м^6/моль^2, $b = 3{,}17 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

12.3. Одинаковые количества молей $\nu = 40$ углекислого газа CO_2 и метана CH_4 находятся при одинаковой температуре в разных сосудах, имеющих одинаковый объем $V = 20$ л. Постоянные Ван-дер-Ваальса: для CO_2 - $a_1 = 0{,}361$ Па $\cdot$ м^6/моль^2, для метана – $a_2 = 0{,}226$ Па $\cdot$ м^6/моль^2, $b_1 \approx b_2$. Оценить разность давлений на стенки сосуда в случае углекислого газа и метана.

12.4. Углекислый газ массой $m = 6{,}6$ кг при давлении $p = 1 \cdot 10^5$ Па занимает объем $V = 4{,}0$ м^3. Определить температуру газа, если: *а*) газ реальный; *б*) газ идеальный. Постоянные Ван-дер-Ваальса для углекислого газа: $a = 0{,}361$ Па м^6/моль^2, $b = 4{,}28 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

12.5. Один моль хлора занимает объем $V = 0{,}5$ л при температуре $T = 300$ К. Определить давление газа на стенки сосуда. Сравнить полученный результат с давлением, рассчитанным из уравнения Менделеева–Клапейрона. Для хлора постоянные Ван-дер-Ваальса равны: $a = 0{,}650$ Па·м^6/моль^2, $b = 5{,}62 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

12.6. В закрытом сосуде объемом $V = 1{,}0$ м^3 находится $\nu = 500$ молей азота при давлении $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па. Во сколько раз надо увеличить температуру газа, чтобы его давление увеличилось в $\alpha = 1{,}5$ раза? Для азота постоянные Ван-дер-Ваальса равны: $a = 0{,}135$ Па·м^6/моль^2, $b = 3{,}86 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

12.7. Один моль метана находится при температуре $T = 300$ К в закрытом сосуде объемом V. Оценить относительную погрешность $\delta = \Delta p/p$, которая будет допущена при расчете давления, если

вместо уравнения Ван-дер-Ваальса использовать уравнение Менделеева–Клапейрона. Оценку провести для двух значений объема: $V_1 = 4{,}0$ л и $V_2 = 0{,}4$ л. Постоянные Ван-дер-Ваальса для метана: $a = 0{,}226$ Па·м^6/моль^2, $b = 4{,}27 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

12.8. При расширении ν молей газа Ван-дер-Ваальса от объема V_1 до объема V_2 была совершена работа A против межмолекулярных сил притяжения. Определить постоянную Ван-дер-Ваальса a для этого газа.

12.9. В двух цилиндрических сосудах под невесомыми поршнями находится по одному молю аргона при температуре $T = 400$ К. Постоянные Ван-дер-Ваальса для аргона: $a = = 0{,}134$ Па м^6/моль^2, $b = 3{,}22 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль. Воздействуя на поршни добиваются того, чтобы объемы газов в разных сосудах стали равными $V_1 = 0{,}5$ л и $V_2 = 0{,}1$ л соответственно. Во сколько раз отличаются внешние давления на первый и второй поршни? Во сколько раз отличались бы давления в рамках модели идеального газа?

12.10. Один моль некоторого газа, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса, находится в сосуде объемом $V = 0{,}2$ л. При температуре $T_1 = 300$ К давление газа $p_1 = 8 \cdot 10^6$ Па, а при $T_2 = 400$ К давление $p_2 = 13 \cdot 10^6$ Па. Найти постоянные Ван-дер-Ваальса для этого газа.

12.11. В случае гелия силы межмолекулярного притяжения много меньше сил отталкивания, чем и определяются собственные размеры молекул. Записать уравнение Ван-дер-Ваальса для такого газа. Оценить относительную погрешность, которая будет допущена при расчете количества молей гелия ν, находящегося в сосуде при температуре $T = 300$ К и при давлении $p = 1 \cdot 10^7$ Па, если не учитывать размеры молекул. Для гелия постоянная Ван-дер-Ваальса $b = 2{,}36 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

12.12. При каком давлении плотность углекислого газа CO_2 при температуре $T = 300$ К равна $\rho = 400$ кг/м^3? Считать, что углекислый газ описывается уравнением Ван-дер-Ваальса с постоянными $a = 0{,}361$ Па м^6/моль^2 и $b = 4{,}28 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль. Сравнить полученный результат с расчетом, проведенным для идеального газа.

12.13. При давлении $p = 7 \cdot 10^6$ Па плотность кислорода равна $\rho = 100$ кг/м^3. Считая газ ван-дер-ваальсовским с постоянными $a = 0{,}136$ Па·м^6/моль^2 и $b = 3{,}17 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль, определить его темпе-

ратуру. Сравнить результат с расчетом, проведенным для идеального газа.

12.14. Азот массой m при начальном давлении p_1 изотермически расширяется от объема V_1 до объема V_2. Найти работу, совершенную газом. Азот считать ван-дер-ваальсовским газом с известными постоянными a и b.

12.15. Кислород массой $m = 16$ г занимает объем $V_1 = 200$ см^3. Определить изменение внутренней энергии газа при его изотермическом расширении до $V_2 = 500$ см^3. Для кислорода $a = 0{,}136$ Па·м^6/моль^2.

12.16. $\nu = 2$ моля азота расширили от объема $V_1 = 0{,}1$ л до $V_2 = 0{,}4$ л при постоянной температуре $T = 300$ К. Вычислить количество теплоты, подведенное к газу. Газ считать ван-дер-ваальсовским. Постоянные Ван-дер-Ваальса для азота равны $a = 0{,}135$ Па·м^6/моль^2 и $b = 3{,}86 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

12.17. Найти изменение внутренней энергии одного моля ван-дер-ваальсовского газа в результате расширения от объема V_1 до объема V_2 при постоянном давлении p. Постоянные a и b, а также молярная теплоемкость C_V известны

12.18. Найти изменение внутренней энергии ν молей газа Ван-дер-Ваальса при изохорическом увеличении давления от p_1 до p_2. Газ находится в сосуде объемом V. Постоянные газа a и b, а также молярная теплоемкость C_V известны.

12.19. Найти уравнение адиабатического процесса в переменных T-V и p-V для газа Ван-дер-Ваальса. Постоянные a и b, а также молярная теплоемкость C_V которого известны.

12.20. Получить уравнение политропического процесса для газа Ван-дер-Ваальса в переменных T-V и p-V, считая известными молярную теплоемкость C в процессе, изохорическую молярную теплоемкость C_V , а также постоянные a и b.

12.21. Два баллона одинакового объема $V_0 = 2$ л соединены трубкой с краном. Стенки баллонов и трубки теплоизолированы. В первом объеме находится $\nu = 2$ моля азота при температуре $T_1 = 300$ К. Азот подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса с постоянной $a = 0{,}135$ Па·м^6/моль^2. Второй объем откачан до предельного вакуума. Определить изменение температуры азота после открытия крана.

12.22. Один моль кислорода, занимавший объем $V_1 = 1$ л, адиабатически расширяется в пустоту. При этом температура газа

уменьшается на $\Delta T = 4$ К. Для кислорода постоянная Ван-дер-Ваальса равна $a = 0{,}136$ Па·м^6/моль^2. Определить, до какого объема расширился газ.

12.23. $\nu = 500$ молей трехатомного газа адиабатически расширяются в вакуум от объема $V_1 = 0{,}5$ м^3 до объема $V_2 = 3$ м^3. При этом температура газа понижается на $\Delta T = 11$ К. Найти постоянную Ван-дер-Ваальса a.

12.24. Один моль некоторого газа, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса, расширяется в пустоту от объема $V_1 = 5$ л до объема $V_2 = 20$ л. Чтобы температура газа не изменилась, к нему подвели количество теплоты $Q = 20$ Дж. Определить постоянную Ван-дер-Ваальса a для данного газа.

12.25. Два моля аргона, занимавшие объем $V_1 = 2$ л самопроизвольно расширяются в пустоту до объема $V_2 = 20$ л. Давление газа остается постоянным и равным $p = 2\cdot10^5$ Па. Какое количество теплоты было подведено к газу? Считать, что аргон подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса с постоянными $a = 0{,}134$ Па$\cdot$м^6/моль^2 и $b = 3{,}2\cdot10^{-5}$ м^3/моль.

12.26. Два сосуда объемами V_0 и $3V_0$ соединены короткой трубкой с краном. Система адиабатически изолирована. В первом сосуде при температуре T_0 находятся ν молей газа, близкого по свойствам к идеальному, во втором – 2ν молей газа Ван-дер-Ваальса при температуре $3T_0$. Постоянные Ван-дер-Ваальса a и b известны. Теплоемкости C_V обоих газов одинаковы. Найти температуру, установившуюся в системе после открытия крана.

12.27. Теплоизолированный сосуд разделен перегородкой на две части объемами V и $2V$. В каждой части содержится один и тот же газ при температуре T_0: в объеме V - один моль, а в объеме $2V$ – 3 моля. Газ подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса, константы a и b и молярную теплоемкость C_V считать известными. Перегородку убирают. Определить установившиеся давление и температуру в сосуде.

12.28. Два теплоизолированных сосуда объемами $V_1 = 2$ л и $V_2 = 3$ л соединены короткой трубкой с краном. Система адиабатически изолирована. В каждом сосуде находится по одному молю хлора (Cl_2), в первом – при температуре $T_1 = 270$ К, во втором – при температуре $T_2 = 370$ К. Считая хлор ван-дер-ваальсовским газом с постоянной $a = 0{,}65$ Па$\cdot$м^6/моль^2, определить установившуюся температуру газа после открытия крана.

12.29. Два одинаковых теплоизолированных сосуда объемом V каждый соединены теплоизолированной трубкой с краном. В сосудах находится ν_1 и ν_2 молей газа Ван-дер-Ваальса при температуре T_1. Найти установившиеся температуру и давление газа после того, как соединяющий сосуды, кран открыли. Насколько изменилась потенциальная энергия взаимодействия молекул? Постоянные Ван-дер-Ваальса a и b и изохорическую молярную теплоемкость C_V считать известными.

12.30. Два теплоизолированных сосуда объемами V_1 и V_2 соединены короткой трубкой с краном. В первом сосуде находится ν_1 молей азота при температуре T_1, во втором – ν_2 молей аргона при температуре T_2. Газы подчиняются уравнению Ван-дер-Ваальса, причем постоянные Ван-дер-Ваальса азота и аргона примерно одинаковы и равны a и b. Определить давление и температуру смеси газов после открытия крана.

12.31. Получить выражение для изменения энтропии ν молей газа Ван-дер-Ваальса в результате перехода газа из состояния с параметрами (T_0, V_0) в состояние с параметрами (T, V). Считать, что молярная теплоемкость газа C_V не зависит от температуры.

12.32. Один моль аргона, занимающий объем $V_1 = 200$ мл при температуре $t_1 = 0$ ºС, переведен в состояние с объемом $V_2 = 400$ мл и температурой $t_2 = 100$ ºС. Считая, что аргон подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса с постоянной $b = 3{,}22 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль, найти приращение энтропии газа. Сравнить с изменением энтропии, рассчитанным для идеального газа.

12.33. Найти приращение энтропии трех молей ван-дер-ваальсовского газа при изотермическом увеличении его первоначального объема V в n раз. Постоянную Ван-дер-Ваальса b считать известной.

12.34. Два моля газа Ван-дер-Ваальса находятся в адиабатической оболочке объемом V при температуре T_1. Найти изменение энтропии газа при его расширении в пустоту от объема V до объема $2V$. Константы Ван-дер-Ваальса a и b и молярную теплоемкость C_V считать известными.

12.35. Один моль ван-дер-ваальсовского газа расширили изотермически при температуре T от объема V_1 до объема V_2. Найти изменение свободной энергии F газа.

12.36. Найти критический объем $V_{кр}$ и постоянные Ван-дер-Ваальса для аргона, если $T_{кр} = 151$ К и $p_{кр} = 4{,}86 \cdot 10^6$ Па.

12.37. Найти плотность азота $\rho_{кр}$ в критическом состоянии, если критические значения температуры и давления равны $T_{кр} = 126$ К, $p_{кр} = 3{,}39 \cdot 10^6$ Па.

12.38. Определить концентрацию $n_{кр}$ молекул углекислого газа в критическом состоянии, если его критическая температура $T_{кр} = 304$ К и критическое давление $p_{кр} = 7{,}3 \cdot 10^6$ Па.

12.39. Определить критическую температуру и критическое давление водорода, если для него постоянные Ван-дер-Ваальса равны $a = 0{,}0245$ Па·м^6/моль^2 и $b = 2{,}67 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

12.40. В табл. 12.1 приведены значения постоянных Ван-дер-Ваальса для некоторых газов.

Таблица 12.1

Значения постоянных Ван-дер-Ваальса для некоторых газов

Газ	a, Па·м^6/моль^2	b, 10^{-5} м^3/моль
Гелий	0,00338	2,36
Аргон	0,134	3,22
Азот	0,135	3,86
Кислород	0,136	3,17
CO_2	0,361	4,28
Хлор	0,650	5,62
Метан CH_4	0,226	4,27
Этан C_2H_6	0,543	6,42

Используя эти значения, вычислить критическое давление, критическую температуру и критический объем газов в рамках модели Ван-дер-Ваальса.

12.41. Какой наибольший объем может занимать m = 1кг воды в жидком состоянии? Критическая температура воды $t_{кр} = 274$ ºС, критическое давление $p_{кр} = 21{,}8 \cdot 10^6$ Па.

12.42. Один моль углекислого газа находится в критическом состоянии. При изобарическом нагревании газа его объем увеличился в $n = 2$ раза. Определить изменение температуры газа, если его критическая температура $T_{кр} = 304$ К.

12.43. Один моль некоторого газа находится в критическом состоянии. Во сколько раз возрастет давление газа, если его температуру изохорически увеличить в $n = 1{,}5$ раза ?

12.44. Один моль газа находится в критическом состоянии. Во сколько раз его давление будет отличаться от критического при одновременном увеличении объема и температуры в 2 раза?

12.45. Во сколько раз температура газа больше критической, если объем и давление газа втрое больше критических значений этих величин?

12.46. Один моль газа находится при критической температуре и занимает объем, втрое больший его критического объема $V_{кр}$. Во сколько раз давление газа в этом состоянии меньше критического давления $p_{кр}$?

12.47. Какую часть объема запаянной трубки следовало бы заполнить водой при комнатной температуре $t = 25\ ^{o}C$, чтобы при достижении критической температуры $T_{кр} = 647{,}3$ К трубка была целиком заполнена водой в критическом состоянии? Критическое давление воды $p_{кр} = 218{,}4 \cdot 10^5$ Па. При 300 К плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3.

12.48. У некоторых легких газов, например у гелия, силы межмолекулярного притяжения незначительны. Если считать, что для такого газа постоянная Ван-дер-Ваальса $a = 0$, то в опыте Джоуля – Томсона такой газ будет нагреваться или охлаждаться? Определить изменение температуры газа при расширении, если малый перепад давления равен Δp. Известны постоянная Ван-дер-Ваальса b и молярная теплоемкость газа C_p.

12.49. Если можно пренебречь объемом молекул и считать постоянную Ван-дер-Ваальса $b = 0$, то в опыте Джоуля – Томсона такой газ будет нагреваться или охлаждаться? Определить изменение температуры при расширении, если малый перепад давления равен Δp. Известны постоянная Ван-дер-Ваальса a и молярная теплоемкость газа C_p.

12.50. Установить связь между критической температурой $T_{кр}$ газа Ван-дер-Ваальса и температурой инверсии T_i дифференциального эффекта Джоуля – Томсона.

12.51. При какой максимальной исходной температуре T водород будет охлаждаться в процессе Джоуля – Томсона, если его критическая температура $T_{кр} = 33{,}2$ К?

12.52. Воспользовавшись формулой интегрального эффекта Джоуля – Томсона, найти значение T_1 гелия с начальным молярным объемом $V_1 = 200$ мл/моль, при котором эффект Джоуля – Томсона будет положительным, т.е. $T_2 < T_1$. Для гелия постоянные Ван-дер-Ваальса: $a = 0{,}00338$ м^{6}Па/моль^2, $b = 2{,}36\cdot10^{-5}$ м^3/моль.

12.53. Критическая температура азота $T_{кр} = 125$ К. Будет азот нагреваться или охлаждаться в опыте Джоуля – Томсона, если его исходная температура $T = 300$ К? Дросселирование проводится при малом перепаде давления.

12.54. В процессе Джоуля – Томсона водород расширяется от начального объема, при котором он описывается уравнением Ван-дер-Ваальса, до сильно разреженного состояния, в котором газ можно считать идеальным. Найти приращение температуры ΔT водорода, если начальное давление газа $p_1 = 10^6$ Па, а температура T равна а) 173 К; б) 300 К. Значение начального объема водорода определить из уравнения идеального газа. Для водорода $a = 0{,}0245$ Па·м^6/моль^2, $b = 2{,}67\cdot10^{-5}$м^3/моль.

12.55. Воздух, находящийся при температуре $T_1 = 300$К и давлении $p_1 = 3{,}0\cdot10^6$ Па, подвергают дросселированию, пропуская через клапан. Определить температуру воздуха T_2 после дросселирования, если давление $p_2 = 2{,}0\cdot10^6$ Па. Для воздуха постоянные Ван-дер-Ваальса $a = 0{,}139$ Па·м^6/моль^2, $b = 3{,}9\cdot10^{-5}$м^3/моль; изобарическая молярная теплоемкость при температуре T_1 равна $C_p = 29{,}06$ Дж/(моль·К).

12.56. Найти температуры инверсии T_i дифференциального эффекта Джоуля – Томсона для разреженных водорода, кислорода и углекислого газа, считая, что эти газы подчиняются уравнению Ван-дер-Ваальса. Постоянные Ван-дер-Ваальса для этих газов приведены в табл. 12.2.

Таблица 12.2

Постоянные Ван-дер-Ваальса для некоторых газов

Газ	a, Па·м^6/моль^2	b, 10^{-5}м^3/моль
CO_2	0,361	4,28
Водород	0,0245	2,67
Аргон	0,134	3,22

12.57. Определить изменение температуры ΔT в опыте Джоуля – Томсона с газами, описанными в задаче 12.56, если начальная температура газов $T = 300$ К, а давление понижается на $\Delta p = 0{,}1 \cdot 10^5$ Па. Считать изобарическую молярную теплоемкость для CO_2 и водорода равной $C_p = 7R/2$, для аргона – $C_p = 5R/2$.

12.58. Газы в предыдущей задаче в начальном состоянии были сильно сжаты до молярных объемов $V = 100$ см^3, а затем в процессе Джоуля – Томсона расширились до атмосферного давления. Предполагая, что газы подчиняются уравнению Ван-дер-Ваальса, найти изменение температуры ΔT в таком процессе.

12.59. Показать, что в процессе Джоуля – Томсона энтропия газа увеличивается.

12.60. Сравнить понижение температуры газа при дросселировании $(\mathrm{d}T)_H$ и при адиабатическом обратимом расширении $(\mathrm{d}T)_S$, определив их разность при одном и том же малом уменьшении давления $\mathrm{d}p$.

§13. Поверхностные явления

- Давление Лапласа. Изменение давления $\Delta p = \left| p_i - p_e \right|$ на границе искривленной поверхности жидкости называется поверхностным давлением или давлением Лапласа, где p_i и p_e – давления с разных сторон поверхности раздела.

$$\Delta p = \left| p_i - p_e \right| = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right),$$

где r_1 и r_2 – главные радиусы кривизны поверхности, σ – коэффициент поверхностного натяжения.

- Давление Лапласа для сферической поверхности:

$$\left| p_i - p_e \right| = \frac{2\sigma}{r}.$$

- Избыточное давление пара внутри пузыря:

$$p_i - p_e = 4\sigma / r.$$

- Уравнение Юнга (уравнение динамического равновесия капли на поверхности твердого тела):

$$\sigma_{\text{тг}} = \sigma_{\text{жт}} + \sigma_{\text{жг}} \cos\theta,$$

где θ – краевой угол смачивания.

- Высота поднятия жидкости в капиллярных трубках, полностью смачиваемых ее

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r}, \text{ где } r \text{ – радиус капилляра.}$$

- Работа по изотермическому увеличению поверхности жидкости на величину dS:

$$\delta A_T = \sigma \mathrm{d}S.$$

- Свободная энергия Гельмгольца F:

$$F = U - TS + \sigma \mathrm{d}S.$$

- Дифференциал свободной энергии Гельмгольца в естественных переменных:

$$\mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T - p\mathrm{d}V; \quad \mathrm{d}F\big|_{V,T} = \sigma \mathrm{d}S.$$

13.1. Пленки двух жидкостей натянуты на проволочную рамку и разделяющую её на две части планку длиной l (см. рис. 13.1). Коэффициенты поверхностного натяжения жидкостей равны σ_1 и

$\sigma_2 > \sigma_1$. Какую силу надо приложить к планке, чтобы удержать её посередине рамки?

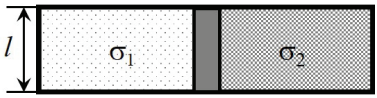


Рис. 13.1. Пленки двух жидкостей, натянутые на проволочную рамку и разделенные планкой.

13.2. Вертикально расположенная металлическая рамка с подвижной цилиндрической перекладиной из алюминия затянута мыльной пленкой (см. рис. 13.2). Каков должен быть диаметр перекладины, чтобы она находилась в равновесии? Плотность алюминия $\rho = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3. Коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора $\sigma = 0{,}043$ Н/м.

13.3. Мыльная пленка образуется путем натягивания на проволочную рамку при помощи подвижной перемычки при комнатной температуре (рис. 13.3). Найти длину перемычки l, если для её перемещения на $\Delta x = 1$ см требуется совершить работу $A = 50$ мкДж. Коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки $\sigma = 0{,}043$ Н/м.

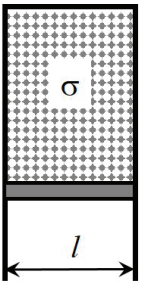


Рис. 13.2. Металлическая рамка с подвижной цилиндрической перекладиной, затянутая мыльной пленкой.

13.4. На зеркальном потолке конденсируются пары воды. Оценить максимальный диаметр d капель, которые могут находиться на потолке. Считать, что поверхность капель имеет вид полусферы. Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 73$ мН/м.

13.5. Вертикальная капиллярная трубка диаметром $d_1 = 2$ мм наполнена водой. На нижнем конце трубки образовалась капелька воды, которая в момент отрыва имеет сферическую форму. Найти диаметр d_2 этой капельки. Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 73$ мН/м.

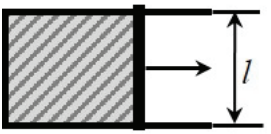


Рис. 13.3. Мыльная пленка, образованная путем натягивания на проволочную рамку при помощи подвижной перемычки.

13.6. Нижний конец вертикально подвешенной оловянной проволоки диаметром $d = 2$ мм нагревают до температуры плавления, в результате чего образовалось $N = 10$ капель олова. Считая, что во время отрыва капля имеет форму половины шарика с диаметром, равным диаметру проволоки, опреде-

лить длину расплавившейся части проволоки. Коэффициент поверхностного натяжения жидкого олова $\sigma = 518$ мН/м, плотность жидкого олова при температуре плавления $\rho = 6{,}83 \cdot 10^3$ кг/м^3.

13.7. Масса $N = 200$ капель спирта, вытекших из капилляра, равна $M = 1{,}42$ г. Диаметр шейки капли спирта в момент отрыва $d = 1$ мм. Определить коэффициент поверхностного натяжения σ спирта.

13.8. Определить давление p в пузырьках воздуха, образующихся в воде на глубине $h = 3$ м, если радиус пузырьков $r = 3{,}5$ мкм, а атмосферное давление $p_0 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Па. Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 73$ мН/м.

13.9. Во сколько раз плотность воздуха в пузырьке радиусом $r = 1$ мкм, находящегося в воде на глубине $h = 4$ м, больше плотности воздуха при атмосферном давлении $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па? Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 73$ мН/м. Считать температуру воды постоянной и не зависящей от глубины.

13.10. На какой глубине h в воде находится пузырек воздуха диаметром $d = 20$ мкм, если плотность воздуха в нем $\rho = 2$ кг/м^3? Давление над поверхностью воды равно $p_0 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Па, температура воздуха $t = 20$ ºС Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 73$ мН/м.

13.11. Определить, на какой глубине h в воде образуются пузырьки воздуха, если при всплытии пузырьков их радиус увеличивается в $n = 1{,}05$ раза и на поверхности воды достигает значения $r = 1{,}5$ мкм. Атмосферное давление $p_0 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Па. Считать, что в процессе всплытия пузырька температура воздуха в пузырьке в нем не меняется.

13.12. На дне водоема глубиной $h = 3$ м образуются пузырьки газа радиусом $r_1 = 0{,}04$ мм. Оценить радиус r_2 этих пузырьков, когда они поднимутся к поверхности воды. Атмосферное давление $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па. Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 73$ мН/м. Температуру газа в пузырьках в процессе всплытия считать постоянной.

13.13. В дне сосуда со ртутью имеется круглое отверстие диаметром $d = 70$ мкм. При какой максимальной толщине слоя ртути она еще не будет вытекать через это отверстие? Коэффициент поверхностного натяжения ртути $\sigma = 0{,}47$ Н/м, плотность ртути $\rho = 13{,}6$ г/см^3.

13.14. Капля воды равномерно падает в воздухе. На сколько отличаются радиусы кривизны поверхности капли в её верхней и нижней точках, расстояние между которыми $h = 2$ мм?

13.15. Капля несмачивающей жидкости массой m находится на горизонтальной плоскости. Радиус границы соприкосновения капли с плоскостью равен a. Плотность жидкости ρ, коэффициент поверхностного натяжения σ, радиус кривизны капли в её верхней точке R. Определить высоту h капли.

13.16. Мыльный пузырь находится в воздухе, давление которого p_0. Внешний радиус мыльного пузыря равен R, толщина мыльной пленки d. Определить: *а*) давление воздуха внутри пузыря; *б*) давление в мыльной пленке. Коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора σ.

13.17. В цилиндре с подвижным поршнем находится мыльный пузырь радиусом r, наполненный воздухом. Вначале давление воздуха вне пузыря равно атмосферному давлению p_0. Медленно вдвигая поршень, мыльный пузырь при постоянной температуре сжимают и его радиус уменьшается в α раз. Определить давление наружного воздуха в цилиндре в этот момент.

13.18. Жидкость с плотностью ρ смачивает длинную вертикальную стенку, в результате чего вблизи стенки жидкость поднимается над своим уровнем (рис. 13.4). Определить зависимость радиуса кривизны поверхности R жидкости от высоты подъема h. Коэффициент поверхностного натяжения жидкости σ.

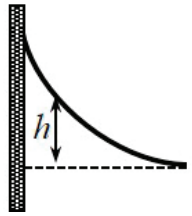


Рис. 13.4. Подъем жидкости за счет смачивания вертикальной стенки.

13.19. К верхнему концу стеклянного капилляра, вертикально погруженного в жидкость на глубину h, прикреплен резиновый шарик, сжимая который, можно увеличивать давление воздух в капилляре, в результате чего на конце капилляра образуется пузырек. Сначала давление воздуха в шарике равно атмосферному. Нарисовать несколько последовательных положений уровня жидкости в капилляре для случаев полного смачивания и полного несмачивания стекла жидкостью. Определить для указанных случаев разность между наибольшим давлением в капилляре и атмосферным давлением воздуха, если диаметр внутреннего канала капилляра d.

13.20. В спирт на небольшую глубину опустили капиллярную трубку с диаметром внутреннего канала $d = 1$ мм. Спирт поднялся в трубке на высоту $h = 11$ мм. Плотность спирта $\rho = 790$ кг/м^3. Определить коэффициент поверхностного натяжения σ спирта. Смачивание считать полным.

13.21. При опускании двух капиллярных трубок в воду, оказалось, что разность уровней воды в них $\Delta h_1 = 2{,}6$ см. При опускании трубок в спирт разность уровней спирта в них равна $\Delta h_2 = 1{,}0$ см. Найти коэффициент поверхностного натяжения спирта σ_2, если коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma_1 = 0{,}073$ Н/м. Плотности воды и спирта равны $\rho_1 = 1000$ кг/м^3 и $\rho_2 = 800$ кг/м^3 соответственно. Смачивание считать полным.

13.22. Капилляр радиусом R опустили на небольшую глубину в смачивающую жидкость (плотность ρ, коэффициент поверхностного натяжения σ). Жидкость поднялась в капилляре на высоту h. Определить краевой угол смачивания θ.

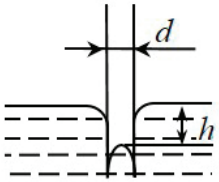


Рис. 13.5. Две параллельные стеклянные пластины частично погружены в несмачивающую жидкость.

13.23. Две параллельные стеклянные пластины, расстояние между которыми d, частично погружены в несмачивающую их жидкость (рис. 13.5). Плотность жидкости ρ, коэффициент поверхностного натяжения σ, краевой угол смачивания $\theta > \pi/2$. На какую глубину h опустится жидкость между пластинами?

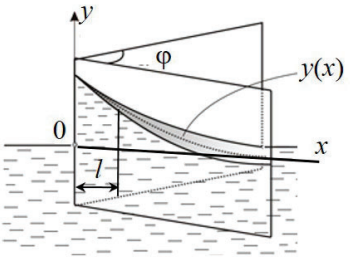


Рис. 13.6. Две стеклянные пластинки, составляющие двугранный угол, погружаются в жидкость.

13.24. Две вертикальные стеклянные пластины образуют малый двугранный угол φ с вертикальным ребром. Система частично погружена в жидкость с плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ (рис. 13.6). Считая смачивание полным, определить, на какую высоту поднимется жидкость между пластинами на расстоянии l от ребра клина.

13.25. Вертикальный капилляр длиной l с запаянным верхним кон-

цом привели в соприкосновение с поверхностью жидкости, и она поднялась в нем на высоту h. Плотность жидкости ρ, коэффициент поверхностного натяжения σ, краевой угол θ, атмосферное давление p_0. Найти диаметр d внутреннего канала капилляра.

13.26. Запаянная с одного конца стеклянная капиллярная трубка длиной $l_0 = 20$ см с диаметром внутреннего канала $d = 1{,}5$ мм опускается в вертикальном положении в ртуть на глубину $h = 10$ см так, что имевшийся в ней воздух полностью остается в трубке. До погружения в ртуть давление воздуха было равно атмосферному $p_0 = 10^5$ Па. Определить длину l_1 столбика воздуха в трубке. Температуру воздуха считать неизменной.

13.27. Капиллярная трубка с диаметром внутреннего канала d опущена одним концом в сосуд с водой. Коэффициент поверхностного натяжения воды σ, краевой угол смачивания θ. Сосуд с капилляром начинают поднимать вертикально вверх с ускорением a. Определить высоту поднятия воды в капилляре.

13.28. Какая максимальная масса воды может находиться в вертикальной капиллярной трубке радиусом $r = 0{,}25$ мм? Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 73$ мН/м. Смачивание капилляра водой полное.

13.29. Горизонтальный капилляр длиной $2l$ с радиусом внутреннего канала r наполовину заполнен смачивающей жидкостью плотностью ρ и вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину (рис. 13.7). Коэффициент поверхностного натяжения жидкости σ, смачивание полное. При какой угловой скорости вращения ω капилляра жидкость начнет вытекать из него?

Рис. 13.7. Горизонтальный капилляр, наполовину заполнен смачивающей жидкостью.

13.30. Стеклянная трубка с внутренним радиусом $r_1 = 1{,}0$ см погружена в воду. В трубку вставлен коаксиально стеклянный стержень радиусом $r_2 = 0{,}98$ см. Определить высоту подъема воды в зазоре между стержнем и трубкой. Считать, что смачивание полное.

13.31. Радиусы широкого и узкого отверстий конической капиллярной трубки с малым углом при вершине $\alpha << 1$ равны R и r соответственно. Трубку опускают вертикально широким концом вниз в полностью смачивающую жидкость с плотностью ρ

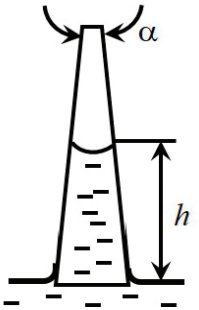


Рис. 13.8. Коническая капиллярная трубка с малым углом при вершине, опущенная вертикально в полностью смачивающую жидкость.

(рис. 13.8). Коэффициент поверхностного натяжения жидкости равен σ. На какую высоту h поднимется жидкость в трубке? Угол α подобран так, что жидкость не доходит до верхнего края капилляра.

13.32. Решить предыдущую задачу при условии, что конический капилляр опущен в жидкость узким концом вниз. Угол α подобран так, что жидкость не доходит до верхнего края капилляра.

13.33. Жидкость с плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ залита в два сообщающихся капилляра с диаметрами d_1 и $d_2 > d_1$. Какова разность уровней жидкости в капиллярах? Краевой угол равен $\theta < \pi/2$.

13.34. U-образный сосуд состоит из сообщающихся широкой и узкой трубок (рис. 13.9). При наливании в сосуд нефти разность высот равна $h = 6{,}0$ см между её уровнями в узкой и широкой трубках. Внутренний радиус широкой трубки равен $r_1 = 0{,}5$ см. Коэффициент поверхностного натяжения нефти $\sigma = 30$ мН/м, плотность $\rho = 828$ кг/м^3. Определить радиус узкой трубки. Смачивание считать полным.

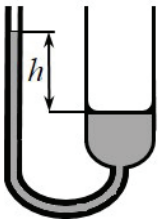


Рис. 13.9. U-образный сосуд, состоящий из сообщающихся широкой и узкой трубок.

13.35. Капилляр радиусом r опускают вертикально в жидкость с плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ. Считая смачивание полным, определить, какое количество теплоты выделится при подъёме жидкости по капилляру.

13.36. На тонкое проволочное кольцо радиуса R натянута мыльная пленка. Масса пленки $M = 1$ г, коэффициент поверхностного натяжения мыльной воды $\sigma = 0{,}030$ Н/м. Оценить время "схлопывания" мыльной пленки, если в ее центре сделать прокол.

13.37. Две капли ртути диаметром $d_1 = 1{,}0$ мм и $d_2 = 2{,}0$ мм сливаются в одну. Процесс происходит при постоянной температу-

ре. Найти изменение свободной энергии ΔF поверхностного слоя. Коэффициент поверхностного натяжения ртути $\sigma = 0{,}470$ Н/м.

13.38. Два мыльных пузыря с радиусами r_1 и r_2 сливаются в один пузырь радиусом r_3. Считая процесс изотермическим, определить изменение свободной энергии поверхности пузырей. Коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора равен σ.

13.39. Какую работу A против сил поверхностного натяжения надо совершить, чтобы при постоянной температуре разделить сферическую каплю ртути диаметром $d_1 = 2{,}0$ мм на две одинаковые капли? Коэффициент поверхностного натяжения ртути $\sigma = 0{,}470$ Н/м.

13.40. Коэффициент поверхностного натяжения для границы вода–масло равен $\sigma = 18$ мН/м. Какую работу надо совершить, чтобы изотермически раздробить каплю масла массой $m = 1$ г внутри воды на капельки диаметром $d = 2$ мм? Плотность масла $\rho = 900$ кг/м^3.

13.41. Находящиеся на деревянной пластине в воздухе две одинаковые капли ртути радиусом $r = 1$ мм каждая сливаются в одну. Считая, что теплоемкость ртути намного больше теплоемкости воздуха и древесины, определить, на сколько нагреется получившаяся при слиянии капля. Удельная теплоемкость ртути $c = 139$ Дж/(кг·К), коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = 0{,}470$ Н/м, плотность $\rho = 13{,}5 \cdot 10^3$кг/м^3.

13.42. Во время ливневого дождя в городе на площадь $S = 100$ км^2 за время $\tau = 10$ мин выпало $h = 20$ мм осадков. Оценить энергию и мощность выделения тепла от слияния капель во время дождя, если капли, достигшие поверхности Земли, имели диаметр $D = 3$ мм, а образовались из мелких капель диаметром $d = 3 \cdot 10^{-3}$ мм. Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 73$ мН/м.

13.43. Какую работу против сил поверхностного натяжения надо совершить, чтобы при постоянной температуре увеличить в 2 раза объем мыльного пузыря радиусом r? Коэффициент поверхностного натяжения мыльной воды σ считать известным.

13.44. Капля ртути массой m падает на металлическую плиту с высоты H и разбивается на n мелких капель. Коэффициент поверхностного натяжения ртути равен σ. Определить количество теплоты, выделяемой при ударе.

13.45. С какой минимальной высоты h должна упасть капля жидкости радиусом R, чтобы она разбилась на n одинаковых маленьких капель? Коэффициент поверхностного натяжения жидкости равен σ, плотность ρ. Температуру считать неизменной.

13.46. В зазор шириной $h = 0{,}10$ мм между двумя параллельными стеклянными пластинками ввели каплю воды массой $m = 100$ мг. Найти силу притяжения пластин. Плотность воды $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3, коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = 0{,}073$ Н/м, краевой угол смачивания $\theta = 5^\circ$.

13.47. Какую силу надо приложить, чтобы оторвать друг от друга (без сдвига) две смоченные водой круглые пластинки площадью $S = 100$ см^2? Толщина водяной прослойки между пластинками равна $d = 0{,}05$ мм. Смачивание полное.

13.48. Между двумя легкими параллельными стеклянными пластинками поместили каплю ртути массой $m = 10$ г. После приложения к верхней пластине перпендикулярной ей силы $F = 60$ Н капля приняла форму круглой плоской лепешки радиусом $R = 5$ см. Определить краевой угол смачивания ртутью стекла. Коэффициент поверхностного натяжения ртути $\sigma = 0{,}470$ Н/м, плотность ртути $\rho = 13{,}5 \cdot 10^3$кг/м^3.

13.49. Капля ртути объемом V помещена между двумя горизонтально расположенными параллельными стеклянными пластинками. С какой силой F надо прижимать пластинки друг к другу, чтобы между ними установился зазор шириной a? Коэффициент поверхностного натяжения ртути σ. Считать, что пластинки полностью не смачиваются ртутью. Весом верхней пластинки по сравнению с силой F пренебречь.

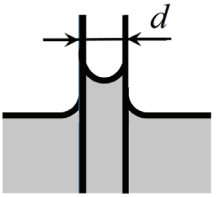


Рис. 13.10. Две параллельные стеклянные пластины, частично погруженные в смачивающую жидкость.

13.50. Две параллельные стеклянные пластины частично погружены в смачивающую их жидкость (рис. 13.10). Расстояние между пластинами d, их ширина l. Плотность жидкости ρ, коэффициент поверхностного натяжения σ, краевой угол смачивания θ. Считая, что жидкость между пластинами не доходит до их верхних краев, найти силу f, с которой пластины притягиваются друг к другу.

13.51. Круглая стеклянная пластина радиусом R и массой m подвешена на пружине и соприкасается с поверхностью воды. Пружину начинают тянуть вверх, приподнимая пластину (рис. 13.11). 1) Нарисовать несколько последовательных форм поверхности воды в процессе движения пластины вверх. 2) Рассчитать максимальную силу F, с которой натянута пружина при отрыве пластины от воды. Для простоты расчета принять, что один радиус кривизны r_1 поверхности жидкости в момент отрыва пластины от воды равен половине высоты её подъема над внешним уровнем воды, а $r_2 \to \infty$.

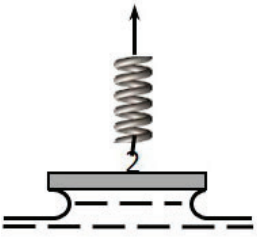


Рис. 13.11. Круглая стеклянная пластина подвешена на пружине и соприкасается с поверхностью воды.

13.52. Кольцо с внутренним и внешним диаметрами d_1 и d_2 подвешено на пружине и приведено в соприкосновение с жидкостью, плотность которой равна ρ (рис. 13.12). Пружину начинают тянуть вверх. При её дополнительном растяжении на Δl кольцо отрывается от поверхности жидкости. Коэффициент жесткости пружины равен k, растяжение пружины подчиняется закону Гука. Считая, что жидкость полностью смачивает кольцо, определить коэффициент поверхностного натяжения σ жидкости.

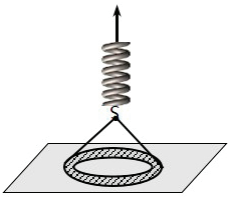


Рис. 13.12. Кольцо подвешено на пружине и приведено в соприкосновение с жидкостью.

13.53. Определить толщину H слоя жидкости с плотностью ρ, разлитой на горизонтальной плоскости, если краевой угол равен $\theta < \pi/2$, а коэффициент поверхностного натяжения жидкости σ.

13.54. Определить толщину H слоя ртути, разлитой на плоской стеклянной поверхности, считая, что поперечные размеры слоя велики по сравнению с его толщиной. Коэффициент поверхностного натяжения ртути $\sigma = 0{,}470$ Н/м, плотность $\rho = 13{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3. Ртуть полностью не смачивает стекло.

13.55. Оценить толщину H слоя воды, разлитой на горизонтальной поверхности, смазанной жиром. Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 73$ мН/м. Вода полностью не смачивает поверхность.

13.56. Капля жидкости находится на горизонтальной поверхности твердого тела. Коэффициенты поверхностного натяжения между фазами твердое тело–газ, жидкость–твердое тело и жидкость–газ равны $\sigma_{тг}$, $\sigma_{жт}$ и $\sigma_{жг}$ соответственно. Определить краевой угол θ.

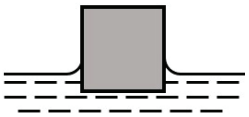


Рис. 13.13. Смачиваемый водою кубик плавает на поверхности воды.

13.57. Смачиваемый водою кубик массой $m = 20$ г плавает на поверхности воды (рис. 13.13). Длина ребра кубика равна $a = 3$ см. На каком расстоянии x от поверхности воды находится нижняя грань кубика?

13.58. Металлический кубик, покрытый тонким слоем парафина, плавает в воде, при этом его верхняя грань находится на уровне воды (рис. 13.14). Плотность материала кубика ρ_0 больше плотности воды ρ. Коэффициент поверхностного натяжения воды σ. Вода полностью не смачивает парафин. Оценить длину ребра кубика.

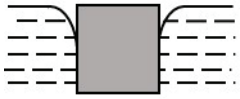


Рис. 13.14. Покрытый тонким слоем парафина металлический кубик плавает в воде.

13.59. Определить высоту подъема H смачивающей жидкости с плотностью ρ возле вертикальной длинной стенки (рис. 13.15). Коэффициент поверхностного натяжения жидкости σ, краевой угол равен θ.

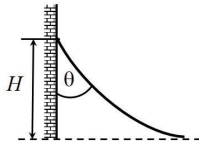


Рис. 13.15. Подъем смачивающей жидкости возле вертикальной стенки.

13.60. Внутри мыльного пузыря радиусом r находится идеальный газ. Наружное давление p_0, коэффициент поверхностного натяжения мыльной воды σ. Найти молярную теплоемкость C газа при его нагревании внутри пузыря. Молярную теплоемкость газа при постоянном объеме C_V считать известной.

§14. Фазовые переходы

- Уравнение Клапейрона – Клаузиуса:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{L_{ij}}{T\left(V_j - V_i\right)},$$

где $(V_j - V_i)$ – разность молярных объемов фаз, L_{ij}–молярная теплота фазового перехода $i \to j$, T – температура фазового перехода.

- Связь скрытой теплоты фазового перехода и энтальпии:

$$L_{ij} = H_j - H_i = \Delta H_{ji}.$$

- Связь скрытой теплоты фазового перехода L_{ij} с изменением энтропии:

$$L_{ij} = Q_{ij} = T\Delta S_{ij}.$$

- "Правило рычага" для определения отношения объемов жидкой и газообразной фаз при равновесии:

$$\frac{V_2 - V_A}{V_A - V_1} = \frac{m_1}{m_2},$$

где m_1 – масса вещества в жидкой фазе, m_2 – масса вещества в газообразной фазе (в состоянии A).

14.1. В закрытом сосуде объемом $V = 3$ л находится вода и её насыщенный пар при температуре $t = 200$ ºС и давлении $p_1 = 15{,}5 \cdot 10^5$ Па. Общая масса воды и пара составляет $m = 2$ кг. Плотности пара и жидкой воды при этих условиях равны $\rho_п = 7{,}84$ кг/м^3 и $\rho_ж = 864{,}7$ кг/м^3 соответственно. Определить массы и объемы воды и пара.

14.2. Насыщенный пар изотермически сжали в n раз по объему при постоянном давлении. Какая часть массы пара окажется в жидком состоянии, если удельные объемы насыщенного пара и жидкой фазы отличаются в k раз ($n < k$)?

14.3. В цилиндрическом сосуде под поршнем при температуре T находится насыщенный пар с молярной массой μ. Определить массу сконденсировавшегося пара при изотермическом вдвигании поршня, если при этом совершена работа A. Пар считать идеальным газом.

14.4. В сосуд, содержащий $m = 100$ г льда при температуре $t_1 = -10$ °С, малыми порциями впускают водяной пар при температуре $t_2 = 100$ °С. Удельные теплоемкости воды и льда равны соответственно $c_1 = 4200$ Дж/(кг·К) и $c_2 = 2025$ Дж/(кг·К). Удельная теплота парообразования воды $\overline{L}_{\text{пар}} = 2260$ кДж/кг, удельная теплота плавления льда $\overline{L}_{\text{пл}} = 336000$ Дж/кг. Какая масса воды окажется в сосуде, когда весь лед растает?

14.5. В теплоизолированном цилиндре с площадью основания S под невесомым поршнем находится вода массой m при температуре t_1. Над поршнем нормальное атмосферное давление, при котором температура кипения воды равна $t_0 > t_1$. После того, как воде сообщили некоторое количество теплоты, поршень поднялся на высоту h. Какое количество теплоты было подведено к воде? Удельная теплота испарения воды равна $\overline{L}_{\text{пар}}$, удельная теплоемкость c.

14.6. В теплоизолированном цилиндрическом сосуде с площадью основания S под поршнем, находятся вода с небольшим количеством льда и насыщенный пар. Температура в сосуде равна $t_0 = 0$ ºС, масса льда m. Давление насыщенного водяного пара при этой температуре равно p_0. На какую величину Δh нужно опустить поршень, чтобы весь лед растаял? Удельная теплота плавления льда $\overline{L}_{\text{пл}}$, удельная теплота испарения воды $\overline{L}_{\text{пар}}$.

14.7. Теплоизолированный сосуд наполнен газообразным азотом при температуре $T_1 = 300$ К и давлении $p_1 = 1$ атм. В него вбрызнули жидкий азот, температура которого $T = 77$ К (температура его кипения при нормальном давлении). Когда жидкий азот испарился, в сосуде установились температура $T_2 = 150$ К и давление $p_2 = 0{,}72$ атм. Определить молярную теплоту испарения жидкого азота. Молярную теплоемкость газообразного азота при постоянном давлении считать постоянной и равной $C_V = 20{,}8$ Дж/(моль·К).

14.8. Вода превращается в пар при температуре $T = 373$ К. Определить, какая часть теплоты испарения идет на увеличение внутренней энергии системы. Удельная теплота испарения воды в этих условиях $\overline{L}_{\text{пар}} = 2260$ кДж/кг. Пар считать идеальным газом.

14.9. Определить удельную теплоту парообразования ртути, если при $p_0 = 10^5$ Па она кипит при температуре $t = 357{,}3$ ºС, а $(\mathrm{d}p / \mathrm{d}T)_{\text{ж–п}} = 1{,}84 \cdot 10^3$ Па/К. Молярная масса ртути μ = = 200,6 г/моль. Пары ртути считать идеальным газом.

14.10. Натрий плавится при температуре $t = 97{,}8$ ºС, его удельная теплота плавления $\overline{L}_{12} = 102$ Дж/г, а удельный объем меняется при плавлении от $v_1 = 1{,}031$ см^3 / г в твердом состоянии до $v_2 = 1{,}077$ см^3 / г в жидком. Определить изменение температуры плавления натрия $\left(\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}p}\right)_{12}$ в зависимости от давления.

14.11. Найти изменение температуры плавления льда вблизи $t = 0$ ºС при повышении давления на $\Delta p = 100$ Па. Удельный объем льда больше удельного объема воды на $\Delta v = 0{,}091$ см^3/г. Удельная теплота плавления льда $\overline{L}_{\text{пл}} = 336$ Дж/г.

14.12. Температура кипения этилового спирта (C_2H_5OH) при нормальном давлении $p_0 = 1$ атм равна $t_0 = 78{,}4$ ºС. Определить давление насыщенных паров этилового спирта при температуре $t_1 = 79{,}4$ ºС, считая их идеальным газом. Удельная теплота парообразования спирта при 78,4 ºС равна $\overline{L}_{\text{пар}} = 846$ кДж/кг.

14.13. Давление насыщенных паров ртути при температурах $T_1 = 323$ К и $T_2 = 333$ К равно соответственно $p_1 = 1{,}69$ Па и $p_2 = 3{,}37$ Па. Считая пары ртути идеальным газом, найти среднее значение удельной теплоты испарения ртути в указанном интервале температур. Молярная масса ртути μ = 0,200 кг/моль.

14.14. Значения давления насыщенных паров бензола (C_6H_6) для двух интервалов температур представлены в табл. 14.1.

Таблица 14.1

Значения давления паров бензола для различных температур

Интервал I			Интервал II		
	T, К	p,кПа		T, К	p,кПа
1	290	8,606	3	490	1868
2	300	13,816	4	500	2164

Используя для паров модель идеального газа, определить, насколько отличаются средние значения молярной теплоты парообразования L в указанных интервалах температур. Считать, что удельный объем жидкости пренебрежимо мал по сравнению с объемом пара. Найти температурную зависимость L (T) в предположении её линейности.

14.15. Температура кипения уксусной кислоты при $p_1 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Па равна $t_1 = 118$ ºС. Найти давление насыщенных паров уксусной кислоты при температуре $t_2 = 80$º С, если среднее значение удельной теплоты её испарения в данном интервале температур равно $\overline{L}_{\text{пар}} = 393$ кДж/кг. Молярная масса уксусной кислоты $\mu = 0{,}060$ кг/моль. Пары кислоты считать идеальным газом.

14.16. При нормальных условиях температура кипения чистого брома равна $t_{\text{пар}} = 59{,}2$ °С. Определить давление насыщенных паров брома при температуре $t_1 = 15$ °С. Молярная теплота испарения брома равна $L_{\text{пар}} = 29{,}5$ кДж/моль. Пары брома считать идеальным газом.

14.17. Найти плотность $\rho_{\text{п}}$ насыщенного водяного пара при нормальном давлении и температуре $T = 373$ К, если при уменьшении давления на $\Delta p = 3$ кПа температура кипения воды понижается на $\Delta T = 0{,}82$ К. Удельная теплота парообразования воды при 100 ºС равна $\overline{L}_{\text{пар}} = 2{,}26$ кДж/г.

14.18. Оценить «скорость» изменения температуры кипения воды с высотой $\Delta T_{\text{кип}}/\Delta h$ при подъеме в горы на несколько километров, если у подножия горы давление $p_0 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Па. Удельная теплота парообразования воды при 100 ºС равна $\overline{L}_{\text{пар}} = 2{,}26$ кДж/г, удельный объем пара вблизи точки кипения при нормальных условиях равен $\upsilon_{\text{п}} = 1{,}650$ м^3/кг. Считать, что температура воздуха равна $t_0 = 20$ ºС и не зависит от высоты.

14.19. Оценить, на какой высоте можно ожидать кипения воды при температуре $t_1 = 90$ °С. Считать, что удельный объем пара много больше удельного объема воды. Удельная теплота парообразования воды при 100 ºС $\overline{L}_{\text{пар}} = 2{,}26$ кДж/г. Считать, что температура воздуха равна $t_0 = 20$ ºС и не зависит от высоты.

14.20. На поверхность льда, температура которого $t_1 = -1$ ºС, ставят столб радиусом $R = 3$ см. Какова должна быть масса столба,

чтобы лед под ним начал таять? Удельный объем воды при 0 ºС $\upsilon_в = 1{,}0$ см^3/г, удельный объем льда $\upsilon_л = 1{,}091$ см^3/г, удельная теплота плавления льда $\overline{L}_{пл} = 336$ Дж/г. Температура плавления льда при нормальном давлении $t_0 = 0$ ºС.

14.21. Вертикальный закрытый цилиндрический сосуд диаметром $d = 2$ см с гофрированными стенками наполнен спиртом (C_2H_5OH) и его насыщенным паром. Сверху на сосуд кладут легкую дощечку, которую можно прижимать к сосуду пружиной с жесткостью $k = 1000$ Н/м. На какую величину Δl надо сжать пружину, чтобы спирт в сосуде закипал при температуре $t = 90$ ºС? Температура кипения спирта при $p_0 = 1$ атм равна $t = 78$ ºС. Удельная теплота испарения спирта $\overline{L}_{пар} = 840$ кДж/кг. Удельный объем жидкого спирта намного меньше, чем его паров.

14.22. В закрытом сосуде объемом V_0 находится вода массой m при температуре $t = 100$ ºС, а над ней – насыщенный водяной пар. Найти увеличение массы насыщенного пара Δm при повышении температуры системы на $\Delta T = 1$ ºС. Удельная теплота парообразования воды равна $\overline{L}_{пар}$. Пар считать идеальным газом.

14.23. Определить минимальную емкость тигля, в котором можно при нормальном давлении расплавить $m = 10$ кг олова. Температурный коэффициент давления для олова при давлениях, близких к нормальному, составляет: $\mathrm{d}T/\mathrm{d}P = 3{,}3\cdot10^{-8}$ К/Па, плотность твердого олова $\rho = 7290$ кг/м^3, молярная теплота плавления $L_{пл} = 7{,}2$ кДж/моль, температура плавления олова при нормальном давлении $T_{пл} = 505$ К.

14.24. Бензол (C_6H_6) отвердевает при температуре $T_1 = 279$ К. Давление насыщенных паров бензола над его поверхностью при этой температуре $p_1 = 5{,}15$ кПа. Удельная теплота плавления бензола $\overline{L}_1 = 128$ кДж/кг, а удельная теплота парообразования $\overline{L}_2 = 394$ кДж/кг. Найти давление насыщенных паров над поверхностью твердого бензола при температуре $T_2 = 278$ К.

14.25. Определить удельную теплоту плавления этилового эфира $\overline{L}_{12}$ вблизи его тройной точки. Температура тройной точки T_0, равновесное давление пара в тройной точке p. Зависимости давления от температуры $p(T)$ вдоль кривых фазовых переходов вблизи тройной точки можно считать линейными (рис. 14.1, цифрами *1,*

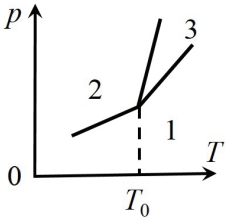


Рис. 14.1. Линейные зависимости давления от температуры $p(T)$ вдоль кривых фазовых переходов вблизи тройной точки.

2, 3 обозначены твердая, жидкая и газообразная фазы соответственно). Для кривой возгонки в этой области $(\mathrm{d}p/\mathrm{d}T)_{13} = \alpha$, а для кривой испарения $(\mathrm{d}p/\mathrm{d}T)_{23} = \beta$, где α и β – постоянные. Считать пары эфира идеальным газом. Молярная масса эфира μ.

14.26. Удельная теплота плавления бензола вблизи его тройной точки при температуре T_0 равна $\overline{L}_{23}$. При этой температуре давление насыщенных паров бензола равно p, а для кривой равновесия твердое тело–пар $(\mathrm{d}p/\mathrm{d}T)_{12} = \alpha$ (см. рис. 14.1). Удельный объем твердого бензола значительно меньше удельного объема газа. Определить удельную теплоту испарения бензола $\overline{L}_{13}$. Пары бензола можно считать идеальным газом.

14.27. Давление p насыщенного пара ацетона зависит от температуры T по закону: $\ln(p/p_0) = a - b/(T + c)$, где a, b, с и p_0 – постоянные. Найти молярную теплоту $L_{\text{пар}}$ испарения ацетона как функцию температуры.

14.28. Определить удельную теплоту $\overline{L}_{\text{пар}}$ испарения некоторого вещества с молярной массой μ как функцию температуры, если давление p его насыщенных паров зависит от температуры T по закону: $p = p_0 \exp\left[a - \ln\left(b/T\right)\right]$, где a, b и p_0 – постоянные.

14.29. Найти зависимость давления p насыщенного пара от температуры T, считая его идеальным газом и полагая, что удельный объем жидкости $v_{\text{ж}}$ значительно меньшим удельного объема пара $v_{\text{п}}$. Зависимость удельной теплоты испарения $\overline{L}_{\text{пар}}$ от температуры выражается формулой: $\overline{L}_{\text{пар}} = \alpha - \beta T^2$, где α и β – константы.

14.30. Оценить, насколько повысится температура плавления льда при скольжении по нему конькобежца массой $m = 80$ кг. Площадь лезвия конька $S = 8$ см^2. Удельные объемы воды $v_{\text{в}} = 1{,}000$ см^3/г и льда $v_{\text{л}} = 1{,}091$ см^3/г, удельная теплота плавления льда $\overline{L}_{\text{пл}} = 336$ Дж/г.

14.31. Кусок льда, находящийся при температуре $t_0 = 0$ ºС и атмосферном давлении $p_0 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Па, адиабатически сжимают до давления, в $n = 100$ раз большего. Какая часть льда $\Delta m/m$ при этом растает? Удельные объемы воды и льда равны $v_в = 1{,}000\ см^3/г$ и $v_л = 1{,}091\ см^3/г$ соответственно. Удельная теплота плавления льда $\overline{L}_{пл} = 336$ Дж/г, удельная теплоемкость льда $c_л = 2050$ Дж/(кг · К).

14.32. В результате нагревания $m = 0{,}5$ кг воды от температуры $t_1 = 20$ ºС до $t_2 = 100$ ºС она вся превратилась в пар. Удельная теплота парообразования $\overline{L}_{пар} = 2{,}25$ кДж/г, удельная теплоемкость воды $c = 4{,}18$ кДж/(кг · К). Найти приращение энтропии системы.

14.33. Давление насыщенных паров этилового спирта (C_5H_5OH) при $T_1 = 340$ К равно $p_1 = 0{,}68 \cdot 10^5$Па, а при $T_2 = 310$ К – $p_2 = 0{,}18 \cdot 10^5$Па. Считая пары спирта идеальным газом, найти изменение энтропии при испарении $m = 10$ г этилового спирта, находящегося при температуре $T_3 = 325$ К.

14.34. При плавлении куска меди изменение энтропии составило ΔS. Удельная теплота плавления меди $\overline{L}_{пл}$, температура плавления T. Найти массу m расплавленной меди.

14.35. Найти удельную теплоту парообразования воды $\overline{L}_{пар}$ при температуре $t = 100$ ºС, если приращение удельной энтропии системы при полном превращении воды в пар при этой температуре составляет $\Delta\overline{S} = 6{,}0$ кДж/(кг·К).

14.36. При плавлении $\nu = 1$ кмоля льда изменение энтропии равно $\Delta S = 22$ кДж/К. На сколько изменится температура плавления льда при увеличении давления на $\Delta p = 100$ Па? Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м^3.

14.37. При испарении $\nu = 1$ кмоля некоторой жидкости, имеющей температуру $T_1 = 323$ К, изменение энтропии равно $\Delta S = 130$ Дж/К. Давление насыщенных паров этой жидкости при температуре T_1 равно $p_1 = 1{,}23 \cdot 10^4$ Па. Считая пар идеальным газом, определить изменение давления насыщенных паров этой жидкости при повышении температуры на $\Delta T = 1$ К.

14.38. Лед массой $m = 1$ кг с начальной температурой $t_1 = 0$ ºС в результате нагревания сначала превратили в воду, а затем в пар при температуре $t_2 = 100$ ºС. Найти приращение энтропии системы.

Удельная теплота плавления льда $\overline{L}_{\text{пл}} = 3{,}36\ 10^5$Дж/кг, удельная теплота испарения воды при t_2 $\overline{L}_{\text{пар}} = 2{,}26\ 10^6$ Дж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг К).

14.39. Кусок льда массой m_1 при температуре t_1=0 ^{0}С поместили в калориметр с водой массой m_2 при температуре t_2 и нормальном атмосферном давлении. Пренебрегая теплоемкостью калориметра, определить приращение энтропии системы к моменту установления теплового равновесия. Температура t_2 может быть любой из интервала 0 ºС□ t_2 □100 ºС. Удельная теплоемкость воды c_2, удельная теплота плавления льда $\overline{L}_{\text{пл}}$.

14.40. В теплоизолированном сосуде к $m_1 = 400$ г воды при атмосферном давлении и температуре $t_1 = 70$ ºС. К ней добавляют $m_2 = 200$ г льда, имеющего температуру $t_2 = 0$ ºС. Определить установившуюся температуру T_0 и изменение энтропии системы. Удельная теплота плавления льда $\overline{L}_{\text{пл}} = 3{,}36 \cdot 10^5$Дж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг К).

14.41. В калориметр, заполненный льдом массой $m_1 = 400$ г при температуре $t_1 = -53$ ºС, налили воду массой $m_1 = 100$ г с температурой $t_2 = 15$ ºС. Определить установившуюся температуру t_3 и изменение энтропии системы. Удельные теплоемкости льда и воды равны $c_1 = 2{,}1$ кДж/(кг К) и $c_2 = 4{,}2$ кДж/(кг · К) соответственно, удельная теплота плавления льда $\overline{L}_{\text{пл}} = 336$ кДж/кг.

14.42. Кусок железа массой $m_1 = 100$ г, имеющий температуру $t_1 = 80$ºС, положили в калориметр, в котором находился лед массы $m_2 = 80$ г при температуре $t_0 = 0$ ºС и атмосферном давлении. Удельная теплота плавления льда $\overline{L}_{\text{пл}} = 3{,}36 \cdot 10^5$Дж/кг, удельная теплоемкость железа равна $c = 460$ Дж/(кг · К). Найти приращение энтропии системы к моменту установления теплового равновесия.

14.43. В калориметр, наполненный большим количеством льда при температуре $t_1 = 0$ ºС, вылили $m = 10{,}0$ г олова, находившегося при температуре плавления $t_2 = 232$ ºС. Найти приращение энтропии системы олово+лед к моменту установления теплового равновесия. Удельная теплота плавления олова $\overline{L}_1 = 59$ кДж/кг , его удельная теплоемкость $c = 0{,}23$ кДж/(кг · К) .

14.44. Определить молярную теплоемкость водяного пара в процессе его нагревания, если пар все время находится в термоди-

намическом равновесии с водой. Считать известными молярную теплоемкость пара при постоянном давлении C_p и молярную теплоту парообразования $L_{ж\text{-}п}$. Молярный объем жидкости много меньше молярного объема пара.

14.45. Определить изменение молярной теплоты фазового перехода L_{ij} с давлением. Считать известными молярные теплоемкости вещества при постоянном давлении в разных фазах C_{pi} и C_{pj}, молярные объемы вещества V_i и V_j, а также коэффициенты объемного теплового расширения вещества в разных фазах α_{pi} и α_{pj}.

14.46. Определить изменение молярной теплоты фазового перехода L_{ij} с температурой вдоль кривой фазового равновесия. Считать известными молярные теплоемкости вещества при постоянном давлении в разных фазах C_{pi} и C_{pj} и молярные объемы вещества V_i и V_j.

§15. Термодинамические потенциалы

- Полный дифференциал внутренней энергии в естественных переменных:

$$\mathrm{d}U(S,V) = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V .$$

- Полный дифференциал энтропии в естественных переменных:

$$\mathrm{d}S(U,V) = \frac{\mathrm{d}U}{T} + p\frac{\mathrm{d}V}{T}.$$

- Соотношение Гиббса:

$$T\mathrm{d}S = \mathrm{d}U + \delta A .$$

- Энтальпия:

$$H = U + pV .$$

- Полный дифференциал энтальпии в естественных переменных:

$$\mathrm{d}H(S,p) = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p .$$

- Свободная энергия Гельмгольца:

$$F = U - TS .$$

- Полный дифференциал свободной энергии в естественных переменных:

$$\mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T - p\mathrm{d}V .$$

- Потенциал Гиббса:

$$G = H - TS = U + pV - TS .$$

- Полный дифференциал потенциала Гиббса в естественных переменных:

$$\mathrm{d}G = V\mathrm{d}p - S\mathrm{d}T .$$

- Соотношения Максвелла:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p ; \quad \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V ;$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p ; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V .$$

15.1. Доказать, что внутренняя энергия системы удовлетворяет соотношениям:

$$\mathrm{d}U(S,V) = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V\ ;\ T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V\ ,\ p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S .$$

15.2. Доказать, что энтальпия системы удовлетворяет соотношениям:

$$\mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p\ ;\ S = -\left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p\ ;\ V = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S .$$

15.3. Доказать, что свободная энергия Гельмгольца системы удовлетворяет соотношениям:

$$\mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T - p\mathrm{d}V\ ;\ S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V\ ;\ p = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V .$$

15.4. Доказать, что термодинамический потенциал Гиббса системы удовлетворяет соотношениям:

$$\mathrm{d}G = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p\ ;\ S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p\ ;\ V = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T .$$

15.5. Уравнение состояния вещества связывает параметры p, V и T и в общем виде может быть записано как $f(p,V,T) = 0$. Доказать, что выполняется следующее соотношение между частными производными параметров состояния: $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -1$.

15.6. Доказать соотношения Максвелла:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\ ;\quad \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V\ ;$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p\ ;\quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V .$$

15.7. Используя соотношения Максвелла, найти производные $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$ и $\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T$.

15.8. Получить выражение для полного дифференциала энтропии как функции температуры и объема:

$$\mathrm{d}S(T,V) = C_V \frac{\mathrm{d}T}{T} + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}V .$$

15.9. Используя функциональную связь энтропии S и внутренней энергии U, доказать соотношение:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = -C_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S - p .$$

15.10. Доказать соотношение: $\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = V - C_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S$

15.11. Доказать соотношение: $H = G - T\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p$.

15.12. Получить выражения для полных дифференциалов энтальпии $\mathrm{d}H$ и энтропии $\mathrm{d}S$ как функций температуры и давления.

15.13. Доказать, что для однородного и изотропного вещества разность молярных теплоемкостей C_p - C_V удовлетворяет соотношению:

$$C_p - C_V = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p .$$

На основе этого соотношения выразить C_p - C_V через коэффициент объемного теплового расширения $\alpha_p = \left(\partial V / \partial T\right)_p / V$ и коэффициент изотермической сжимаемости $\chi_T = -\left(\partial V / \partial p\right)_T / V$.

15.14. Для некоторой термодинамической системы известна свободная энергия как функция температуры и объема $F(T,V)$. Выразить разность теплоемкостей $C_p - C_V$ через производные свободной энергии по ее естественным переменным.

15.15. Для некоторой термодинамической системы задана свободная энергия в ее естественных переменных:

$$F = C_V T\left(1 - \ln(T/T_0)\right) - RT\ln(V/V_0) + aT ,$$

где C_V – молярная теплоемкость в изохорическом процессе, α, T_0 и V_0 – постоянные. Найти термическое и калорическое уравнения состояния системы.

15.16. Теплоизолированный сосуд разделен перегородкой на две равные части объемом V каждая. В первой части сосуда находится ν молей идеального газа при температуре T Перегородка

удаляется, газ занимает весь объем. Определить изменение свободной энергии ΔF газа.

15.17. Теплоизолированный сосуд разделен перегородкой на две части объемами V_1 и V_2. В объеме V_1 находится идеальный газ массой m_1, молярная масса которого μ_1; в объеме V_2 – другой идеальный газ массой m_2 с молярной массой μ_2. Давления газов и их температуры одинаковы. В перегородке открыли отверстие, и газы перемешались. Определить суммарное изменение ΔF свободной энергии системы.

15.18. Адиабатически изолированный сосуд разделен перегородкой на две части, имеющие объемы V_1 и V_2. В первой части сосуда находится ν_1 молей азота N_2, во второй – ν_2 молей кислорода O_2. Температура газов одинакова и равна T. Перегородка удаляется, происходит самопроизвольное смешивания газов. Определить изменение энергии Гиббса. Газы считать идеальными.

15.19. $\nu = 5$ молей гелия изотермически расширили от объема $V_1 = 2$ л до объема $V_2 = 5$ л. Определить изменение ΔF свободной энергии гелия. Считать гелий идеальным газом.

15.20. Идеальный газ, имеющий объем V_0, давление p_0 и температуру T_0, изотермически сжимают до давления p_1. Определить изменение свободной энергии газа.

15.21. Вычислить изменение энтальпии ν молей кислорода при изобарическом повышении температуры газа от T_1 до T_2. Кислород считать идеальным газом.

15.22. При расширении в некотором процессе $\nu = 2$ молей азота от объема $V_1 = 0{,}5$ м^3 до $V_2 = 1{,}5$ м^3 температура газа уменьшилась с $T_1 = 1000$ К до $T_2 = 300$ К. Молярная энтропия азота в исходном состоянии составляла $S_0 = 100$ Дж/(моль·К). Определить изменение свободной энергии ΔF газа в данном процессе. Азот считать идеальным газом.

15.23. Найти выражение для энтальпии одного моля газа Ван-дер-Ваальса в переменных (V,T) .

15.24. Один моль газа Ван-дер-Ваальса изотермически расширился при температуре T, увеличив свой объем от начального значения V в n раз. Определить изменение ΔF свободной энергии газа. Постоянные a и b газа считать известными.

15.25. При изотермическом расширении ν молей газа Ван-дер-Ваальса при температуре T от объема V_1 до V_2 его свободная

энергия изменилась на ΔF. Определить изменение ΔS энтропии газа. Постоянную Ван-дер-Ваальса a газа считать известной.

15.26. Во время изотермического расширения газа Ван-дер-Ваальса при температуре T его объем увеличился от начального значения V в n раз. Определить изменение потенциала Гиббса ΔG газа. Постоянные a и b газа считать известными.

15.27. Для одного моля идеального газа вычислить в переменных (p,T) свободную энергию F и потенциал Гиббса G. Как будут изменяться эти термодинамические потенциалы с увеличением температуры при постоянном давлении?

15.28. Один моль идеального газа с показателем адиабаты γ, имевшего температуру T, обратимо адиабатически расширили от объема V_1 до объема V_2. При этом его свободная энергия изменилась на ΔF. Определить энтропию газа при температуре T.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

§1. Элементы теории вероятности. Статистические системы и их характеристики

1.1. $N = 1726272$.

Решение. Каждую цифру в номере можно выбрать 10 способами, при этом цифровую комбинацию автомобильного номера можно составить $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$ способами, но одну из них (000) следует исключить, и число комбинаций составит: $N_1 = 1000 - 1 = 999$.

Буквенную комбинацию автомобильного номера можно составить $N_2 = 12^3 = 1728$ способами. Каждая цифровая комбинация сочетается с каждой буквенной. Всего можно составить $N = N_1 \cdot N_2 = 1726272$ автомобильных номера.

1.2. $P \approx 0{,}76$.

*Решение***.** Всего в группе 25 студентов. Отличник или хорошо успевающий студент обязательно получат хорошую или отличную оценку. Вероятность выбора отличника или хорошо успевающего студента равна $P_1 = \dfrac{6+10}{25} = \dfrac{16}{25}$. Вероятность слабому студенту получить хорошую оценку равна 1/3, а вероятность выбора такого студента равна 9/25. Вероятность того, что наугад выбранный студент получит хорошую или отличную оценку, равна

$$P = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} \cdot \frac{1}{3} = \frac{57}{75} \approx 0{,}76.$$

1.3. 0,28.

1.4. $P_4 \cdot P_{17} = 4! \cdot 17!$.

Решение. Будем считать 4 книги одного автора за одну, тогда число возможных перестановок будет $P_{17} = 17!$. 4 книги можно переставлять между собой $P_4 = 4!$ способами. Искомое число способов : $P_4 \cdot P_{17} = 4! \cdot 17!$.

1.5. $P = \frac{1}{4}$.

Решение. Число возможных исходов равно A_6^3, так как получающиеся трехзначные числа могут отличаться как цифрами, так и порядком их расположения. Трехзначное число будет четным, если у него последняя цифра 2, 4 или 6, эти цифры можно выбрать с вероятностью 3/6 = 1/2. Если последняя цифра 2, то стоящее перед ней двузначное число может быть составлено из оставшихся 5 цифр числом способов, равным A_5^2. Еще столько же благоприятных исходов можно получить, если последней цифрой будет 4 или 6. Следовательно, по правилу умножения вероятностей искомая вероятность $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot A_5^2}{A_6^3} = \frac{1}{4}$.

1.6. 1680.

Решение. Расписание на каждый день может отличаться либо предметами, либо порядком их следования, поэтому количество расписаний определяется числом размещений $A_8^4 = 1680$.

1.7. $P = \frac{1}{A_7^3} = \frac{4!}{7!} \approx 4{,}8 \cdot 10^{-3}$.

1.8. $P \approx 2{,}8 \cdot 10^{-3}$.

Решение. Поскольку заданное слово можно получить только одним способом, то число благоприятных исходов $n = 1$. Число различных способов вынуть в определенной последовательности 4 буквы из 10 определяется числом размещений A_6^4. Таким образом, искомая вероятность равна $P = \frac{1}{A_6^4} = \frac{1}{360} \approx 2{,}8 \cdot 10^{-3}$.

1.9. $A_{10}^3 = 720$.

1.10. $P = 0{,}67$.

Решение. Обозначим через N_1, N_2, N_3 события, состоящие в том, что слабо подготовившийся студент отвечал первому, второму и третьему экзаменатору соответственно. По условию задачи:
$P(N_1) = 9/30 = 0{,}3$, $P(N_2) = 6/30 = 0{,}2$, $P(N_3) = 15/30 = 0{,}5$.

Пусть событие A – слабо подготовившийся студент сдал экзамен. Тогда $P(A \mid N_1) = 0{,}4$, $P(A \mid N_2) = 0{,}1$, $P(A \mid N_3) = 0{,}7$.

По формуле сложения вероятностей:

$P(A) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}7 \cdot 0{,}5 = 0{,}67$.

1.11. Общее число дробей 30. Из них 15 будут правильные.

Решение. $C_6^2 = \dfrac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$ способами выбираем два числа из 6, двумя способами составляем из них дробь: сначала одно число – числитель, другое – знаменатель и наоборот. Общее число дробей окажется 2·15 = 30.

Из этих 30 дробей 15 будут правильными: $C_6^2 = 15$ способами выбираем два числа из 6 и единственным образом составляем дробь так, чтобы числитель был меньше знаменателя.

1.12. $P = \dfrac{5}{14}$.

Решение. Число всевозможных исходов испытания равно $C_8^2 = 28$, так как каждое соединение из двух шаров может отличаться от любого другого лишь самими шарами, а порядок их извлечения не важен. Число способов извлечь 2 белых шара равно $C_5^2 = 10$. Вероятность извлечения 2 белых шаров: $P = \dfrac{C_5^2}{C_8^2} = \dfrac{5}{14}$.

1.13. $P \approx 0{,}21$.

Решение. Число способов распределить 7 билетов между 17 студентами $C_{17}^7 = 19448$. Если 4 билета достанутся девушкам, то 3 – юношам. Общее число способов выбрать 4 девушек и 3 юношей равно $C_7^4 \cdot C_{10}^3 = 4200$. Искомая вероятность равна $P = 4200 / 19448 \approx 0{,}21$.

1.14. $P = \dfrac{C_{10}^3}{C_{14}^5} = 0{,}06$.

1.15. 180 трёхзначных чисел, которые делятся на 5.

Решение. В разряд сотен можно записать любую из 9 цифр (ноль не годится, так как в этом случае число перестаёт быть трёхзначным). В разряд десятков можно выбрать любую из 10

цифр числом способов $C_{10}^1 = 10$. Чтобы число делилось на 5, оно должно заканчиваться на 5 либо на 0, т.е. разряд единиц можно выбрать двумя способами. Итого: существует $C_9^1 \cdot C_{10}^1 \cdot 2 = 180$ трёхзначных чисел, которые делятся на 5.

1.16. 120 способами.

Решение. Так как 2 спортсмена обязательно войдут в команду, остается отобрать 3 из 10. Для выборки важен только состав (по условию все члены команды не различаются по ролям). Это можно сделать $C_{10}^3 = 120$ способами.

1.17. 246.

Решение. Так как в группе должно быть не менее 2 человек, могут быть группы 2+7, 3+6 или 4+5 человек. В каждой выборке важен только состав, т.к. члены подгруппы не различаются по ролям. Число выборок из 2 человек: $C_9^2 = 36$. Число выборок из 3 человек: $C_9^3 = 84$. Число выборок из 4 человек: $C_9^4 = 126$. Общее число способов: $C_9^2 + C_9^3 + C_9^4 = 246$.

1.18. $P \approx 0{,}77$.

Решение. Пусть A – искомое событие, A_k - событие, состоящее в том, что k-я проверяемая деталь исправна (k = 1, 2, 3, 4, 5). Вероятность того, что первая деталь исправна, $P(A_1) = 0{,}95$. Вероятность того, что вторая проверяемая деталь исправна при условии, что первая деталь тоже исправна, $P(A_2/A_1) = 94/99$. Аналогично, вероятность того, что исправна третья деталь, $P(A_3/A_1A_2) = 93/98$ и т.д. По формуле умножения вероятностей для зависимых событий:
$$P(A) = \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98} \cdot \frac{92}{97} \cdot \frac{91}{96} \approx 0{,}77.$$

1.19. $P \approx 0{,}67$.

Решение. Пусть событие A_i – появление белого шара из i-го ящика. Вероятность вытащить белый шар из первого ящика $P(A_1) = 5/12$, а вероятность вытащить белый шар из второго ящика $P(A_2) = 4/9$. В силу независимости A_1 и A_2, $P(A_1A_2) =$

$= P(A_1)P(A_2) = \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{9} = \frac{5}{27}$. По теореме сложения вероятностей, вероятность вынуть белый шар либо из первого, либо из второго ящика, равна

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) = \frac{5}{12} + \frac{4}{9} - \frac{5}{27} = \frac{73}{108} \approx 0{,}67.$$

1.20. а) $P = 0{,}625$; б) $P = 0{,}8$; в) $1 - P = 0{,}2$.

Решение. Обозначим через A, H и Φ события, заключающиеся в том, что случайно выбранный человек владеет английским, немецким или французским языком соответственно.

а) $P(A + H) = P(A) + P(H) - P(AH) = \frac{20}{40} + \frac{10}{40} - \frac{5}{40} = 0{,}625$;

б) $P(A + H + \Phi) = P(A) + P(H) + P(\Phi) - \{P(AH) + P(A\Phi) + P(H\Phi)\} +$

$+ P(AH\Phi) = \frac{20}{40} + \frac{10}{40} + \frac{15}{40} - \left\{\frac{5}{40} + \frac{6}{40} + \frac{4}{40}\right\} + \frac{2}{40} = \frac{4}{5} = 0{,}8$;

в) $1 - P(A + H + \Phi) = 0{,}2$.

1.21. $P = \frac{13}{27}$.

Решение. Пусть белый цвет предмета – событие $Б$, а извлечение кубика – $К$.

$$P(К + Б) = P(К) + P(Б) - P(КБ) = \frac{6}{27} + \frac{1}{3} - \frac{2}{27} = \frac{13}{27}.$$

1.22.

Решение. По формуле биномиального распределения с $p = 6/10$ и $q = 4/10$:

$$P(10, m \le 2) = P(10,0) + P(10,1) + P(10,2) = C_{10}^0 p^0 q^{10} + C_{10}^1 p^1 q^9 +$$

$$+ C_{10}^2 p^2 q^8 = \frac{469}{25}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^8 \approx 0{,}0123.$$

1.23. $P(6, m \le 1) < P(12, m \le 2)$.

Решение. Вероятность появления бракованной детали $p = 0{,}1$, $q = 0{,}9$, $n = 6$.

$P(6, m \le 1) = P(6,0) + P(6,1) = C_6^0 p^0 q^6 + C_6^1 p^1 q^5 = 1{,}5 \cdot (0{,}9)^5 \approx 0{,}886$.

$P(12, m \le 2) = P(12,0) + P(12,1) + P(12,2) = C_{12}^0 p^0 q^{12} + C_{12}^1 p^1 q^{11} +$

$+ C_{12}^2 p^2 q^{10} = 2{,}55 \cdot (0{,}9)^{10} = 0{,}889$.

Следовательно, $P(6, m \le 1) < P(12, m \le 2)$.

1.24. Распределение случайной величины x_i:

x_i	0	1	2	3
$p(x_i)$	1/14	3/7	3/7	1/14

Решение. 4 телевизора можно выбрать числом способов $\Gamma_0 = C_8^4 = 70$. Дискретная случайная величина x_i может принимать значения 0, 1, 2 и 3. Если $x = 0$, т. е. все телевизоры отечественные, их можно выбрать числом способов $\Gamma(4,0) = C_3^0 \cdot C_5^4 = 5$ с вероятностью $P(4,0) = \Gamma(4,0) / \Gamma_0 = 5/70 = 1/14$. Если $x = 1$, т.е. 1 импортный и 3 отечественных телевизора, их можно выбрать числом способов $\Gamma(4,1) = C_3^1 \cdot C_5^3 = 3 \cdot 10 = 30$ с вероятностью $P(4,1) = \Gamma(4,1) / \Gamma_0 = 3/7$. Аналогично:

$\Gamma(4,2) = C_3^2 \cdot C_5^2 = 30$, $P(4,2) = \Gamma(4,2) / \Gamma_0 = 3/7$;

$\Gamma(4,3) = C_3^3 \cdot C_5^1 = 5$, $P(4,3) = \Gamma(4,3) / \Gamma_0 = 1/14$

Получили распределение случайной величины x_i:

x_i	0	1	2	3
$p(x_i)$	1/14	3/7	3/7	1/14

Сумма вероятностей 1/14+3/7+3/7+1/14=1.

1.25.

x_i	1	2	3	4
$p(x_i)$	1/30	3/10	1/2	1/6

1.26.

x_i	0	1	2	3
$p(x_i)$	4/165	42/165	84/165	7/33

1.27. $\langle m\rangle = 3$; $\sigma_m \approx 1{,}22$.

Решение. Каждый элемент системы может находиться только в двух состояниях: благоприятном (верхняя сторона карточки синяя) и неблагоприятном (верхняя сторона красная) с вероятностями $p = 1/2$ и $q = 1 - p = 1/2$. Доступные значения макропараметра *n*: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Система карточек описывается биномиальным распределением. Вероятность определенного значения *n* рассчитывается по формуле: $P(6, m) = C_6^m \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{1}{2}\right)^{6-m}$. Закон распределения *m* представлен в таблице:

m	0	1	2	3	4	5	6
P(6,*m*)	1/64	6/64	15/64	20/64	15/64	6/64	1/64

$$\langle m\rangle = np = 6 \cdot 0{,}5 = 3;\ \sigma_m = \sqrt{npq} = \sqrt{1{,}5} \approx 1{,}22 \approx 1.$$

1.28. *а*) 0,59; *б*) 0,40.

1.29. 0,667.

1.30. $\Gamma(N, N/2) = C_N^{N/2} = \dfrac{N!}{(N/2)!(N/2)!}$, $\Gamma_0 = 2^N$,

$$P(N, N/2) = \frac{\Gamma}{\Gamma_0} = \frac{N!}{(N/2)!(N/2)!2^N} = \frac{8!}{4!4!2^8} = \frac{35}{128},$$

$$P(N, N_1) = \frac{N!}{(N_1)!(N - N_1)!\,2^N},\ P(8, 0) = \frac{8!}{0!8!2^8} = \frac{1}{256} \approx 0{,}004,$$

$$P(8,1) = \frac{8!}{1!7!2^8} = \frac{1}{32} \approx 0{,}031,\ P(8, 2) = \frac{8!}{2!6!2^8} = \frac{7}{64} \approx 0{,}11.$$

1.31. $\left(1 - \dfrac{V}{W}\right)^{N-1} \left[1 + \dfrac{(N-1)V}{W}\right]$.

Решение. Молекула может находиться в объеме *V* с вероятностью $p = V/W$, а вне этого объема – с вероятностью $q = 1 - V/W$. В соответствии с биномиальным распределением:

$$P(n<2)=P(0)+P(1)=C_N^0 p^0 q^N + C_N^1 pq^{N-1} =$$
$$=\left(1-\frac{V}{W}\right)^N + \frac{NV}{W}\left(1-\frac{V}{W}\right)^{N-1} = \left(1-\frac{V}{W}\right)^{N-1}\left[1+\frac{(N-1)V}{W}\right].$$

1.32. а) $p_1 = 1/4$; б) $p_2 = 1/2$; в) $p_3 = 1/2$.

1.33. а) $P(3,2)=C_3^2\cdot p^2 q^1 = 3/8$; б) $P(3,2)+P(3,1)=3/4$; в) $P(3,0)=C_3^0\cdot p^3 q^0 = 1/8$.

1.34. $P(N,n)=\dfrac{N!\,2^{N-n}}{n!(N-n)!\,3^N}$;

$P(6,0)\approx 0{,}088$, $P(6,1)\approx 0{,}263$, $P(6,2)\approx 0{,}329$, $P(6,3)\approx 0{,}219$, $P(6,4)\approx 0{,}082$, $P(6,5)\approx 0{,}016$, $P(6,6)\approx 0{,}0014$.

1.35. $p=(V_1/V)^N=10^{-6}$.

1.36. $C_N^{N_1}\dfrac{V_1^{N_1}V_2^{N-N_1}}{(V_1+V_2)^N}$.

Решение. Вероятность нахождения молекулы в объеме V_1 равна $p=\dfrac{V_1}{V_1+V_2}$. Вероятность отсутствия молекулы в объеме V_1 равна

$$q=1-p=1-\frac{V_1}{V_1+V_2}=\frac{V_2}{V_1+V_2}.$$

Система из N молекул описывается биномиальным законом распределения, поэтому искомая вероятность равна

$$P(N,N_1)=C_N^{N_1}\left(\frac{V_1}{V_1+V_2}\right)^{N_1}\left(\frac{V_2}{V_1+V_2}\right)^{N-N_1}=C_N^{N_1}\frac{V_1^{N_1}V_2^{N-N_1}}{(V_1+V_2)^N}.$$

1.37. Отношение вероятностей равно $\left(1-\dfrac{V_1^2}{V^2}\right)^N$.

Решение. Молекула может находиться в объеме V с вероятностью $p = V/2V = 1/2$, вне этого объема – с вероятностью $q = 1 - p = 1/2$. Вероятность нахождения молекулы в объеме $V - V_1$ равна $p_1 = (V - V_1)/2V = (1/2)(1 - V_1/V)$, а вне этого объема – $q_1 = 1 - p_1 = (1/2)(1 + V_1/V)$. В соответствии с биномиальным распределением вероятность обнаружить N молекул в объеме V равна $P(2N, N) = \dfrac{(2N)!}{N!N!2^{2N}}$, а вероятность обнаружить N молекул в объеме $V - V_1$ составляет:

$$P_1(2N, N) = \frac{(2N)!}{N!N!} p_1^N q_1^N = \frac{(2N)!}{N!N!2^{2N}} \left(1 - \frac{V_1}{V}\right)^N \left(1 + \frac{V_1}{V}\right)^N.$$

Отношение вероятностей равно $\dfrac{P_1(2N, N)}{P(2N, N)} = \left(1 - \dfrac{V_1^2}{V^2}\right)^N$.

1.38. $\langle x \rangle = 0$, $\langle x^2 \rangle \approx 3,3 \cdot 10^{-3}$ см^2.

Решение. В качестве случайной величины x удобно взять отклонение расстояния между соседними метками от 10 см. Тогда с равной вероятностью значения x находятся в диапазоне $(-0,1 \le x \le +0,1)$ см. Плотность вероятности $f(x) = f_0 = \text{const}$ находим из условия нормировки: $\int\limits_{-0,1}^{0,1} f_0 \, dt = 1$, откуда $f(x) = f_0 = 5$ см$^{-1}$.

При этом

$$\langle x \rangle = \int\limits_{-0,1}^{0,1} 5x \, dx = 0, \quad \langle x^2 \rangle = \int\limits_{-0,1}^{0,1} 5x^2 \cdot dx \approx 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2.$$

Среднее суммарное отклонение y измеренного расстояния от 4 м в результате 40-кратного использования линейки равно $\langle y \rangle = n\langle x \rangle = 0$. Дисперсия $\sigma_y^2 = n\sigma_x^2 = n\langle x^2 \rangle \approx 0,133$ (см^2), стандартное отклонение от среднего значения $\langle y \rangle$: $\sigma_y = \sqrt{0,133} \approx$ $\approx 0,36$ см. Такая же погрешность измерения всего отрезка в 4 м.

1.39. $\sigma_y^2 \approx 208$ мл^2, $\sigma_y \approx 14$ мл.

Решение. В качестве случайной величины x удобно взять отклонение объема воды в одном стакане от 200 мл. При этом с равной вероятностью значения x находятся в диапазоне $(-5 \le x \le +5)$ мл. Плотность вероятности распределения x $f(x) = f_0 = 1/\int_{-5}^{5} \mathrm{d}x = 0{,}1$ (мл$^{-1}$). Среднее суммарное отклонение измеренного объема от 5 л $\langle y \rangle = n\langle x \rangle = 0$.

Дисперсия $\sigma_y^2 = n\langle x^2 \rangle \approx 208$ мл^2, $\sigma_y = \sqrt{208} \approx 14$ мл.

1.40. $\sigma_M \approx 10$ г.

1.41. $\langle \Delta\varphi \rangle = 30°$, $\sigma_{\Delta\varphi} \approx 0{,}53°$.

1.42. $P = 0{,}5$.

Решение. Ошибку округления можно рассматривать как непрерывную случайную величину x, распределенную равномерно в интервале между двумя соседними делениями. Длина интервала, в котором заключены возможные значения x, равна 0,2. Плотность равномерного распределения вероятностей $f(x) = 1/0{,}2 = 5$, вне этого интервала $f(x) = 0$.

Ошибка округления превышает 0,05, если она заключена в интервале (0,05; 0,15). Искомая вероятность равна

$$P(0{,}05 < x < 0{,}15) = \int_{0{,}05}^{0{,}15} f(x)\mathrm{d}x = 5 \cdot 0{,}1 = 0{,}5.$$

1.43. $\langle x \rangle = \frac{2a}{3}$; $\langle x^2 \rangle = a^2/2$; $\sigma_x^2 = a^2/18$.

Решение. Находим C из условия нормировки:

$$\int_0^a Cx\mathrm{d}x = 1, \text{ откуда } C = 2/a^2. \ \langle x \rangle = \int_0^a x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{a^2}\int_0^a x^2\mathrm{d}x = \frac{2a}{3},$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^a x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = a^2/2, \ \sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = a^2/18.$$

1.44. а) $x_{\text{нв}}=\dfrac{a}{2}$, $f(x_{\text{нв}})=\dfrac{3}{2}a$; б) $\langle x\rangle=\dfrac{a}{2}$, $\langle x^2\rangle=\dfrac{3}{10}a^2$, $\sigma_x^2=\dfrac{a^2}{20}$.

Решение. а) Находим B из условия нормировки: $B=6/a^3$. Наиболее вероятное значение x определяем из условия: $f(x_{\text{нв}})=f_{\max}$, т.е. $\left(\mathrm{d}f/\mathrm{d}x\right)\Big|_{x=x_{\text{нв}}}=B(a-2x_{\text{нв}})=0$, откуда $x_{\text{нв}}=a/2$, $f(x_{\text{нв}})=3/2a$; б) $\langle x\rangle=a/2$, $\langle x^2\rangle=3a^2/10$, $\sigma_x^2=a^2/20$.

1.45. $\langle x\rangle=27/16$, $\sigma_x^2=67/1280$,

$$P(1{,}5;\,2)=\int\limits_{1{,}5}^{2}f(x)\mathrm{d}x=13/24.$$

1.46. $\langle x\rangle=7/3$, $\sigma_x=\sqrt{2}/3$, $P(1;\,2)=1/4$.

1.47. $\langle x\rangle=4a/5$, $\sigma_x^2=2a^2/75$, $\sigma_x=\sqrt{2/75}a\approx 0{,}16a$, $P(0;\,a/2)=1/16$.

1.48. $\langle|x|\rangle=a/3$.

Решение.

$f(x)=\begin{cases}A(1+x/a)\text{ при }-a\le x\le 0,\\ A(1-x/a)\text{ при }0\le x\le a.\end{cases}$ Находим постоянную A из условия нормировки: $A\int\limits_{-a}^{0}(1+x/a)\,\mathrm{d}x+A\int\limits_{0}^{a}(1-x/a)\,\mathrm{d}x=1$, откуда $A=1/a$. Среднее значение модуля x определяем по формуле: $\langle|x|\rangle=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-a}^{0}(-x)f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{a}xf(x)\mathrm{d}x=a/3$.

1.49. $\Psi(n)=\dfrac{1}{2\Delta V}\cdot\dfrac{N}{n^2}$, $\langle n\rangle=\dfrac{N}{2\Delta V}\ln\dfrac{1-\Delta V/V}{1+\Delta V/V}$.

Решение. Объем сосуда V и концентрация молекул газа в сосуде n связаны соотношением: $n(V)=N/V$. Постоянная плотность вероятности распределения объемов $f(V)=f_0=\text{const}$ находится из

условия нормировки: $\int\limits_{V-\Delta V}^{V+\Delta V} f(V)\mathrm{d}V = \int\limits_{V-\Delta V}^{V+\Delta V} f_0\mathrm{d}V = 1$, откуда $f(V) = f_0 = \dfrac{1}{2\Delta V}$. Плотность вероятности $\psi(n)$ распределения концентрации молекул в сосудах находим из условия: $\Psi(n)\left|\mathrm{d}n\right| = f(V)\left|\mathrm{d}V\right|$. $\Psi(n) = f(V)\left|\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}\right| = \dfrac{1}{2\Delta V}\cdot\dfrac{N}{n^2}$.

Средняя концентрация молекул в сосудах равна

$$\langle n\rangle = \int\limits_{N/(V-\Delta V)}^{N/(V+\Delta V)} n\psi(n)\,\mathrm{d}n = \frac{N}{2\Delta V}\ln\frac{V-\Delta V}{V+\Delta V} = \frac{N}{2\Delta V}\ln\frac{1-\Delta V/V}{1+\Delta V/V}.$$

При $\Delta V << V$, воспользовавшись разложением в ряд Тейлора по малому параметру $\Delta V/V$, получаем:

$$\langle n\rangle \approx \frac{N}{2\Delta V}\ln\left[\left(1-\Delta V/V\right)\cdot\left(1-\Delta V/V\right)\right] \approx \frac{N}{\Delta V}\cdot\frac{\Delta V}{V} = \frac{N}{V}.$$

1.50. $\Psi(\upsilon) = \dfrac{m\upsilon}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}$.

Решение. Кинетическая энергия и скорость молекулы связаны соотношением: $\varepsilon = m\upsilon^2/2$. Постоянную (по условию задачи) плотность вероятности распределения энергий находим из условия нормировки: $\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = \int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f_0\,\mathrm{d}\varepsilon = 1$, откуда $f(\varepsilon) = f_0 = \dfrac{1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}$.

Плотность вероятности $\psi(\upsilon)$ распределения модулей скоростей молекул находим из условия: $\psi(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon = f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon$.

$$\Psi(\upsilon) = f(\varepsilon)\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\upsilon} = \frac{m\upsilon}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}.$$

1.51. $\langle V\rangle = \dfrac{\pi}{3}\left(r_1 + r_2\right)\cdot\left(r_1^2 + r_2^2\right)$.

Решение. $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$. Плотность распределения радиусов шариков:

$$f(r) = f_0 = \frac{1}{r_2 - r_1}.$$

Плотность распределения объемов шариков:

$$\Psi(V) = f(r)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{r_2 - r_1}\cdot\frac{1}{\mathrm{d}V/\mathrm{d}r} = \frac{1}{r_2 - r_1}\cdot\frac{1}{4\pi r^2} = \frac{1}{3^{2/3}(4\pi)^{1/3}V^{2/3}}.$$

Средний объем шариков

$$\langle V\rangle = \int_{r_1}^{r_2}\frac{4}{3}\pi r^3 f(r)\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{3}(r_1 + r_2)\cdot\left(r_1^2 + r_2^2\right).$$

1.52. $N = u^2 / R$; $\Psi(N) = \dfrac{\sqrt{R}}{4\Delta V\sqrt{u}}$.

1.53. $\Psi(E) = \dfrac{1}{x_0\sqrt{2kE}}$.

Решение. Энергия пружины E и смещение грузика x связаны соотношением: $E = \dfrac{1}{2}kx^2$. Плотность вероятности распределения смещений грузика $f(x) = f_0 = \mathrm{const}$ находится из условия нормировки $\int_{-x_0}^{x_0} f_0\,\mathrm{d}x = 1$, откуда $f_0 = \dfrac{1}{2x_0}$. При однозначной связи величин E и x вероятность $\mathrm{d}P(E, E+\mathrm{d}E)$, с которой энергия пружина находится в диапазоне $(E, E+\mathrm{d}E)$, совпадает с вероятностью $\mathrm{d}P(x, x+\mathrm{d}x)$ того, что смещение груза находится в интервале $(x, x+\mathrm{d}x)$. Поскольку функциональная зависимость $E(x)$ не монотонная и $E(-x) = E(x)$, то в области определения x $(-x_0 \le x \le x_0)$

$$\Psi(E)\left|\mathrm{d}E\right| = f(-x)\left|\mathrm{d}x\right| + f(+x)\left|\mathrm{d}x\right|,\ \Psi(E)\left|\mathrm{d}E\right| = 2f(x)\left|\mathrm{d}x\right|.$$

Отсюда $\Psi(E) = 2f(x)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}E} = \dfrac{2f_0}{\mathrm{d}E/\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x_0\sqrt{2kE}}$.

1.54. $\varphi(E) = \dfrac{1}{v_0\sqrt{2mE}}$, $\langle E\rangle = \dfrac{mv_0^2}{6}$.

Решение. Функция плотности вероятности для распределения по скорости: $f(\upsilon)=1/(2\upsilon_0)$. $E=m\upsilon^2/2$.

Вследствие немонотонности функциональной зависимости $E(\upsilon)$, $\Psi(E)|\mathrm{d}E|=f(-\upsilon)|\mathrm{d}\upsilon|+f(+\upsilon)|\mathrm{d}\upsilon|=2f(\upsilon)|\mathrm{d}\upsilon|$.

$$\varphi(E)=2f(\upsilon)\cdot\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}E}=f(\upsilon)\cdot\frac{2}{\mathrm{d}E/\mathrm{d}\upsilon}=\frac{1}{\upsilon_0\sqrt{2mE}};$$

$$\langle E\rangle=\int\limits_0^{m\upsilon_0^2/2}E\varphi(E)\mathrm{d}E=\frac{1}{\upsilon_0\sqrt{2m}}\int\limits_0^{m\upsilon_0^2/2}\sqrt{E}\,\mathrm{d}E=\frac{m\upsilon_0^2}{6}.$$

1.55. $P(m>2)\approx 0{,}32$.

Решение. По условию, вероятность изготовления бракованной шестеренки равна $p=1-0{,}9975=0{,}0025 \ll 0{,}1$; $N=800\gg 1$, $\langle m\rangle=Np=800\cdot 0{,}0025=2\ll N$. Применимо распределение Пуассона $P(m)=\dfrac{2^m}{m!}e^{-2}$. По правилу сложения вероятностей для несовместных событий находим:

$$P(m>2)=1-P(0)-P(1)-P(2)=1-(1+2+2)\,e^{-2}\approx 0{,}32.$$

1.56. $p=5\cdot 10^{-4}$; $\langle m\rangle=Np=5$; $\sigma_m^2=Npq\approx\langle m\rangle=5$. Применимо распределение Пуассона. $P(m)=\dfrac{5^m}{m!}e^{-5}$. $P(m\ge 1)=1-P(0)\approx 0{,}993$.

1.57. 0,647.

1.58. 0,366.

1.59. Распределение Пуассона имеет максимум вблизи $\langle m\rangle$, поэтому $m_{\text{нв}}\approx\langle m\rangle=Np=3$. $P(\langle m\rangle)=\dfrac{3^3}{3!}e^{-3}\approx 0{,}224$.

1.60. $P(5)\approx 0{,}156$, $P(m<5)\approx 0{,}53$.

Решение. Вероятность того, что элемент не выдержит испытания, равна $p=0{,}04$. Среднее число не выдержавших испытание элементов: $\langle m\rangle=Np=100\cdot 0{,}04=4$. Для числа не выдержавших

испытание элементов применимо распределение Пуассона: $P(m)=\dfrac{4^m}{m!}e^{-4}$

Если испытание выдержат 95 элементов, то не выдержат 5. Вероятность того, что выдержат испытание ровно 95 элементов, равна $P(5)=\dfrac{4^5}{5!}e^{-4}\approx 0{,}156$. Вероятность того, что выдержат испытание более 95 элементов, составляет

$$P(m<5)=P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)\approx 0{,}53.$$

1.61. а) $\langle m\rangle = Np = 3$; $P(m)=\dfrac{3^m}{m!}e^{-3}$;

$P(m\ge 1)=1-P(0)=1-e^{-3}\approx 0{,}95$; $P(m<2)=P(0)+P(1)\approx 0{,}20$.

б) $\langle m\rangle = 5$; $P(m)=\dfrac{5^m}{m!}e^{-5}$; $P(m\ge 1)\approx 0{,}99$.

1.62. а) $P(m=1;\,2;\,3)\approx 0{,}60$; б) $P(m\ge 2)\approx 0{,}80$.

Решение. Среднее число испускаемых сигналов за время $\tau = 5$ с равно $\langle m\rangle = \nu\tau = \dfrac{36}{60}\cdot 5 = 3$. Применимо распределение Пуассона, которое при $\langle m\rangle = 3$ принимает вид: $P(m)=\dfrac{3^m}{m!}e^{-3}$.

а)

$$P(m=1;\,2;\,3)=P(1)+P(2)+P(3)=(3+9/2+9/2)\,e^{-3}\approx 0{,}60;$$

б) $P(m\ge 2)=1-P(0)-P(1)=1-e^{-3}(1+3)\approx 0{,}80$.

1.63. $\dfrac{P_1}{P_2}\approx 1{,}4.$

Решение. Для $t_1 = 4$ с:

$$\langle m_1\rangle = \nu t_1 = \frac{30}{60}\cdot 4 = 2,\ P_1(2)=\frac{2^2}{2!}e^{-2}\approx 0{,}27.$$

Для $t_2 = 8$ с:

$$\langle m_2 \rangle = \nu t_2 = 0{,}5 \cdot 8 = 4\,,\ P_2(4) = \frac{4^4}{4!} e^{-4} \approx 0{,}195\,.\ \frac{P_1}{P_2} \approx 1{,}4\,.$$

1.64. Среднее число ошибок оператора за время $\tau = 3$ час: $\langle m \rangle = 2 \cdot 3 = 6$. Используем распределение Пуассона: $P(m) = \dfrac{6^m}{m!} e^{-6}$.

а) $P(4) = \dfrac{6^4}{4!} e^{-6} \approx 0{,}134$;

б) $P(m \geq 3) = 1 - P(0) - P(1) - P(2) \approx 0{,}94$;

в) $P(m \geq 1) = 1 - P(0) \approx 0{,}9975$.

1.65. 0,135.

1.66. а) 0,161; б) 0,285.

1.67. $n = 4{,}6 \cdot 10^{18}$ м$^{-3}$.

Решение. Применяя распределение Пуассона, получаем вероятность найти хотя бы одну частицу в указанном объеме:

$$p = 1 - P(0) = 1 - \frac{\langle m \rangle^0}{0!} \exp\left[-\langle m \rangle\right] = 1 - \exp\left[-nV_0\right],$$

откуда $n = \dfrac{-\ln(1-p)}{V_0} = 4{,}6 \cdot 10^{18}$ м$^{-3}$.

1.68. $\dfrac{P_2(0)}{P_1(0)} \approx 0{,}55$.

Решение. Среднее число частиц до процесса равно $\langle N_1 \rangle = \nu N_A \dfrac{w}{V}$, а после – $\langle N_2 \rangle = \nu N_A \dfrac{w}{V/n}$. Согласно распределению Пуассона,

$$\frac{P_2(0)}{P_1(0)} = \frac{\langle N_2 \rangle^0 \exp\left(-\langle N_2 \rangle\right)}{\langle N_1 \rangle^0 \exp\left(-\langle N_1 \rangle\right)} = \exp\left[-\nu N_A \frac{w}{V}(n-1)\right] \approx \exp(-0{,}6) \approx 0{,}55\,.$$

1.69. $\nu \approx 0{,}68$ моля.

Решение. В соответствии с распределением Пуассона, в исходном состоянии $P_1(0) = \frac{\langle m_1 \rangle^0}{0!}\exp\left[-\langle m_1 \rangle\right]$, после добавления газа $P_2(0) = \frac{\langle m_2 \rangle^0}{0!}\exp\left[-\langle m_2 \rangle\right]$, где $\langle m_2 \rangle = \langle m_1 \rangle + Np = \ = \langle m_1 \rangle + \nu N_A \frac{w}{V}$.

$1{,}5 = \frac{P_1(0)}{P_2(0)} = \exp(-\langle m_1 \rangle + \langle m_2 \rangle) = \exp\left(\frac{\nu N_A w}{V}\right)$, откуда $\nu = \frac{V\ln 2}{wN_A} = \frac{5}{3}\ln 1{,}5 \approx 0{,}68$ моль.

1.70. $w = -\frac{\ln p}{n} = 2{,}3$ мкм^3.

Решение. $\langle m \rangle = Np = nw$. В соответствии с распределением Пуассона, $p = P(0) = e^{-nw} \approx 0{,}001$, откуда $w = -\frac{\ln p}{n} = -\frac{\ln(0{,}01)}{2\cdot 10^{18}} \approx$ $\approx 2{,}3\cdot 10^{-18}$м$^3 = 2{,}3$ мкм^3.

1.71. $P \approx 0{,}0048$.

Решение. Среднее значение числа частиц в объеме w равно $\langle m \rangle = Np = N\frac{w}{V} = nw = 2000$. Поскольку m сравнимо с <m>, а полное число частиц $N = nV = 2\cdot 10^{22} >> 1$, можно использовать распределение Гаусса с $\sigma \approx \sqrt{N\frac{w}{V}} = \sqrt{nw} \approx 44{,}7$.

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi nw}}\exp\left[-\frac{(m-\langle m \rangle)^2}{2nw}\right] \approx \frac{1}{44{,}7\sqrt{2\pi}}e^{-0{,}625} \approx 0{,}0048.$$

1.72. $P_G(\langle m \rangle - 4) = \frac{2}{\sqrt{3\pi N_1}}e^{-\frac{64}{3N_1}}$.

Решение. Поскольку $N_1/2 =$ <m>, то можно воспользоваться распределением Гаусса:

$$P_G(\langle m \rangle - 4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{4^2}{2\sigma^2}} = \frac{2}{\sqrt{3\pi N_1}}e^{-\frac{64}{3N_1}},$$

где $\sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{2N_1 \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{6N_1}$.

1.73. $P_G(m = \langle m \rangle) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx 7{,}7 \cdot 10^{-11}$, где $\sigma_m = \sqrt{\langle m \rangle} =$
$= \sqrt{N_L w} = \sqrt{2{,}7 \cdot 10^{19}} \approx 5{,}2 \cdot 10^9$.

1.74. Плотность газа пропорциональна концентрации молекул: $\rho \sim n$, следовательно, в объеме w число молекул должно быть на η% больше среднего числа частиц в объемах такого размера внутри сосуда $\langle m \rangle = Np = N\frac{w}{V} = N_L w = 2{,}68 \cdot 10^{19}$, т.е. должно быть равно $\langle m \rangle (1 + 0{,}01\eta)$. Поскольку m сравнимо с <m>, а полное число частиц $N >> 1$, можно использовать распределение Гаусса с $\sigma \approx \sqrt{N_L w} \approx 5{,}2 \cdot 10^9$:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_L w}} \exp\left[-\frac{(0{,}01\eta \langle m \rangle)^2}{2N_L w} \right] \approx 8 \cdot 10^{-7} e^{-3{,}4 \cdot 10^{16}} \sim 10^{-10^{16}} .$$

1.75. $N_1 = \sqrt{N_A \ln 1{,}3} \approx 3{,}95 \cdot 10^{11}$.

Решение. В случае распределения Гаусса при отклонении от среднего значения на $\pm\delta$ вероятность уменьшается в e раз. Так как при переходе N_1 частиц вероятность должна уменьшиться в 1,3 раза, оставшееся число частиц в сосуде близко к $\langle m \rangle$, при этом общее число частиц в сосудах $N \sim N_A >> 1$, т.е. применимо распределение Гаусса.

Вероятность нахождения частицы в любом из сосудов $p = 1/2$. Среднее число частиц в каждом из сосудов $\langle m \rangle = Np = 2N_A \cdot 1/2 = N_A$, $\sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{N_A/2}$.

Вероятность того, что в сосуде находится N_A частиц, равна

$$P_1 = P_G(N_A) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} e^{-\frac{(N_A - N_A)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} .$$

Вероятность нового состояния, когда в первом сосуде на N_1 частиц больше, а во втором – на N_1 частиц меньше, составляет:

$$P_2 = P_{\mathrm{G}}(N_{\mathrm{A}} \pm N_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} e^{-\frac{(N_{\mathrm{A}} \pm N_1 - N_{\mathrm{A}})^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{N_1^2}{2\sigma^2}\right).$$

$1{,}3 = \dfrac{P_1}{P_2} = \exp\left(\dfrac{N_1^2}{2\sigma^2}\right) = \exp\dfrac{N_1^2}{N_{\mathrm{A}}}$, $\ln 1{,}3 = \dfrac{N_1^2}{N_{\mathrm{A}}}$, откуда $N_1 = \sqrt{N_{\mathrm{A}} \ln 1{,}3} =$

$= \sqrt{6 \cdot 10^{23} \cdot 0{,}26} \approx 3{,}95 \cdot 10^{11}$.

§2. Распределение Максвелла

2.1. $t = 96$ °C.

2.2. $T = \dfrac{\mu(\Delta v)^2}{R\left(\sqrt{3} - \sqrt{8/\pi}\right)^2} \approx 334$ K.

2.3. $T = 330$ K.

2.4. $\langle v \rangle - \sqrt{\langle v^2 \rangle} \approx 152$ м/с.

2.5. $\dfrac{\sqrt{\langle v^2 \rangle} - v_{\text{нв}}}{\sqrt{\langle v^2 \rangle}} \approx 11{,}4\%$.

2.6. $\langle v \rangle_2 - \langle v \rangle_1 \approx 83{,}3$ м/с.

2.7. $\Delta T_2 \approx 183$ K.

Решение. $v_{\text{скв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3RT/\mu}$. Записав выражения для среднеквадратичной скорости при скоростях v_1 и v_2, получим:

$$v_2^2 - v_1^2 = (3R/\mu)\left(T_2 - T_1\right) = (3R/\mu)\,\Delta T_1.$$

Аналогично

$$v_3^2 - v_2^2 = (3R/\mu)\left(T_3 - T_2\right) = (3R/\mu)\,\Delta T_2.$$

Поделив почленно записанные соотношения, находим:

$$\Delta T_2 = \Delta T_1 \frac{v_3^2 - v_2^2}{v_2^2 - v_1^2} \approx 183 \text{ K}.$$

2.8. $v_2 = v_1\sqrt{\mu_1/\mu_2}$.

2.9. а) $\sum v_x = 0$;

б) $\sum v = N_\text{A}\langle v\rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}N_\text{A} \approx 445N_\text{A} \approx 2{,}7\cdot 10^{26}$м/с;

в) $\sum v^2 = N_\text{A}\langle v^2\rangle = \dfrac{3RT}{\mu}N_\text{A} \approx 1{,}4\cdot 10^{29}$м^2/с^2.

2.10. $\sum p_i = N_\text{A} m\langle v\rangle = \mu\langle v\rangle \approx 13$ Н·с, где m – масса одной молекулы.

2.11. $f(v)$ имеет максимум при $v = v_\text{нв} = \sqrt{\dfrac{2RT}{\mu}}$, откуда $T = \mu v^2/(R) \approx 420$ К.

2.12. $f(v_x)$ имеет максимум при $v_x = 0$.

$$f(v_x)\big|_{v_x=0} = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi RT}} \approx 1{,}4\cdot 10^{-3}.$$

2.13. Температура должна уменьшиться в n^2 раз.

2.14. $f(v)$ имеет максимум при $v = v_\text{нв}$:

$$f(v)_\text{max} = \left(\frac{\mu}{2\pi RT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{\mu v_\text{нв}^2}{2RT}\right)\cdot 4\pi v_\text{нв}^2 = \sqrt{\frac{8\mu}{\pi RT}}e^{-1} \approx 5{,}6\cdot 10^{-4}.$$

2.15. $f(v_\text{нв}):f(\langle v\rangle):f(v_\text{скв}) = 2e^{-1}:\dfrac{8}{\pi}e^{-4/\pi}:3e^{-3/2} \approx$

$\approx 0{,}741:0{,}713:0{,}669 \approx 1:0{,}96:0{,}90$.

2.16. а) $P \approx f(v_\text{нв})\cdot 2\Delta v = \sqrt{\dfrac{8\mu}{\pi RT}}e^{-1}\cdot 2\Delta v \approx 0{,}0040$;

б) $P \approx f(0{,}1\,v_\text{нв})\cdot 2\Delta v = 10^{-2}\sqrt{\dfrac{8\mu}{\pi RT}}e^{-0{,}01}\cdot 2\Delta v \approx 0{,}011$.

2.17. а) $\Delta N / N \approx f(v_{\text{нв}}) \cdot 2\alpha v_{\text{нв}} = \dfrac{4 \cdot 2\alpha}{\sqrt{\pi e}} \approx 0{,}83\%$;

б) $\Delta N / N \approx f(\langle v \rangle) \cdot 2\alpha \langle v \rangle = \dfrac{32}{\pi^2} e^{-4/\pi} \cdot 2\alpha \approx 0{,}91\%$;

в) $\Delta N / N \approx 6\sqrt{\dfrac{3}{2\pi}} e^{-3/2} \cdot 2\alpha \approx 0{,}93\%$.

2.18. $T_2 \approx 0{,}83 T_1$.

Решение. $v_{\text{скв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3RT/\mu}$. Максимум плотности вероятности достигается при наивероятнейшей скорости $v_{\text{нв}} = \sqrt{2RT/\mu}$. Используя распределение Максвелла по скоростям, получаем:

$$\frac{1}{T_2^{3/2}} \cdot e^{-\frac{3}{2}\left(\frac{3RT_2}{\mu}\right)} = \frac{1}{T_1^{3/2}} e^{-1\left(\frac{2RT_1}{\mu}\right)},$$

откуда $T_2 = \dfrac{9T_1}{4e} \approx 0{,}83 T_1$.

2.19. $\Delta N_1 / \Delta N_2 = 2^{3/2} e^{-0{,}25} \approx 2{,}20$.

2.20. $\dfrac{\Delta N}{N} \approx f(\langle v \rangle) \cdot (\langle v \rangle - v_{\text{скв}}) = \dfrac{16}{\pi\sqrt{2\pi}} \left(\sqrt{3} - \sqrt{\dfrac{8}{\pi}} \right) e^{-4/\pi} \approx 0{,}077$.

2.21. $f(u) = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 \exp\left(-u^2\right)$.

2.22. $\Delta N \approx n_0 V \cdot f(v_0) \cdot \Delta v$, где $f(v_0)$ – плотность вероятности распределения Максвелла по скоростям при скорости $v_0 = 1{,}20 \cdot 10^3$ м/с.

а) $\Delta N \approx 2{,}4 \cdot 10^{21}$; б) $\Delta N \approx 1{,}2 \cdot 10^{20}$.

2.23. $\dfrac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \left(\dfrac{v_1}{v_2}\right)^2 \exp\left\{\dfrac{\mu\left(v_2^2 - v_1^2\right)}{2RT}\right\} \approx 0{,}46$, где $v_1 = 200$ м/с, $v_2 = 400$ м/с.

2.24. $\dfrac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \exp\left\{\dfrac{\mu\left(v_{2z}^2 - v_{1z}^2\right)}{2RT}\right\} \cdot \dfrac{\delta v_{1z}}{\delta v_{2z}} \approx 1{,}11$.

2.25.

$$\delta P = \left(\frac{\mu}{2\pi RT}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{\mu\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)}{2RT}\right\} \delta v_x \delta v_y \delta v_z \approx 1{,}1 \cdot 10^{-8}.$$

2.26. $\Delta N / N = 0{,}010$.

Решение. В задаче рассматривается двумерный максвелловский газ. В пространстве скоростей элементарная площадь, в которой находятся молекулы со скоростями в интервале $(v_\perp, v_\perp + \mathrm{d}v_\perp)$ – кольцо, площадь которого $2\pi v_\perp \, \mathrm{d}v_\perp$, где $v_\perp$ – радиус кольца, а $\mathrm{d}v_\perp$ – его ширина. Число состояний в пределах кольца пропорционально энергии $mv_\perp^2/2$. Согласно распределению Гиббса, вероятность, с которой молекула имеет скорость в указанном интервале, равна

$$\mathrm{d}P(v_\perp) = f\left(v_\perp\right) \mathrm{d}v_\perp = A\left(2\pi v_\perp \mathrm{d}v_\perp\right) \exp\left(-\frac{mv_\perp^2}{2kT}\right).$$

Константа A находится из условия нормировки:

$\int\limits_0^\infty f\left(v_\perp\right) \mathrm{d}v_\perp = 1$, откуда $A = \dfrac{m}{2\pi k_\mathrm{B} T}$.

Плотность вероятности распределения Максвелла равна

$$f\left(v_\perp\right) = 2\pi v_\perp \left(\frac{m}{2\pi kT}\right) \exp\left(-\frac{mv_\perp^2}{2kT}\right) = 2\pi v_\perp \left(\frac{\mu}{2\pi RT}\right) \exp\left(-\frac{\mu \upsilon_\perp^2}{2RT}\right).$$

Относительное число молекул со скоростями в указанном диапазоне составляет

$$\Delta N / N = f\left(v_{\perp 0}\right) \cdot 2\,\delta v_\perp = 2\pi v_{\perp 0} \left(\frac{\mu}{2\pi RT}\right) \exp\left(-\frac{\mu\, v_{\perp 0}^2}{2RT}\right) \cdot 2\,\delta v_\perp,$$

где для данной задачи $v_{\perp 0} = 1{,}4 \cdot 10^3$ м/с, $\delta v_\perp = 0{,}01 \cdot 10^3$ м/с, μ – молярная масса водорода. $\Delta N / N = 0{,}010$.

2.27. $\delta P = f(v_\perp) \cdot 2\,\delta \upsilon_\perp \cdot f(v_z) \cdot 2\delta v_z =$

$$= 2\pi v_\perp \left(\frac{\mu}{2\pi RT}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{\mu\left(v_\perp^2 + v_z^2\right)}{2RT}\right\} \cdot 2\delta v_\perp \cdot 2\delta v_z \approx 1{,}74 \cdot 10^{-5} \ ,$$

где $v_\perp = 300$ м/с, $\delta v_\perp = 2$ м/с, $v_z = 200$ м/с, $\delta v_z = 2$ м/с.

2.28. $P(v_x > 0) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) \mathrm{d}v_x = \frac{1}{2}$.

2.29.

$$P = P(v_x > 0)\, P\left(v_y > 0\right) + P\left(v_x > 0\right) P\left(v_z > 0\right) + P\left(v_y > 0\right) P\left(v_z >)\right) = \frac{3}{4}.$$

2.30.

$$\left\langle v^3 \right\rangle = \int\limits_0^\infty v^3 f(v)\, \mathrm{d}v = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int\limits_0^\infty v^5 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \mathrm{d}v = 4\pi \left(\frac{2kT}{\pi m}\right)^{3/2}.$$

2.31. $\left\langle v_\perp \right\rangle = \sqrt{\frac{\pi RT}{2\mu}}$.

Решение. В задаче рассматривается двумерный максвелловский газ. Плотность вероятности для распределения модуля проекции скорости $v_\perp$ на плоскость описывается функцией:

$$f\left(v_\perp\right) = 2\pi v_\perp \left(\frac{\mu}{2\pi RT}\right) \exp\left(-\frac{\mu v_\perp^2}{2RT}\right).$$

$$\left\langle v_\perp \right\rangle = \int\limits_0^\infty v_\perp f\left(v_\perp\right) \mathrm{d}v_\perp = \frac{\mu}{RT} \int\limits_0^\infty v_\perp^2 \exp\left(-\frac{\mu v_\perp^2}{2RT}\right) \mathrm{d}v_\perp = \sqrt{\frac{\pi RT}{2\mu}} \ .$$

2.32. $\left\langle v_\perp^2 \right\rangle = \frac{m}{kT} \int\limits_0^\infty v_\perp^3 \exp\left(-\frac{mv_\perp^2}{2kT}\right) \mathrm{d}v_\perp = \frac{2kT}{m}$.

2.33. $\psi(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}} \sqrt{\varepsilon}\, \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)$.

Решение. Плотность вероятности для распределения Максвелла по скоростям: $f(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \cdot 4\pi v^2$. Кине-

тическая энергия молекул $\varepsilon = mv^2/2$. Плотность вероятности для распределения Максвелла по кинетическим энергиям $\psi(\varepsilon)$ находим по формуле: $\psi(\varepsilon) = f(v)\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varepsilon} = f(v)\cdot\dfrac{1}{\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}v} = f(v)\cdot\dfrac{1}{mv}$.

Далее выражаем скорость молекул через их кинетическую энергию: $v = \sqrt{2\varepsilon/m}$ и подставляем в выражение для плотности вероятности распределения по энергиям:

$$\psi(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}}\sqrt{\varepsilon}\,\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right).$$

2.34. $\varepsilon_{\text{нв}} = \dfrac{kT}{2}$, $\langle\varepsilon\rangle = \dfrac{3}{2}kT$, $\sigma_\varepsilon^2 = \dfrac{3}{2}(kT)^2$, $\delta\varepsilon = \sqrt{2/3}$.

Решение. Наивероятнейшее значение энергии одной молекулы находится из условия: $\left.\dfrac{\mathrm{d}f(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon_{\text{нв}}} = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}f(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon} = \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} - \sqrt{\varepsilon}\cdot\frac{1}{kT}\right) = 0,\ \text{откуда}\ \varepsilon_{\text{нв}} = \frac{kT}{2}.$$

Средняя энергия одной молекулы $\langle\varepsilon\rangle$ равна

$$\langle\varepsilon\rangle = \int_0^\infty \varepsilon f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\int_0^\infty \varepsilon^{3/2}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)\mathrm{d}\varepsilon = \frac{3}{2}kT.$$

Среднее значение квадрата кинетической энергии составляет

$$\left\langle\varepsilon^2\right\rangle = \int_0^\infty \varepsilon^2 f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\int_0^\infty \varepsilon^{5/2}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)\mathrm{d}\varepsilon = \frac{15}{4}(kT)^2.$$

При вычислении $\langle\varepsilon\rangle$ и $\left\langle\varepsilon^2\right\rangle$ удобно ввести переменную y: $\varepsilon = kTy^2$, при этом $\mathrm{d}\varepsilon = 2kTy\mathrm{d}y$, а далее использовать табличные интегралы из Приложения 1.

Дисперсия энергии одной частицы равна $\sigma_\varepsilon^2 = \left\langle\varepsilon^2\right\rangle - \langle\varepsilon\rangle^2 = 3(kT)^2/2$, а относительная флуктуация кинетической энергии: $\delta\varepsilon = \dfrac{\sqrt{\left\langle\varepsilon^2\right\rangle - \langle\varepsilon\rangle^2}}{\langle\varepsilon\rangle} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

2.35. $f(\varepsilon)$ имеет максимум при $\varepsilon = \varepsilon_{\text{нв}} = kT/2$.

$$f_{\max}(\varepsilon_{\text{нв}}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}}\sqrt{kT/2}\, e^{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi e}}\cdot\frac{1}{kT}.$$

2.36. Уменьшится в 2 раза.

2.37. Температура должна увеличиться в n раз.

2.38. $\delta N/N = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}}\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}\exp\left(-\dfrac{\langle\varepsilon\rangle}{kT}\right)\cdot 2\alpha\langle\varepsilon\rangle = 3\alpha\sqrt{\dfrac{6}{\pi e^3}} \approx$ $\approx 0{,}46\%$.

2.39. $\dfrac{\delta N}{N} = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}}\sqrt{\varepsilon_{\text{нв}}}\exp\left(-\dfrac{\varepsilon_{\text{нв}}}{kT}\right)\cdot 0{,}1\varepsilon_{\text{нв}} = \dfrac{0{,}1}{\sqrt{2\pi e}} \approx 0{,}024$.

2.40. $\left\langle\sqrt{\varepsilon}\right\rangle = \sqrt{\dfrac{2kT}{\pi}}$, $\langle v\rangle = \sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m}}$.

Решение.

$$\left\langle\sqrt{\varepsilon}\right\rangle = \int_0^\infty \sqrt{\varepsilon} f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\int_0^\infty \varepsilon\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)\mathrm{d}\varepsilon = \sqrt{\frac{2kT}{\pi}}.$$

Поскольку $\left\langle\sqrt{\varepsilon}\right\rangle = \sqrt{\dfrac{m}{2}}\langle v\rangle$, то, используя полученное значение $\left\langle\sqrt{\varepsilon}\right\rangle = \sqrt{\dfrac{2kT}{\pi}}$, определяем среднюю скорость молекул: $\langle v\rangle = \sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m}}$, что совпадает с формулой, полученной с использованием распределения Максвелла по скоростям.

2.41. $v = \sqrt{\dfrac{3k\ln(T_2/T_1)}{m(1/T_1 - 1/T_2)}}$.

Решение. Относительное число молекул, скорости которых находятся в диапазоне (v, $v+\delta v$), равно $\Delta N/N \approx f(v)\,\delta v$. Поэто-

му, чтобы это число не изменилось, должны быть равны плотности вероятности распределения Максвелла по скоростям $f(v)$ при разных температурах. Приравнивая их, получаем:

$$\left(\frac{1}{T_1}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT_1}\right) = \left(\frac{1}{T_2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT_2}\right),$$

откуда находим искомую скорость: $v = \sqrt{\dfrac{3k \ln\left(T_2/T_1\right)}{m\left(1/T_1 - 1/T_2\right)}}$.

2.42. $v = \sqrt{\dfrac{6\ln 2\, kT_0}{m}}$.

Решение. Вероятность того, что скорость молекулы лежит в интервале $(v, v+\delta v)$ равна $\delta P(v) \approx f(v)\,\delta v$. Приравнивая вероятности при разных температурах, получаем:

$$\left(\frac{1}{T_0}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT_0}\right) = \left(\frac{1}{2T_0}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv_0^2}{2k\cdot 2T_0}\right),$$

откуда $2^{3/2} = \exp\left(\dfrac{mv^2}{4kT_0}\right)$ и $v = \sqrt{\dfrac{6\ln 2\, kT_0}{m}}$.

2.43. $v \approx 500$ м/с.

Решение. Относительное число молекул, скорости которых находятся в диапазоне (v, $v+\delta v$), равно $\Delta N/N \approx f(v)\,\delta v$. Поэтому из равенства плотности вероятности распределения Максвелла по скоростям $f(v)$ для разных газов следует:

$$\left(\frac{m_{O_2}}{m_{N_2}}\right)^{3/2} = \exp\left(\frac{(m_{O_2} - m_{N_2})\, v^2}{2kT}\right).$$

Прологарифмировав полученное выражение, находим искомую скорость v:

$$v = \sqrt{\frac{3kT \ln(m_{O_2}/m_{N_2})}{m_{O_2} - m_{N_2}}} = \sqrt{\frac{3RT \ln(\mu_{O_2}/\mu_{N_2})}{\mu_{O_2} - \mu_{N_2}}} \approx 500 \text{ м/с}.$$

2.44. а) $T_0 = \dfrac{2\varepsilon}{k}$, б) $\langle\varepsilon\rangle = 3\varepsilon$.

Решение. а) Число частиц с энергиями в диапазоне $(\varepsilon,\ \varepsilon + \delta\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon, \varepsilon + \delta\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT_0)^{3/2}}\sqrt{\varepsilon}\,\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT_0}\right)\delta\varepsilon\,,$$ где N_0 – общее число частиц в системе.

Число частиц будет максимально при условии:

$\left.\dfrac{\mathrm{d}N(\varepsilon, \varepsilon + \delta\varepsilon)}{\mathrm{d}T}\right|_{T_0} = 0$. Производя дифференцирование, находим:

$\dfrac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} - \dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{kT_0} = 0$, откуда $T_0 = \dfrac{2\varepsilon}{k}$.

б) Определим среднюю энергию молекул, при температуре T_0 по формуле $\langle\varepsilon\rangle = \dfrac{3}{2}kT_0$, или $\langle\varepsilon\rangle = \dfrac{3}{2}k\cdot\dfrac{2\varepsilon}{k} = 3\varepsilon$.

2.45. $\nu_S \approx 2{,}8\cdot10^{23}$ 1/с.

Решение. Применяя формулу для частоты ν столкновений молекул с единичной площадкой, получаем:

$$\upsilon_S = \upsilon S = \frac{n}{4}\langle\upsilon\rangle S = n\sqrt{\frac{RT}{2\pi\mu}}\cdot S = \frac{p}{kT}\sqrt{\frac{RT}{2\pi\mu}}S = \frac{pS}{k}\sqrt{\frac{R}{2\pi\mu T}}\,.$$

Подставляя $\mu = 28\cdot10^{-3}$ кг/моль и $S = 1\cdot10^{-4}$ м^2, находим: $\nu_S \approx 2{,}8\cdot10^{23}$ 1/с.

2.46. $\upsilon_S = \dfrac{n}{4}\langle\upsilon\rangle S = \dfrac{pr^2}{k}\sqrt{\dfrac{\pi R}{2\mu T}} \approx 2{,}7\cdot10^{18}$ 1/с.

2.47. $\nu_S = \dfrac{3N}{R}\sqrt{\dfrac{kT}{2\pi m}}$.

Решение. Число ударов за секунду о единичную площадку равно $\upsilon = \dfrac{n}{4}\langle\upsilon\rangle$, где $n = \dfrac{3N}{4\pi R^3}$, $\langle\upsilon\rangle = \sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m}}$, откуда

$$\nu_S = \frac{1}{4}\cdot\frac{3N}{4\pi R^3}\cdot 4\pi R^2\cdot\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \frac{3N}{R}\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}\,.$$

2.48. $\nu_1 \approx 1890\ \text{с}^{-1}$.

Решение. Число ударов всех молекул о стенку сосуда за одну секунду равно

$$\nu_S = \frac{1}{4} \cdot \frac{3N}{4\pi r^3} \cdot 4\pi r^2 \cdot \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \frac{3N}{r}\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}},$$

где N – общее число молекул в сосуде, r – радиус сосуда. Средняя частота соударений каждой молекулы со стенкой:

$$\nu_1 = \frac{\nu_S}{N} = \frac{3}{d/2}\sqrt{\frac{RT}{2\pi\mu}} \approx 1890\ \text{с}^{-1}.$$

2.49. $p \approx 1{,}05 \cdot 10^{-9}$ Па.

Решение. Если считать, что в состоянии термодинамического равновесия вольфрамовой пластины и насыщенного пара вольфрама над ней все молекулы пара, ударяясь о пластину, прилипают к ней, то число таких ударов за единицу времени о единицу поверхности должно быть равно числу атомов n, испаряющихся с поверхности вольфрама за одну секунду с единицы площади.

По условию задачи $n = \alpha / m_{\text{W}}$, где m_{W} – масса атома вольфрама. С другой стороны, число ударов молекул пара вольфрама о пластину за единицу времени о единицу поверхности равно $\upsilon = \frac{n}{4}\langle\upsilon\rangle = \frac{p}{4kT}\langle\upsilon\rangle$, где $\langle\upsilon\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_{\text{W}}}}$. Приравнивая n и ν, получаем: $\frac{p}{4kT}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m_{\text{W}}}} = \frac{\alpha}{m_{\text{W}}}$, откуда находим давление насыщенных паров вольфрама: $p = \alpha\sqrt{\frac{2\pi kT}{m_{\text{W}}}} = \alpha\sqrt{\frac{2\pi RT}{\mu_{\text{W}}}} \approx 1{,}05 \cdot 10^{-9}$ Па.

2.50. $\upsilon = \frac{n}{4}\langle\upsilon\rangle = n\sqrt{\frac{RT}{2\pi\mu}}$, поэтому частота ударов молекул о стенку уменьшится в $\sqrt{\beta}$ раз.

2.51. $p_1 = p_2\sqrt{T_1/T_2}$.

Решение. Число атомов, влетающих N_{1x} и вылетающих N_{2x} за единицу времени определяется числом ударов атомом о площадку, совпадающую с отверстием:

$$N_1 = \upsilon_1 S = \frac{n_1}{4}\langle \upsilon_1 \rangle S = n_1 \sqrt{\frac{RT_1}{2\pi\mu}} \cdot S\,;\ N_2 = \upsilon_2 S = \frac{n_2}{4}\langle \upsilon_2 \rangle S = n_2 \sqrt{\frac{RT_2}{2\pi\mu}} \cdot S\,.$$

Так как в состоянии равновесия $N_1 = N_2$, находим: $n_1\sqrt{T_1} = n_2\sqrt{T_2}$. Используя формулу для давления $p = nkT$, определяем связь давлений p_1 и p_2:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{n_1 T_1}{n_2 T_2} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \cdot \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\,, \text{ откуда } p_1 = p_2\sqrt{T_1/T_2}\,.$$

2.52. На 25%.

Решение. Новый объем шарика равен $V' = 0{,}8V_0$, при этом концентрация возросла до $n' = \dfrac{n_0}{V'} = 1{,}25n_0$. Частота ударов молекул о стенку шарика $\nu = \dfrac{n}{4}\langle \upsilon \rangle = n\sqrt{\dfrac{RT}{2\pi\mu}}$ при неизменной температуре также увеличилась до $\nu' = 1{,}25\nu_0$, т.е. возросла на 25%.

2.53. $E = \sqrt{\dfrac{2(kT)^3}{\pi m}}\, n_0 S.$

Решение. Для молекул, подчиняющихся распределению Максвелла, частота ударов о единичную площадку $\nu = n_0\langle \upsilon \rangle/4$, что можно переписать с использованием определения средней скорости в виде:

$$\nu = \frac{n_0}{4}\langle \upsilon \rangle = \frac{n_0}{4}\int_0^\infty \upsilon f(\upsilon)\,\mathrm{d}\upsilon = \int_0^\infty \frac{n_0}{4}\upsilon\,\mathrm{d}P(\upsilon) = \int_0^\infty \mathrm{d}\upsilon\,.$$

Из полученного соотношения следует, что частота ударов о стенку молекул, имеющих скорость в интервале $(\upsilon, \upsilon + \mathrm{d}\upsilon)$, равна

$$\mathrm{d}\nu = \left(\frac{n_0}{4}\upsilon\right)\mathrm{d}P(\upsilon) = \left(\frac{n_0}{4}\upsilon\right) f(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon\,.$$

За единицу времени площадки площадью S достигнет число молекул $\mathrm{d}N = S\mathrm{d}\nu = \left(\frac{n}{4}v\right)\mathrm{d}P(v)S = \left(\frac{n}{4}v\right)Sf(v)\mathrm{d}v$, причем каждая из молекул имеет энергию $mv^2/2$ (в соответствующем интервале скоростей v из диапазона $(v, v+\mathrm{d}v)$).

Полная кинетическая энергия E молекул, ударяющихся о поверхность стенки площадью S в единицу времени, равна

$$E = \int_0^\infty \left(\frac{mv^2}{2}\right) S\left(\frac{n_0}{4}v\right) f(v)\mathrm{d}v = S\frac{mn_0}{8}\int_0^\infty v^3 f(v)\,\mathrm{d}v = \frac{1}{8}mn_0\left\langle v^3\right\rangle S.$$

Значение $\left\langle v^3\right\rangle = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^5 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\mathrm{d}v = 4\pi\left(\frac{2kT}{\pi m}\right)^{3/2}$

вычисляется с помощью интеграла $I_{2n+1} = \int_0^\infty x^{2n+1}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1}{2}\frac{n!}{\alpha^{n+1}}$.

Окончательно получаем: $E = \frac{1}{8}mn_0\left\langle v^3\right\rangle S = \sqrt{\frac{2(kT)^3}{\pi m}}n_0 S$.

2.54. а) $\left\langle\varepsilon\right\rangle_{\mathrm{ex}} = 2kT$, б) по мере вылета молекул температура газа в сосуде понижается

Решение. 1) Уносимая молекулами за единицу времени энергия равна (см. решение задачи 2.53):

$$E_{\mathrm{ex}} = \int_0^\infty \left(\frac{mv^2}{2}\right) S\left(\frac{n}{4}v\right) f(v)\mathrm{d}v = \frac{1}{8}mn\left\langle v^3\right\rangle S = \sqrt{\frac{2(kT)^3}{\pi m}}nS.$$

Число молекул, вылетающих из сосуда за единицу времени, составляет $N_{\mathrm{ex}} = \frac{1}{4}n\left\langle v\right\rangle S = \frac{1}{4}nS\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$.

Средняя энергия в расчете на одну вылетающую молекулу:

$$\left\langle\varepsilon\right\rangle_{\mathrm{ex}} = \frac{E_{\mathrm{ex}}}{N_{\mathrm{ex}}} = \frac{\sqrt{\frac{2(kT)^3}{\pi m}}}{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}} = 2kT.$$

2) Поскольку уносимая каждой вылетевшей молекулой средняя энергия $\langle\varepsilon\rangle_{\text{ex}} = 2kT$ превышает среднюю энергию молекул в сосуде $\langle\varepsilon\rangle_{\text{in}} = \frac{3}{2}kT$, то по мере вылета молекул температура газа в сосуде понижается.

2.55. $T(\tau) = \dfrac{T_0}{\left(1+\alpha\sqrt{T_0}\,\tau\right)^2}$, $T(t = 1\text{ час}) \approx 299{,}9$ К.

Решение. Запишем уравнение энергетического баланса для молекул газа в некоторый момент времени t и через время $\mathrm{d}t$, за которое сосуд покинули $\mathrm{d}N$ молекул, в результате чего температура газа в сосуде изменилась на величину $\mathrm{d}T$. Учитывая, что средняя энергия одной молекулы в сосуде $\langle\varepsilon\rangle_{\text{in}} = \frac{3}{2}kT$, а уносимая каждой вылетевшей молекулой средняя энергия $\langle\varepsilon\rangle_{\text{ex}} = 2kT$, получаем:

$$\frac{3}{2}kTN = \frac{3}{2}k(T+\mathrm{d}T)(N-\mathrm{d}N) + 2kT\mathrm{d}N\,,$$

где N – число молекул в сосуде в момент времени t.

Пренебрегая слагаемым второго порядка малости $\mathrm{d}T\mathrm{d}N$, находим: $\frac{3}{2}N\mathrm{d}T = -\frac{1}{2}T\mathrm{d}N$. Поскольку число молекул, покидающих сосуд за время $\mathrm{d}t$, равно $\mathrm{d}N = N_{\text{ex}}\mathrm{d}t$, а $N_{\text{ex}} = \frac{1}{4}n\langle\upsilon\rangle S =$ $= \frac{1}{4}\cdot\frac{N}{V}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}S$, получаем:

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{S}{V}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}\mathrm{d}t = 3\frac{\mathrm{d}T}{T}\,.$$

Разделяя переменные и интегрируя полученное уравнение, находим:

$$3\int\limits_{T_0}^{T}\frac{\mathrm{d}T}{T^{3/2}} = -6\alpha\int\limits_{0}^{t}\mathrm{d}t \;\rightarrow\; -6\left(\frac{1}{\sqrt{T}} - \frac{1}{\sqrt{T_0}}\right) = -6\alpha t\,,$$

где $\frac{S}{V}\sqrt{\frac{k}{2\pi m}} = 6\alpha$ – постоянная для данного сосуда величина.

Отсюда находим температуру газа через время τ:

$$T(\tau) = \frac{T_0}{\left(1 + \alpha\sqrt{T_0}\,\tau\right)^2}.$$

Для $V = 1$ м^3 азота (молярная масса $\mu = 28\cdot10^{-3}$ кг/моль) при $T_0 = 300$ К и $S = 0{,}01$ мм^2 $\alpha = \frac{1}{6}\cdot\frac{S}{V}\sqrt{\frac{R}{2\pi\mu}} \approx 1{,}15\cdot10^{-8}$ с$^{-1}$К$^{-1/2}$. Поэтому через время $\tau = 1$ час $= 3600$ с температура газа будет равна $T(\tau = 1\text{ час}) \approx 299{,}9$ К.

2.56. $n = n_0\exp\left(-\frac{S}{4V}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}t\right)$.

Решение. Будем считать, что распределение скоростей остается максвелловским. За время dt из сосуда вылетит

$$\mathrm{d}N = \mathrm{d}(nV) = -\frac{1}{4}Sn\langle v\rangle\mathrm{d}t \text{ молекул},$$

где n – средняя концентрация молекул в сосуде непосредственно перед вылетом dN молекул, $\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ – средняя скорость молекул в сосуде.

Разделяя переменные, получаем уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}n}{n} = -\frac{S}{4V}\langle v\rangle\mathrm{d}t,$$

решая которое находим:

$$n = n_0\exp\left(-\frac{S\langle v\rangle}{4V}t\right) = n_0\exp\left(-\frac{S}{4V}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}t\right).$$

2.57. $t_0 = \frac{4V}{S}\sqrt{\frac{\pi\mu}{8RT}}\ln(5/4)$.

Решение. Будем считать, что истечение газа происходит настолько медленно, что распределение скоростей остается максвел-

ловским. С течением времени концентрация молекул газа в сосуде меняется по закону (см. решение задачи 2.56):

$n = n_0 \exp\left(-\frac{S\langle v\rangle}{4V}t\right) = n_0 e^{-t/\tau}$, где n_0 – начальная концентрация молекул в сосуде, $\tau = \frac{4V}{S\langle v\rangle}$, $\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$.

Поскольку по условию задачи $p = nkT$ и $T = \text{const}$, давление в сосуде меняется с течением времени по закону: $p = p_0 e^{-t/\tau}$, где $p_0 = n_0 kT$ – начальное давление.

Когда давление газа в сосуде уменьшится на $\alpha = 20\%$, оно станет $p = 0{,}8p_0$.

$$0{,}8p_0 = p_0 e^{-t_0/\tau},$$

откуда получаем:

$$t_0 = \tau \ln\frac{5}{4} = \frac{4V}{S\langle v\rangle}\ln(5/4) = \frac{4V}{S}\sqrt{\frac{\pi\mu}{8RT}}\ln(5/4).$$

2.58. $\frac{n_1}{n_2} = \alpha \exp\left[\frac{S}{4V}\sqrt{\frac{8RT}{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_2}} - \frac{1}{\sqrt{\mu_1}}\right)t\right]$.

Решение. Для каждого из газов с течением времени концентрация молекул меняется по закону: $n_i = n_{0i} e^{-t/\tau_i}$, где n_{0i} – начальная концентрация молекул газа в сосуде, $\tau_i = \frac{4V}{S\langle v_i\rangle}$, $\langle v_i\rangle = \sqrt{8RT/\pi\mu_i}$.

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{n_{01}}{n_{02}} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{S}{4V}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu_1}}t\right)}{\exp\left(-\frac{S}{4V}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu_2}}t\right)} = \alpha \exp\left[\frac{S}{4V}\sqrt{\frac{8RT}{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_2}} - \frac{1}{\sqrt{\mu_1}}\right)t\right].$$

2.59. $N = n_0 V\left[1 - \exp\left(-\frac{S}{4V}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\right)t_0\right]$.

Решение. За единицу времени через отверстие площадью S в вакуум вылетает $N_{ex} = \frac{1}{4} n \langle v \rangle S$ молекул, где концентрация молекул в сосуде $n = n_0 e^{-t/\tau}$, $\tau = \frac{4V}{S\langle v \rangle}$, $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$.

Число молекул, покинувших сосуд за время t_0, равно

$$N = \frac{1}{4}\langle v \rangle S \int_0^{t_0} n_0 e^{-t/\tau} \mathrm{d}t = n_0 V \left[1 - \exp\left(-\frac{S}{4V} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \right) t_0 \right].$$

2.60. $p' \approx 0{,}46 p_0$.

Решение. Давление в сосуде с водородом меняется с течением времени по закону: $p = p_0 e^{-t/\tau_{H_2}}$, где $\tau = \frac{4V}{S\langle v_{H_2} \rangle}$, $\langle v_{H_2} \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu_{H_2}}}$. Когда давление газа в сосуде понизится до $p_0/3$, $p_0/3 = p_0 e^{-t/\tau}$, откуда:

$$t = \tau \ln 3 = \frac{4V}{S\langle v_{H_2} \rangle} \ln 3 = \frac{4V}{S} \sqrt{\frac{\pi\mu_{H_2}}{8RT}} \ln 3 .$$

Если бы в сосуде был гелий, то давление в нем через то же время t было бы равно

$$p' = p_0 e^{-t/\tau_{He}} = p_0 \exp\left(-\frac{St}{4V} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu_{He}}} \right) = p_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\mu_{H_2}}{\mu_{He}}} \ln 3 \right) = \frac{p_0}{3^{1/\sqrt{2}}} \approx$$

$\approx 0{,}46 p_0$ с учетом того, что $\mu_{H_2}/\mu_{He} = 2/4 = 1/2$.

2.61. $\mu = \left(\frac{S\,\Delta t}{4V \ln(0{,}9)} \right)^2 \cdot \frac{8RT}{\pi}$.

Решение. Число молекул, покинувших сосуд за время наблюдения Δt

$$N = \frac{1}{4}\langle v \rangle S \int_0^{\Delta t} n_0 e^{-t/\tau} \mathrm{d}t = n_0 V \left[1 - \exp\left(-\frac{S}{4V} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \right) \Delta t \right],$$

где n_0 –начальная концентрация молекул в сосуде $\tau = \dfrac{4V}{S\langle v\rangle}$, $\langle v\rangle = \sqrt{8RT/\pi\mu}$.

Следовательно, уменьшение массы газа в сосуде составить $\Delta M = 0{,}1M_0 = M_0\left[1 - \exp\left(-\dfrac{S}{4V}\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}\right)\Delta t\right]$, откуда

$$\mu = \left(\frac{S\,\Delta t}{4V\ln(0{,}9)}\right)^2 \cdot \frac{8RT}{\pi}.$$

2.62. $Q = \dfrac{1}{8}n_0\langle v\rangle SkT\,\exp\left(-\dfrac{S\langle v\rangle}{4V}t\right)$, где $\langle v\rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$.

Решение. За единицу времени через отверстие площадью S в вакуум вылетает $N_{\text{ex}} = \dfrac{1}{4}n\langle v\rangle S$ молекул. При этом каждая из них уносит из объема в среднем энергию $\langle\varepsilon\rangle_{\text{ex}} = 2kT$, в то время как средняя энергия частиц в объеме $\langle\varepsilon\rangle_{\text{in}} = 3kT/2$ (см. решение задачи 2.61).

Чтобы компенсировать потери энергии за единицу времени

$$\Delta E = N_{\text{ex}}(\langle\varepsilon\rangle_{\text{ex}} - \langle\varepsilon\rangle_{\text{in}}) = N_{\text{ex}}kT/2,$$

необходимо каждую секунду подводить к объему такое же количество теплоты Q:

$$Q = \Delta E = \frac{1}{4}n\langle v\rangle S\cdot\frac{1}{2}kT = \frac{1}{8}n\langle v\rangle SkT.$$

Концентрация n молекул в сосуде меняется по закону (см. решение задачи 2.57):

$$n = n_0\exp\left(-\frac{S\langle v\rangle}{4V}t\right) = n_0e^{-t/\tau},\ \text{где}\ \tau = \frac{4V}{S\langle v\rangle}.$$

Поэтому $Q = \dfrac{1}{8}n_0\langle v\rangle SkT\,\exp\left(-\dfrac{S\langle v\rangle}{4V}t\right)$, где $\langle v\rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$.

2.63. $p = p_0\left[1 - \exp\left(-\frac{S}{4V}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}t\right)\right]$.

Решение. Извне в баллон через отверстие будут проникать молекулы идеального газа, число которых за единицу времени равно $N_{\text{in}} = \frac{1}{4}n_0\langle v\rangle S$. За счет столкновений молекул в баллоне с его стенками и между собой внутри баллона установится максвелловское распределение скоростей. В свою очередь, часть молекул будет вылетать из баллона. За время dt вылетит

$$\mathrm{d}N = \mathrm{d}(nV) = -\frac{1}{4}Sn\langle v\rangle \mathrm{d}t \text{ молекул,}$$

где n – средняя концентрация молекул в баллоне непосредственно перед вылетом dN молекул, $\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$.

Уравнение баланса числа частиц за время dt имеет вид:

$$\mathrm{d}(nV) = \frac{1}{4}Sn_0\langle v\rangle \mathrm{d}t - \frac{1}{4}Sn\langle v\rangle \mathrm{d}t\,.$$

Разделяя переменные, получаем уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}n}{n - n_0} = -\frac{S}{4V}\langle v\rangle \mathrm{d}t\,,$$

откуда находим:

$$n = n_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \text{ где } \tau = \frac{4V}{S\langle v\rangle}.$$

Так как по условию задачи $p = nkT$ и $T = \text{const}$,

$$p = p_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = p_0\left[1 - \exp\left(-\frac{S}{4V}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}t\right)\right].$$

2.64. а) $\Delta t \approx 8,6$ с; б) $\Delta t = 9,8$ час.

Решение. Давление в сосуде меняется по закону: $p = p_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$, где $\tau = \frac{4V}{S\langle v\rangle}$, $\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$, t – время, отсчитываемое от начала натекания воздуха в сосуд.

а) $p_1 = p_0\left(1 - e^{-t_1/\tau}\right)$; $p_2 = p_0\left(1 - e^{-t_2/\tau}\right)$, откуда $\Delta t = t_2 - t_1 =$

$$= \tau \ln\frac{p_0 - p_1}{p_0 - p_2} \approx \tau \ln\left(1 + \frac{p_2 - p_1}{p_0 - p_2}\right) \approx \frac{4V}{S}\sqrt{\frac{\pi\mu}{8RT}} \cdot \frac{p_2 - p_1}{p_0} \approx 8{,}6 \text{ с};$$

б) $p_0/3 = p_0\left(1 - e^{-\Delta t/\tau}\right)$, откуда $\Delta t = -\tau \ln\dfrac{(2/3)p_0}{p_0} =$

$$= \frac{4V}{S}\sqrt{\frac{\pi\mu}{8RT}}\ln\frac{3}{2} \approx 3{,}5 \cdot 10^4 \text{ с} = 9{,}8 \text{ час}.$$

2.65. $\dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{n_{01}}{n_{02}} \cdot \dfrac{1 - e^{-t/\tau_1}}{1 - e^{-t/\tau_2}} = \alpha \cdot \dfrac{1 - e^{-t/\tau_1}}{1 - e^{-t/\tau_2}}$, где $\tau_{1,2} = \dfrac{4V}{S\left\langle v_{1,2}\right\rangle}$,

$\left\langle v_{1,2}\right\rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu_{1,2}}}$.

2.66. Время уменьшилось бы на ~7%.

Решение. Пусть сосуд находится в атмосфере кислорода. Давление в сосуде меняется со временем по закону: $p = p_0\left(1 - e^{-t_1/\tau_{O_2}}\right)$, где $\tau = \dfrac{4V}{S\left\langle v_{O_2}\right\rangle}$, $\left\langle v\right\rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$. Когда давление станет равным $p_0/2$, будет выполняться условие: $p_0/2 = p_0\left(1 - e^{-t_1/\tau_{O_2}}\right)$, откуда находим время, за которое будет достигнуто это давление:

$$t_1 = \tau_{O_2}\ln 2 = \frac{4V}{S}\sqrt{\frac{\pi\mu_{O_2}}{8RT}}\ln 2.$$

Рассуждая аналогично, получим время, через которое в сосуде будет давление $p_0/2$, если сосуд находится в атмосфере азота:

$$t_2 = \tau_{N_2}\ln 2 = \frac{4V}{S}\sqrt{\frac{\pi\mu_{N_2}}{8RT}}\ln 2.$$

Отношение времен составляет: $t_1/t_2 = \sqrt{\mu_{O_2}/\mu_{N_2}} = \sqrt{32/28} \approx 1{,}07$, то есть время уменьшилось бы на ~7%.

2.67. $\dfrac{p_1}{p_2}=\dfrac{1+\dfrac{1}{2}\left(e^{-\frac{S\langle v_1\rangle}{2V}t}-e^{-\frac{S\langle v_2\rangle}{2V}t}\right)}{1+\dfrac{1}{2}\left(e^{-\frac{S\langle v_2\rangle}{2V}t}-e^{-\frac{S\langle v_1\rangle}{2V}t}\right)}$, где $\langle v_i\rangle=\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu_i}}$.

Решение. Для водорода (газ 1):

$\dfrac{\mathrm{d}N_1^{(1)}}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{S}{V}\langle v_1\rangle\left(N_1^{(1)}-N_1^{(2)}\right)$ – для 1-й половины сосуда;

$\dfrac{\mathrm{d}N_1^{(2)}}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{S}{V}\langle v_1\rangle\left(N_1^{(2)}-N_1^{(1)}\right)$ – для 2-й половины сосуда.

Так как $N_1^{(1)}+N_1^{(2)}=N_1=\mathrm{const}$, первое уравнение перепишется в виде:

$$\frac{\mathrm{d}N_1^{(1)}}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{S}{V}\langle v_1\rangle\left(N_1^{(1)}-\frac{N_1}{2}\right).$$

Разделяем переменные в получившемся уравнении и интегрируем с учетом начальных условий (при $t=0\quad N_1^{(1)}=N_1$:

$$\int\limits_{N_1}^{N_1^{(1)}}\frac{\mathrm{d}N_1^{(1)}}{N_1^{(1)}-N_1/2}=-\frac{S\langle v_1\rangle}{2V}\int\limits_0^t\mathrm{d}t,\ \text{откуда}\quad N_1^{(1)}=\frac{N_1}{2}\left(1+e^{-\frac{S\langle v_1\rangle}{2V}t}\right)$$

и $N_1^{(2)}=\dfrac{N_1}{2}\left(1-e^{-\frac{S\langle v_1\rangle}{2V}t}\right)$.

Аналогично для гелия (газ 2) :

$$N_2^{(1)}=\frac{N_2}{2}\left(1-e^{-\frac{S\langle v_2\rangle}{2V}t}\right)\ \text{и}\ N_1^{(2)}=\frac{N_2}{2}\left(1+e^{-\frac{S\langle v_2\rangle}{2V}t}\right).$$

Так как начальные давления газа в половинах сосуда одинаковы ($p_{01}=p_{20}=p$), то N_1=N_2=N ($p=nkT=\dfrac{N}{V}kT$). Тогда давления в первой (p_1) и во второй (p_2) частях сосуда будут равны:

$$p_1=\frac{1}{V}\left(N_1^{(1)}+N_2^{(1)}\right)kT=p\left[1+\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{S\langle v_1\rangle}{2V}t}\right)-e^{-\frac{S\langle v_2\rangle}{2V}t}\right],$$

$$p_{21} = \frac{1}{V}\left(N_1^{(2)} + N_2^{(2)}\right)kT = p\left[1 + \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{S\langle v_2\rangle}{2V}t}\right) - e^{-\frac{S\langle v_1\rangle}{2V}t}\right].$$

Отношение давлений в половинах сосуда со временем будет меняться по закону:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1 + \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{S\langle v_1\rangle}{2V}t} - e^{-\frac{S\langle v_2\rangle}{2V}t}\right)}{1 + \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{S\langle v_2\rangle}{2V}t} - e^{-\frac{S\langle v_1\rangle}{2V}t}\right)},$$

где $\langle v_i\rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu_i}}$.

§3. Закон Дальтона

3.1. $p = 2{,}49\cdot10^6$ Па, $\mu = 3\cdot10^{-3}$ кг/моль.

Решение. По закону Менделеева–Клайперона парциальные давления гелия p_1 и водорода p_2 равны

$$p_1 = \frac{m_1RT}{\mu_1V},\ p_2 = \frac{m_2RT}{\mu_2V}.$$

По закону Дальтона давление смеси газов:

$$p = p_1 + p_2 = \frac{RT}{V}\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right) = 2{,}49\cdot10^6 \text{ Па}.$$

Из уравнения Менделеева–Клапейрона для смеси газов: $p = (m_1 + m_2)RT/(\mu V)$, откуда молярная масса смеси газов равна

$$\mu = \frac{(m_1 + m_2)RT}{pV} = \frac{m_1 + m_2}{m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2} = 3\cdot10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

3.2. $\mu = \dfrac{m_1 + m_2}{m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2} = 30\cdot10^{-3}$ кг/моль.

3.3. $p = (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)\dfrac{RT}{V}$; $\mu = \dfrac{\mu_1\nu_1 + \mu_2\nu_2 + \mu_3\nu_3}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}$

3.4. $p \approx 0{,}64 \cdot 10^5$ Па.

Решение. Масса *i*-го газа равна $m_i = \mu_i p_i V_i/(RT)$, его парциальное давление в смеси газов

$$p_{i\,\text{парц}} = \frac{m_i RT}{(\mu_i \cdot \sum_{i=1}^{3} V_i)}.$$

По закону Дальтона давление в смеси газов равно $p = \sum_{i=1}^{3} p_{i\,\text{парц}} =$

$$= \frac{RT \cdot \sum m_i}{(\sum \mu_i)\cdot(\sum V_i)} = \frac{(\mu_1 p_1 V_1 + \mu_2 p_2 V_2 + \mu_3 p_3 V_3)}{(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)(V_1 + V_2 + V_3)} \approx 0{,}64 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

3.5. $\rho = p_0 \dfrac{m_1 + m_2}{RT\,(m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2)} \approx 0{,}52$ кг/м^3.

3.6. $\dfrac{n_2}{n_1} \approx 4{,}3.$

Решение. Плотность смеси равна $\rho = p_0\mu/(RT)$, где молярная масса смеси газов $\mu = \dfrac{m_1 + m_2}{m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2} = \dfrac{\mu_1\nu_1 + \mu_2\nu_2}{\nu_1 + \nu_2}$ (μ_1, ν_1 – молярная масса и количество молей гелия, μ_2, ν_2 – аргона). Получаем уравнение: $\rho = \dfrac{p_0}{RT} \cdot \dfrac{\mu_1 + \mu_2 \cdot (\nu_2/\nu_1)}{(1 + \nu_2/\nu_1)}$, откуда находим отношение числа молей аргона в смеси к числу молей гелия, равное отношению их концентраций в смеси:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{1 - p_0\mu_1/(\rho RT)}{p_0\mu_2/(\rho RT) - 1} \approx 4{,}3.$$

3.7. $v \approx 1{,}42 \dfrac{\text{м}^3}{\text{кг}}$.

Решение. Давление смеси газов равно сумме парциальных давлений компонент, масса которых равна $m_i = 0{,}01\alpha_i$:

$$p = \frac{0{,}01(\alpha_1/\mu_1 + \alpha_2/\mu_2 + \alpha_3/\mu_3)mRT}{V},$$

откуда удельный объем равен

$$\upsilon = \frac{V}{m} = \frac{0{,}01(\alpha_1/\mu_1 + \alpha_2/\mu_2 + \alpha_3/\mu_3)RT}{p} \approx 1{,}42\ \frac{\text{м}^3}{\text{кг}}.$$

3.8. $\dfrac{p_2}{p_1} = \dfrac{m + \nu\mu_{N_2}}{m}$.

Решение. Начальное давление было равно $p_1 = \left(m/\mu_{N_2}\right)\cdot\left(RT/V\right)$. После добавления водорода давление стало равным

$$p_2 = p_{N_2\text{парц}} + p_{H_2\text{парц}} = \frac{m}{\mu_{N_2}}\cdot\frac{RT}{V} + \nu\frac{RT}{V}.$$

Относительное изменение давления:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{m/\mu_{N_2} + \nu}{m/\mu_{N_2}} = \frac{m + \nu\mu_{N_2}}{m}.$$

3.9. $p = \left[\left(N_1 + N_2\right)k + mR/\mu_{Ar}\right]T/V \approx 1{,}13\cdot 10^5$ Па.

3.10. $m_{H_2}/m_{He} \approx 1{,}5$.

Решение. По закону Дальтона давление в сосуде равно

$$p = \frac{RT}{V}\left(\frac{m_{H_2}}{\mu_{H_2}} + \frac{m_{He}}{\mu_{He}}\right), \text{ причем } m = m_{H_2} + m_{He}.$$

Отсюда находим массы компонент смеси:

$$m_{H_2} = \frac{\mu_{H_2}}{\mu_{He} - \mu_{H_2}}\left(\frac{pV\mu_{He}}{RT} - m\right);\ m_{He} = \frac{\mu_{He}}{\mu_{He} - \mu_{H_2}}\left(m - \frac{pV\mu_{H_2}}{RT}\right).$$

Отношение массы водорода к массе гелия в смеси равно

$$\frac{m_{H_2}}{m_{He}} = \frac{1 - \dfrac{mRT}{pV\mu_{He}}}{\dfrac{mRT}{pV\mu_{H_2}} - 1} \approx 1{,}5.$$

3.11. $\nu_{H_2} = \dfrac{1}{\mu_{O_2} - \mu_{H_2}}\left(\dfrac{pV\mu_{O_2}}{RT} - m\right) = 6{,}3$;

$$m_{O_2} = \frac{1}{\mu_{O_2} - \mu_{H_2}}\left(m - \frac{pV\mu_{H_2}}{RT}\right) = 1{,}5\,.$$

3.12. $p_2 = \dfrac{\mu_{O_2}}{\mu_{O_2} - \mu_{N_2}}\left(\dfrac{p_1V_1}{V_2T_1} - \dfrac{mR}{\mu_{O_2}V_2}\right)T_2$.

Решение. Применяя закон Дальтона, находим давление в первом баллоне:

$$p_1 = \frac{RT_1}{V_1}\left(\frac{m_{N_2}}{\mu_{N_2}} + \frac{m_{O_2}}{\mu_{O_2}}\right), \text{ причем } m = m_{N_2} + m_{O_2}\,.$$

Из двух уравнений определяем массу азота в смеси:

$$m_{N_2} = \frac{\mu_{N_2}\mu_{O_2}}{\mu_{O_2} - \mu_{N_2}}\left(\frac{p_1V_1}{RT_1} - \frac{m}{\mu_{O_2}}\right).$$

Когда весь кислород соединится с медью, во втором баллоне будет только азот, давление которого равно

$$p_2 = \frac{m_{N_2}RT_2}{\mu_{N_2}V_2} = \frac{\mu_{O_2}}{\mu_{O_2} - \mu_{N_2}}\left(\frac{p_1V_1}{V_2T_1} - \frac{mR}{\mu_{O_2}V_2}\right)T_2\,.$$

3.13. $p_{H_2O} = \dfrac{p\mu_{возд} - \rho RT}{\mu_{возд} - \mu_{H_2O}}$.

3.14. $\rho = \dfrac{p\cdot\left(\sum m_i\right)}{RT\cdot\sum\left(m_i/\mu_i\right)}$; $n = \dfrac{p}{kT}$.

3.15. $m_1 = 0{,}064$ мг, $m_2 = 0{,}064$ мг.

Решение. Давление в лазерной трубке определяется количеством молей гелия ν_1 и неона ν_2 в смеси и по закону Дальтона равно

$$p_0 = \frac{RT}{V_0}(\nu_1 + \nu_2),$$

причем число молей гелия должно в n раз превышать число молей неона: $\nu_1 = n\nu_2$. Из этих уравнений находим число молей каждого из газов в трубке:

$$\nu_1 = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{p_0V_0}{RT};\quad \nu_2 = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{p_0V_0}{RT}.$$

Массы гелия m_1 и неона m_2 соответственно равны

$$m_1 = \mu_1\nu_1 = \frac{\mu_1 n}{n+1}\cdot\frac{p_0V_0}{RT} = 0{,}064 \text{ мг},$$

$$m_2 = \mu_2\nu_2 = \frac{\mu_2}{n+1}\cdot\frac{p_0V_0}{RT} = 0{,}064 \text{ мг}.$$

3.16. $p = \dfrac{T_1T_2}{V_1+V_2}\cdot\dfrac{p_1V_1\mu_1 + p_2V_2\mu_2}{p_1V_1\mu_1T_2 + p_2V_2\mu_2T_1}\cdot\left(\dfrac{p_1V_1}{T_1} + \dfrac{p_2V_2}{T_2}\right).$

Решение. Так как баллоны теплоизолированы, установившуюся температуру T находим из условия теплового баланса:

$$cm_1(T - T_1) + cm_2(T - T_2) = 0,$$

где c – одинаковые для обоих газов удельные теплоемкости. Отсюда

$$T = \frac{m_1T_1 + m_2T_2}{m_1 + m_2} = T_1T_2\,\frac{p_1V_1\mu_1 + p_2V_2\mu_2}{p_1V_1\mu_1T_2 + p_2V_2\mu_2T_1}.$$

Давление в соединенных сосудах окажется равным

$$p = \frac{RT}{V_1+V_2}\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right) = \frac{T_1T_2}{V_1+V_2}\cdot\frac{p_1V_1\mu_1 + p_2V_2\mu_2}{p_1V_1\mu_1T_2 + p_2V_2\mu_2T_1}\cdot\left(\frac{p_1V_1}{T_1} + \frac{p_2V_2}{T_2}\right).$$

3.17. $p = \dfrac{(1-\alpha)/\mu_1 + \alpha/\mu_2}{V}mRT = \dfrac{1+\alpha}{\mu_1 V}mRT \approx 7{,}8\cdot10^4 \text{ Па},$

где μ_1 – молярная масса молекулярного водорода, $\mu_2 = \mu_1/2$ – атомарного.

3.18. $\alpha = 0{,}2$.

Решение. После диссоциации αN молекул газа (N – полное число молекул до диссоциации) число молекул в сосуде: $(1 - \alpha)N$

двухатомных и 2α*N* одноатомных. Используя законы Менделеева–Клапейрона и Дальтона для начального и конечного состояний газа, можно записать:

$$p_0V = NkT_0\,;\ p_1V = \left[(1-\alpha)N + 2\alpha N\right]kT_1\,.$$

Деля почленно второе уравнение на первое, получаем: $1+\alpha = \dfrac{p_1T_0}{p_0T_1} = \dfrac{k}{n}$, откуда $\alpha = k/n - 1 = 0{,}2$.

3.19. $p_2 = \dfrac{p_1T_2\left(\nu_1 + 2\nu_2\right)}{T_1\left(\nu_1 + \nu_2\right)}$.

3.20. $p_2 = p_1\dfrac{(1+\beta)\,n}{1+\alpha}$.

Решение. Пусть первоначальное количество двухатомных молекул в сосуде равно *N*, а начальная температура газа *T*. При этой температуре в сосуде будут находиться (1 – α)*N* двухатомных молекул и 2α*N* одноатомных. По закону Дальтона давление в сосуде при этом равно (см. решение задачи 3.17): $p_1 = (1+\alpha)mRT/(\mu_1V)$, где μ_1 – молярная масса молекулярного водорода, *m* – суммарная масса газа.

Аналогично, при температуре *nT*, когда диссоциировала часть β молекул, давление в сосуде равно $p_2 = (1+\beta)mRnT/(\mu_1V)$.

Деля почленно второе уравнение на первое, определяем новое давление в сосуде: $p_2 = p_1\dfrac{(1+\beta)\,n}{1+\alpha}$.

3.21. $m \geq \dfrac{p_0V\left(\mu_1 + \mu_2\right)}{2RT}$.

Решение. Поскольку парциальные давления газов равны, число молей метана и кислорода в смеси одинаково. Обозначим это число ν. Тогда масса смеси равна $m = \left(\mu_1 + \mu_2\right)\nu$.

Поскольку при температуре 100 °С начинается конденсация воды, давление получившейся смеси CO_2 и водяных паров в этот момент равно давлению насыщенных паров воды p_0. Из уравнения

Менделеева–Клапейрона находим число молей в смеси: $2\nu = p_0 V/RT$, откуда определяем массу смеси: $m \geq \dfrac{p_0 V(\mu_1 + \mu_2)}{2RT}$.

3.22. $\alpha = 16\%$.

Решение. Так как молярная масса N_2O_4 μ_1 в 2 раза больше молярной массы NO_2 μ_2, при диссоциации части α молекул N_2O_4 давление в сосуде будет равно

$$p = \frac{(1-\alpha)/\mu_1 + \alpha/\mu_2}{V} mRT = \frac{1+\alpha}{\mu_1 V} mRT,$$

откуда находим $\alpha = pV\mu_{N_2O_4}/(mRT) - 1 \approx 0{,}16 = 16\%$.

3.23. $\tau = \dfrac{V \ln \eta}{S\left(1/\sqrt{\mu_1} - 1/\sqrt{\mu_2}\right)} \sqrt{\dfrac{2\pi}{RT}}$.

Решение. За время dt число частиц каждого газа $N_i(t)$, находящегося в сосуде в момент времени t, убывает на величину $\mathrm{d}N_i = -\dfrac{N_i(t)}{4V}\langle v_i \rangle S\mathrm{d}t$. Разделяя переменные и интегрируя, получаем: $N_i(t) = N_0 \exp\left(-\dfrac{S\langle v_i \rangle}{4V} t\right)$, где N_0 – начальное число молекул каждого газа, $\langle v_i \rangle = \sqrt{8RT/(\pi\mu_i)}$ – средняя скорость молекул.

Так как давление и концентрация молекул связаны соотношением $p = nkT$, то через время τ число молекул второго газа будет в β раз больше, чем первого:

$$N_0 \exp\left(-\frac{S\langle v_2 \rangle}{4V}\tau\right) = \beta N_0 \exp\left(-\frac{S\langle v_1 \rangle}{4V}\tau\right),$$

откуда

$$\tau = \frac{4V \ln \eta}{S\left(\langle v_1 \rangle - \langle v_2 \rangle\right)} = \frac{V \ln \eta}{S\left(1/\sqrt{\mu_1} - 1/\sqrt{\mu_2}\right)} \sqrt{\frac{2\pi}{RT}}.$$

3.24. $T = \dfrac{2\pi\mu_{\mathrm{He}}}{R}\left[\dfrac{V\ln\eta}{S\tau(\sqrt{2}-1)}\right]^2$.

Решение. Время τ равно (см. решение задачи 3.23)

$$\tau = \frac{4V\ln\eta}{S\left(\langle v_1\rangle - \langle v_2\rangle\right)} = \frac{V\ln\eta}{S\left(1/\sqrt{\mu_1} - 1/\sqrt{\mu_2}\right)}\sqrt{\frac{2\pi}{RT}},$$

откуда находим температуру смеси:

$$T = \frac{2\pi}{R}\left[\frac{V\ln\eta}{S\tau\left[1/\sqrt{\mu_{\mathrm{H}}} - 1/\sqrt{\mu_{\mathrm{He}}}\right]}\right]^2 = \frac{2\pi\mu_{\mathrm{He}}}{R}\left[\frac{V\ln\eta}{S\tau(\sqrt{2}-1)}\right]^2.$$

3.25. $\mu_x = 20$ г/моль.

Решение. Баллон разрывается, когда давление газа превышает некоторое предельно допустимое значение p_0. Поэтому давление кислорода в баллоне в момент его разрыва:

$$p_0 = \frac{m}{\mu_{\mathrm{N_2}}}\cdot\frac{RT_1}{V}.$$

Когда разрывается баллон, содержащий смесь кислорода и неизвестного газа, давление смеси в нем достигает такого же значения p_0. Используя закон Дальтона, находим давление смеси газов в момент разрыва баллона:

$$p_0 = \left(\frac{m/3}{\mu_{\mathrm{N_2}}} + \frac{m/2}{\mu_{\mathrm{x}}}\right)\frac{RT_2}{V}.$$

Подставляя найденное ранее значение p_0, получаем:

$\dfrac{mRT_1}{\mu_{\mathrm{N_2}}V} = \left(\dfrac{m/3}{\mu_{\mathrm{N_2}}} + \dfrac{m/2}{\mu_{\mathrm{x}}}\right)\dfrac{RT_2}{V}$, откуда находим молярную массу неизвестного газа: $\mu_x = \dfrac{3\mu_{\mathrm{N_2}}T_2}{2\,(3T_1 - T_2)} = 20$ г/моль. Следовательно, неизвестный газ – неон.

§4. Распределение энергии по степеням свободы. Броуновское движение

4.1. $\langle \varepsilon_{\text{п}} \rangle = 3kT/2 = 6{,}2 \cdot 10^{-21}$ Дж .

4.2. $\langle \varepsilon_{\text{п}} \rangle = \dfrac{3kT}{2} = 9{,}32 \cdot 10^{-20}$Дж ; $\langle \varepsilon_{\text{вр}} \rangle = \langle \varepsilon_{\text{кол}} \rangle = kT =$ $= 6{,}21 \cdot 10^{-20}$Дж .

4.3. $n \approx 18{,}7$ раз.

Решение. При $T_1 = 300$ К у молекулы кислорода возбуждено 3 поступательных и 2 вращательных степени свободы. Энергия молекулы при этом равна $\langle \varepsilon_1 \rangle = 5kT_1/2$. При $T_2 = 4000$ К к ним добавляется 1 колебательная степень свободы, и энергия молекулы становится равной $\langle \varepsilon_2 \rangle = 7kT_2/2$. Средняя энергия молекулы увеличится в $n = \dfrac{(7/2)T_2}{(5/2)T_1} \approx 18{,}7$ раз.

4.4 $\langle E \rangle = 5pV/2 = 1500$ Дж $= 1{,}5$ кДж ; $\langle E_{\text{пост}} \rangle = 0{,}6\langle E \rangle$.

4.5. $\langle E \rangle = \langle \varepsilon \rangle N = kT \cdot nV = pV = 200$ Дж .

4.6. а) $\langle E \rangle = \dfrac{5}{2} kTn\upsilon = \dfrac{5}{2} p\upsilon = 0{,}25$ Дж , где n – концентрация молекул; б) $\langle E \rangle = \dfrac{5}{2} kT\nu N_{\text{A}} = \dfrac{5}{2} RT \cdot \dfrac{M}{\mu} = 2{,}02 \cdot 10^5$ Дж , где ν – число молей, соответствующих 1 кг газа.

4.7. $n = \dfrac{3p}{2\langle \varepsilon \rangle} = 5{,}4 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

4.8. $\langle E \rangle = \dfrac{5pM}{2\rho} = 25$ кДж .

4.9. $w \approx 3{,}8 \cdot 10^4$Дж/м^3.

Решение. Плотность смеси $\rho = m_1 n_1 + m_2 n_2$, где m_1, m_2 – массы молекул азота и водорода соответственно, а n_1, n_2 – концентрации азота и водорода в смеси газов.

Давление смеси равно $p = (n_1 + n_2)kT$. Из этих двух уравнений определяем концентрацию азота в смеси

$$n_1 = \frac{p/(kT) - \rho/m_2}{1 - m_1/m_2}.$$

При указанной температуре у молекул азота 5 степеней свободы, поэтому их средняя тепловая энергия $\langle\varepsilon\rangle = 5kT/2$. Объемная плотность кинетической энергии молекул азота равна:

$$w = \frac{5}{2} n_1 kT = \frac{5}{2} \frac{p - \rho RT/\mu_2}{1 - \mu_1/\mu_2} \approx 3{,}8 \cdot 10^4 \text{ Дж/м}^3,$$

где $\mu_1 = m_1 N_A$ и $\mu_2 = m_2 N_A$ – молярные массы азота и водорода.

4.10. $\langle\varepsilon\rangle = 5{,}5 \cdot 10^{-21}$ Дж.

Решение. Энергия направленного движения молекул вместе с сосудом перейдет в энергию их теплового движения, в результате температура газа повысится на ΔT: $\frac{mv^2}{2} = \frac{i}{2} k\Delta T$, откуда $\Delta T = mv^2/ik$, где $m = \mu/N_A$ – масса одной молекулы, $i = 5$ – число степеней свободы молекулы кислорода. Температура газа в сосуде $T_1 = T_0 + \Delta T = T_0 + mv^2/ik$ невысока, а средняя энергия поступательного движения молекул (на них приходится 3 степени свободы) будет равна

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{3}{2} kT_1 = \frac{3}{2} kT_0 + \frac{3\mu v^2}{2iN_A} = 5{,}5 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}.$$

4.11. а) 3 поступательных степени свободы; б) 3 поступательных и 2 вращательных; в) 3 поступательных и 3 вращательных; г) 3 поступательных, 2 вращательных и 1 колебательная; д) 3 поступательных, 3 вращательных и 3 колебательных.

Решение. В состоянии термодинамического равновесия средняя энергия в расчете на каждую поступательную и вращательную степени свободы, равна $kT/2$, а в расчете на колебательную степень

свободы - *kT*. У любой молекулы всегда 3 поступательные степени свободы, вращательных может быть 0 (одноатомные молекулы), 2 (двухатомные и линейные трехатомные молекулы) и 3 (объемные трехатомные и многоатомные молекулы).

В соответствии с этим получаем: а) 3 поступательных степени свободы; б) 3 поступательных и 2 вращательных; в) 3 поступательных и 3 вращательных; г) 3 поступательных, 2 вращательных и 1 колебательная; д) 3 поступательных, 3 вращательных и 3 колебательных.

4.12. $\langle E \rangle = 74{,}7$ кДж.

Решение. Для объемных молекул, состоящих из *N* атомов, количество колебательных степеней свободы определяется формулой: $i_{\text{кол}} = 3N - 6 = 3 \cdot 4 - 6 = 6$. Средняя кинетическая энергия одной молекулы $\langle \varepsilon \rangle = 3 \cdot (kT/2) + 3 \cdot (kT/2) + 6kT = 9kT$.

Суммарная кинетическая энергия молекул одного моля: $\langle E \rangle = N_{\text{A}} \langle \varepsilon \rangle = 9RT = 74{,}7$ кДж.

4.13. $N = 4$.

Решение. Средняя энергия в расчете на каждую поступательную и вращательную степень свободы, равна *kT*/2, а на колебательную степень свободы – *kT*. Если у молекулы ″заморожены″ колебательные степени свободы, то средняя энергия равна $\langle \varepsilon_1 \rangle = 3kT$ (для объемных молекул). При возбуждении колебательных степеней свободы средняя энергия молекулы становится равной $\langle \varepsilon_2 \rangle = (3 + i_{\text{кол}})kT$.

По условию задачи: $\dfrac{\langle \varepsilon_2 \rangle}{\langle \varepsilon_1 \rangle} = \dfrac{(3 + i_{\text{кол}})kT}{3kT} = 1 + \dfrac{i_{\text{кол}}}{3} = 3$, откуда $i_{\text{кол}} = 6$. Так как $i_{\text{кол}} = 3N - 6$, $3N - 6 = 6 \quad \rightarrow \quad N = 4$.

4.14. $N = 2$.

Решение. Молекула должна быть линейной, иначе задача не имеет решения. Для линейной молекулы при наличии колебательных степеней свободы её средняя энергия $\langle \varepsilon_2 \rangle = \quad = \left(\dfrac{5}{2} + i_{\text{кол}} \right) kT$, а

при «замораживании» колебательных степеней свободы средняя энергия молекулы $\langle\varepsilon_1\rangle = \frac{5}{2}kT$.

По условию задачи: $\frac{\langle\varepsilon_2\rangle}{\langle\varepsilon_1\rangle} = \frac{(5/2 + i_{\text{кол}})kT}{(5/2)kT} = 1 + \frac{2i_{\text{кол}}}{5} = 1{,}4$,

откуда $i_{\text{кол}} = 1$. Так как $i_{\text{кол}} = 3N - 5$, $3N - 5 = 1 \quad \rightarrow \quad N = 2$.

4.15. $\langle E_{\text{кин}}\rangle = 19RT/2.$

Решение. Средняя энергия теплового движения ν молей идеального газа $\langle E\rangle = (i_{\text{п}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}})\cdot\frac{\nu RT}{2}$. Молекула имеет 3 поступательных, 2 вращательных и $i_{\text{кол}} = 3N - 5 = 7$ колебательных степеней свободы. Таким образом, $\langle E_{\text{кин}}\rangle = 19RT/2$.

4.16. $\langle E(T > T_{\text{кол}})\rangle = 12RT.$

Решение. $i_{\text{кол}} = N\cdot 3 - i_{\text{п}} - i_{\text{вр}} = 9$.

Энергия теплового движения моля идеального газа:

$$\langle E(T > T_{\text{кол}})\rangle = (i_{\text{п}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}})\cdot\frac{RT}{2} = (3 + 3 + 2\cdot 9)\cdot\frac{RT}{2} = 12RT.$$

4.17. $\sqrt{\langle\omega^2_{\text{H}_2}\rangle} \approx 4{,}2\cdot 10^{13}$ рад/с, $\sqrt{\langle\omega^2_{\text{O}_2}\rangle} \approx 6{,}6\cdot 10^{12}$ рад/с.

Решение. У молекул этих газов 2 вращательные степени свободы, поэтому средняя энергия вращательного движения равна

$$\langle\varepsilon\rangle = 2\cdot\frac{1}{2}kT = \frac{J\langle\omega^2\rangle}{2}, \text{ откуда } \sqrt{\langle\omega^2\rangle} = \sqrt{\frac{2kT}{J}},$$

то есть $\sqrt{\langle\omega^2_{\text{H}_2}\rangle} \approx 4{,}2\cdot 10^{13}$ рад/с, $\sqrt{\langle\omega^2_{\text{O}_2}\rangle} \approx 6{,}6\cdot 10^{12}$ рад/с.

4.18. $\sqrt{\langle\omega^2\rangle} = \frac{2}{l}\sqrt{\frac{RT}{\mu}} \approx 5{,}4\cdot 10^{12}$ рад/с.

Решение. Момент инерции молекулы азота равен $J = ml^2/2$, где $m = \mu/N_A$ – масса одной молекулы.

$$\sqrt{\langle \omega^2 \rangle} = \sqrt{\frac{2kT}{J}} = \sqrt{\frac{4kT}{ml^2}} = \frac{2}{l}\sqrt{\frac{RT}{\mu}} \approx 5{,}4 \cdot 10^{12} \text{ рад/с}.$$

4.19. $\theta = 5{,}8$ K.

Решение. При искомой температуре энергия вращательного движения молекулы равна $\varepsilon = J\omega^2/2 = \hbar\omega$, откуда $\omega = 2\hbar/J$. По определению характеристической температуры: $\hbar\omega = k\theta$, откуда

$$\theta = \hbar\omega/k = \hbar^2/(kJ) = 5{,}8 \text{ K}.$$

4.20. $\theta = \hbar\omega_3/k \approx 5400$ K.

4.21. $\theta_{\text{вр}} = \hbar^2/(kJ) = 1{,}12$ K, $\theta_{\text{кол}\,1} = h\nu_1/k \approx 960$ K, $\theta_{\text{кол}2} = h\nu_2/k \approx 2000$ K, $\theta_{\text{кол}\,3} = h\nu_3/k \approx 3400$ K.

4.22. $\sqrt{\langle x^2 \rangle} \approx 2{,}9 \cdot 10^{-10}$м.

Решение. Маятник можно рассматривать как броуновскую частицу, находящуюся в тепловом равновесии с окружающей средой при температуре T. Беспорядочные случайные удары молекул окружающей среды о маятник вызывают его дрожание. В среднем угол отклонения маятника от положения равновесия $\langle \varphi \rangle = 0$, а в каждый фиксированный момент времени φ может отличаться от нуля из-за флуктуаций.

При малых углах отклонения равна:

$$\varepsilon = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mg(1-\cos\varphi)l \approx \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{mgl\varphi^2}{2}.$$

Учитывая, что средние значения кинетической и потенциальной энергия математического маятника энергий гармонических колебаний равны, по теореме о равномерном распределении энергии по степеням свободы, находим:

$$\left\langle \frac{mgl\varphi^2}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} \right\rangle = \frac{kT}{2},$$

откуда среднеквадратичное значение угла отклонения маятника: $\sqrt{\langle \varphi^2 \rangle} = \sqrt{\dfrac{kT}{mgl}}$. При малых углах отклонения смещение шарика от положения равновесия $x \approx l\varphi$, так что

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = l\sqrt{\langle \varphi^2 \rangle} = \sqrt{\frac{kTl}{mg}} \approx 2{,}9 \cdot 10^{-10}\ \text{м}.$$

4.23. 1) $d \approx 7$ см; 2) Размер пятна увеличится в $\sqrt{2}$ раз.

Решение. 1) По теореме о равномерном распределении кинетической энергии по степеням свободы средняя кинетическая энергия вращательного движения зеркальца равна $\langle J\dot{\varphi}^2/2 \rangle = kT/2$, где J – момент инерции зеркальца относительно оси вращения.

При гармонических колебаниях средние значения кинетической энергии зеркальца $J\dot{\varphi}^2/2$ и потенциальной энергии закрученной нити $D\varphi^2/2$ равны друг другу: $\langle J\dot{\varphi}^2/2 \rangle = \langle D\varphi^2/2 \rangle$, откуда получаем: $\sqrt{\langle \varphi^2 \rangle} = \sqrt{kT/D}$. При малых углах поворота зеркальца отклонение отраженного от него луча на экране $x \approx l\varphi$, поэтому диаметр пятна будет равен

$$d \approx 2\sqrt{\langle x^2 \rangle} = 2l\sqrt{\langle \varphi^2 \rangle} = 2l\sqrt{kT/D} \approx 0{,}07\ \text{м} = 7\ \text{см}.$$

2) Размер пятна увеличится в $\sqrt{2}$ раз.

4.24. $\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\dfrac{\langle r^2 \rangle}{3}} = \sqrt{\dfrac{kT\tau}{3\pi\eta r}} \approx 7{,}2$ мкм.

4.25. $N_\text{A} = \dfrac{RT\tau}{3\pi\eta\, r\langle x^2 \rangle} \approx 6{,}2 \cdot 10^{23}\text{моль}^{-1}$.

Решение. Среднее квадратичное перемещение зерен гуммигута в направлении x составляет

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{kT\tau}{3\pi\eta r}} = \sqrt{\frac{RT\tau}{3\pi\eta r N_\text{A}}},$$

откуда $N_{\text{A}} = \dfrac{RT\tau}{3\pi\eta\, r\left\langle x^2 \right\rangle} \approx 6{,}2 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

4.26. $a = \dfrac{kT\Delta t}{3\pi\eta \left\langle x^2 \right\rangle} \approx 1{,}3 \cdot 10^{-10}$ м.

§5. Идеальный газ в поле потенциальных сил. Распределение Больцмана

5.1. $p(z) = p(0)\exp\left(-\dfrac{\mu g z}{RT}\right)$. а) $p(h = 1\text{ км}) \approx 0{,}89\, p_0$;

б) $p(h = 10\text{ км}) \approx 0{,}31 p_0$; в) $p(h = -1\text{ км}) \approx 1{,}12\, p_0$.

5.2. $\Delta p = p(-5\text{ км}) - p(5\text{ км}) = (1{,}87 - 0{,}53)\, p_0 \approx 1{,}35 \cdot 10^5$ Па.

5.3. $\rho(z) = \dfrac{\mu p(0)}{RT}\exp\left(-\dfrac{\mu g z}{RT}\right)$. $\rho(0) \approx 1{,}28$ кг/м^3;

$\rho(5\text{ км}) \approx 0{,}68$ кг/м^3.

5.4. На искомой высоте $\dfrac{\rho(h)}{\rho(0)} = \exp\left(-\dfrac{\mu g h}{RT}\right) = \dfrac{2}{3}$, откуда

$$h = \frac{RT}{\mu g}\ln(1{,}5) \approx 5{,}5\text{ км}.$$

5.5. $h = -\dfrac{RT}{\mu g}\ln(0{,}99) \approx 86$ м.

5.6. $p_1 - p_2 \approx 5{,}2 \cdot 10^4$ Па.

Решение. В изотермической атмосфере давление изменяется с высотой по закону: $p(z) = p(0)\exp\left[-\mu g z/(RT)\right]$, где $p(0)$ – давление у поверхности Земли. По условию задачи, давление на высоте h_0 равно p_0, т.е. $p_0 = p(0)\exp\left(-\dfrac{\mu g h_0}{RT}\right)$, откуда находим:

$$p(0) = p_0 \exp\left(\frac{\mu g h_0}{RT}\right).$$

Искомая разность давлений равна

$$p_1 - p_2 = p(0)\left[\exp\left(-\frac{\mu g h_1}{RT}\right) - \exp\left(-\frac{\mu g(-h_2)}{RT}\right)\right] =$$

$$= p_0\left[\exp\left(\frac{\mu g(h_0 - h_1)}{RT}\right) - \exp\left(\frac{\mu g(h_0 + h_2)}{RT}\right)\right] \approx 5{,}2 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

5.7. $H = \dfrac{RT}{\mu g} \ln\left(\dfrac{p_0}{p_H}\right) \approx 1950$ м

5.8. $H_{\text{пред}} = \dfrac{RT}{\mu g} \ln 0{,}6 \approx 4150$ м.

5.9. $\Delta p = p_0 \exp\left(-\dfrac{\mu g(h - h_0)}{RT_0}\right) \approx 0{,}47\, p_0 = 0{,}47 \cdot 10^{-5}$ Па.

5.10. а) $p(h = 2 \text{ км}) \approx 1{,}7 \cdot 10^4$ Па, б) $p(h = 5 \text{ км}) \approx 1{,}1 \cdot 10^4$ Па.

Решение. Так как при нормальных условиях давление атмосферного воздуха на уровне моря равно $1{,}033 \cdot 10^5$ Па, а содержание кислорода в воздухе 20,95%, то парциальное давление кислорода на уровне моря равно $p_0 = 1{,}033 \cdot 10^5 \cdot 0{,}2095 \approx 2{,}2 \cdot 10^4$ Па.

На высоте h парциальное давление кислорода равно $p(h) = p(0)\exp\left(-\dfrac{\mu_{O_2} g h}{RT}\right)$. Для заданных высот получим: $p(h = 2 \text{ км}) \approx 0{,}76 p_0 = 1{,}7 \cdot 10^4$ Па, $p(h = 5 \text{ км}) \approx 1{,}1 \cdot 10^4$ Па, т.е. на высоте 5 км парциальное давление кислорода в 2 раза меньше, чем на уровне моря.

5.11. $m \approx 10^{-24}$ кг, $r \approx 5 \cdot 10^{-4}$ мкм.

Решение. Концентрация пылинок в воздухе описывается распределением Больцмана:

$$n(h) = n(0)\exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right),$$

откуда масса пылинки

$$m = \frac{kT}{gh}\ln\left(\frac{n(0)}{n(h)}\right) = \frac{3kT\ln 10}{gh} \approx 10^{-24} \text{ кг}.$$

Считая пылинку шаром, оценим её радиус:

$$r = \left(\frac{3m}{4\pi\rho}\right)^{1/3} \approx 5\cdot 10^{-10} \text{ м} = 5\cdot 10^{-4} \text{ мкм}.$$

5.12. $\Delta z = \dfrac{kT}{mg}\delta \approx 4{,}22$ мм.

Решение. При равновесном распределении концентрация пылинок зависит только от высоты z и описывается распределением Больцмана:

$$n(z) = n_0\exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right).$$

Продифференцировав это выражение по z, получим:

$$\mathrm{d}n = -n_0\frac{mg}{kT}\exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right)\mathrm{d}z, \text{ откуда } \mathrm{d}z = -\frac{kT}{mg}\cdot\frac{\mathrm{d}n}{n}.$$

По условию задачи изменение концентрации частиц мало по сравнению с самой концентрацией, поэтому можно перейти к конечным приращениям. Тогда искомая толщина слоя воздуха равна

$$\Delta z = \frac{kT}{mg}\cdot\frac{|\Delta n|}{n} = \frac{kT}{mg}\delta \approx 4{,}22 \text{ мм}.$$

5.13. $\xi(z) = \dfrac{n_{\mathrm{Ar}}}{n_{\mathrm{O_2}}} = \xi_0\exp\left[\dfrac{(\mu_{\mathrm{O_2}} - \mu_{\mathrm{Ar}})gz}{RT}\right] \approx 0{,}027$, где $\mu_{\mathrm{O_2}} = 32\cdot 10^{-3}$ кг/моль и $\mu_{\mathrm{Ar}} = 40\cdot 10^{-3}$ кг/моль.

5.14. а) $h_1 \approx 53$ км; б) $h_2 \approx 58$ км.

Решение. Пусть индекс 1 относится к гелию, а 2 – к водороду.

а) Так как на высоте h_1 концентрации газов должны быть равны, то $n_1(0)\exp\left(-\frac{\mu_1 g h_1}{RT}\right) = n_2(0)\exp\left(-\frac{\mu_2 g h_1}{RT}\right)$, где $\frac{n_1(0)}{n_2(0)} = \alpha$. Отсюда искомая высота равна

$$h_1 = \frac{RT}{(\mu_1 - \mu_2)\, g}\ln\alpha \approx 53 \cdot 10^3 \text{ м} = 53 \text{ км}.$$

б). Отношение концентраций на высоте h_2, где $\frac{n_1(h_2)}{n_2(h_2)} = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2}$, составляет

$$\frac{n_1(h_2)}{n_2(h_2)} = \frac{n_1(0)}{n_2(0)}\exp\left(\frac{(\mu_2 - \mu_1) g h_2}{RT}\right) = \alpha\exp\left[\frac{(\mu_2 - \mu_1) g h_2}{RT}\right] = \frac{1}{\beta},$$

откуда:

$$h_2 = \frac{RT\ln(\alpha\beta)}{g(\mu_1 - \mu_2)} \approx 58 \cdot 10^3 \text{ м} = 58 \text{ км}.$$

5.15. $h_2 = h_1 - \frac{RT\ln(\alpha\beta)}{g(\mu_2 - \mu_1)}$.

Решение. По условию задачи $n_1(0)\exp\left(-\frac{\mu_1 g h_1}{RT}\right) =$

$= \alpha n_2(0)\exp\left(-\frac{\mu_2 g h_1}{RT}\right)$, откуда $\frac{n_1(0)}{n_2(0)} = \alpha\exp\left(\frac{(\mu_1 - \mu_2) g h_1}{RT}\right)$.

Отношение концентраций на высоте h_2 равно

$$\frac{n_1(h_2)}{n_2(h_2)} = \frac{n_1(0)}{n_2(0)}\exp\left(\frac{(\mu_2 - \mu_1) g h_2}{RT}\right) = \alpha\exp\left[\frac{(\mu_2 - \mu_1) g (h_2 - h_1)}{RT}\right] = \frac{1}{\beta}.$$

Из полученного соотношения находим:

$$h_2 = h_1 - \frac{RT\ln(\alpha\beta)}{g(\mu_2 - \mu_1)}, \text{ т.е. } h_2 < h_1.$$

5.16. а) $p(H) = p_0 e^{-\frac{\mu g H}{RT}}$;

б) $N = \int\limits_0^H n(z)S\mathrm{d}z = n(0)\cdot\dfrac{V}{H}\int\limits_0^H e^{-\frac{\mu g z}{RT}}\mathrm{d}z = \dfrac{p_0 V N_\mathrm{A}}{\mu g H}\left[1 - e^{-\frac{\mu g h}{RT}}\right]$.

5.17. $m = \dfrac{p_0 S}{g}\left[1 - \exp\left(-\dfrac{gh\,\rho_0}{p_0}\right)\right] \approx 1{,}24\cdot 10^3$ кг.

Решение. Плотность воздуха $\rho = mn$ изменяется с высотой так же, как и концентрация n: $\rho(z) = \rho(0)\exp\left(-\dfrac{\mu g z}{RT}\right)$.

Масса воздуха в слое толщиной $\mathrm{d}z$ на высоте z равна $\mathrm{d}m = \rho(z)S\mathrm{d}z$, а учитывая, что $\rho_0 = \dfrac{\mu p_0}{RT}$, масса всего столба воздуха:

$$m = \int\limits_0^h \rho(z)S\mathrm{d}z = \rho(0)S\int\limits_0^h \exp\left(-\frac{\mu g z}{RT}\right)\mathrm{d}z = \frac{\mu p_0 S}{RT}\cdot\frac{RT}{\mu g}\left[1 - \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right)\right] =$$

$$= \frac{p_0 S}{g}\left[1 - \exp\left(-\frac{gh\,\rho_0}{p_0}\right)\right] \approx 1{,}24\cdot 10^3 \text{кг}.$$

5.18. $\rho(h) = \dfrac{mgM/(kTS)}{1 - \exp\left(-mgH/(kT)\right)}\exp\left(-\dfrac{mgh}{kT}\right)$.

Решение. Направим ось Z вертикально вверх вдоль оси цилиндра, совместив начала координат с его дном. Пусть потенциальная энергия молекулы на дне цилиндра ($h = 0$) равна нулю. Согласно распределению Больцмана плотность $\rho(h)$ молекул газа на высоте h над дном цилиндра равна

$$\rho(h) = A\exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right).$$

Константу A определяем из условия, что масса газа в сосуде равна M:

$$M = \int\limits_0^H \rho(h)S\mathrm{d}z = \int\limits_0^H A\exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)S\mathrm{d}h = AS\cdot\frac{kT}{mg}\left[1 - \exp\left(-\frac{mgH}{kT}\right)\right],$$

откуда $A = \dfrac{mgM/(kTS)}{1 - \exp\left(-mgH/(kT)\right)}$.

Следовательно, $\rho(h)=\dfrac{mgM/(kTS)}{1-\exp\left(-mgH/(kT)\right)}\exp\left(-\dfrac{mgh}{kT}\right)$.

5.19. $p(h)=\dfrac{\Delta F/S}{1-\exp\left(-\mu gV/(SRT)\right)}\exp\left(-\dfrac{\mu gh}{RT}\right)$.

Решение. Из уравнения Менделеева – Клапейрона для элементарной массы газа dm в тонком цилиндрическом слое толщиной dh на высоте h: $p(h)=\dfrac{\mathrm{d}m}{\mu S\mathrm{d}h}RT$, где S – площадь основания цилиндра. Согласно распределению Больцмана: $p(h)=p(0)\exp\left(-\dfrac{\mu gh}{RT}\right)$.

Объединяя уравнения, получаем:

$$p(0)\exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right)\mathrm{d}h=\frac{RT}{\mu S}\mathrm{d}m\,.$$

Интегрируя полученное уравнение, находим:

$$p(0)\cdot\frac{RT}{\mu g}\left[1-\exp\left(-\frac{\mu gH}{RT}\right)\right]=\frac{RTM}{\mu S},$$

откуда

$$p(0)=\frac{Mg/S}{1-\exp\left(-\mu gH/(RT)\right)},\quad p(H)=\frac{Mg}{S}\cdot\frac{\exp\left(-\mu gH/(RT)\right)}{1-\exp\left(-\mu gH/(RT)\right)}.$$

При этом разность сил давления газа на дно и крышку сосуда $\Delta F=S\left[p(0)-p(H)\right]=Mg$, откуда масса газа в сосуде: $M=\Delta F/g$.

Учтя, что $H=V/\mathrm{S}$, окончательно получаем:

$$p(h)=\frac{\Delta F/S}{1-\exp\left(-\mu gV/(SRT)\right)}\exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right).$$

5.20. $\mu=\dfrac{3RT\ln\alpha}{gH}$.

5.21. $z_c=\dfrac{RT}{\mu g}\cdot\dfrac{1-\exp\left(-\mu gH/(RT)\right)\cdot\left(1+\mu gH/(RT)\right)}{\left[1-\exp\left(-\mu gH/(RT)\right)\right]}$.

Решение. Число молекул с координатами (z, z+dz) определяется распределением Больцмана: $\mathrm{d}N(z) = n_0 \exp\left[-mgz/(kT)\right] S\mathrm{d}z$, где S – площадь основания цилиндра, n_0 – концентрация молекул у дна цилиндра. Из условия нормировки:

$$N_\mathrm{A} = n_0 \int_0^H \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) S\mathrm{d}z \text{, откуда } n_0 = \frac{mg}{kT} \cdot \frac{N_\mathrm{A}}{S\left[1-\exp\left(-\dfrac{mgH}{kT}\right)\right]}.$$

По определению, координата центра масс z_c равна

$$z_c = \frac{\int_0^H z \cdot \rho(z) \cdot S\,\mathrm{d}z}{\int_0^H \rho(z)\mathrm{d}z} = \frac{mn_0 S}{\mu} \int_0^H z \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) S\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{mn_0 S}{\mu} \cdot \left(\frac{kT}{mg}\right)^2 \int_0^a y\exp(-y)\mathrm{d}y \text{ , где } a = \frac{mgH}{kT},\ y = \frac{mgz}{kT}$$

Учитывая, что $\int_0^a y\exp(-y)\mathrm{d}y = 1-(1+a)\exp(-a)$, $\mu/m = N_\mathrm{A}$, $R = kN_\mathrm{A}$, для координаты центра масс получаем:

$$z_c = \frac{RT}{\mu g} \cdot \frac{1-\exp\left(-\mu gH/(RT)\right)\cdot\left(1+\mu gH/(RT)\right)}{\left[1-\exp\left(-\mu gH/(RT)\right)\right]}.$$

5.22. *Указание.* Рассчитать, где находится центр тяжести столба воздуха, а также на какой высоте плотность газа уменьшается в e раз, и сравнить эти величины.

5.23. $\left\langle \varepsilon_\text{пот} \right\rangle \approx kT$.

Решение. По формуле средних значений:

$$\left\langle \varepsilon_\text{пот} \right\rangle = \left\langle mgz \right\rangle = A\int_0^H mgz \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right)\mathrm{d}z.$$

Из условия нормировки:

$$1=\int_0^H A\exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right)\mathrm{d}z\approx A\int_0^\infty \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right)\mathrm{d}z=A\cdot\frac{kT}{mg},\ \text{откуда}\ A=\frac{mg}{kT}.$$

Средняя потенциальная энергия одной молекулы:

$$\left\langle \varepsilon_{\text{пот}}\right\rangle\approx\frac{mg}{kT}\int_0^\infty mgz\,\exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right)\mathrm{d}z=kT\int_0^\infty ye^{-y}\,\mathrm{d}y=kT.$$

При вычислении интеграла была сделана замена переменной: $y=-\dfrac{mgz}{kT}$. Как видно, средняя энергия молекул не зависит от их массы.

5.24. $h=\dfrac{RT\ln\alpha}{g(\mu_{\mathrm{N_2}}-\mu_{\mathrm{He}})}\approx 9{,}6$ м. Концентрация гелия будет больше.

5.25. $T=T_0-\dfrac{\mu g}{R}h.$

Решение. Выделим в цилиндре узкий слой толщиной dh на высоте h. Его масса равна ρSdh, где ρ – плотность газа, S – площадь основания цилиндра. На массу газа в этом слое действуют силы давления, сверху $(p+\mathrm{d}p)S$ и снизу pS, а также сила тяжести ρ$gSdh$. Уравнение баланса сил имеет вид:

$$\rho gS\mathrm{d}h+(p+\mathrm{d}p)S=pS\ ,\ \text{откуда}\ \mathrm{d}p=-\rho g\mathrm{d}h.$$

Учитывая, что $p=\dfrac{\rho}{\mu}RT$, получаем: $\dfrac{\rho R}{\mu}\mathrm{d}T=-\rho g\mathrm{d}h$.

Интегрируя полученное уравнение, находим зависимость температуры от высоты над дном цилиндра $T(h)$:

$$\int_{T_0}^{T}\mathrm{d}T=-\frac{\mu g}{R}\int_0^h\mathrm{d}h\ \rightarrow\ T=T_0-\frac{\mu g}{R}h.$$

5.26. $p=p_0\left(1-ah\right)^{\mu g/(aRT_0)}$, $\rho=\dfrac{p\mu}{RT}=\dfrac{\mu p_0}{RT_0}\left(1-ah\right)^{(\mu g/(aRT_0)-1)}$.

Решение. При изменении высоты на dh давление изменяется на $\mathrm{d}p=-\rho g\mathrm{d}h$ (см. решение задачи 5.25). Согласно уравнению Менделеева–Клапейрона $\rho=p\mu/(RT)$, поэтому

$$\mathrm{d}p = -\frac{p\mu g}{RT}\,\mathrm{d}h = -\frac{p\mu g\,\mathrm{d}h}{RT_0(1-ah)}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\int_{p_0}^{p}\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\mu g}{RT_0}\int_0^h\frac{\mathrm{d}h}{1-ah} \;\rightarrow\; \ln\frac{p}{p_0} = \frac{\mu g}{aRT_0}\ln(1-ah),$$

откуда $p = p_0(1-ah)^{\mu g/(aRT_0)}$, $h < 1/a$.

Плотность воздуха меняется с высотой по закону:

$$\rho = \frac{p\mu}{RT} = \frac{\mu p_0}{RT_0}(1-ah)^{\left(\frac{\mu g}{aRT_0}-1\right)}.$$

5.27. $p = p_0\left(1+\dfrac{T_2-T_1}{T_1H}h\right)^{\mu gH/[R(T_2-T_1)]}$.

Решение. Закон изменения температуры с высотой имеет вид:

$$T = T_1 + \frac{T_2-T_1}{H}h.$$

При изменении высоты на dh давление изменяется на

$$\mathrm{d}p = -\rho g\mathrm{d}h = -\frac{p\mu g}{RT}\,\mathrm{d}h = -\frac{p\mu g\,\mathrm{d}h}{R\left(T_1+\dfrac{T_2-T_1}{H}h\right)}$$

(см. решение задачи 5.26).

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\int_{p_0}^{p}\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\mu g}{R}\int_0^h\frac{\mathrm{d}h}{T_1+\dfrac{T_2-T_1}{H}h},$$

$$\ln\frac{p}{p_0} = \frac{\mu gH}{R(T_2-T_1)}\ln\left(\frac{T_1+(T_2-T_1)h/H}{T_1}\right),$$

откуда

$$p = p_0\left(1 + \frac{T_2 - T_1}{T_1 H}h\right)^{\mu g H/\left[R(T_2 - T_1)\right]}.$$

5.28. $r = \left[\dfrac{3kT\ln\alpha}{4\pi(\rho - \rho_0)g\Delta h}\right]^{1/3}$.

Решение. Направим ось Z декартовой системы координат вертикально вверх, выбрав начало отсчета на дне сосуда. На частицу в растворителе действуют сила тяжести и выталкивающая сила Архимеда. Находясь на высоте z, частица обладает потенциальной энергией $U(z) = (\rho - \rho_0)Vgz$, где V – объем частицы.

Концентрация частиц на высоте z равна

$$n(z) = C\exp\left(-\frac{(\rho - \rho_0)Vgz}{kT}\right), \text{ где } C = \text{const}.$$

По условию задачи отношение числа частиц в слоях толщиной δz, отстоящих друг от друга на Δh, равно α,:

$$\frac{n_1(z)S\delta z}{n_2(z + \Delta h)S\delta z} = \exp\left[\frac{(\rho - \rho_0)Vg\,\Delta h}{kT}\right] = \alpha.$$

Поскольку объем шарообразной частицы равен $V = (4/3)\pi r^3$, из полученного уравнения находим радиус коллоидных частиц:

$$r = \left[\frac{3kT\ln\alpha}{4\pi(\rho - \rho_0)g\Delta h}\right]^{1/3}.$$

5.29. $\dfrac{p(0)\,S}{p(l)\,S} \approx 1 + \dfrac{\mu a l}{RT} \approx 1{,}0011.$

Решение. В неинерциальной системе отсчета, связанной с сосудом, на молекулу газа действует сила инерции $\boldsymbol{F}_{\text{ин}} = -m\boldsymbol{a}$. Направим ось X вдоль оси цилиндра в направлении его движения, выбрав начало отсчета на левом основании сосуда. Потенциальная энергия молекулы при этом равна $U = -\int(\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{dx}) = amx$ при выборе нормировки $U(x = 0) = 0$.

Давление газа на расстоянии x от левого торца равно

$$p(x) = p_0 \exp\left(-\frac{\mu a x}{RT}\right),$$

где $\mu = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса N_2, $p_0 = p(0)$ –давление в сосуде при $x = 0$.

Отношение сил давления газа на противоположные торцы цилиндра

$$\frac{p(0)\,S}{p(l)\,S} = \exp\left(\frac{\mu a l}{RT}\right) \approx 1 + \frac{\mu a l}{RT} \approx 1{,}0011\,.$$

5.30. $\dfrac{n_1(l)/n_2(l)}{n_1(0)/n_2(0)} = \exp\left(\dfrac{(\mu_2 - \mu_1)\,al}{RT}\right)$, где отсчет ведется в направлении движения торца трубки.

5.31. $x_0 = \dfrac{RT \ln\alpha}{\mu a}$.

Решение. Направим ось X вдоль оси цилиндра в направлении его движения, выбрав начало отсчета на его левом торце. На расстоянии x от закрытого торца давление составляет

$$p(x) = p(0) \exp\left(-\frac{\mu a x}{RT}\right),$$

Давление воздуха в трубке вблизи её открытого конца, т.е. при $x = l$, равно атмосферному p_0:

$$p(l) = p(0) \exp\left(-\frac{\mu a l}{RT}\right) = p_0\,, \text{ откуда } p(0) = p_0 \exp\left(\frac{\mu a l}{RT}\right).$$

Искомому расстоянию x_0 от открытого конца трубки соответствует расстояние $x = l - x_0$ от закрытого конца. В этом месте давление воздуха равно

$$p(l - x_0) = p(0) \exp\left(-\frac{\mu a (l - x_0)}{RT}\right) = p_0 \exp\left(\frac{\mu a x_0}{RT}\right) = \alpha p_0\,,$$

откуда $x_0 = \dfrac{RT \ln\alpha}{\mu a}$.

5.32. $a = \dfrac{0{,}01RT}{\mu H} - g \approx 79$ м / с^2.

Решение. Будем отсчитывать расстояние z от дна сосуда. В неинерциальной системе отсчета, связанной с сосудом, потенциальная энергия молекулы равна $U = m(g+a)z$ при выборе нормировки $U(z=0) \equiv 0$. По условию задачи $p_0 - p(H)/p_0 = 0{,}01$.

Используя распределение Больцмана, для давления в цилиндре получаем:

$$p(x) = p_0 \exp\left(-\frac{\mu(g+a)z}{RT}\right).$$

Учитывая, что $\dfrac{\mu g H}{RT} \approx 10^{-3} << 1$, при не слишком больших ускорениях можно воспользоваться разложением в ряд Тейлора по малому параметру $\dfrac{\mu(g+a)H}{RT}$:

$$\frac{p_0 - p(H)}{p_0} = 1 - \exp\left[-\frac{\mu(g+a)H}{RT}\right] \approx 1 - \left[1 - \frac{\mu(g+a)H}{RT}\right] = \frac{\mu(g+a)H}{RT}.$$

Отсюда $a = \dfrac{0{,}01RT}{\mu H} - g \approx 79$ м / с^2.

5.33. $\dfrac{n(0)}{n(H)} = \exp\left(\dfrac{\mu(g-a)H}{RT}\right)$.

5.34. $r = \left(R^2 - \dfrac{2kT\ln 3}{m\omega^2}\right)^{1/2}$.

Решение. Концентрация молекул $n(r)$ на расстоянии r от оси вращения равна: $n(r) = A\exp\left(\dfrac{m\omega^2 r^2}{2kT}\right)$, где A – постоянная.

По условию задачи $n(R) = \beta n(r)$, то есть

$$A\exp\left(\frac{m\omega^2 R^2}{2kT}\right) = 3A\exp\left(\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}\right),$$

откуда находим: $r = \left(R^2 - \dfrac{2kT\ln 3}{m\omega^2} \right)^{1/2}$.

5.35. $\omega = \sqrt{\dfrac{2RT\ln(1{,}5)}{\mu r_0^2}}$.

5.36. 1). $p(r_0) = p_0 \exp\left(\dfrac{4\pi^2 \nu^2 \mu r_0^2}{2RT} \right) = 3 \cdot 10^5$ Па.

2). $\rho(r) = \dfrac{\mu p_0}{RT} \exp\left(\dfrac{2\pi^2 \nu^2 \mu r^2}{RT} \right)$.

5.37. $\mu = \dfrac{2RT\ \ln\beta}{\omega^2 \left(r_2^2 - r_1^2 \right)}$.

5.38. $\mu \approx 83$ (радон).

Решение. Для идентификации газа достаточно определить его молярную массу μ. Используем решение задачи 5.37, положив $r_1 = 0$, $r_2 = r$ и $\beta = n$: $\mu = 2RT\ \ln n/(\omega^2 r^2)$. Подставляя данные из условия задачи, находим, что $\mu \approx 83$. Наиболее близким по молярной массе к полученному результату является радон.

5.39. $l = \sqrt{2RT\ \ln\alpha/(\mu\omega^2)} \approx 1{,}8$ м.

Решение. На расстоянии r от оси вращения концентрация молекул равна $n(r) = A\exp\left[\mu\omega^2 r^2/(2RT) \right]$, где A – постоянная.

По условию задачи $n(l) = \alpha n(0)$, т.е. выполняется соотношение: $A\exp\left(\dfrac{\mu\omega^2 l^2}{2RT} \right) = \alpha A$, откуда находим:

$$l = \sqrt{2RT\ \ln\alpha\,/(\mu\omega^2)} \approx 1{,}8 \text{ м}.$$

5.40. $p(l/2) = p_0 \exp\left(\dfrac{\pi^2 \nu^2 \mu l^2}{2RT} \right) \approx 1{,}024 \cdot 10^5$ Па.

5.41. $\dfrac{\omega_2}{\omega_1}=\left(1-\dfrac{2RT\ln\alpha}{\mu l^2\omega_1^2}\right)^{1/2}$.

Решение. Давление на закрытый торец трубки составляет

$$p_1(l)=p_0\exp\left(\frac{\mu\omega_1^2 l^2}{2RT}\right),$$

где p_0 – давление воздуха вблизи открытого конца трубки.

По условию задачи при другой скорости вращения давление должно быть в α раз меньше, т.е.

$$p_2(l)=p_0\exp\left(\frac{\mu\omega_2^2 l^2}{2RT}\right)=\frac{p_0}{\alpha}\exp\left(\frac{\mu\omega_1^2 l^2}{2RT}\right),$$

откуда получаем:

$$\omega_1^2\left[1-\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\right]=\frac{2RT\ln\alpha}{\mu l^2}\ \text{ и }\ \frac{\omega_2}{\omega_1}=\left(1-\frac{2RT\ln\alpha}{\mu l^2\omega_1^2}\right)^{1/2}.$$

5.42. $\dfrac{F(2l/3)}{F(l/3)}=\exp\left(\dfrac{\mu\omega^2 l^2}{6RT}\right)$.

5.43. $p(0)=p_0\exp\left(-\dfrac{\pi^2\nu^2\mu l^2}{2RT}\right)\approx 0{,}81\cdot 10^5\ \text{Па}$.

5.44. $\mu=\dfrac{2\rho RT\ln\beta}{(\rho-\rho_0)\cdot\left(r_1^2-r_2^2\right)\omega^2}=\dfrac{8\rho RT\ln\beta}{3(\rho-\rho_0)(a\omega)^2}$.

Решение. В неинерциальной системе отсчета, связанной с центрифугой, на коллоидную частицу действуют направленная от оси вращения центробежная сила инерции $f_{\text{цб}}=m\omega^2 r=\rho V\omega^2 r$ (V – объем частицы) и сила давления $f_{\text{выт}}=\rho_0 V\omega^2 r$ со стороны растворителя (аналог выталкивающей силы Архимеда в гравитационном поле Земли), направленная к оси вращения и возникающая

из-за зависимости давления во вращающейся жидкости от расстояния больше.

На расстоянии r от оси вращения потенциальная энергия частицы равна

$$\varepsilon_{\text{пот}} = \int_r^0 \left(\mathbf{f}_{\text{цб}} + \mathbf{f}_{\text{выт}}\right)\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_r^0 (\rho - \rho_0)\, V\omega^2 r \mathrm{d}r = -\frac{1}{2}(\rho - \rho_0)\, V\omega^2 r^2 .$$

Концентрация частиц меняется по закону:

$$n(r) = B\exp\left(\frac{(\rho - \rho_0)V\omega^2 r^2}{2kT}\right), \text{ где } B = \text{const}.$$

По условию задачи:

$$B\exp\left(\frac{(\rho - \rho_0)\, V\omega^2 r_1^2}{2kT}\right) = \beta B\exp\left(\frac{(\rho - \rho_0)\, V\omega^2 r_2^2}{2kT}\right),$$

откуда

$$\frac{(\rho - \rho_0)\cdot\left(r_1^2 - r_2^2\right)V\omega^2}{2kT} = \ln\beta .$$

Учитывая, что масса одной частицы $m = \mu / N_{\text{A}} = \rho V$, поучаем:

$$\frac{(\rho - \rho_0)\cdot\left(r_1^2 - r_2^2\right)\mu\omega^2}{2\rho RT} = \ln\beta ,$$

откуда $\mu = \dfrac{2\rho RT\ln\beta}{(\rho - \rho_0)\cdot\left(r_1^2 - r_2^2\right)\omega^2} = \dfrac{8\rho RT\ln\beta}{3\,(\rho - \rho_0)(a\omega)^2}$.

5.45. По условию задачи $n_0 = A\exp\left(-\dfrac{u(\boldsymbol{r}_0)}{kT}\right)$, откуда $A = n_0\exp\left(\dfrac{u(\boldsymbol{r}_0)}{kT}\right)$, и следовательно $n_r = n_0\exp\left(\dfrac{u(\boldsymbol{r}_0) - u(\boldsymbol{r})}{kT}\right)$.

5.46. $\mathrm{d}N = n_1\exp\left(-\dfrac{\varepsilon(r) - \varepsilon(r_1)}{kT}\right)\cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r$.

5.47. а) $r_{\text{нв}} = \sqrt{kT/\alpha}$;

б) $$\frac{\mathrm{d}N(r)}{N_0} = \left(\frac{\alpha}{\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\alpha r^2}{kT}\right) \cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r.$$

Решение. а) Число молекул на расстояниях в интервале $(r, r+\mathrm{d}r)$ от центра поля равно

$$\mathrm{d}N(r) = N_0 \mathrm{d}P_{\mathrm{B}}(r) = n(r) \cdot 4\pi \mathrm{r}^2 \mathrm{d}r = n_0 \exp\left(-\frac{\alpha r^2}{kT}\right) \cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r\,,$$

где N_0 – полное число молекул в системе. Плотность распределения Больцмана $f_{\mathrm{B}}(r) = \dfrac{n_0}{N_0} \exp\left(-\dfrac{\alpha r^2}{kT}\right) \cdot 4\pi r^2$ максимально при наиболее вероятном расстоянии молекул до центра поля, поэтому $r_{\text{нв}}$ находим из условия:

$$\mathrm{d}f_{\mathrm{B}}(r) / \mathrm{d}r\big|_{r=r_{\text{нв}}} = 0\,, \text{ т.е. } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2 \exp\left(-\frac{\alpha r^2}{kT}\right)\right]_{r=r_{\text{нв}}} = 0\,,$$

$2r - \dfrac{2\alpha r^3}{kT} = 0$, откуда $r_{\text{нв}} = \sqrt{kT/\alpha}$.

б) Относительное число молекул на расстояниях в интервале $(r, r+\mathrm{d}r)$ от центра поля поля

$$\frac{\mathrm{d}N(r)}{N_0} = \frac{n_0}{N_0} \exp\left(-\frac{\alpha r^2}{kT}\right) \cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r\,, \text{ где}$$

$$N_0 = \int_0^\infty 4\pi n_0 \exp\left(-\frac{\alpha r^2}{kT}\right) \cdot r^2 \mathrm{d}r = n_0 \left(\frac{\pi kT}{\alpha}\right)^{3/2}$$

(использовано значение табличного интеграла

$$I_{2n} = \int_0^\infty x^{2n} \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2n-1}{2} \cdot \alpha^{-n}\,).$$

Окончательно: $\dfrac{\mathrm{d}N(r)}{N_0} = \left(\dfrac{\alpha}{\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\dfrac{\alpha r^2}{kT}\right) \cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r$.

5.48. а) $f_{\text{B}}(r)=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{kT}\right)^3\exp\left(-\frac{ar}{kT}\right)r^2$; б) $r_{\text{нв}}=\sqrt{\frac{2kT}{a}}$;

в) $\langle u\rangle=3kT$.

Решение. а) $\mathrm{d}N(r)=N_0\mathrm{d}P_{\text{B}}(r)=N_0A\exp\left(-\frac{ar}{kT}\right)\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r$, где N_0 – полное число молекул в системе, A – константа.

Плотность распределения Больцмана:

$$f_{\text{B}}(r)=\frac{\mathrm{d}P_{\text{B}}(r)}{\mathrm{d}r}=B\exp\left(-\frac{ar}{kT}\right)\cdot 4\pi r^2.$$

Постоянную $B=N_0A$ находим из условия нормировки:

$$\int_0^\infty f_{\text{B}}(r)\mathrm{d}r=B\int_0^\infty 4\pi\exp\left(-\frac{ar}{kT}\right)\cdot r^2\mathrm{d}r=4\pi B\cdot 2\left(\frac{kT}{a}\right)^3=1,$$

откуда $B=\frac{1}{8\pi}\left(\frac{a}{kT}\right)^3$. Окончательно:

$$f_{\text{B}}(r)=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{kT}\right)^3\exp\left(-\frac{ar}{kT}\right)r^2.$$

б) Наиболее вероятное расстояние $r_{\text{нв}}$ находим из условия максимума $f_{\text{B}}(r)$ (см. решение задачи 3.43): $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\exp\left(-\frac{ar}{kT}\right)\right]_{r=r_{\text{нв}}}=0\ \rightarrow\ 2r-\frac{\alpha r^2}{kT}=0$, откуда $r_{\text{нв}}=\sqrt{\frac{2kT}{a}}$.

в) $\langle u\rangle=\int_0^\infty u(r)f_{\text{B}}(r)\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{kT}\right)^3\int_0^\infty ar\exp\left(-\frac{\alpha r}{kT}\right)\cdot r^2\mathrm{d}r=3kT$.

5.49. $f=\frac{kT\ln\beta}{l}$.

Решение. В однородном потенциальном поле энергия молекул $u(x)=-fx$, а их концентрация меняется по закону: $n(r)=n_0\exp\left[-fx/(kT)\right]$.

Отношение концентраций молекул, находящихся на расстоянии l друг от друга, равно $\beta = \exp\left[fl/(kT)\right]$, откуда $f = kT\ \ln\beta/1$.

5.50. $\left\langle E\right\rangle = N_0 \dfrac{\varepsilon_1 \exp\left(-\dfrac{\varepsilon_1}{kT}\right) + \varepsilon_2 \exp\left(-\dfrac{\varepsilon_2}{kT}\right)}{\exp\left(-\dfrac{\varepsilon_1}{kT}\right) + \exp\left(-\dfrac{\varepsilon_2}{kT}\right)}$.

Решение. Согласно распределению Больцмана вероятность того что частица имеет энергию ε, равна $P(\varepsilon) = N(\varepsilon)/N_0 = Ae^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$.

Числа частиц с энергиями ε_1 и ε_2 равны

$$N_1 = N_0 A \exp\left(-\frac{\varepsilon_1}{kT}\right) \text{ и } N_2 = N_0 A \exp\left(-\frac{\varepsilon_2}{kT}\right).$$

Константу A находим из условия, что общее число частиц равно N_0: $N_0 = N_0 A \exp\left(-\dfrac{\varepsilon_1}{kT}\right) + N_0 A \exp\left(-\dfrac{\varepsilon_2}{kT}\right)$, откуда

$$A = \frac{1}{\exp\left(-\dfrac{\varepsilon_1}{kT}\right) + \exp\left(-\dfrac{\varepsilon_2}{kT}\right)}.$$

Суммарная средняя энергия всех частиц равна

$$\left\langle E\right\rangle = N(\varepsilon_1)P(\varepsilon_1) + N(\varepsilon_2)P(\varepsilon_2) = N_0 \frac{\varepsilon_1 \exp\left(-\dfrac{\varepsilon_1}{kT}\right) + \varepsilon_2 \exp\left(-\dfrac{\varepsilon_2}{kT}\right)}{\exp\left(-\dfrac{\varepsilon_1}{kT}\right) + \exp\left(-\dfrac{\varepsilon_2}{kT}\right)}.$$

5.51. 1) $n = n_0 \exp\left(-\dfrac{q}{RT}\right)$; 2) $n = 4{,}9 \cdot 10^{19}$ 1/м^3;

3) $T = \dfrac{q}{R\ln\left(n_0/n\right)} \approx 520$ К.

§6. Молекулярно-кинетические характеристики газов

6.1. $l = \dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} \approx 6{,}6 \cdot 10^{-8}$ м $\approx 290d$.

6.2. $p_0 = \dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 l} \approx 0{,}8$ Па .

6.3. $p_1 = p_0 l_0 / l_1 = 6$ Па .

6.4. $l = \dfrac{k\,\mu_{\text{He}} V}{\sqrt{2}\pi d^2 m R} \approx 1{,}9 \cdot 10^{-8}$ м .

6.5. $l \approx 5{,}1 \cdot 10^{-7}$ м.

Решение. Вычислим давление на заданной высоте, воспользовавшись распределением Больцмана:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right) \approx 3 \cdot 10^4 \text{ Па},$$

где $p_0 = 10^5$Па – давление на поверхности Земли.

Среднюю длину свободного пробега молекул определим по формуле: $l = \dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} \approx 5{,}1 \cdot 10^{-7}$ м .

6.6. $l / \langle a \rangle \approx 29$.

Решение. В объеме V находится $\nu = M/\mu$ молей кислорода, в каждом из которых N_A молекул. На одну молекулу приходится «кубик» объемом $v = \dfrac{V}{N} = \dfrac{V}{\nu N_A} = \dfrac{V\mu}{MN_A}$. Среднее расстояние между молекулами равно стороне такого "кубика", т.е. $\langle a \rangle = \left(\dfrac{V\mu}{MN_A}\right)^{1/3}$.

Средняя длина свободного пробега молекул равна:

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 N/V} = \frac{V\mu}{\sqrt{2}\pi d^2 M N_A}.$$

Окончательно $\dfrac{l}{\langle a\rangle}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2}\left(\dfrac{V\mu}{MN_{\text{A}}}\right)^{2/3}\approx 29$.

6.7. $\rho\approx 0{,}81\cdot 10^{-6}$ кг/м^3

Решение. Средняя длина свободного пробега молекул азота

$$l=\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}=\frac{m}{\sqrt{2}\pi d^2\rho}=\frac{\mu}{\sqrt{2}\pi d^2 N_{\text{A}}\rho},$$

где m – масса одной молекулы. Отсюда:

$$\rho=\frac{\mu}{\sqrt{2}\pi d^2 N_{\text{A}} l}\approx 1{,}1\cdot 10^{-6}\ \text{кг/м}^3.$$

6.8. $d=\sqrt{\dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi pl}}\approx 3{,}1\cdot 10^{-10}$ м.

6.9. $\tau=\dfrac{l}{\langle v\rangle}=\dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}\cdot\sqrt{\dfrac{\pi m}{8kT}}=\dfrac{1}{4d^2 p}\sqrt{\dfrac{\mu kT}{\pi N_{\text{A}}}}\approx 9{,}2\cdot 10^{-8}$ с.

6.10. $l\sim 6\cdot 10^{21}$ км; $\tau=\dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_0\langle v\rangle}\sim 10^{16}\,\text{с}\sim 10^9$ лет.

6.11. $\tau=\dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_0\langle v\rangle}=\dfrac{1}{4d^2 n}\sqrt{\dfrac{\mu}{\pi RT}}\approx 1{,}7\cdot 10^{-5}$с.

6.12. $\langle\nu\rangle\approx 2{,}7\cdot 10^9\ \text{с}^{-1}$

Решение. Из формулы $v_{\text{скв}}=\sqrt{3RT/\mu}$ находим температуру газа: $T=\mu v_{\text{скв}}^2/(3R)$. Длина свободного пробега равна

$$l=\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}=\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}=\frac{\mu v_{\text{скв}}^2}{3\sqrt{2}\pi d^2 N_{\text{A}} p}\approx 7\cdot 10^{-8}\ \text{м}.$$

Частота столкновения одной молекулы

$$\langle \nu \rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n \langle v \rangle = \sqrt{2}\pi d^2 \frac{p}{kT}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = \frac{2\sqrt{3\pi}d^2 pN_\text{A}}{\mu v_\text{скв}} \approx 2{,}7\cdot 10^9 \text{ с}^{-1}.$$

6.13. $\langle \nu \rangle = \sqrt{2}\pi d^2 \frac{p}{kT}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = 4d^2 p\sqrt{\frac{\pi N_\text{A}}{\mu kT}} \approx 6{,}5\cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$.

6.14. $\langle \nu_2 \rangle \approx 7{,}2\cdot 10^9$ 1/с.

Решение. Средняя длина свободного пробега молекул $l = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$. Если при неизменной температуре уменьшить давление газа, то отношение длин свободного пробега при первоначальном и новом давлениях будет равно $l_2/l_1 = p_1/p_2 = \alpha$, откуда $l_2 = \alpha l_1$.

Средняя частота столкновений $\langle \nu \rangle$ одной молекулы с другими: $\langle \nu \rangle = \langle v \rangle / l$. При неизменной температуре средняя скорость молекул не меняется, поэтому при новом давлении частота столкновений равна:

$$\langle \nu_2 \rangle = \frac{\langle v \rangle}{l_2} = \frac{\langle v \rangle}{\alpha l_1} \approx 7{,}2\cdot 10^9 \text{ 1/с}.$$

6.15. $Z = \approx 2\cdot 10^{29}$ 1/с.

Решение. За время Δt одна молекула испытывает $\Delta t/\tau$ столкновений, где τ – среднее время свободного пробега. В объеме $V = 1$ см^3 находится nV молекул, поэтому число столкновений за время Δt равно $Z_{\Delta t} = \frac{1}{2} nV\langle \nu \rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{\rho V}{m}\langle \nu \rangle$, где множитель 1/2 учитывает, что в каждом столкновении участвуют две молекулы. Следовательно, за $\Delta t = 1$ с в объеме $V = 1$ см^3:

$$Z = \frac{\rho V}{2m}\left(\sqrt{2}\pi d^2 n\langle v \rangle\right) = \frac{\rho^2 V}{2m^2}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\left(\sqrt{2}\pi d^2\right) = \frac{2(\rho N_\text{A} d)^2 V}{\mu^{5/2}}\sqrt{\pi RT} \approx$$

$$\approx 2\cdot 10^{29} \text{ 1/с}.$$

6.16. $N = N_{\text{A}}\, pV\,/(RT) \approx 5{,}9 \cdot 10^{21}$;

$$Z = \frac{2(Nd)^2 \Delta t}{V}\sqrt{\frac{\pi RT}{\mu}} \approx 2{,}9 \cdot 10^{30}\ \text{с}^{-1}.$$

6.17. а) $\nu_{12} = 4\left(r_1 + r_2\right)^2 n_2 \sqrt{\frac{\pi RT}{2}\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right)}$,

б) $\nu_{21} = \pi d^2 n_1 \left\langle v_{21} \right\rangle = 4\left(r_1 + r_2\right)^2 n_1 \sqrt{\frac{\pi RT}{2}\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right)} = \frac{n_1}{n_2}\nu_{12}$,

в) $\nu_{12}^{\text{полн}} = n_1 n_2 d^2 \sqrt{\frac{\pi RT}{2\mu_{\text{пр}}}}$.

Решение. Скорости какой-либо фиксированной молекулы, которые она получает в результате последовательных столкновений с другими молекулами, в неподвижной системе отсчета подчиняются распределению Максвелла. Рассмотрим каждую из этих скоростей относительно молекулы, с которой произошло последнее столкновение. Как известно из механики, при рассмотрении относительного движения двух частиц одну из них можно считать неподвижной. При этом относительное движение второй частицы (например, частицы 1) формально описывается уравнением Ньютона с те ми же силами, как в неподвижной системе, но масса частицы 1 должна быть заменена приведенной массой, которая определяется соотношением: $1/m_{\text{пр}} = 1/m_1 + 1/m_2$. Так как при таком рассмотрении последовательность столкновений и действующие на частицу силы остаются неизменными, то распределение относительных скоростей после столкновений останется максвелловским. При этом средняя скорость движения частицы 1 относительно частиц 2 может быть найдено по формуле:

$$\left\langle v_{12} \right\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_{\text{пр}}}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu_{\text{пр}}}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi}\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right)}.$$

Эффективный радиус столкновения молекул разных сортов равен сумме радиусов сталкивающихся частиц: $d = r_1 + r_2$.

а) Частота столкновений частицы 1 с частицами сорта 2 равна:

$$\nu_{12} = \pi d^2 n_2 \langle v_{12} \rangle = 4(r_1 + r_2)^2 n_2 \sqrt{\frac{\pi RT}{2}\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right)}.$$

б) Частота столкновений молекулы сорта 2 с молекулами сорта 1:

$$\nu_{21} = \pi d^2 n_1 \langle v_{21} \rangle = 4(r_1 + r_2)^2 n_1 \sqrt{\frac{\pi RT}{2}\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right)} = (n_1/n_2)\,\nu_{12}.$$

в) Чтобы найти полное число столкновений молекул разных сортов в единице объема за 1 с, надо либо умножить частоту ν_{12} столкновений молекулы 1 с молекулами сорта 2 на концентрацию молекул первого сорта, либо ν_{21} умножить на концентрацию молекул сорта 2:

$$\nu_{12}^{\text{полн}} = \nu_{12} n_1 = \nu_{21} n_2 = (r_1 + r_2)^2 \sqrt{8\pi RT\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right)}\, n_1 n_2.$$

Полученную формулу можно переписать в виде:

$$\nu_{12}^{\text{полн}} = n_1 n_2 d^2 \sqrt{\frac{\pi RT}{2\mu_{\text{пр}}}},$$

где эффективный радиус рассеяния молекул $d = (d_1 + d_2)/2$ (d_1 и d_2 – газокинетические диаметры молекул), приведенная молярная масса $\mu_{\text{пр}} = \mu_1\mu_2/(\mu_1 + \mu_2)$.

6.18. $Z_{N_2-O_2} \approx 5{,}3 \cdot 10^{27}\ \text{с}^{-1}$,

Решение. Концентрации молекул азота и кислорода в воздухе равны соответственно $n_1 = \alpha_1 N_L$ и $n_2 = \alpha_2 N_L$. Число столкновений молекул азота друг с другом найдем, как в задаче 6.15:

$$Z_{N_2} = 2n_{N_2}^2 V d^2 \sqrt{\frac{\pi RT}{\mu_{N_2}}} = 2(\alpha_1 N_L d)^2 V \sqrt{\frac{\pi RT}{\mu_{N_2}}} \approx 5{,}8 \cdot 10^{28}\ \text{с}^{-1}.$$

Для нахождения числа соударений молекул азота с молекулами кислорода воспользуемся формулой, полученной в задаче 6.17:

$$Z_{N_2-O_2} = \nu_{12}^{\text{полн}} V = n_1 n_2 d^2 V \sqrt{\frac{\pi RT}{2\mu_{\text{пр}}}} = \alpha_1 \alpha_2 N_L^2 d^2 V \sqrt{\frac{\pi RT}{2\mu_{\text{пр}}}} \approx 5{,}3 \cdot 10^{27}\ \text{с}^{-1},$$

где $\mu_{\text{пр}} = \mu_1 \mu_2 / (\mu_1 + \mu_2) = 30 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

6.19. $l_1 = \pi^{-1} \left[4\sqrt{2} r_1^2 n_1 + (r_1 + r_2)^2 n_2 \sqrt{1 + \frac{m_1}{m_2}} \right]^{-1}$;

$$l_2 = \pi^{-1} \left[4\sqrt{2} r_2^2 n_2 + (r_1 + r_2)^2 n_1 \sqrt{1 + \frac{m_2}{m_1}} \right]^{-1}.$$

Решение. Движущаяся молекула может сталкиваться как с молекулами своего вида, так и с молекулами другого вида. В этой связи целесообразно ввести четыре разных поперечных сечения рассеяния:

$$\sigma_{11} = \pi (2r_1)^2 = 4\pi r_1^2;\ \ \sigma_{12} = \sigma_{21} = \pi (r_1 + r_2)^2,\ \ \sigma_{11} = 4\pi r_2^2.$$

Для средней частоты столкновения одной молекулы первого и второго видов получаем соответственно

$$\langle \nu_1 \rangle = n_1 \sigma_{11} \langle v_{11} \rangle + n_2 \sigma_{12} \langle v_{12} \rangle;$$
$$\langle \nu_2 \rangle = n_2 \sigma_{22} \langle v_{22} \rangle + n_1 \sigma_{21} \langle v_{21} \rangle,$$

где $\langle v_{11} \rangle = \sqrt{2} \langle v_1 \rangle$ и $\langle v_{22} \rangle = \sqrt{2} \langle v_2 \rangle$ – средние скорости молекул первого и второго вида относительно себе подобных, $\langle v_{12} \rangle = \langle v_{21} \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_{\text{пр}}}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}$ – средняя скорость первой молекулы относительно второй (см. решение задачи 6.14).

Средняя длина свободного пробега молекулы равна отношению среднего расстояния, пройденного молекулой за некоторое время τ, к числу соударений, которое она за это время испытала: $l_i = \frac{\langle v_i \rangle \tau}{\langle \nu_i \rangle \tau} = \frac{\langle v_i \rangle}{\langle \nu_i \rangle}$, где средняя скорость молекул $\langle v_i \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_i}}$.

Таким образом, для средней длины свободного пробега молекул разных видов находим:

$$l_1 = \frac{1}{\sqrt{2}n_1\sigma_{11} + n_2\sigma_{12}\dfrac{\langle v_{12}\rangle}{\langle v_1\rangle}} = \pi^{-1}\left[4\sqrt{2}r_1^2 n_1 + (r_1+r_2)^2 n_2\sqrt{1+\frac{m_1}{m_2}}\right]^{-1};$$

$$l_2 = \frac{1}{\sqrt{2}n_2\sigma_{22} + n_1\sigma_{21}\dfrac{\langle v_{21}\rangle}{\langle v_2\rangle}} = \pi^{-1}\left[4\sqrt{2}r_2^2 n_2 + (r_1+r_2)^2 n_1\sqrt{1+\frac{m_2}{m_1}}\right]^{-1}.$$

6.20. $l_{12} \approx 4{,}5\cdot 10^{-8}$ м, $l_{21} \approx 1{,}9\cdot 10^{-8}$ м.

Решение. Воспользуемся формулой, полученной в задаче 6.14 (пункты а) и б)) для частоты соударений одной молекулы с молекулами другого вида:

$$\nu_{12} = 4(r_1+r_2)^2 n_2\sqrt{\frac{\pi RT}{2}\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}\right)}.$$

Средняя длина свободного пробега молекулы водорода между соударениями с молекулами углекислого газа равна:

$$l_{12} = \frac{\langle v_1\rangle}{\langle \nu_{12}\rangle} = \pi^{-1}(r_1+r_2)^{-2}\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{-1/2} n_2^{-1} \approx 4{,}5\cdot 10^{-8}\ \text{м},$$

а средняя длина свободного пробега молекулы углекислого газа между столкновениями с молекулами водорода:

$$l_{21} = \frac{\langle v_2\rangle}{\langle \nu_{21}\rangle} = \pi^{-1}(r_1+r_2)^{-2}\left(1+\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{-1/2} n_1^{-1} \approx 1{,}9\cdot 10^{-8}\ \text{м}.$$

6.21. $l \sim T$; $\langle \nu\rangle \sim 1/\sqrt{T}$; $z \sim T^{-3/2}$.

Решение. Так как масса газа постоянна, то при $p = \text{const}$ из уравнения Менделеева–Клапейрона получаем: $V \sim T$. Следовательно, концентрация молекул $n \sim 1/V \sim 1/T$. Средняя скорость молекул газа $\langle v\rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}} \sim \sqrt{T}$. Используя эти зависимости, находим:

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \sim T;\quad \langle \nu\rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n\langle v\rangle \sim 1/\sqrt{T};\quad z = \frac{1}{2}n\langle \nu\rangle \sim T^{-3/2}.$$

6.22. $l \sim 1/p$; $\langle \nu \rangle \sim p$; $z \sim p^2$.

Решение. Так как масса газа постоянна, то при $T = \text{const}$ $V \sim 1/p$ и $n \sim 1/V \sim p$. Средняя скорость молекул не меняется. Следовательно, $l = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \sim 1/p$; $\langle \nu \rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n \langle v \rangle \sim p$; $z = \dfrac{1}{2} n \langle \nu \rangle \sim p^2$.

6.23. Длина свободного пробега не изменилась; частота столкновений увеличилась в $\sqrt{\alpha}$ раз.

6.24. а) $\tau_1 \approx 1{,}1 \cdot 10^{-10}$ с; б) $\tau_1 \approx 1{,}7 \cdot 10^{-10}$ с.

Решение.. При нормальных условиях:

$$l_0 = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} \approx 6{,}6 \cdot 10^{-8} \text{ м}, \quad \langle v \rangle_0 = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \approx 454 \text{ м/с};$$

$$\tau_0 = \frac{l}{\langle v \rangle} \approx 1{,}45 \cdot 10^{-10} \text{с}.$$

а). Если $V = \text{const}$, то $n = \text{const}$ и $l = l_0$. $\langle v \rangle$ увеличится в $\sqrt{T_1/T_0} \approx 1{,}37$ раз, следовательно во столько же раз уменьшится τ:

$$\tau_1 = \tau_0 \sqrt{T_0/T_1} \approx 1{,}1 \cdot 10^{-10} \text{с}.$$

б). Если $p = \text{const}$, то $n \sim 1/V \sim 1/T$, $l = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \sim T$ и, следовательно, $l_1 = l_0 \cdot (T_1/T_0) \approx 9{,}0 \cdot 10^{-8}$ м. $\tau = \dfrac{l}{\langle v \rangle} \sim \sqrt{T}$, т.е.

$$\tau_1 = \tau_0 \sqrt{T_1 T_0} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-10} \text{с}.$$

6.25. а) уменьшилась в α раз; б) уменьшилась в $\sqrt{\alpha}$ раз.

6.26. а) $l \sim V$, $\langle \nu \rangle \sim V^{-(n+1)/2}$; б) $l \sim p^{-1/n}$, $\langle \nu \rangle \sim p^{(n+1)/2n}$; в) $l \sim T^{1/(1-n)}$, $\langle \nu \rangle \sim T^{(n+1)/2(n-1)}$.

Решение. а) Из уравнения Менделеева–Клапейрона $pV = \nu RT$ следует, что температура газа $T \sim 1/pV \sim V^{1-n}$, поэтому средняя скорость молекул $\langle v \rangle \sim \sqrt{T} \sim V^{(1-n)/2}$. Таким образом,

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \sim V; \quad \langle \nu \rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n \langle v \rangle \sim V^{-(n+1)/2}.$$

б) Из уравнения процесса $V \sim p^{-1/n}$ и $n \sim 1/V \sim p^{1/n}$. С учетом $pV = \nu RT$ имеем $T \sim 1/pV \sim p^{(n-1)/n}$, поэтому $\langle v \rangle \sim \sqrt{T} \sim p^{(n-1)/2n}$. Используя эти зависимости, находим:

$$l \sim \frac{1}{n} \sim p^{-1/n}; \quad \langle \nu \rangle \sim n \langle v \rangle \sim p^{(n+1)/2n}.$$

в) С учетом уравнения $pV = \nu RT$ уравнение процесса можно переписать в виде: $TV^{n-1} = \text{const}$, т. е. $V \sim T^{1/(1-n)}$ и $n \sim 1/V \sim T^{1/(n-1)}$. Средняя скорость молекул $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$, поэтому

$$l \sim \frac{1}{n} \sim T^{1/(1-n)}; \quad \langle \nu \rangle \sim n \langle v \rangle \sim T^{(n+1)/2(n-1)}.$$

6.27. *Решение.* Используем формулы, полученные при решении задачи 6.26, положив в них $n = \gamma$:

$$l \sim p^{-1/\gamma}; \quad \langle \nu \rangle \sim p^{(\gamma+1)/2\gamma}.$$

В результате получаем средняя длина свободного пробега увеличится в $2^{1/\gamma}$ раз, а частота $\langle \nu \rangle$ уменьшится в $2^{(\gamma+1)/2\gamma}$ раз.

6.28. $p \approx 0{,}94$ Па.

Решение. Длина свободного пробега молекул воздуха $l = \dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$ в состоянии вакуума должна превышать характерный размер сосуда L. Поэтому $p = \dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 L} \approx 0{,}94$ Па.

6.29. *Решение.* Рассчитаем длину свободного пробега молекул в большом пространстве при заданной температуре:

$$l = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} \approx 96 \text{ м}.$$

Так как $l/L \approx 960$, можно считать, что прибор является высоко вакуумированным.

6.30. $m \approx 8 \cdot 10^{-10}$ кг.

Решение. Чтобы атомы гелия не сталкивались друг с другом, длина свободного пробега атомов должна быть больше характерного размера сосуда, т.е. $l = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \geq 2r$. Отсюда определяем критическую концентрацию атомов гелия: $n_{\text{кр}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi r d^2}$. Тогда максимальное число атомов в сосуде равно

$$N_{\max} = n_{\text{кр}} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2r^2}{3\sqrt{2}d^2}.$$

При этом масса гелия

$$m = \frac{\mu_{\text{He}} N_{\max}}{N_{\text{A}}} = \frac{2\mu_{\text{He}} r^2}{3\sqrt{2}d^2 N_{\text{A}}} \approx 8 \cdot 10^{-10} \text{ кг}.$$

6.31. $a \approx \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} \approx 1{,}8 \cdot 10^{-7}$ м $= 0{,}18$ мкм.

6.32. $P(s) \approx 0{,}107$.

Решение. Вероятность, что молекула пройдет путь x без столкновений, равна $P(x) = \exp(-x/l)$. Средняя длина свободного пробега молекул $l = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$, поэтому искомая вероятность равна

$$P(s) = \exp\left(-\frac{s}{l}\right) = \exp\left(-\frac{skT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}\right) \approx 0{,}107.$$

6.33. 0,135; 0,05; $4{,}5 \cdot 10^{-5}$.

6.34. а) 0,37; б) $\approx 0{,}23$.

Решение. Относительное число молекул, пролетевших путь x без столкновений, и есть вероятность того, что молекула пройдет без столкновений путь $x = l$: $P(x) = N(x)/N_0 = \exp(-x/l)$.

а) $N(x > l)/N_0 = P(l) = e^{-1} = 0{,}37$;

б) $N(l < x < 2l)/N_0 = P(l) - P(2l) = e^{-1} - e^{-2} \approx 0{,}23$.

6.35. $\langle t \rangle = 1/\alpha$

Решение. Пусть $P(t)$ — вероятность того, что молекула не испытает столкновений за время t. Тогда вероятность не испытать соударений за время dt равна $P(\mathrm{d}t) = (1 - \alpha \mathrm{d}t)$. Согласно формуле умножения вероятностей для независимых событий молекула не испытает соударения за время $(t + \mathrm{d}t)$ с вероятностью

$$P(t + \mathrm{d}t) = P(t)(1 - \alpha \mathrm{d}t).$$

Преобразуем полученное уравнение к виду:

$$P(t + \mathrm{d}t) - P(t) = \mathrm{d}P = -\alpha P(t)\mathrm{d}t.$$

Разделяя переменные, получаем

$$\mathrm{d}P/P = -\alpha \mathrm{d}t,$$

откуда после интегрирования будем иметь:

$$P(t) = e^{-\alpha t},$$

где учтено, что $P(0) = 1$.

Среднее время между столкновениями находим по формуле:

$$\langle t \rangle = \int_0^\infty t e^{-\alpha t} \mathrm{d}t \Big/ \int_0^\infty e^{-\alpha t} \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}.$$

§7. Явления переноса

7.1. $\eta \approx 1{,}34 \cdot 10^{-5}$ Па · с.

Решение. Среднюю скорость и среднюю длину свободного пробега молекул кислорода находим по формулам:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \approx 430 \text{ м/с}; \; l = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_0} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}.$$

Коэффициента диффузии равен

$$D = \frac{1}{3}\langle v\rangle l = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \cdot \frac{kT}{3\sqrt{2}\pi d^2 p} \approx 4{,}86 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Коэффициент вязкости $\eta = \frac{1}{3}\langle v\rangle l\rho = D\rho$, где плотность газа $\rho = mn_0 = \frac{mp}{kT} = \frac{\mu p}{RT}$. Окончательно: $\eta = D \cdot \frac{\mu p}{RT} \approx 1{,}34 \cdot 10^{-5}\ \text{Па} \cdot \text{с}$.

7.2. $D = \sqrt{\frac{RT}{\pi\mu}} \cdot \frac{2}{3\sigma n} \approx 1{,}9 \cdot 10^{-5}\ \text{м}^2/\text{с}$.

7.3. $D \approx 2{,}96 \cdot 10^{-5}$ м^2/с.

Решение. Связь коэффициента теплопроводности с коэффициентами диффузии D и вязкости η выражается формулами: $\lambda = \eta \bar{c}_V = D\rho\bar{c}_V$, откуда $\eta = \lambda / \bar{c}_V$, где $\bar{c}_V = \frac{3R}{2\mu}$. Окончательно:

$$\eta = \lambda/\bar{c}_V = \frac{2\mu\lambda}{3R} \approx 5{,}3 \cdot 10^{-5}\ \text{Па} \cdot \text{с}$$

Коэффициент диффузии $D = \lambda/(\rho\,\bar{c}_V)$, где $\rho = \frac{\mu p}{RT}$. Тогда $D = \frac{\lambda RT}{\mu p} \cdot \frac{2\mu}{3R} = \frac{2\lambda T}{3p} \approx 2{,}96 \cdot 10^{-5}$ м^2/с.

7.4. $\eta = \frac{pD\mu}{RT} \approx 1{,}8 \cdot 10^{-5}\ \text{Па} \cdot \text{с}$.

7.5. $D \approx 2{,}03 \cdot 10^{-5}$ м^2/с.

Решение. Используем связь между коэффициентами теплопроводности и диффузии $\lambda = D\rho\bar{c}_V$. Плотность газа найдем из условия: $N = nV = \frac{\rho}{m}V = \frac{\rho N_\text{A}}{\mu}V$, откуда $\rho = \frac{\mu N}{VN_\text{A}}$.

Коэффициент диффузии газа равен

$$D = \frac{\lambda}{\rho \bar{c}_V} = \frac{VN_A}{\mu N} \cdot \frac{2\mu}{5R}\lambda = \frac{2\lambda V}{5kN} \approx 2{,}03 \cdot 10^{-5}\ \text{м}^2/\text{с}\,.$$

7.6. $n \approx 1{,}8 \cdot 10^{25}\ 1/\text{м}^3$.

Решение. Из связи коэффициентов диффузии и вязкости $\eta = D\rho$ находим плотность газа $\rho = \eta / D$, а затем – концентрацию молекул $n = \frac{\rho}{m} = \frac{\rho N_A}{\mu} = \frac{\eta N_A}{\mu D} \approx 1{,}8 \cdot 10^{25}\ 1/\text{м}^3$.

7.7. $d \approx 3{,}8 \cdot 10^{-10}$м.

Решение. Коэффициент вязкости равен

$$\eta = \frac{1}{3}\langle v \rangle l \rho = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \cdot \frac{\mu n}{N_A} = \frac{2\sqrt{RT\mu}}{3\pi^{3/2} N_A d^2}\,,$$

откуда $d = \sqrt{\frac{2\sqrt{RT\mu}}{3\eta N_A \pi^{3/2}}} \approx 3{,}8 \cdot 10^{-10}$ м.

7.8. $l = \frac{3D}{\langle v \rangle} = 3D\sqrt{\frac{\pi\mu}{8RT}} \approx 1{,}3 \cdot 10^{-7}\text{м} \approx 39\langle a \rangle$,

где $\langle a \rangle = \left(V / N_A\right)^{1/3} \approx 0{,}33 \cdot 10^{-8}$ м.

7.9. $\langle v \rangle \approx 630$ м/с.

Решение. Из связи коэффициентов диффузии и вязкости $\eta = D\rho$ находим плотность газа $\rho = \eta / D \approx 1{,}6$ кг/м^3.

Средняя длина свободного пробега:

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}\,,$$

а в соответствии с уравнением Менделеева–Клапейрона $p/T = \rho R/\mu$.

Окончательно получаем:

$$l = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} = \frac{k\mu}{\sqrt{2}\pi d^2 \rho R} = \frac{\mu D}{\sqrt{2}\pi d^2 \eta N_A} \approx 5{,}8 \cdot 10^{-8}\ \text{м}\,.$$

Средняя скорость молекул $\langle v\rangle = \dfrac{3D}{l} = \dfrac{3\sqrt{2}\pi d^2 \eta N_A}{\mu} \approx 630$ м/с.

7.10. $\operatorname{grad}\rho \approx 0{,}042$ кг/м^4.

Решение. Масса газа, переносимая в результате диффузии, определяется законом Фика: $m = -D \cdot \operatorname{grad}\rho \cdot St$, где ρ – плотность, S – площадь поверхности слоя, t – длительность диффузии.

Искомый градиент плотности равен

$$\operatorname{grad}\rho = -\frac{m}{DSt} \approx 0{,}042 \text{ кг/м}^4.$$

7.11. $\eta_1/\eta_2 \approx 2{,}26$.

Решение. Коэффициент вязкости газа

$$\eta = \frac{1}{3}\langle v\rangle l\rho = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \cdot \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} \cdot \frac{p\mu}{RT} \sim \frac{\sqrt{\mu}}{d^2},$$

откуда $\dfrac{\eta_1}{\eta_2} = \sqrt{\dfrac{\mu_1}{\mu_2}}\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)^2 \approx 2{,}26$.

7.12. $\dfrac{D_1}{D_2} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt{\dfrac{\mu_2}{\mu_1}}\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)^2 \approx 0{,}11$; $\dfrac{\eta_1}{\eta_2} = \sqrt{\dfrac{\mu_1}{\mu_2}}\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)^2 \approx 1{,}13$.

7.13. $D = \dfrac{2}{3\sigma}\sqrt{\dfrac{R}{\pi\mu}} \cdot \dfrac{kT^{3/2}}{p}$.

Решение. Зависимость коэффициентов вязкости и диффузии от давления и температуры имеют вид:

$$\eta = \frac{1}{3}\langle v\rangle l\rho = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n} \cdot \frac{\mu n}{N_A} = \frac{2}{3\sigma N_A}\sqrt{\frac{\mu R}{\pi}} \cdot \sqrt{T} = A\sqrt{T},$$

где A – постоянная, $\rho = mn = (\mu/N_A)\cdot n$ – плотность газа, m – масса одной молекулы. Коэффициент вязкости не зависит от давления и при $T = \text{const}$ не изменяется.

Коэффициент диффузии

$$D = \frac{1}{3}\langle v\rangle l = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \cdot \frac{kT}{\sqrt{2}\sigma p} = \frac{2}{3\sigma}\sqrt{\frac{R}{\pi\mu}} \cdot \frac{kT^{3/2}}{p}.$$

При T = const коэффициент диффузии уменьшится в α раз.

7.14. а) в β раз; б) в $\beta^{3/2}$ раз.

Решение. а) Процесс проводится при T = const.

Зависимость коэффициента вязкости от давления и температуры имеет вид:

$$\eta = \frac{1}{3}\langle v\rangle l\rho = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\sigma n}\cdot\frac{\mu n}{N_A} = \frac{2}{3\sigma N_A}\sqrt{\frac{\mu R}{\pi}}\cdot\sqrt{T} = A\sqrt{T}\,,$$

где A – постоянная, $\rho = mn = (\mu/N_A)\cdot n$ – плотность газа.

Таким образом, η не зависит от объема и при T = const не изменится.

$$D = \frac{1}{3}\langle v\rangle l = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\sigma n} = \frac{2}{3\sigma}\sqrt{\frac{R}{\pi\mu}}\cdot\frac{kT^{3/2}}{p} = B\frac{T^{3/2}}{p}\,.$$

Если T = const, то из уравнения $pV = \dfrac{M}{\mu}RT$ следует, что при уменьшении объема V в β раз давление газа увеличится в β раз: $p_1 = \beta p_0$. Коэффициент диффузии станет равен:

$$D_1 = B\frac{T_1^{3/2}}{p_1} = B\frac{T_0^{3/2}}{\beta p_0} = D_0/\beta\,,$$

т.е. уменьшится в β раз.

б) Процесс проводится при p = const.

Из уравнения $pV = \dfrac{M}{\mu}RT$ следует, что при уменьшении объема V в β раз температура газа уменьшится в β раз: $T_1 = T_0/\beta$. При этом $\eta_1 = A\sqrt{T_1} = A\sqrt{T_0/\beta} = \eta_0/\sqrt{\beta}$, т.е. коэффициент вязкости уменьшится в $\sqrt{\beta}$ раз.

Коэффициент диффузии станет равным:

$$D_1 = B\frac{T_1^{3/2}}{p_1} = B\frac{(T_0/\beta)^{3/2}}{p_0} = \frac{D_0}{\beta^{3/2}}\,,$$

т.е. уменьшится в $\beta^{3/2}$ раз.

7.15. а) в 2,5 раза; б) в 1,7 раза; в) в 4 раза.

Решение. а) Найдем зависимость η и D от объема.

С учетом уравнения Менделеева–Клапейрона $pV = \nu RT$ температура газа $T \sim 1/(pV) \sim V^{1-\gamma}$. Таким образом,

$$\eta = \frac{1}{3}\langle v\rangle l\rho = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n} \cdot \frac{\mu n}{N_A} \sim \sqrt{T} \sim V^{(1-\gamma)/2} \sim V^{-1/6};$$

$$D = \frac{1}{3}\langle v\rangle l = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n} \sim V\sqrt{T} \sim V^{(3-\gamma)/2} \sim V^{2/3}.$$

При уменьшении объема в $\alpha = 4$ раза η увеличится в $\alpha^{1/6} \approx 1{,}26$ раза, D уменьшится в $\alpha^{2/3} \approx 2{,}5$ раза.

б). Найдем зависимость η и D от давления.

Из уравнения процесса $V \sim p^{-1/\gamma}$. С учетом уравнения $pV = \nu RT$ имеем $T \sim 1/(pV) \sim p^{(\gamma-1)/\gamma}$. Отсюда

$$\eta \sim \sqrt{T} \sim p^{(\gamma-1)/2\gamma} \sim p^{1/5};\ D \sim V\sqrt{T} \sim p^{(\gamma-3)/2\gamma} \sim p^{-2/5}.$$

При уменьшении давления в $\alpha = 4$ раза η уменьшится в $\alpha^{1/5} \approx 1{,}32$ раза, D увеличится в $\alpha^{2/5} \approx 1{,}7$ раза.

в) Найдем зависимость η и D от температуры.

С учетом уравнения $pV = \nu RT$ уравнение процесса можно переписать в виде: $TV^{\gamma-1} = \text{const}$, откуда $V \sim T^{1/(1-\gamma)}$. Следовательно: $\eta \sim \sqrt{T}$; $D \sim V\sqrt{T} \sim T^{(3-\gamma)/2(1-\gamma)} \sim T^{-1}$.

При увеличении температуры в $\alpha = 4$ раза η увеличится в $\sqrt{\alpha} = 2$ раза, а D уменьшится в $\alpha = 4$ раза.

7.16. $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0} = \sqrt{\dfrac{T_1}{T_0}} \approx 1{,}09$.

7.17. $v = v_0(x/d)$ при $0 \le x \le d$: $f = -\eta\dfrac{v_0}{d}$.

Решение. Направим ось X перпендикулярно пластинам, совместив начало отсчета с неподвижной пластиной. Градиент скорости в направлении, перпендикулярном пластинам, можно считать постоянным: $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{v_0}{d}$, откуда $v = v_0(x/d)$ при $0 \le x \le d$.

Согласно формуле Ньютона, сила вязкого трения, действующая на единицу площади движущейся пластины, равна

$$f = j_{mv} = -\eta \frac{\partial v}{\partial x} = -\eta \frac{v_0}{d}.$$

Она направлена в сторону, противоположную скорости пластины (на это указывает знак "минус"). Такая же сила будет действовать на единицу площади неподвижной пластины. Можно связать систему координат с движущейся пластиной, тогда её скорость будет равна нулю, а второй пластины – $(-v_0)$.

7.18. $F = \dfrac{\eta}{h}(v_1 + v_2) = 5{,}1 \cdot 10^{-3}$ Н/м^2.

7.19. $f \approx 31$ Н/м^2.

Решение. Согласно формуле Ньютона, сила вязкого трения, действующая на единицу площади крыла, равна:

$$f = j_{mu} = -\eta \frac{\partial u}{\partial x} = -\eta \frac{\Delta v}{\Delta x} = -\eta \frac{v}{\Delta x}.$$

Коэффициент вязкости воздуха находим по формуле:

$$\eta = \frac{1}{3}\langle v \rangle l \rho = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \cdot \frac{\mu n}{N_A} = \frac{2\sqrt{RT\mu}}{3\pi^{3/2} N_A d^2}.$$

Окончательно: $f = \dfrac{2\sqrt{RT\mu}}{3\pi^{3/2} N_A d^2} \cdot \dfrac{v}{\Delta x} \approx 31$ н/м^2 .

7.20. $v = v_0 \dfrac{\ln(r/R_2)}{\ln(R_1/R_2)}$ $(R_1 \le r \le R_1)$.

Решение. Полагая, что скорость жидкости у поверхности неподвижного цилиндра равна нулю, найдем распределение скоростей жидкости вдоль радиуса. Для этого выделим в жидкости цилиндрическую трубку радиусом r, толщиной dr и длиной h, коаксиальную цилиндрам (см. рис. О.7.20).

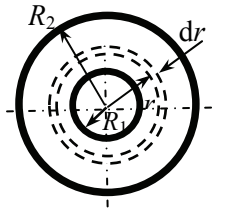


Рис. О.7.20.

На внешнюю и внутреннюю боковые поверхности цилиндрической трубки со стороны прилегающих слоев жидкости будет

действовать сила вязкого трения $F_r = -2\pi r h \eta \dfrac{\partial \upsilon}{\partial r}$. Чтобы движение жидкости было равномерным, эта сила должна быть постоянной и равной внешней силе F, которая приводит в движение внутренний цилиндр.

Разделяя переменные, получаем уравнение:

$$\frac{F}{r}\mathrm{d}r = -2\pi\eta h\,\mathrm{d}\upsilon,$$

интегрируя которое, находим силу F:

$$F\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = -2\pi\eta h\int_{\upsilon_0}^{0}\mathrm{d}\upsilon \;\rightarrow\; F = 2\pi\eta h\,\frac{\upsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}.$$

Полагая $h = 1$, окончательно получаем:

$$F_{l=1} = 2\pi\eta\frac{\upsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}.$$

Интегрируя предыдущее уравнение в других пределах, получаем:

$$F\int_{r}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = -2\pi\eta h\int_{\upsilon}^{0}\mathrm{d}\upsilon \;\rightarrow\; F = 2\pi\eta h\,\frac{\upsilon}{\ln(R_2/r)}.$$

Приравнивая выражения для F, находим распределение скорости жидкости вдоль радиуса цилиндров:

$$\upsilon = \upsilon_0\frac{\ln(r/R_2)}{\ln(R_1/R_2)}\;\;(R_1 \le r \le R_1).$$

7.21. $\eta = \dfrac{2hf\varphi}{\pi\omega a^4}$.

Решение. Определим момент сил, действующих со стороны вязкого газа на верхний диск. Для этого выделим на поверхности диска кольцо радиуса r, ширины $\mathrm{d}r$ и площадью $dS = 2\pi r\mathrm{d}r$. Момент сил вязкого трения со стороны газа, действующих на это колечко, равен:

$\mathrm{d}M_{\text{тр}} = -r\eta\cdot(\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}x)\mathrm{d}S$, где градиент скорости $(\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}x) = -r\omega/h$, так как верхний диск неподвижен.

Суммарный момент сил, действующих на верхний диск, равен

$$M_{\text{тр}} = \int_0^a \eta \frac{\omega}{h} \cdot 2\pi r^3 \mathrm{d}r = \frac{\pi\eta\omega a^4}{2h}.$$

Он уравновешивается моментом сил со стороны закрученной нити: $M_{\text{кр}} = f\varphi$. Отсюда находим η газа:

$$\frac{\pi\eta\omega a^4}{2h} = f\varphi \;\rightarrow\; \eta = \frac{2hf\varphi}{\pi\omega a^4}.$$

7.22. $\eta = \dfrac{2\beta md}{\pi a^2}$.

Решение. Между дисками образуется градиент угловых скоростей вращения слоев газа, в результате чего со стороны газа на вращающийся диск будет действовать момент сил вязкого трения, равный $M_{\text{тр}} = \int_0^a \eta \frac{\omega}{d} \cdot 2\pi r^3 \mathrm{d}r = \frac{\pi\eta\omega a^4}{2d}$ (см. решение задачи 7.17).

Со стороны закрученной нити на диск действует момент сил $M_{\text{кр}} = f\varphi$, где f – модуль кручения нити. Учитывая, что $\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ и момент инерции диска $I = ma^2/2$, запишем уравнение вращательного движения верхнего диска $I\ddot{\varphi} = -M_{\text{тр}} - M_{\text{кр}}$ в виде:

$$\frac{1}{2}ma^2\ddot{\varphi} = -\frac{\pi\eta a^4}{2d}\dot{\varphi} - f\varphi, \text{ т.е. } \ddot{\varphi} + 2\cdot\frac{\pi\eta a^2}{2dm}\dot{\varphi} + \frac{2f}{ma^2}\varphi = 0,$$

откуда находим коэффициент затухания: $\beta = \dfrac{\pi\eta a^2}{2dm}$.

Искомый коэффициент вязкости газа: $\eta = \dfrac{2\beta md}{\pi a^2}$.

7.23. $M_0 = \dfrac{4\pi\eta\omega R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$.

Решение. Сила внутреннего трения, которая вовлекает во вращение концентрические слои газа, обусловлена с различием угловых скоростей соседних слоев, то есть зависимостью ω(*r*). Свя-

занный с этим радиальный градиент скорости: $\frac{\partial u}{\partial r} = r\frac{\partial \omega}{\partial r}$.

Наличие градиента скорости приводит к появлению потока импульса, которым определяется сила f вязкого трения в газе, действующая на единицу площади: $f = j_{mu} = -\eta\frac{\partial u}{\partial r} = -\eta r\frac{\partial \omega}{\partial r}$.

Условие стационарности вращения слоя жидкости, т.е. отсутствия у слоя углового ускорения, можно записать в виде:

$$\left|\mathbf{M}(r)\right| = \left|\mathbf{M}(r + \mathrm{d}r)\right| = \mathrm{const}\,.$$

Это условие справедливо и для слоя, прилегающего к внутреннему цилиндру, для которого момент механических сил равен M_0: $\left|\mathbf{M}(r)\right| = M_0$. Полагая, что скорости прилегающих к цилиндрам слоев совпадают со скоростями цилиндров, получаем граничные условия для угловой скорости: $\omega(R_2) = \omega$ и $\omega(R_1) = 0$.

Момент силы, действующий на единицу длины внутреннего цилиндра, равен $M_0 = rF = \eta r^2\frac{\partial \omega}{\partial r}(2\pi r) = \mathrm{const}$. Отсюда находим зависимость угловой скорости вращения слоев газа от расстояния до оси цилиндров:

$$\frac{\partial \omega}{\partial r} = \frac{M_0}{2\pi\eta r^3} \;\rightarrow\; \omega(r) = \frac{M_0}{4\pi\eta}\int_{R_1}^{r}\frac{\mathrm{d}r}{r^3} = \frac{M_0}{4\pi\eta}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{r^2}\right).$$

Учтя, что $\omega(R_2) = \omega$, для искомого момента внешних сил получаем: $M_0 = \frac{4\pi\eta\omega R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$.

7.24. $M_0 = p\omega a^4\sqrt{\frac{\pi\mu}{8RT}}$.

Решение. Выделим мысленно на вращающемся диске кольцо радиусом r, шириной $\mathrm{d}r$ и площадью $2\pi r\mathrm{d}r$. Об это кольцо ежесекундно ударяются и отражаются от него $\mathrm{d}N = \frac{1}{4}n\langle v\rangle\cdot 2\pi r\mathrm{d}r$ молекул, каждая из которых уносит момент количества движения

$L = mr^2\omega$. Поскольку газ сильно разрежен, молекулы не сталкиваются друг с другом и передают момент количества движения, полученный при ударе о вращающийся диск, второму диску. Полный момент количества движения, получаемый ежесекундно вторым диском, равен

$$L_{\text{полн}} = \int_0^a \frac{1}{4} n\langle v\rangle \cdot 2\pi r \cdot m\omega r^2 \mathrm{d}r = \frac{1}{8}\pi n m\omega\langle v\rangle a^4 .$$

Поскольку $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = M$, то момент внешних сил, который следует приложить ко второму диску, чтобы он был неподвижен, равен

$$M_0 = L_{\text{полн}} = \frac{1}{8}\pi n m\omega\langle v\rangle a^4 = \frac{\pi p m\omega a^4}{8kT}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = p\omega a^4\sqrt{\frac{\pi\mu}{8RT}} .$$

7.25. $p = \dfrac{M_0}{\omega R_0^4}\sqrt{\dfrac{2RT}{\pi\mu}}$.

Решение. Молекула, ударяющаяся о поверхность вращающегося диска на расстоянии r от его оси, приобретает импульс, равный $mu = m\omega r$. Частота ударов молекул о плоскую поверхность выделенного на диске кольца равна

$$2\pi r\mathrm{d}r\ \mathrm{d}\nu = \frac{1}{4} n\langle v\rangle \cdot (2\pi r\mathrm{d}r) .$$

Сила, действующая на выделенное колечко, равна уносимому за единицу времени импульсу:

$$\mathrm{d}F = mu \cdot \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} m\omega n\langle v\rangle \cdot r^2\mathrm{d}r ,$$

а момент силы равен $\mathrm{d}M = r \cdot \mathrm{d}F = \dfrac{\pi}{2} m\omega n\langle v\rangle \cdot r^3\mathrm{d}r$.

Интегрируя с учетом двух сторон у диска, находим полный тормозящий момент сил:

$$M_0 = 2\int \mathrm{d}M = \pi m\omega n\langle v\rangle \int_0^{R_0} r^3\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4} m\omega n\langle v\rangle R_0^4 .$$

Используя уравнения $n = \dfrac{p}{kT}$ и $\langle v\rangle = \sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m}}$, окончательно получаем:

$$M_0 = p\omega R_0^4 \sqrt{\frac{\pi\mu}{2RT}} \quad \text{и} \quad p = \frac{M_0}{\omega R_0^4}\sqrt{\frac{2RT}{\pi\mu}}\,.$$

7.26. $v = \dfrac{2}{9\eta} r^2 g(\rho_ф - \rho_г) \approx 0{,}6$ мм/с.

Решение. На падающий в вязкой среде шарик действуют сила тяжести, сила Архимеда $f_{выт} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \rho_г g$ и сила сопротивления, равная по закону Стокса $f_{сопр} = 6\pi r\eta v$.

Запишем уравнение движения шарика в проекции на вертикальную ось X: $m\ddot{x} = mg - f_A - f_{сопр}$.

При установившемся движении шарика это уравнение принимает вид: $6\pi r\eta v = (4/3)\pi r^3 g\left(\rho_ф - \rho_г\right)$, откуда

$$v = \frac{2}{9\eta} r^2 g\left(\rho_ф - \rho_г\right) \approx 0{,}6 \text{ мм/с}.$$

7.27. $r \approx 0{,}7$ мм.

Решение. Скорость установившегося движения капель воды в воздухе без ветра направлена вертикально вниз и равна (см. решение задачи 7.26):

$$v = \frac{2}{9\eta} r^2 g\left(\rho - \rho_в\right).$$

При наличии ветра вертикальная скорость падения капель и горизонтальная скорость ветра складываются, в результате чего капля падает под углом φ к вертикали. В этом случае вертикальная составляющая скорости капли равна $v = V/\mathrm{tg}\varphi = (2/9)r^2 g(\rho - \rho_в)/\eta$, откуда находим радиус капли:

$$r = \left(\frac{9\eta V}{2\mathrm{tg}\phi \cdot g\left(\rho - \rho_в\right)}\right)^{1/2} \approx 0{,}7\cdot 10^{-3} \text{ м} \approx 0{,}7 \text{ мм}.$$

7.28. $d_{max} \approx 4{,}5$ мм.

Решение. Скорость установившегося движения шарика $v = (2/9)r^2 g(\rho_с - \rho_м)/\eta$ (см. решение задачи 7.26).

1) Приняв в качестве характерного линейного размера диаметр шарика, запишем число Рейнольдса в виде:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_м v d}{\eta} = \frac{\rho_м}{18\eta^2} d^3 g\left(\rho_с - \rho_м\right) \approx 5{,}5 \cdot 10^{-6}.$$

Предположение о ламинарности течения подтверждается.

2) Приняв $\mathrm{Re} \approx 0{,}5$, определим максимальный диаметр шарика:

$$d_{\max} = \left(\frac{18\eta^2 \mathrm{Re}}{\rho_м g\left(\rho_с - \rho_м\right)}\right)^{1/3} \approx 4{,}5 \cdot 10^{-3}\text{м} \approx 4{,}5\ \text{мм}.$$

7.29. $v(t) = \left(1 - \dfrac{4\pi R^3}{3m}\right) \cdot \dfrac{mg}{6\pi R\eta}$.

Решение. На падающий в вязкой среде шарик действуют сила тяжести mg, сила Архимеда $f_{\text{выт}} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \rho g$ и сила сопротивления, по закону Стокса равная $f_{\text{тр}} = 6\pi R\eta v$, если поток ламинарный.

Направим ось OX вертикально вниз. Уравнение движения шарика в проекциях на ось X имеет вид:

$$m\ddot{x} = mg - f_{\text{A}} - f_{\text{тр}}.$$

Введя обозначение $g' = g\left(1 - 4\pi R^3 \rho/(3m)\right)$, перепишем это уравнение в виде: $m(\mathrm{d}v/\mathrm{d}t) = mg' - 6\pi R\eta v$. Для его решения введем новую переменную $v' = v - \dfrac{g'm}{6\pi R\eta}$. Тогда уравнение движения примет вид:

$$m\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}t} = -6\pi R\eta v'.$$

Решая его методом разделения переменных и возвращаясь от v' к скорости v, находим скорость падения шарика:

$$v(t) = \frac{mg'}{6\pi R\eta}\left[1 - \exp\left(-\frac{6\pi R\eta}{m}t\right)\right].$$

Ускорение шарика равно

$$a = \ddot{x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g' \exp\left(-\frac{6\pi R\eta}{m} t\right).$$

Под действием силы тяжести скорость шарика растет. Одновременно появляется возрастающая пропорционально скорости шарика сила трения. Через некоторое время ускорение шарика станет равным нулю ($\ddot{x} = 0$), а его движение – равномерным. Скорость установившегося движения шарика равна

$$v(t) = \frac{mg'}{6\pi R\eta} = \left(1 - \frac{4\pi R^3}{3m}\right) \cdot \frac{mg}{6\pi R\eta}.$$

7.30. $v_{\text{у}} \approx 3{,}3 \cdot 10^{-6}$ м/с , а $\tau \approx 250$ ч $\approx 10{,}5$ сут.

Решение. Воспользуемся решением задачи 7.26. Скорость установившегося движения пылинок в воздухе равна:

$$v_{\text{у}} = \frac{2}{9\eta} R^2 g\left(\rho - \rho_{\text{с}}\right) \approx 3{,}3 \cdot 10^{-4} \text{м/с}.$$

Оценим время падения пылинки радиусом $R = 1$ мкм с высоты $H = 3$м: $\tau = \dfrac{H}{v_{\text{у}}} = \dfrac{9H\eta}{2R^2 g(\rho - \rho_c)} \approx 9 \cdot 10^3 \text{с} \approx 2{,}5 \text{час}$.

Для пылинок диаметра 0,2 мкм $v_{\text{у}} \approx 3{,}3 \cdot 10^{-6}$ м/с , а $\tau \approx 250$ час $\approx 10{,}5$ суток .

7.31. $v_{\max} = \dfrac{\eta \cdot \mathrm{Re}}{\rho d} \approx 0{,}165$ м/с ; $\Delta p = \dfrac{32\eta v_{\max} h}{d^2} \approx 2{,}9 \cdot 10^3$ Па.

7.32. $\varepsilon_a = \dfrac{kT_1T_2}{T_1 - T_2} \ln n.$

Решение. Используя формулу Пуазейля для расхода жидкости, $J_V = \dfrac{\pi R^4}{8\eta} \dfrac{\Delta p}{h}$, и зависимость коэффициента вязкости жидкости от температуры $\eta = C\exp\left(+\dfrac{\varepsilon_a}{kT}\right)$, находим энергию активации:

$$\varepsilon_a = \frac{kT_1T_2}{T_1 - T_2} \ln \frac{J_1}{J_2} = \frac{kT_1T_2}{T_1 - T_2} \ln n .$$

7.33. Уменьшится в $\sqrt{\alpha}$ раз.

7.34. $\eta \approx 1{,}02 \cdot 10^{-5}$ Па · с.

Решение. За время dt из баллона вытечет масса газа $\mathrm{d}M = \dfrac{\mu V(-\mathrm{d}p)}{RT}$, где d$p < 0$ – изменение давления в баллоне. Используя формулу Пуазейля, запишем массу вытекшего за время dt газа в виде:

$\mathrm{d}M = \rho_0 \dfrac{\pi r^4 (p - p_0)}{8\eta l}\mathrm{d}t$, где $\rho = \dfrac{\mu p_0}{RT}$ – плотность вытекшего газа при давлении p_0.

Приравнивая оба выражения для $\mathrm{d}M$, получаем уравнение:

$$\frac{\mu p_0}{RT} \cdot \frac{\pi r^4 (p - p_0)}{8\eta l}\mathrm{d}t = -\frac{\mu V}{RT}\mathrm{d}p .$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\frac{\pi r^4 p_0}{8\eta l}\int_0^t \mathrm{d}t = -\frac{\mu V}{RT}\int_{p_1}^{p_2}\frac{\mathrm{d}p}{p - p_0} \;\rightarrow\; \frac{\pi r^4 p_0}{8\eta l}t = V\ln\frac{p_1 - p_0}{p_2 - p_0},$$

откуда определяем коэффициент вязкости газа:

$$\eta = \frac{\pi r^4 p_0}{8lV}t\left(\ln\frac{p_1 - p_0}{p_2 - p_0}\right)^{-1} \approx 1{,}02 \cdot 10^{-5}\,\text{Па} \cdot \text{с}.$$

7.35. $h_0 = H\exp\left(-\dfrac{\rho g S_0^2}{8\pi\eta l}\tau\right)$.

Решение. Разность давлений на входе и выходе капилляра определяется высотой жидкости h над уровнем дна и равна $\Delta p = \rho g h$. Используя формулу Пуазейля для расхода жидкости, $J_V = \dfrac{\delta V}{\delta t} = \dfrac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta l}$, определим объем жидкости, прошедшей за малое время dt после открытия крана через капилляр:

$$\mathrm{d}V = J_V\,\mathrm{d}t = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta l}\mathrm{d}t = \frac{\rho g h S_0^2}{8\pi\eta l}\mathrm{d}t .$$

Так как в результате вытекания жидкости её уровень в сосуде понизился на величину dh, поэтому объем вытекшей жидкости равен $\mathrm{d}V = -S\mathrm{d}h$. Приравнивая оба объема, получаем уравнение:

$$\frac{\rho g h S_0^2}{8\pi\eta l}\,\mathrm{d}t = -S\mathrm{d}h\,.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\frac{\rho g S_0^2}{8\pi\eta l}\int_0^{\tau}\mathrm{d}t = -S\int_H^{h_0}\frac{\mathrm{d}h}{h} \;\rightarrow\; \frac{\rho g S_0^2}{8\pi\eta l}\,\tau = S\ln\frac{H}{h_0},$$

откуда определяем искомый уровень жидкости над дном сосуда через время τ: $h_0 = H\exp\left(-\dfrac{\rho g S_0^2}{8\pi\eta l}\,\tau\right)$.

7.36. $J_V = \dfrac{\pi\rho g h/8\eta}{l_1/r_1^4 + l_2/r_2^4}$.

Решение. Воспользуемся понятием гидравлического сопротивления трубы: $Z = \dfrac{8\eta l}{\pi R^4}$. Тогда расход жидкости можно записать в виде: $J_V = \Delta p/Z$. При этом по форме формула Пуазейля по форме аналогична закону Ома, где вместо силы тока – объемный поток (расход) жидкости J_V, вместо напряжения – разность давлений Δp на концах трубы, а Z играет роль электрического сопротивления. Используя аналогию с сопротивлением последовательно и параллельно соединенных, можно определять гидравлическое сопротивление последовательно или параллельно соединенных трубок.

В данной задаче полное гидравлическое сопротивление капиллярной системы равно $Z = \dfrac{8\eta}{\pi}\left(\dfrac{l_1}{r_1^4} + \dfrac{l_2}{r_2^4}\right)$, а разность давлений на её концах определяется высотой уровня жидкости над дном сосуда $\Delta p = \rho g h$. Искомый расход жидкости составляет

$$J_V = \frac{\pi\rho g h/8\eta}{l_1/r_1^4 + l_2/r_2^4}\,.$$

7.37. $u(x) = \dfrac{\Delta p}{2\eta}\left(\dfrac{h^2}{4} - x^2\right)$.

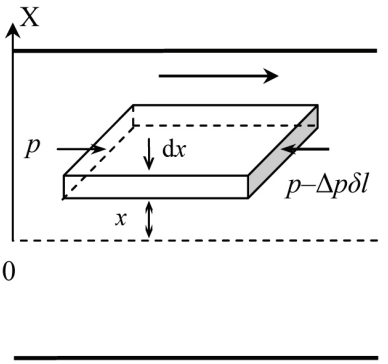


Рис. О.7.37

Решение. Направим ось X перпендикулярно пластинам, совместив начало отсчета с их серединой. Выделим слой жидкости шириной b, длиной δl и толщиной d, находящийся на уровне x (рис. О.7.37). На противоположные торцы этого слоя жидкость будет оказывать давление p и $(p - \Delta p\delta l)$ соответственно. На каждую горизонтальную поверхность слоя действует сила вязкого трения f. Так как течение жидкости равномерное, суммарная сила, действующая на выделенный объем жидкости в направлении её движения, равна нулю:

$$\left[p - \left(p - \Delta p\delta l\right)\right] b\mathrm{d}x + f_x - f_{x+dx} = 0\,.$$

На основании уравнения Ньютона можно записать:

$$f_x = -\eta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_x b\delta l\,, \qquad f_{x+\mathrm{d}x} = -\eta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{r+\mathrm{d}r} b\delta l\,.$$

Для разности сил вязкого трения имеем:

$$f_{x+\mathrm{d}x} - f_x = -\eta b\delta l\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x+\mathrm{d}x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_x\right] = -b\eta\delta l\mathrm{d}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Подставляя полученное соотношение в первое уравнение, получаем: $-\dfrac{\Delta p}{\eta}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$, и после интегрирования находим:

$$-\frac{\Delta p}{\eta}x = \frac{\partial u}{\partial x} + C_1\,.$$

Из условия $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$ находим: $C_1 = 0$. Таким образом, приходим к уравнению: $-\dfrac{\Delta p}{\eta}x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, интегрируя которое при условии $u\big|_{x=h/2} = 0$, получим:

$$u(x)=\frac{\Delta p}{2\eta}\left(\frac{h^2}{4}-x^2\right).$$

7.38. $J_V=\dfrac{\delta V}{\delta t}=\dfrac{\Delta p h^3}{12\eta}$.

Решение. Воспользуемся решением задачи 7.37. За время δt через сечение выделенного слоя (см. рис. О.7.37) проходит объем жидкости $\mathrm{d}V=u(x)\delta t\cdot(b\mathrm{d}x)$. При ширине потока b суммарный объем жидкости, протекающей между плоскостями, равен:

$$\delta V=\int \mathrm{d}V=2\int_0^{h/2}\frac{\Delta p}{2\eta}\left(\frac{h^2}{4}-x^2\right)\delta t b\mathrm{d}x=\delta t\frac{\Delta p h^3 b}{12\eta},$$

а объемный поток (расход) жидкости в расчете на единицу ширины потока составляет $J_V=\dfrac{\delta V}{\delta t}=\dfrac{\Delta p h^3}{12\eta}$.

7.39. $J_V=8{,}4\cdot10^{-2}$ мм^3/с.

Решение. Будем считать процесс вытекания жидкости стационарным. Воспользуемся решением задачи 7.19. Выделим слой жидкости шириной l, длиной d и толщиной $\mathrm{d}x$, находящийся на расстоянии x от середины щели. Разность давлений сверху и снизу щели равна $\Delta p=\rho g h$, следовательно, на выделенный слой будет действовать сила давления $F_p=\rho g h l\mathrm{d}x$. Она уравновешивается силой вязкого трения, действующей на вертикальные поверхности выделенного слоя. Производя вычисления, как делалось в задаче 7.37, находим распределение скорости u вытекающей жидкости в зависимости от расстояния x до середины щели:

$$u(x)=\frac{\rho g h}{2\eta d}\left(\frac{\delta^2}{4}-x^2\right).$$

Максимальная скорость вытекания азота будет при $x=0$:

$$u_{\max}=\frac{\rho g h\delta^2}{8\eta d}\approx 2{,}5\cdot10^{-3}\,\text{м/с}.$$

Объемный расход жидкости равен (см. решение задачи 7.38):

$$J_V = \frac{\delta V}{\delta t} = \frac{\rho g h l \delta^3}{12\eta d} \approx 8{,}4 \cdot 10^{-11}\ \text{м}^3/\text{с} = 8{,}4 \cdot 10^{-2}\ \text{мм}^3/\text{с}\ .$$

7.40. $N = \lambda S \dfrac{T_2 - T_1}{D} \approx 0{,}92$ кВт.

Решение. По закону Фурье количество теплоты через наружную стену за единицу времени равно:

$$Q = j_Q S = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} S = \lambda S \frac{T_2 - T_1}{D}\ .$$

Электроплита должна выделить такое же количество теплоты, т. е. $N = \lambda S \dfrac{T_2 - T_1}{D} \approx 0{,}92$ кВт .

7.41. $Q \approx 55$ Дж.

Решение. Так как расстояние между пластинками и разность температур между ними малы, можно считать $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \approx \dfrac{\Delta T}{\Delta x}$. По закону Фурье $Q = \lambda \dfrac{\Delta T}{\Delta x} S\tau$, где коэффициент теплопроводности азота

$$\lambda = \frac{1}{3} c_V \langle v \rangle l \rho = \frac{1}{3} c_V \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \cdot \frac{\mu n}{N_\text{A}} = \frac{2 c_V \sqrt{RT\mu}}{3\pi^{3/2} N_\text{A} d^2} =$$

$$= \frac{5k}{3\pi^{3/2} d^2} \sqrt{\frac{RT}{\mu}} \approx 9{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})\ .$$

Окончательно: $Q \approx 55$ Дж .

7.42. $W = J_Q = -\lambda \dfrac{T_0 - T_1}{\delta R} 4\pi R^2$.

7.43. $Q \approx 39$ кДж.

Решение. Коэффициент теплопроводности воздуха

$$\lambda = \frac{1}{3} c_V \langle v \rangle l \rho = \frac{1}{3} c_V \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \cdot \frac{\mu n}{N_\text{A}} = \frac{2 c_V \sqrt{RT\mu}}{3\pi^{3/2} N_\text{A} d^2} = A\sqrt{T}\ ,$$

где $A = \text{const}$. По закону Фурье количество теплоты, прошедшее через окно за единицу времени, равно

$$q = j_q S = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} S = -A\sqrt{T}\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} S = \text{const}\,.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим q:

$$q\int_0^D \mathrm{d}x = -AS\int_{T_1}^{T_2} \sqrt{T}\,\mathrm{d}T \;\rightarrow\; q = -A\frac{2S}{3D}\left(T_1^{3/2} - T_2^{3/2}\right).$$

За время $\tau = 1$ час помещение потеряет количество теплоты

$$Q = -A\frac{2S}{3D}\left(T_1^{3/2} - T_2^{3/2}\right)\tau = \frac{4c_V\sqrt{R\mu}S\tau}{9\pi^{3/2}DN_\mathrm{A}d^2}\left(T_1^{3/2} - T_2^{3/2}\right) \approx 39\ \text{кДж}\,.$$

7.44. $T(x) = \left(\dfrac{1}{b} + T_1\right)\cdot\left(\dfrac{1+bT_1}{1+bT_2}\right)^{-x/l} - \dfrac{1}{b}.$

Решение. Так как поперечное сечение стержня не меняется, то плотность потока тепла вдоль стержня $j_Q = \text{const}$.

Используя уравнение Фурье, с учетом зависимости $\lambda(T) = \dfrac{\lambda_0}{1+bT}$ получаем:

$$j_Q \equiv j_0 = -\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\frac{\lambda_0}{1+bT}\cdot\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \text{const}\,.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$j_0\int_0^l \mathrm{d}x = -\lambda_0\int_{T_1}^{T_2}\frac{\mathrm{d}T}{1+bT} \;\rightarrow\; j_0 = \frac{\lambda_0}{l}\ln\frac{1+bT_1}{1+bT_2}\,.$$

Используя полученный результат, вновь интегрируем уравнение теплопроводности в пределах от $(x = 0,\ T_1)$ до произвольной точки с координатой x и температурой T и получаем:

$$j_0 x = -\lambda_0\ln\frac{1+bT}{1+bT_1}\text{, откуда } T(x) = \left(\frac{1}{b} + T_1\right)\exp\left(-\frac{j_0}{\lambda_0}x\right) - \frac{1}{b}\,.$$

Подставляя j_0, окончательно получаем:

$$T(x) = \left(\frac{1}{b} + T_1\right)\exp\left(-\frac{x}{l}\ln\frac{1+bT_1}{1+bT_2}\right) - \frac{1}{b} = \left(\frac{1}{b} + T_1\right)\cdot\left(\frac{1+bT_1}{1+bT_2}\right)^{-x/l} - \frac{1}{b}\,.$$

7.45. $T\left(\frac{l}{2}\right) = T_1 \exp\left(-\frac{1}{2}\ln\frac{T_1}{T_2}\right) = \sqrt{T_1 T_2}$.

7.46. $T(x) = T_1 - (T_1 - T_2)\cdot\frac{1 - x_1/x}{1 - x_1/x_2}$.

Решение. При стационарной теплопроводности:

$$-\lambda(x)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = j_0 = \text{const}\ .$$

Интегрируя это уравнение в пределах от $(x = x_1,\ T_1)$ до $(x = x_2,\ T_2)$ с учетом зависимости $\lambda = \alpha x^2$, находим плотность потока теплоты:

$$j_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\alpha x^2}\mathrm{d}x = -\int_{T_1}^{T_2} \mathrm{d}T \ \rightarrow\ j_0 = \alpha\cdot\frac{(T_1 - T_2)x_1 x_2}{x_2 - x_1}\ .$$

Затем вновь интегрируем уравнение теплопроводности в пределах от $(x = x_1,\ T_1)$ до произвольной точки $(x,\ T)$ и получаем:

$$j_0 = \alpha\cdot\frac{(T_1 - T)x_1 x}{x - x_1}\ .$$

Приравнивая полученные выражения для j_0, находим распределение температур вдоль стержня:

$$T(x) = T_1 - (T_1 - T_2)\cdot\frac{1 - x_1/x}{1 - x_1/x_2}\ .$$

7.47. $T_{1/2} = T_1 - (T_1 - T_2)\dfrac{\ln\left[1/2\left(x_2/x_1 + 1\right)\right]}{\ln(x_2/x_1)}$.

Решение. Используем уравнение стационарной теплопроводности

$$-\lambda(x)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = j_0 = \text{const}\ .$$

Интегрируя это уравнение в пределах от $(x = x_1,\ T_1)$ до $(x = x_2,\ T_2)$ с учетом зависимости $\lambda = \alpha x$, находим плотность потока теплоты:

$$j_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\alpha x}\mathrm{d}x = -\int_{T_1}^{T_2} \mathrm{d}T \ \rightarrow\ j_0 = \alpha\cdot\frac{(T_1 - T_2)}{\ln(x_2/x_1)}\ .$$

Затем, вновь интегрируя уравнение теплопроводности в пределах от $(x = x_1,\ T_1)$ до произвольной точки $(x,\ T)$, получаем:

$$j_0 \ln(x/x_1) = \alpha\left(T_1 - T\right).$$

Подставляя найденное значение j_0, находим распределение температур вдоль стержня:

$$T(x) = T_1 - (T_1 - T_2)\cdot\frac{\ln(x/x_1)}{\ln(x_2/x_1)}.$$

Подставляя $x = (x_2 + x_1)/2$, находим температуру в центре стержня: $T_{1/2} = T_1 - (T_1 - T_2)\dfrac{\ln\left[1/2\left(x_2/x_1 + 1\right)\right]}{\ln(x_2/x_1)}$.

7.48. $Q = \dfrac{2\pi\lambda(T_1 - T_2)}{\ln(R_2/R_1)}\tau.$

Решение. Стационарный поток теплоты через единицу длины цилиндрической поверхности радиусом r равен

$$J_Q = j_Q S = -\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\cdot 2\pi r = \text{const}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим поток теплоты J_Q в расчете на единицу длины цилиндров:

$$-2\pi\lambda\int_{T_1}^{T_2} \mathrm{d}T = J_Q\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r},\ \rightarrow\ J_Q = \frac{2\pi\lambda}{\ln\left(R_2/R_1\right)}\left(T_1 - T_2\right).$$

Интегрируя уравнение теплопроводности в других пределах, получаем:

$$-2\pi\lambda\int_{T_1}^{T}\mathrm{d}T = J_Q\int_{R_1}^{r}\frac{\mathrm{d}r}{r}\ \rightarrow\ 2\pi\lambda\left(T_1 - T\right) = J_Q\ln\frac{r}{R_1},$$

откуда находим распределение температуры в оболочке:

$$T(r) = T_1 - (T_1 - T_2)\frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)}.$$

Определяем градиент температуры: $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = \dfrac{T_2 - T_1}{\ln(R_2/R_1)}\cdot\dfrac{1}{r} < 0,$

после чего находим количество теплоты Q, отдаваемое единицей длины системы во внешнее пространство за время τ:

$$Q = \frac{2\pi\lambda(T_1 - T_2)}{\ln(R_2/R_1)}\tau .$$

7.49. $J_Q = \dfrac{8(R)^{3/2}L}{9N_A d^2\sqrt{\pi\mu}\,\ln\left(R_2/R_1\right)}\left(T_1^{3/2} - T_2^{3/2}\right).$

Решение. Коэффициент теплопроводности гелия

$$\lambda = \frac{1}{3}c_V\langle v\rangle l\rho = \frac{1}{3}c_V\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}\cdot\frac{\mu n}{N_A} = \frac{2R^{3/2}\sqrt{T}}{3\pi^{3/2}N_A d^2\sqrt{\mu}} = A\sqrt{T}\ ,$$

где $A = \text{const}$, $c_V = 3R/(2\mu)$ – удельная теплоемкость гелия при постоянном объеме.

Стационарный поток теплоты через цилиндрическую поверхность радиуса r равен

$$J_Q = j_Q S = -\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\cdot 2\pi rL = -A\sqrt{T}\,\frac{\partial T}{\partial r}\cdot 2\pi rL = \text{const}\ .$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим поток теплоты J_Q в расчете на единицу длины цилиндров:

$$-2\pi AL\int_{T_1}^{T_2}\sqrt{T}\,\mathrm{d}T = J_Q\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r}\ \rightarrow\ J_Q = \frac{4\pi AL}{3\ln\left(R_2/R_1\right)}\left(T_1^{3/2} - T_2^{3/2}\right).$$

Подставляя A, окончательно получаем:

$$J_Q = \frac{8(R)^{3/2}L}{9N_A d^2\sqrt{\pi\mu}\,\ln\left(R_2/R_1\right)}\left(T_1^{3/2} - T_2^{3/2}\right).$$

7.50. $T(r) = \dfrac{T_1 - T_2}{R_2 - R_1}\cdot\dfrac{R_1R_2}{r} + \dfrac{T_2R_2 - T_1R_1}{R_2 - R_1}.$

Решение. Записываем уравнение для стационарного потока теплоты через сферическую поверхность радиуса r:

$$J_Q = -\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\cdot 4\pi r^2 = \text{const}\ .$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим поток теплоты:

$$-4\pi\lambda\int_{T_1}^{T_2}\mathrm{d}T = J_Q\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} \;\rightarrow\; J_Q = \frac{4\pi\lambda R_1 R_2}{R_2 - R_1}\left(T_1 - T_2\right).$$

Интегрируя в других пределах, получаем:

$$-4\pi\lambda\int_{T_1}^{T}\mathrm{d}T = J_Q\int_{R_1}^{r}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} \;\rightarrow\; 4\pi\lambda\left(T_1 - T\right) = J_Q\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r}\right),$$

откуда находим распределение температуры:

$$T(r) = \frac{T_1 - T_2}{R_2 - R_1}\cdot\frac{R_1 R_2}{r} + \frac{T_2 R_2 - T_1 R_1}{R_2 - R_1}.$$

7.51. $T_0 = \dfrac{\lambda_1 T_1 d_2 + \lambda_2 T_2 d_1}{\lambda_1 d_2 + \lambda_2 d_1}$.

Решение. При стационарной теплопроводности плотность потока теплоты $j_0 = \text{const}$. Записываем закон Фурье $j_0 = -\lambda\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \text{const}$, откуда для первой и второй пластин получаем:

$$j_0\int_0^{d_1}\mathrm{d}x = -\lambda_1\int_{T_1}^{T_0}\mathrm{d}T \quad\rightarrow\quad j_0 = \frac{\lambda_1}{d_1}\left(T_1 - T_0\right),$$

$$j_0\int_{d_1}^{d_1+d_2}\mathrm{d}x = -\lambda_2\int_{T_0}^{T_2}\mathrm{d}T \quad\rightarrow\quad j_0 = \frac{\lambda_2}{d_2}\left(T_0 - T_2\right).$$

Приравнивая выражения для j_0, получаем уравнение:

$$\frac{\lambda_1}{d_1}\left(T_1 - T_0\right) = \frac{\lambda_2}{d_2}\left(T_0 - T_2\right),$$

откуда находим температуру поверхности соприкосновения пластин:

$$T_0 = \frac{\lambda_1 T_1 d_2 + \lambda_2 T_2 d_1}{\lambda_1 d_2 + \lambda_2 d_1}.$$

7.52. $T_1 = \dfrac{\lambda_2 (T_0 + T_3) + \lambda_1 T_0}{2\lambda_2 + \lambda_1}$, $T_2 = \dfrac{\lambda_2 (T_0 + T_3) + \lambda_1 T_3}{2\lambda_2 + \lambda_1}$.

7.53. $\lambda = \dfrac{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2}{b_1 + b_2}$.

Решение. Используя закон Фурье $J = -\lambda \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} S$, для потоков теплоты J_1 и J_2 через каждую пластину получаем:

$$J_1 = \frac{\lambda_1}{l}\left(T_1 - T_2\right) a b_1, \quad J_2 = \frac{\lambda_2}{l}\left(T_1 - T_2\right) a b_2,$$

где l – длина пластин, a – их ширина.

Суммарный поток теплоты через обе пластины можно выразить через коэффициент теплопроводности λ всей системы:

$$J = J_1 + J_2 = \frac{T_1 - T_2}{l} a\left(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2\right) = \frac{\lambda}{l}\left(T_1 - T_2\right) \cdot a(b_1 + b_2),$$

откуда $\lambda = \dfrac{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2}{b_1 + b_2}$.

7.54. $\dfrac{\lambda_a}{\lambda_б} = \dfrac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{4\lambda_1 \lambda_2}$.

Решение. Расположение *а*). Коэффициент теплопроводности системы равен (см. решение задачи 7.53)

$$\lambda_a = \frac{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2}{b_1 + b_2}.$$

Расположение *б*). Определяем температуру поверхности соприкосновения пластин (см. решение задачи 7.51):

$$T_0 = \frac{\lambda_1 T_1 b_2 + \lambda_2 T_2 b_1}{\lambda_1 b_2 + \lambda_2 b_1}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу для плотности потока тепла j_0 через первую пластину $j_0 = \dfrac{\lambda_1}{b_1}\left(T_1 - T_0\right)$, находим:

$$j_0 = \frac{\lambda_1}{l_1}\left(T_1 - \frac{\lambda_1 T_1 l_2 + \lambda_2 T_2 l_1}{\lambda_1 l_2 + \lambda_2 l_1}\right) = \frac{T_1 - T_2}{l_1/\lambda_1 + l_2/\lambda_2}.$$

В то же время для системы двух стержней из уравнения Фурье получаем:

$$j_0 \int_0^{b_1+b_2} \mathrm{d}x = -\lambda \int_{T_1}^{T_2} \mathrm{d}T \quad \rightarrow \quad j_0 = \frac{\lambda}{b_1 + b_2}(T_1 - T_2),$$

откуда следует, что коэффициент теплопроводности системы в этом случае равен:

$$\lambda_б = \frac{b_1 + b_2}{b_1/\lambda_1 + b_2/\lambda_2}.$$

Замечание. Этот же результат можно получить, воспользовавшись понятием теплового сопротивления пластин $R_T = b/\lambda$. По правилу сложения тепловых сопротивлений при их последовательном соединении, общее тепловое сопротивление двух пластин $R_T = R_{T1} + R_{T2}$, то есть: $(b_1 + b_2)/\lambda_б = b_1/\lambda_1 + b_2/\lambda_2$, откуда находим коэффициент теплопроводности системы $\lambda_б$:

$$\lambda_б = \frac{b_1 + b_2}{b_1/\lambda_1 + b_2/\lambda_2} = \frac{(b_1 + b_2)\,\lambda_1\lambda_2}{b_1\lambda_2 + b_2\lambda_1}.$$

Отношение коэффициентов теплопроводности

$$\frac{\lambda_a}{\lambda_б} = \frac{(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2)\cdot(b_1\lambda_2 + b_2\lambda_1)}{\lambda_1\lambda_2(b_1 + b_2)^2}.$$

Чтобы узнать, в каком случае теплопроводность больше, представим полученный ответ в виде:

$$\frac{\lambda_a}{\lambda_б} = \frac{1}{(b_1 + b_2)^2}\left(b_1^2 + b_2^2 + b_1 b_2 \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1\lambda_2}\right) > 1,$$

так как $\dfrac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1\lambda_2} - 2 = \dfrac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{\lambda_1\lambda_2} > 0$, т.е. $\dfrac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1\lambda_2} > 2$.

Таким образом, в случае *а*) теплопроводность системы больше.

Для пластин одинаковой толщины ($b_1 = b_2 = b$) получаем:

$$\frac{\lambda_a}{\lambda_б} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{4\lambda_1\lambda_2}.$$

7.55. $\lambda_2 = \lambda_1 \dfrac{d_2(T_2 - T_1)}{d_1(T_3 - T_2)}$.

7.56. $T_0 = \dfrac{\lambda_1 T_1 + 3\lambda_2 T_2}{\lambda_1 + 3\lambda_2}$.

Решение. Согласно закону Фурье, стационарный поток теплоты через сферическую поверхность радиуса r равен

$$J_Q = j_Q S = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \cdot 4\pi r^2 = \text{const}.$$

Разделяя переменные и интегрируя сначала в пределах внутреннего теплопроводящего слоя, получаем:

$$-4\pi\lambda_1 \int_{T_1}^{T_0} \mathrm{d}T = J_Q \cdot \int_{R}^{2R} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} \;\rightarrow\; 4\pi\lambda_1 (T_1 - T_0) = J_Q \cdot \frac{1}{2R},$$

откуда выражаем величину потока теплоты J_Q:

$$J_Q = 8\pi\lambda_1 R(T_1 - T_0).$$

Аналогично для внешнего сферического слоя получим:

$$-4\pi\lambda_2 \int_{T_0}^{T_2} \mathrm{d}T = J_Q \cdot \int_{2R}^{3R} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} \;\rightarrow\; 4\pi\lambda_2 (T_0 - T_2) = J_Q \cdot \frac{1}{6R},$$

откуда $J_Q = 24\pi\lambda_2 R(T_0 - T_2)$.

Приравнивая выражения для J_Q, находим температуру T_0:

$$T_0 = \frac{\lambda_1 T_1 + 3\lambda_2 T_2}{\lambda_1 + 3\lambda_2}.$$

7.57. $J_Q = 2\pi (T_1 - T_2) \cdot \left(\dfrac{1}{\lambda_1} \ln \dfrac{R_2}{R_1} + \dfrac{1}{\lambda_2} \ln \dfrac{R_3}{R_2} \right)^{-1}$.

Решение. Воспользуемся понятием теплового сопротивления единицы длины цилиндрической трубы $R_{Ti} = \dfrac{1}{2\pi\lambda_i} \ln \dfrac{R_{i\,\text{внеш}}}{R_{i\,\text{внутр}}}$. По

правилу сложения тепловых сопротивлений при их последовательном соединении, общее тепловое сопротивление двух слоев изоляции равно $R_T = R_{T1} + R_{T2}$.

Поток теплоты J_Q через единицу длины изоляции равен

$$J_Q = \frac{T_1 - T_2}{R_T} = 2\pi\left(T_1 - T_2\right)\cdot\left(\frac{1}{\lambda_1}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\lambda_2}\ln\frac{R_3}{R_2}\right)^{-1}.$$

7.58. $\dfrac{J_{Q1}}{J_{Q2}} \approx 1{,}2.$

Решение. Согласно решению задачи 7.57 поток теплоты J_Q через единицу длины изоляции каждой трубы равен

$$J_{Qi} = 2\pi\left(T_1 - T_2\right)\cdot\left(\frac{1}{\lambda_{i1}}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\lambda_{i2}}\ln\frac{R_3}{R_2}\right)^{-1}.$$

Радиусы внешних поверхностей первого и второго слоев равны соответственно $R_2 = 2R$ и $R_3 = 3R$, где R – радиус трубы. Отношение количеств теплоты, проходящих сквозь теплоизоляцию первой и второй труб за единицу времени:

$$\frac{J_{Q1}}{J_{Q2}} = \frac{\dfrac{1}{\lambda}\ln 2 + \dfrac{1}{2\lambda}\ln\dfrac{3}{2}}{\dfrac{1}{2\lambda}\ln 2 + \dfrac{1}{\lambda}\ln\dfrac{3}{2}} = \frac{\ln 2 + 0{,}5\ln(1{,}5)}{0{,}5\ln 2 + \ln(1{,}5)} \approx 1{,}2,$$

т. е. первая труба отдает в окружающую среду в 1,2 раз больше теплоты. Следовательно, для лучшей теплоизоляции слой с большей теплопроводностью должен быть внешним.

7.59. $Q \approx 432$ кДж.

Решение. Стационарный поток тепла внутри стены $J_Q = -\lambda S(T_0 - T_1)/d$, где T_0 – температура наружной поверхности стены. Согласно уравнению Ньютона теплота, отдаваемая в окружающую среду, равна $J_Q = -\lambda S(T_0 - T_1)/d = \alpha S\left(T_0 - T_2\right)$, откуда

$$T_0 = \frac{1}{(\lambda/d) + \alpha}\cdot\left(\frac{\lambda}{d}T_1 + \alpha T_2\right).$$

Подставляя T_0 в уравнение для потока тепла, определим количество теплоты, теряемое площадью $S = 1$ м^2 стены в течение $\tau = 1$ час:

$$Q = \frac{\lambda\alpha S(T_1 - T_2)}{\lambda + \alpha d}\tau \approx 432 \text{ кДж}.$$

7.60. $\Delta J_Q = \dfrac{\lambda S}{d} \cdot \dfrac{\Delta T}{1 + \lambda/(\alpha d)}$.

Решение. Пусть температура в комнате T_0, температура воздуха снаружи $T_н$, температура наружной стены T_1. Стационарный поток теплоты внутри теплоизоляционной пластины: $J_Q = -\lambda S(T_1 - T_0)/d$. Эта теплота передается стеной окружающему воздуху и, согласно уравнению Ньютона, равна $J_Q = -\lambda S(T_1 - T_0)/d = \alpha S\left(T_1 - T_н\right)$, откуда

$$T_1 = \frac{1}{(\lambda/d) + \alpha} \cdot \left(\frac{\lambda}{d} T_0 + \alpha T_н\right).$$

Аналогично находим, что после понижения температуры воздуха на ΔT температура наружной стены будет равна:

$$T_1' = \frac{1}{(\lambda/d) + \alpha} \cdot \left(\frac{\lambda}{d} T_0 + \alpha(T_н - \Delta T)\right),$$

при этом количество теплоты, отдаваемое наружному воздуху, увеличилось на величину

$$\Delta J_Q = \frac{\lambda S}{d}\left(T_1' - T_1\right) = \frac{\lambda S}{d} \cdot \frac{\Delta T}{1 + \lambda/(\alpha d)}.$$

Следовательно, мощность нагревателя надо увеличить на такую же величину.

7.61. $\tau = \dfrac{C_1 C_2 l \ln 3}{(C_1 + C_2)\lambda S}$.

Решение. Пусть $T_2 > T_1$, тогда передаваемая стержню вторым телом теплота $\delta Q = -C_2 \mathrm{d}T_2$ ($\mathrm{d}T_2 < 0$) равна теплоте, переносимой вдоль стержня за время $\mathrm{d}t$:

$$\delta Q = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} S\mathrm{d}t \approx -\lambda \frac{T_1 - T_2}{l} S\mathrm{d}t = -C_2 \mathrm{d}T_2,$$

и равна теплоте $\delta Q = C_1 \mathrm{d}T_1$, получаемой первым телом:

$$\lambda \frac{T_2 - T_1}{l} S \mathrm{d}t = C_1 \mathrm{d}T_1 .$$

Складывая почленно записанные уравнения, получаем:

$$\lambda \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \frac{T_2 - T_1}{l} S \mathrm{d}t = -\mathrm{d}(T_2 - T_1) ,$$

где $T_2 - T_1$ –разность температур между телами в момент времени t.

Разделяя переменные и интегрируя полученное уравнение с учетом начальных условий, получаем: $\ln \frac{\Delta T}{\Delta T_0} = -\frac{\lambda S}{l} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) t$,

откуда $\Delta T = \Delta T_0 \exp \left[-\frac{\lambda S}{l} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) t \right]$.

Подставляя $\Delta T = (1/3)\Delta T_0$, определяем время τ, через которое разность температур уменьшится в 3раза: $\tau = \frac{C_1 C_2 l \ln 3}{(C_1 + C_2)\lambda S}$.

7.62. $t \approx 1{,}5$ час.

Решение. Передаваемая жидкостью стенкам сосуда теплота $\delta Q = -\rho V c \mathrm{d}T$,равна теплоте $\delta Q = \alpha S (T - T_0) \mathrm{d}t$, излучаемой стенкой в окружающую среду:

$$\alpha (T - T_0) S \mathrm{d}t = -\rho V c \mathrm{d}T .$$

Разделяя переменные и интегрируя, с учетом начальных условий (при $t = 0$ $T = T_1$) получаем:

$$T = T_0 + (T_1 - T_0) \exp \left(-\frac{\alpha S}{\rho V c} \tau \right) \approx 356 \text{ K} = 83 \text{ °C} .$$

Температура воды станет равной$t_2 = 60$ °C через время

$$t = \frac{\rho V c}{\alpha S} \ln \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0} \approx 5320 \text{ с} \approx 1{,}5 \text{ час} .$$

7.63. $m = \frac{\alpha S \tau}{c} \left(\ln \frac{T_1 - T_0}{T_2 - T_1} \right)^{-1}$.

7.64. $T_2 = \dfrac{\lambda r_1 T_1 + \alpha r_2 (r_2 - r_1) T_0}{\lambda r_1 + \alpha r_2 (r_2 - r_1)}$.

Решение. Стационарный поток теплоты через сферическую поверхность радиуса r $J_Q = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial r} \cdot 4\pi r^2 = \text{const}$. Он проходит в окружающую среду и согласно уравнению Ньютона равен

$$J_Q = \alpha (T_2 - T_0) 4\pi r_2^2 .$$

Объединяя записанные уравнения, разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\alpha (T_2 - T_0) r_2^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \lambda (T_1 - T_2) ,$$

откуда определяем температуру внешней стенки:

$$T_2 = \frac{\lambda r_1 T_1 + \alpha r_2 (r_2 - r_1) T_0}{\lambda r_1 + \alpha r_2 (r_2 - r_1)} .$$

7.65. $T_2 = \dfrac{\lambda T_1 + \alpha R \ln(R / r) T_0}{\lambda + \alpha R \ln(R / r)}$.

7.66. $J_Q = \dfrac{C_V}{\sqrt{2\pi\mu R}} \cdot \left(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1} \right) pS.$

Решение. При низких давлениях длина свободного пробега сравнима с размерами сосуда и соударения между молекулами отсутствуют. В этом случае количество теплоты, подводимой к холодной стенке, не может быть найдено по закону Фурье. Для определения количества теплоты надо определить изменение кинетической энергии всех молекул, ударившихся за 1 с о холодную стенку. Будем считать, что молекулы, соударяясь со стенкой, приобретают ее температуру.

Частота ударов молекул о плоскую поверхность единичной площади равна $\nu = \dfrac{1}{4} n \langle v \rangle = \dfrac{1}{4} n \sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m}}$. Энергия, приходящаяся на одну «горячую» молекулу, равна $\varepsilon_2 = C_V T_2 / N_A$, на «холодную» – $\varepsilon_1 = C_V T_1 / N_A$. Пусть концентрация молекул, имеющих температу-

ру T_1, равна n_1, а молекул, имеющих температуру T_2, – n_2. Тогда плотность потока теплоты:

$$j_Q = \nu_2\varepsilon_2 - \nu_1\varepsilon_1 = \frac{C_V}{N_A}\sqrt{\frac{k}{2\pi m}}\left(n_2T_2^{3/2} - n_1T_1^{3/2}\right).$$

В стационарном случае частота ударов молекул о горячую и холодную стенки одинакова: $\nu_2 = \frac{1}{4}n_2\sqrt{\frac{8kT_2}{\pi m}} = \frac{1}{4}n_1\sqrt{\frac{8kT_1}{\pi m}} = \nu_1$, откуда $n_2/n_1 = \sqrt{T_1/T_2}$. Так как полная концентрация молекул газа $n_0 = n_2 + n_1$, то $n_1 = \frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1}+\sqrt{T_2}}n_0$, $n_2 = \frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_1}+\sqrt{T_2}}n_0$.

С учетом этого плотность потока тепла равна:

$$j_Q = \frac{C_V}{N_A}\sqrt{\frac{k}{2\pi m}}n_0\sqrt{T_1T_2}\left(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}\right).$$

Так как давление в газе равно $p = n_1kT_1 + n_2kT_2$, плотность потока теплоты можно записать через заданное в условии задачи давление:

$$j_Q = \frac{C_V}{R}\sqrt{\frac{R}{2\pi\mu}}\cdot p\cdot\left(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}\right).$$

Таким образом, поток теплоты на холодную стенку равен

$$J_Q = \frac{C_V}{\sqrt{2\pi\mu R}}\cdot\left(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}\right)pS.$$

7.67. $\tau \approx 2{,}7\cdot10^5$ с ≈ 3 суток.

Решение. Между стенками баллона термоса – вакуум, поэтому передача теплоты происходит только за счет ударов молекул газа о внутреннюю и внешнюю стенки баллона. При изменении температуры внутренней стенки термоса неизменной остается концентрация молекул $n_0 = p_0/(kT_0)$. Используем результат решения задачи 7.66 для потока теплоты на внешнюю, более холодную стенку баллона:

$$J_Q = \frac{C_V}{N_\text{A}}\sqrt{\frac{k}{2\pi m}}\cdot Sn_0\sqrt{T_1T_2}\left(\sqrt{T_2}-\sqrt{T_1}\right) =$$

$$= \frac{C_V p_0}{T_0\sqrt{2\pi\mu R}}\cdot\sqrt{T_1T_2}\left(\sqrt{T_2}-\sqrt{T_1}\right)S = B\sqrt{T_2}\left(\sqrt{T_2}-\sqrt{T_1}\right),$$

где T_1, T_2 – температуры внешней и внутренней стенок термоса, а константа $B = \dfrac{C_V p_0 S}{T_0}\sqrt{\dfrac{T_1}{2\pi\mu R}}$.

Будем считать температуру воды равной температуре внутренней стенки термоса. Тогда из уравнения теплового баланса $-m\,c_\text{в}\,\mathrm{d}T_2 = J_Q\,\mathrm{d}t$ получаем:

$$\frac{\mathrm{d}T_2}{\sqrt{T_2}\left(\sqrt{T_2}-\sqrt{T_1}\right)} = -\frac{B}{m\bar{c}_\text{ж}}\mathrm{d}t\,.$$

$$\int\limits_{\sqrt{T_{2\text{н}}}}^{\sqrt{T_{2\text{к}}}}\frac{2\mathrm{d}y}{y-\sqrt{T_1}} = -\frac{B}{m\,c_\text{в}}\int\limits_0^\tau \mathrm{d}t\,,\quad \tau = \frac{c_\text{в} m T_0}{C_V p_0 S}\cdot\sqrt{\frac{2\pi\mu R}{T_1}}\ln\frac{\sqrt{T_{2\text{н}}}-\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_{2\text{к}}}-\sqrt{T_1}},$$

где $C_V = 5R/2$.

Численная оценка дает: $\tau \approx 2{,}7\cdot10^5$ с ≈ 3 суток.

7.68. $M = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}\cdot\dfrac{\partial\rho}{\partial x}lSt \approx 0{,}20$ г.

7.69. $\tau = \dfrac{2Vl\ln 2}{3DS}$.

Решение. После начала диффузии плотность потока молекул $j_N = -D\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} \approx -D\cdot\dfrac{\Delta n}{l}$, где Δn – разность концентраций молекул в сосудах в момент времени t.

Изменение числа молекул $\mathrm{d}N_2$ в объеме V_2 за время $\mathrm{d}t$ равно взятому с обратным знаком изменению числа молекул $\mathrm{d}N_1$ в объеме V_1: $\mathrm{d}N \equiv \mathrm{d}N_2 = j_N S\mathrm{d}t = -D\cdot\dfrac{\Delta n}{l}\cdot S\mathrm{d}t = -\mathrm{d}N_1$. При этом изменения концентраций молекул в сосудах 1 и 2 составляют: $\mathrm{d}n_2 = \mathrm{d}N/V_2$;

$\mathrm{d}n_1 = -\mathrm{d}N/V_1$. Через время $\mathrm{d}t$ будут равны концентрации молекул n'_1 и n'_2 в сосудах

$$n'_2 = n_2 + \mathrm{d}n_2 = n_2 + \frac{\mathrm{d}N}{V_2}; \quad n'_1 = n_1 + \mathrm{d}n_1 = n_1 - \frac{\mathrm{d}N}{V_1},$$

а разность концентраций –

$$\Delta n' = n'_1 - n'_2 = \Delta n - D\frac{\Delta n}{l}\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right)\cdot S\mathrm{d}t,$$

что можно переписать в виде:

$$\mathrm{d}(\Delta n) \equiv \Delta n' - \Delta n = -D\Delta n\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right)\cdot\frac{S}{l}\mathrm{d}t.$$

Введя обозначение: $V_0 = V_1V_2/(V_1+V_2)$, перепишем полученное уравнение, разделив в нем переменные: $\dfrac{\mathrm{d}(\Delta n)}{\Delta n} = -D\dfrac{S}{V_0 l}\mathrm{d}t$.

Проинтегрировав это уравнение, с учетом начальных условий (при $t = 0$ $\Delta n = \Delta n_0$) находим:

$$\ln\frac{\Delta n}{\Delta n_0} = -D\frac{S}{V_0 l}t, \text{ откуда } \Delta n = \Delta n_0 e^{-\frac{DS}{V_0 l}t} = \Delta n_0 e^{-t/\tau},$$

где $\tau = \dfrac{V_0 l}{DS}$ – время релаксации процесса.

В соответствии с условием задачи $V_0 = V_1V_2/(V_1+V_2) = 2V/3$. Подставляя $\Delta n = \dfrac{1}{2}\Delta n_0$, получаем: $\dfrac{1}{2}\Delta n_0 = \Delta n_0 \exp\left(-\dfrac{DS}{(2/3)Vl}\tau\right)$, откуда определяем искомое время $\tau = \dfrac{2Vl\ln 2}{3DS}$.

7.70. $D = \dfrac{3Vl\ln\alpha}{5\pi r^2 t}$.

7.71. $t = \dfrac{Rd}{3D}\cdot\ln\left(\dfrac{100}{100-\alpha}\right)$.

Решение. Диффузионный поток молекул внутрь шара равен

$$J_N = \frac{\partial N(t)}{\partial t} = -D\frac{\partial n}{\partial t}S \approx -D\frac{n(t)-n_0}{d}\cdot 4\pi R^2,$$

где $n(t)$ – концентрация молекул в шаре в момент времени t.

Учитывая, что внутри шара число молекул $N(t) = n(t) \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$, получаем: $\frac{\partial n(t)}{\partial t} = -\frac{3D}{Rd}\left(n(t) - n_0\right)$. Производя замену переменной, $\xi(t) = n(t) - n_0$, разделяя переменные и интегрируя, находим зависимость концентрации частиц внутри шара от времени:

$$n(t) = n_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \text{ где } \tau = \frac{Rd}{3D}.$$

Полагая $n(t) = \frac{\alpha}{100} n_0$, из полученной выше формулы находим время t, через которое концентрация молекул внутри шара составит α% от n_0:

$$\frac{\alpha}{100} n_0 = n_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \;\rightarrow\; t = \frac{Rd}{3D} \cdot \ln\left(\frac{100}{100 - \alpha}\right).$$

§8. Теплоемкость

8.1. а) 3; б) 5; в) 6; г) 7; д) 12.

8.2. $N = 2$.

Решение. Показатель адиабаты γ для идеального газа равен

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i} = 1 + \frac{2}{i}, \text{ где } i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}}.$$

Для линейной молекулы $i_{\text{пост}} = 3$, $i_{\text{вр}} = 2$. Когда возбуждены колебательные степени свободы, $\gamma_1 = 1 + 2/i = 1 + 2/(5 + 2i_{\text{кол}})$. После «замораживания» колебательных степеней свободы $\gamma_2 = (49/45)\gamma_1 = 7/5$, откуда $\gamma_1 = 9/7$. Отсюда определяем число колебательных степеней свободы: $i_{\text{кол}} = 1$.

Полное число степеней свободы у молекулы, состоящей из N атомов, равно $3N$. Число колебательных степеней свободы $i_{\text{кол}} = 3N - i_{\text{п}} - i_{\text{вр}} = 3N - 5 = 1$, откуда получаем: $N = 2$.

8.3. $\gamma = C_p/C_V = 10/9$.

Решение. Полное число степеней свободы у молекулы 4-атомного газа равно 3·4 = 12. Из них 3 степени свободы молекулы относятся к поступательному движению, 3 – к вращательному, следовательно, 6 степеней свободы молекулы характеризуют колебательное движение. Средняя внутренняя энергия молекулы равна

$$\langle \varepsilon \rangle = (kT/2)\cdot 6 + kT\cdot 6 = 9kT\ .$$

Соответственно молярные теплоемкости равны $C_V = 9R$, $C_p = 10R$, $\gamma = C_p/C_V = 10/9$.

8.4. $U = 12RT \approx 109{,}6$ кДж.

8.5. $\rho \approx 2{,}25$ кг/м^3.

Решение. Молярная теплоемкость азота $C_V = 5R/2$, внутренняя энергия одного моля газа $U = 5RT/2$, откуда находим температуру $T = 2U/(5R)$.

Используя формулу $p = nkT$ и связь плотности с концентрацией молекул $\rho = mn = n\mu/N_\text{A}$ (m – масса одной молекулы), определяем плотность азота:

$$\rho = \frac{\mu}{N_\text{A}}\cdot\frac{p}{kT} = \frac{\mu p}{R\cdot 2U/(5R)} = \frac{5\mu p}{2U} \approx 2{,}25 \text{ кг/м}^3\ .$$

8.6. $c_V \approx 733$ Дж/(кг·К); $c_p \approx 1026$ Дж/(кг·К).

Решение. Для двухатомного газа $c_V = 5R/(2\mu)$, $c_p = 7R/(2\mu)$. Согласно уравнению Менделеева–Клапейрона: $p = \rho RT/\mu$, откуда определяем молярную массу газа: $\mu = \rho RT/p$.

Для удельных теплоемкостей окончательно получаем:

$$c_V = \frac{5p}{2\rho T} \approx 733 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)};\quad c_p = \frac{7p}{2\rho T} \approx 1026 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}\ .$$

8.7. $\mu = \dfrac{R}{c_p - c_V} = 28\cdot 10^{-3}$ кг/моль (N_2), $i = \dfrac{2c_V}{c_p - c_V} = 5$.

8.8. $U(T_2)/U(T_1) \approx 4$.

Решение. Внутренняя энергия одного моля идеального газа равна $U = \nu C_V T$. Кроме явной зависимости энергии от температуры, следует учесть температурную зависимость теплоемкости $C_V(T)$, которая связана с «включением» колебательных степеней свободы.

При $T = T_1$ у молекулы хлора 5 степеней свободы, поэтому $C_{V1} = 5R/2$, при температуре T_2 включается колебательная степень свободы и $C_{V2} = 7R/2$. С учетом этого отношение внутренних энергий хлора

$$\frac{U(T_2)}{U(T_1)} = \frac{\int\limits_0^{T_2} C_{V2}(T)\mathrm{d}T}{\int\limits_0^{T_1} C_{V1}(T)\mathrm{d}T} = \frac{7}{5}\cdot\frac{T_2}{T_1} \approx 4\,.$$

8.9. $c_V \approx 913$ Дж/(кг · К), $c_p \approx 1245$ Дж/(кг · К).

Решение. В силу аддитивности теплоты, входящей в общее определение теплоемкости, полная теплоемкость смеси газов равна

$$C_0 = \frac{\delta Q_1 + \delta Q_2}{\mathrm{d}T} = \nu_1 C_1 + \nu_2 C_2\,,$$

где $\delta Q_1 = \nu_1 C_1 \mathrm{d}T$ и $\delta Q_2 = \nu_2 C_2 \mathrm{d}T$ – количества теплоты, необходимые ν_1 молям водяного пара и ν_2 молям азота соответственно для увеличения их температуры на $\mathrm{d}T$.

Удельная теплоемкость смеси газов равна

$$c_0 = \frac{C_0}{m_0} = \frac{\nu_1 C_1 + \nu_2 C_2}{m_1 + m_2} = \frac{\left(m_1/\mu_1\right) C_1 + \left(m_2/\mu_2\right) C_2}{m_1 + m_2}\,,$$

где $m_0 = m_1 + m_2$ – масса смеси, μ_1– молярная масса водяного пара, μ_2 – молярная масса кислорода.

Учитывая, что $C_V = \frac{i}{2}R$ и $C_p = \frac{i+2}{2}R$, получаем:

$$c_V = \frac{R}{2}\cdot\frac{\left(m_1/\mu_1\right) i_1 + \left(m_2/\mu_2\right) i_2}{m_1 + m_2}\,,$$

$$c_p = c_V + R \cdot \frac{(m_1/\mu_1) + (m_2/\mu_2)}{m_1 + m_2}.$$

Для водяного пара $i_1 = 6$; для кислорода $i_2 = 5$. Численные значения равны: $c_V \approx 913$ Дж/(кг · К), $c_p \approx 1245$ Дж/(кг · К).

8.10. $\gamma = \dfrac{\nu_1 C_{p1} + \nu_2 C_{p2}}{\nu_1 C_{V1} + \nu_2 C_{V2}} = \dfrac{7\nu_1 + 5\nu_2}{5\nu_1 + 3\nu_2} \approx 1{,}53.$

8.11. $c_p = 0{,}2\dfrac{C_{p\mathrm{He}}}{\mu_{\mathrm{He}}} + 0{,}3\dfrac{C_{p\mathrm{N_2}}}{\mu_{\mathrm{N_2}}} + 0{,}5\dfrac{C_{p\mathrm{NH_3}}}{\mu_{\mathrm{NH_3}}} \approx 2{,}08\ \dfrac{\text{кДж}}{\text{кг·К}}.$

8.12. $c_V \approx 88{,}2\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}};\ c_p \approx 134\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$

Решение. Полная теплоемкость смеси газов

$$C_0 = \frac{\delta Q_1 + \delta Q_2}{\mathrm{d}T} = \nu_1 C_1 + \nu_2 C_2 = (1-\alpha)\nu_0 C_1 + \alpha\nu_0 C_2,$$

где ν_0 – исходное число молей недиссоциированного йода, δQ_1 – количество теплоты, необходимое $\nu_1 = (1–\alpha)\nu_0$ молям молекулярного йода; δQ_2 – количество теплоты, необходимое $\nu_2 = 2\alpha\nu_0$ молям атомарного йода для увеличения их температуры на $\mathrm{d}T$.

Удельная теплоемкость смеси диссоциированных и недиссоциированных молекул равна $c = C_0/m_0 = (\nu_1 C_1 + \nu_2 C_2)/(\nu_0 \mu)$, где $m_0 = \nu_0 \mu$ – масса смеси.

Для изохорического процесса:

$$c_V = \frac{R}{2} \cdot \frac{\nu_1\, i_1 + \nu_2\, i_2}{\nu_0 \mu} = \frac{R}{2} \cdot \frac{5(1-\alpha) + 3 \cdot 2\alpha}{\mu} = \frac{R}{2\mu}(5+\alpha) \approx 88{,}2\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}},$$

для изобарического процесса (с учетом формулы Майера):

$$c_p = c_V + R \cdot \frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_0 \mu} = \frac{R}{2\mu}(7 + 3\alpha) \approx 134\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

8.13. $\alpha = \dfrac{5\gamma - 7}{3 - \gamma} \approx 0{,}161.$

Решение. Воспользуемся результатом решения задачи 8.12, где получены выражения для изохорической и изобарической удельных теплоемкостей газа в случае, когда часть α его молекул диссоциирована на атомы:

$$c_p = \frac{R}{2\mu}(7+3\alpha), \quad c_V = \frac{R}{2\mu}(5+\alpha).$$

При этом $\gamma = \dfrac{c_p}{c_V} = \dfrac{7+3\alpha}{5+\alpha}$, откуда $\alpha = \dfrac{5\gamma - 7}{3-\gamma} \approx 0{,}161$.

8.14. $\alpha = \dfrac{2\mu c_p - 7R}{3R} \approx 0{,}186$

8.15. $m_2 \approx 0{,}294$ кг.

Решение. Удельная изохорическая теплоемкость смеси газов равна (см. решение задачи 8.9)

$$c_V = \frac{R}{2}\cdot\frac{(m_1/\mu_1)\,i_1 + (m_2/\mu_2)\,i_2}{m_1+m_2} = \frac{R}{2}\cdot\frac{\nu_1 i_1 + (m_2/\mu_2)\,i_2}{\nu_1\mu_1 + m_2}.$$

Для смеси азота и аргона получаем: $c_V = \dfrac{R}{2}\cdot\dfrac{5\nu_1 + 3m_2/\mu_2}{\nu_1\mu_1 + m_2}$,

откуда находим массу m_2 аргона:

$$m_2 = \mu_2\nu_1\frac{5R - 2c_V\mu_1}{2c_{V1}\mu_2 - 3R} \approx 0{,}294 \text{ кг}.$$

8.16. $i = 5$.

Решение. С учетом уравнения Майера из формулы для показателя политропы

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V} = \frac{C - C_V - R}{C - C_V} = 1 - \frac{R}{C - C_V}$$

находим молярную теплоемкость C_V: $C_V = C + R/(n-1)$.

Поскольку $C_V = iR/2$, где i число степеней свободы молекулы, получаем: $\dfrac{i}{2}R = C + \dfrac{R}{n-1}$, откуда $i = \dfrac{2}{R}\cdot\dfrac{C(n-1)+R}{n-1} = 5$.

8.17. $C = \dfrac{1+2\gamma}{3(\gamma-1)}R.$

Решение. Процесс политропический, показатель политропы $n = -1/2$, поэтому молярная теплоемкость газа равна

$$C = C_V \frac{n-\gamma}{n-1} = \frac{R}{\gamma-1}\cdot\frac{n-\gamma}{n-1} = \frac{1+2\gamma}{3(\gamma-1)}R.$$

8.18. $C = \dfrac{(3+5\alpha)\,\alpha}{2(\alpha+1)}R.$

8.19. $C = R\left(\dfrac{\gamma}{\gamma-1}-\alpha\right).$

Решение. Процесс политропический, показатель политропы n определяем из уравнения политропического процесса в переменных p–T: $pT^{n/(1-n)} = \text{const} \Rightarrow -\alpha = n/(1-n)$, откуда $n = \alpha/(\alpha-1)$.

Молярная теплоемкость газа равна:

$$C = C_V \frac{n-\gamma}{n-1} = \frac{R}{\gamma-1}\cdot\frac{n-\gamma}{n-1} = R\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}-\alpha\right).$$

8.20. $C = 2R.$

8.21. $C = 9R/4.$

8.22. $C = 7R/5.$

8.23. *Решение.* Показатель политропы процесса $n = \dfrac{C-C_p}{C-C_V}$.

Уравнение процесса имеет вид: $pT^{n/(1-n)} = \text{const}$.

а) $n = 5/3$, $p \sim T^{5/2}$; б) $n = 2$, $p \sim T^2$; в) $n = 9/7$, $p \sim T^{4,5}$.

8.24. $C = 4{,}15$ Дж/(моль·К).

Решение. Найдем показатель политропы процесса, записав его в переменных p–V для начального и конечного состояний газа:

$p_1V_1^n = p_2V_2^n$, откуда находим: $n = \dfrac{\ln(p_2/p_1)}{\ln(V_1/V_2)} = \dfrac{\ln\beta}{\ln\alpha}$.

Молярная теплоемкость гелия в данном процессе равна

$$C = C_V\,\frac{n-\gamma}{n-1} = \frac{3}{2}R\cdot\frac{\ln\beta/\ln\alpha-\gamma}{\ln\beta/\ln\alpha-1},\ \text{где}\ \gamma = 5/3.$$

Подставляя численные данные, находим: $C = 4{,}15$ Дж/(моль·К).

8.25. $C_0 \approx -2{,}1$ Дж/К.

Решение. Из уравнения политропического процесса в переменных T–V, $TV^{n-1} = \text{const}$, записанного для начального и конечного состояний $T_1V_1^{n-1} = T_2V_2^{n-1}$, находим $n = \dfrac{\ln(T_1/T_2)}{\ln(V_2/V_1)} + 1$.

Молярная теплоемкость азота в данном процессе равна:

$$C = C_V\,\frac{n-\gamma}{n-1} = \frac{5}{2}R\cdot\left[1+\frac{(1-\gamma)\ln(V_2/V_1)}{\ln(T_1/T_2)}\right],\ \text{где}\ \gamma = 1{,}4.$$

Из уравнения начального состояния следует, что число молей газа равно $\nu = \dfrac{p_1V_1}{RT_1}$. Теплоемкость всей массы азота равна

$$C_0 = \frac{5p_1V_1}{2T_1}\cdot\left[1-\frac{(\gamma-1)\ln(V_2/V_1)}{\ln(T_1/T_2)}\right] \approx -2{,}1\ \text{Дж/К}.$$

8.26. $C = \dfrac{17}{6}R$.

Решение. Для идеального газа внутренняя энергия одного моля $U = C_VT$, следовательно, $T \sim p^{3/2}$, или $p \sim T^{2/3}$. Выражая T из уравнения $pV = RT$, получаем: $p \sim V^{2/3}p^{2/3}$, откуда окончательно имеем: $p \sim V^2$.

Процесс политропический, показатель политропы $n = -2$, поэтому молярная теплоемкость газа равна

$$C = C_V\,\frac{n-\gamma}{n-1} = \frac{5R}{2}\cdot\frac{n-7/5}{n-1} = \frac{17}{6}R.$$

8.27. $C = \dfrac{2-\gamma}{\gamma-1}R$.

8.28. $C = C_V - 2R$.

Решение. Запишем уравнение процесса в параметрах *T*–*V*: $TV^{1/2} = \text{const} \equiv A$. Производная $\mathrm{d}T/\mathrm{d}V = -(A/2)V^{-3/2}$, то есть $\mathrm{d}T = -\dfrac{A}{2V^{3/2}}\mathrm{d}V$. Отсюда видно, что при расширении ($\mathrm{d}V > 0$) температура понижается: $\mathrm{d}T < 0$.

Процесс политропический с показателем политропы n = 3/2, поэтому теплоемкость газа равна

$$C = C_V\frac{n-\gamma}{n-1} = C_V\frac{3/2-\gamma}{1/2} = 3C_V - 2C_p = C_V - 2R.$$

8.29. $C = C_V + 4R$. При нагревании объем газа увеличивается.

8.30. а) $C = C_V + \dfrac{p_0 + \alpha\sqrt{V}}{p_0 + (3\alpha/2)\sqrt{V}}\cdot R$, б) $C = C_V + \dfrac{R}{2} + \dfrac{RT_0}{2\beta V^2}$.

Решение. а) Выразим заданный процесс в переменных *V*–*T*, используя $p = RT/V$. Уравнение процесса примет вид:

$$\frac{RT}{V} = p_0 + \alpha\sqrt{V}\text{, откуда } T = \frac{1}{R}\left(p_0V + \alpha V^{3/2}\right).$$

Молярную теплоемкость найдем по формуле:

$$C = C_V + p\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} = C_V + \frac{p_0 + \alpha\sqrt{V}}{\mathrm{d}T/\mathrm{d}V} = C_V + \frac{p_0 + \alpha\sqrt{V}}{p_0 + (3\alpha/2)\sqrt{V}}\cdot R.$$

б) $C = C_V + \dfrac{R}{2} + \dfrac{RT_0}{2\beta V^2}$.

8.31. $C = C_p - \dfrac{2\beta RT^2}{p_0 + \beta T^2}$.

Решение. Молярная теплоемкость идеального газа в произвольном процессе описывается формулой: $C = C_V + p(\mathrm{d}V/\mathrm{d}T)$.

Из уравнения состояния идеального газа для одного моля получим выражение $V = RT/p$. С учетом взаимосвязи давления p и температуры T получаем: $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} = R\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{T}{p^2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}\right)$.

Подставляя полученное выражение в формулу для теплоемкости, находим:

$$C = C_V + p\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} = C_V + R\left(1 - \frac{T}{p}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}\right) = C_p - \frac{RT}{p}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}.$$

Для заданного в задаче процесса

$$C = C_p - \frac{2\beta RT^2}{p_0 + \beta T^2}.$$

8.32. $C = C_p - \dfrac{R}{\alpha p}$.

Решение. Воспользуемся формулой, полученной в задаче 8.31: $C = C_p - \dfrac{RT}{p}\cdot\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}$. Так как задана зависимость $T(p)$, то удобнее вычислить производную $\mathrm{d}T/\mathrm{d}p = \alpha T_0 e^{\alpha p}$. Молярная теплоемкость газа в данном процессе равна

$$C = C_p - \frac{RT_0 e^{\alpha p}}{p\cdot \mathrm{d}T/\mathrm{d}p} = C_p - \frac{R}{\alpha p}.$$

8.33. $C = \dfrac{R}{\gamma - 1} + R\dfrac{V_0 - V}{V_0 - 2V}$.

Решение. С учетом заданных значений p_0 и V_0 уравнение процесса имеет вид: $p = p_0\left(1 - V/V_0\right)$.

Выражаем давление газа через объем газа и температуру: $p = (RT)/V$, откуда

$$T = \frac{p_0 V}{R}\left(1 - \frac{V}{V_0}\right) \text{ и } \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}V} = \frac{p_0}{R}\left(1 - \frac{2V}{V_0}\right).$$

Молярная теплоемкость в данном процессе равна

$$C = C_V + p\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} = \frac{R}{\gamma - 1} + R\frac{V_0 - V}{V_0 - 2V}.$$

8.34. а) $T\exp\left(\dfrac{2R}{\beta\sqrt{V}}\right) = \text{const}$; б) $\dfrac{V}{T+\alpha} = \text{const}$.

Решение. Используем уравнение

$$C = C_V + p\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} = C_V + \frac{RT}{V}\cdot\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}.$$

а) Подставляя $C = C_V + \beta\sqrt{V}$, получаем соотношение:

$$C_V + \beta\sqrt{V} = C_V + \frac{RT}{V}\cdot\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\frac{\beta}{T}\mathrm{d}T = \frac{R\mathrm{d}V}{V^{3/2}};\ \beta\int\frac{\mathrm{d}T}{T} = R\int\frac{\mathrm{d}V}{V^{3/2}};\ \beta\ln T = -\frac{2R}{\sqrt{V}} + \ln A,$$

где A = const. Потенциируя полученное соотношение, получаем:

$$T\exp\left(\frac{2R}{\beta\sqrt{V}}\right) = \text{const}.$$

б) $\dfrac{V}{T+\alpha} = \text{const}$.

8.35. а) $\dfrac{T+\beta}{p} = \text{const}$; б) $T\exp\left(\dfrac{Rp}{\alpha}\right) = \text{const}$.

8.36. $(p+a)/V = \text{const}$.

Решение. Воспользуемся формулой для теплоемкости в параметрах p и T (см. задачу 8.31): $C = C_p - \dfrac{RT}{p}\cdot\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}$. Подставляя заданную теплоемкость, с учетом формулы Майера получаем:

$$C_V + \frac{Rp}{2p+a} = C_V + R - \frac{RT}{p}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T},$$

откуда $\dfrac{T}{p}\cdot\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \dfrac{p+a}{2p+a}$.

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\frac{2p+a}{p+a}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{\mathrm{d}T}{T}\ \rightarrow\ \int\frac{\mathrm{d}T}{T}=\int\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+a}\right)\mathrm{d}p\ ;$$

$$\ln T=\ln p+\ln\left(p+a\right)+\ln A\,,$$

где A = const. Потенциируя полученное соотношение, получаем:

$$\frac{p\,(p+a)}{T}=\text{const}\,.$$

Для идеального газа $p/T=R/V$. Подставляя это соотношение в полученную формулу, находим уравнение процесса в переменных p и V: $\left(p+a\right)/V=\text{const}$.

8.37. $pV^{\gamma}\exp\left(-\dfrac{\alpha(\gamma-1)}{R^3}p^2V^2\right)=\text{const}.$

Решение. Запишем общую формулу для молярной теплоемкости, используя закон её изменения с температурой:

$$\alpha T^2=C_V+\frac{RT}{V}\cdot\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}\,.$$

Отсюда, разделяя переменные, получаем $\dfrac{\alpha}{R}T\mathrm{d}T-\dfrac{C_V}{R}\cdot\dfrac{\mathrm{d}T}{T}=\dfrac{\mathrm{d}V}{V}$ и получаем: $\ln A+\dfrac{aT^2}{2R}=\dfrac{C_V}{R}\ln T+\ln V$, где A = const.

Последнее выражение преобразуем к виду: $A\exp\left(\dfrac{aT^2}{2R}\right)=$ $=VT^{C_V/R}$. Выражая C_V через γ, $C_V=R/(\gamma-1)$, окончательно находим уравнение процесса в переменных T–V-:

$$A\exp\left(\frac{aT^2}{R}\right)=VT^{1/(\gamma-1)}\,.$$

Подставив $T=pV/R$, переходим к уравнению процесса в -переменных p–V:

$$pV^{\gamma}\exp\left(-\frac{\alpha(\gamma-1)}{R^3}p^2V^2\right)=\text{const}\,.$$

8.38. *Решение.* Согласно определению теплоемкости, что количество подведенной теплоты равно:

$$Q = \nu \int\limits_{T_0}^{nT_0} C(T)\,\mathrm{d}T = \nu \int\limits_{T_0}^{nT_0} \left(C_V + a/T\right)\mathrm{d}T = \nu\left\{C_V T_0\left(n-1\right) + a\ln n\right\}.$$

8.39. $Q = \dfrac{p_1 V_1}{RT_1}\cdot\dfrac{2\alpha}{3}\left(T_2^{3/2} - T_1^{3/2}\right)$.

8.40. $C = 2R$.

Решение. В процессе медленного нагревания газа поршень будет двигаться без ускорения, при этом сила давления на поршень со стороны газа уравновешивается силой со стороны сжатой пружины: $kV/S = pS$ (S – площадь поршня, k – жесткость пружины). Отсюда следует, что $p/V = k/S^2 = \mathrm{const}$, то есть процесс политропический с показателем политропы $n = -1$. Так как для гелия $C_V = 3R/2$, его молярная теплоемкость в процессе равна

$$C = C_V\frac{n-\gamma}{n-1} = \frac{C_p + C_V}{2} = C_V + \frac{R}{2} = 2R.$$

8.41. $c(\mathrm{KBr}) = 418$ Дж/(кг · К).

Решение. Поскольку температура, при которой вычисляется теплоемкость, выше температур Дебая, можно воспользоваться законом Дюлонга – Пти. Энергия одного атома равна $3kT$, а энергия двухатомной молекулы соли – $6kT$, следовательно, внутренняя энергия одного моля соли равна $U = 6RT$, а молярная теплоемкость – $C_V = \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} = 6R$.

С учетом связи молярной и удельной теплоемкостей находим: $C = \mu c$ $\overline{c} = 6R/\mu$, где $\mu(\mathrm{KBr}) = 119$ г/моль. Для удельной теплоемкости получаем: $c(\mathrm{KBr}) = 418$ Дж/(кг · К).

8.42. $Q = \dfrac{mA}{4\mu}\left(T_2^4 - T_1^4\right)$.

§9. Процессы в идеальном газе

9.1. $T_2 = T_1 \alpha^{(\gamma-1)/\gamma} \approx 433$ K, где $\gamma = 1{,}4$.

9.2. $p_3 = 2{,}5 \cdot 10^5$ Па.

Решение. В процессе адиабатического сжатия $p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma}$, откуда $V_1/V_2 = (p_2/p_1)^{1/\gamma}$. Для неизменной массы газа $p_1 V_1/T_1 = p_3 V_3/T_3$. Поскольку $V_2 = V_3$ и $T_3 = T_1$, $P_1 V_1 = P_3 V_2$, отсюда находим: $p_3 = p_1 V_1/V_2 = p_1 (p_2/p_1)^{1/\gamma} = 2{,}5 \cdot 10^5$ Па.

9.3. $\dfrac{p_к}{p_0} = n^{(\gamma-1)/\gamma} = 2{,}51$.

9.4. $C_V = \dfrac{R \ln(V_2/V_1)}{\ln(T_1/T_2)}$.

9.5. $\varepsilon_{вр} \approx 1{,}42 \cdot 10^{-20}$ Дж.

Решение. Из уравнения адиабатического процесса $TV^{\gamma-1} = \text{const}$ находим конечную температуру T_1 газа $T_1 = T_0 (V_0/V_1)^{\gamma-1} = T_0 n^{\gamma-1}$.

Средняя энергия вращательного движения молекул равна:

$$\varepsilon_{вр} = \frac{3}{2} k T_1 = \frac{3}{2} k T_0 n^{\gamma-1} \approx 1{,}42 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}.$$

9.6. $i = 5$.

Решение. Записав уравнение адиабатического процесса в *T-V*-переменных, $T_1/T_2 = (V_2/V_1)^{\gamma-1}$, и используя данные задачи, получаем: $\beta = \alpha^{\gamma-1}$, откуда находим показатель адиабаты газа:

$$\gamma = 1 + \frac{\ln\beta}{\ln\alpha}.$$

С другой стороны, γ выражается через количество степеней свободы молекулы: $\gamma = (i+2)/i = 1 + 2/i$. Приравнивая записанные выражения, находим: $i = 2\ln\alpha / \ln\beta = 2\ln(1{,}32)/\ln 2 = 5$.

9.7. *Решение.* Показатель политропы процесса равен:

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V} = \frac{R/2 - 7R/2}{R/2 - 5R/2} = \frac{3}{2}.$$

Из уравнения политропического процесса $pV^n = \text{const}$ находим: $p_2/p_1 = (V_1/V_2)^n = 1/\alpha^{3/2}$, т.е. давление уменьшилось в $\alpha^{3/2}$ раз.

9.8. $T_2 = T_1(p_1/p_2)^{(1-n)/n} = T_1(p_2/p_1)^2 = 1200$ K, где $n = -1$.

9.9. $V_2/V_1 = \alpha^{-3.2} \approx 0{,}54$.

9.10. $\dfrac{p - p_0}{V - V_0} = \text{const}$.

Решение. Пусть при повышении температуры газа его объем изменился на $\Delta V = Sx$, где S – поперечное сечение трубки, x – изменение длины столба газа в левой части трубки. При этом уровень жидкости в правой части трубки также изменится на x. Объем и давление газа станут: $V = V_0 + Sx$, $p = p_0 + \rho g x$.

Исключая из этих уравнений x, находим уравнение процесса:

$$p - p_0 = (V - V_0)\frac{\rho g}{S}, \text{ откуда } \frac{p - p_0}{V - V_0} = \text{const}.$$

Так как полученное уравнение процесса не сводится к уравнению $pV^n = \text{const}$, процесс не является политропическим.

9.11. $\dfrac{p - p_0}{V - V_0} = \text{const}$. Процесс не является политропическим.

Решение. Если при изменении температуры газа его объем увеличится на $\Delta V = Sx$, где S –площадь поршня, x – его сдвиг от начального положения, то пружина растянется, и на поршень будут действовать сила со стороны пружины, сила внешнего давления и сила давления со стороны газа. При равновесном квазистатическом процессе эти силы в сумме равны нулю, поэтому давление газа в процессе нагрева будет равно $p = p_0 + kx/S$, где k – жесткость пружины. При этом газ будет иметь объем $V = V_0 + Sx$.

Исключая из этих уравнений x, находим уравнение процесса: $\dfrac{p-p_0}{V-V_0}=\text{const}$. Процесс не является политропическим.

9.12. $pV^n=\text{const}$.

Решение. Проведем расчет для одного моля газа. По условию задачи работа газа $\delta A=\alpha \mathrm{d}T$, где $\alpha=\text{const}$. Так как $\delta A=p\mathrm{d}V$, то $p\mathrm{d}V=\alpha \mathrm{d}T$.

Из уравнения состояния идеального газа $pV=RT$ выражаем изменение температуры: $\mathrm{d}T=(p\mathrm{d}V+V\mathrm{d}p)/R$, поэтому

$$p\mathrm{d}V=\frac{\alpha}{R}(p\mathrm{d}V+V\mathrm{d}p) \text{ или } p\,\mathrm{d}V\left(1-\frac{R}{\alpha}\right)+V\mathrm{d}p=0.$$

Введем постоянную $n=\left(1-R/\alpha\right)$. Тогда полученное ранее уравнение примет вид: $np\mathrm{d}V+V\mathrm{d}p=0$. Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$n\mathrm{d}V/V+\mathrm{d}p/p=0;\ n\ln V+\ln p=\ln C,$$

откуда окончательно получаем: $pV^n=\text{const}$.

9.13. $\Delta U=\dfrac{5}{2}A$.

9.14. См. рис. О.9.14: 1 – изохора, 2 – изобара, 3 – изотерма, 4 – адиабата.

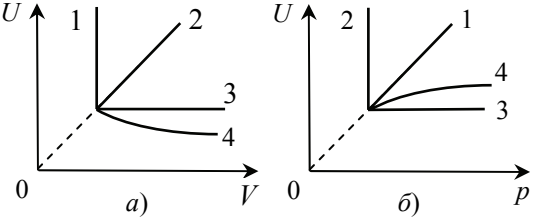


Рис. О.9.14.

9.15. $Q=\nu RT\ln\dfrac{p_1}{p_2}\approx 26{,}1$ кДж.

9.16. $\gamma=\dfrac{p_0V\Delta T}{T_0Q}+1\approx 1{,}33$.

9.17. $Q=-\Delta U=\left(5\nu_1+3\nu_2\right)\dfrac{R\Delta T}{2}=2{,}0$ кДж.

9.18. $Q = (3/2)R(\nu_1 + \nu_2)\,(n-1)\,T_1$

Решение. Поскольку объемы сосуда и мяча постоянны, из уравнения Менделеева–Клапейрона следует, что:

$$\frac{p_{м2} - p_{с2}}{T_2} = \frac{p_{м_1} - p_{с1}}{T_1}.$$

По условию задачи, в момент разрыва мяча разность давлений внутри и снаружи мяча в n раз больше первоначальной, т.е.

$$(p_{м2} - p_{с2}) = n\,(p_{м_1} - p_{с1}).$$

Из полученных формул находим связь начальной и конечной температур: $T_2 = nT_1$. Количество теплоты Q, сообщенное газу, равно $Q = (\nu_1 + \nu_2)\,C_V \Delta T = (3/2)R(\nu_1 + \nu_2)\,(n-1)\,T_1$.

9.19. $A \approx 3{,}9$ кДж.

Решение. Так как процесс адиабатический, то $Q = \Delta U + A = 0$ и работа газа $A_г = -\Delta U = -(m/\mu)C_V\left(T_2 - T_1\right)$.

Конечную температуру T_2 определим из уравнения адиабатического процесса в T–V-переменных: $TV^{\gamma-1} = \text{const}$, т. .е.

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = T_1\alpha^{\gamma-1}.$$

Искомая работа над газом равна

$$A = -A_г = \frac{m}{\mu}C_V T_1\left(\alpha^{\gamma-1} - 1\right) = \frac{m}{\mu}\cdot 3RT_1(\alpha^{4/3-1} - 1) \approx 3{,}9 \text{ кДж}.$$

9.20. а) $A = R\Delta T$; б) $A = 0$; в) $A = -\dfrac{R\Delta T}{\gamma - 1}$.

9.21. *Решение.* а) При изотермическом процессе

$$A_1 = RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} = RT_1 \ln\frac{p_1}{p_2} = RT_1 \ln\beta \approx 2{,}74 \text{ кДж}.$$

б) При адиабатическом процессе $A = -\Delta U = -C_V\left(T_2 - T_1\right)$, где конечная температура газа T_2 определяется из уравнения адиабатического процесса в p–T-переменных: $pT^{\gamma/(1-\gamma)} = \text{const}$.

$$T_2 = T_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} = \frac{T_1}{\beta^{(\gamma-1)/\gamma}}.$$

Совершенная газом работа равна

$$A_2 = C_V T_1\left(1-\beta^{(1-\gamma)/\gamma}\right) = \frac{3}{2}RT_1\left(1-\beta^{-2/5}\right) \approx 1{,}33 \text{ кДж}.$$

При изотермическом процессе работа газа больше.

9.22. В ходе процесса I.

9.23. $A \cong 8{,}4\cdot 10^3$ Дж.

Решение. В ходе адиабатического процесса температура газа стала $T_2 = T_1\left(V_1/V_2\right)^{\gamma-1} = T_1/n^{\gamma-1}$. Работа A_1 газа при адиабатическом расширении равна:

$$A_1 = -(U_2 - U_1) = \frac{m}{\mu}C_V\left(T_1 - T_2\right) = \frac{m}{\mu}\cdot C_V T_1\left(1-\frac{1}{n^{\gamma-1}}\right),$$

где $C_V = R/(\gamma-1)$ и для водорода $\gamma = 1,4$.

Работа A_2 газа при изотермическом сжатии:

$$A_2 = \frac{m}{\mu}RT_2\ln\frac{V_1}{V_2} = \frac{m}{\mu}RT_1\frac{\ln(1/n)}{n^{\gamma-1}}.$$

Полная работа, совершенная газом, равна

$$A = \frac{m}{\mu n^{\gamma-1}}RT_1\left(\frac{n^{\gamma-1}-1}{\gamma-1} - \ln n\right) \cong 8{,}4\cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

9.24. а) $\Delta U = \frac{5}{2}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right) = 500$ Дж, $A = p_2(V_2 - V_1) = -600$ Дж; $Q = \Delta U + A = -100$ Дж;

б) $\Delta U = 500$ Дж, $A = p_1(V_2 - V_1) = -200$ Дж, $Q = 300$ Дж.

9.25. *Решение.* $Q_1 = mc_p\Delta T$, $Q_2 = mc_V\Delta T$. По формуле Майера $(c_p - c_V)\mu = C_p - C_V = R$, откуда находим молярную массу газа:

$$\mu = \frac{R}{c_p - c_V} = \frac{Rm\Delta T}{Q_1 - Q_2} \approx 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

Следовательно, газ – кислород.

9.26. $Q = \nu R T_1 \left(\frac{\gamma(\alpha - 1)}{\gamma - 1} - \ln\alpha \right)$.

Решение. В ходе изотермического сжатия количество теплоты равно $Q_1 = A_1 = \nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = -\nu R T_1 \ln\alpha$. При этом давление газа увеличится в $p_2/p_1 = V_1/V_2 = \alpha$ раз.

При изобарическом расширении до объема V_1

$$Q_2 = \nu C_p (T_2 - T_1) = C_p p_2 \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{C_p p_1 V_1 (\alpha - 1)}{R}.$$

Учитывая, что $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$ и $p_1 V_1 = \nu R T_1$, $Q_2 = \frac{\gamma \nu R T_1 (\alpha - 1)}{\gamma - 1}$.

Общее количество теплоты, полученное газом, равно

$$Q = Q_1 + Q_2 = \nu R T_1 \left(\frac{\gamma(\alpha - 1)}{\gamma - 1} - \ln\alpha \right).$$

9.27. $\lambda \sim p^{(\gamma-1)/(2\gamma)}$.

Решение. В адиабатическом процессе $T \sim p^{(\gamma-1)/\gamma}$. По формуле для коэффициента теплопроводности

$$\lambda = \frac{1}{3} \langle v \rangle l \, c_V \rho = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n} c_V \cdot \frac{\mu p}{RT} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \frac{kT}{\sqrt{2}\sigma p} \cdot \frac{\mu p}{RT} \sim \sqrt{T}.$$

Таким образом, $\lambda \sim p^{(\gamma-1)/(2\gamma)}$.

9.28. $V = \sqrt{RT/\alpha}$; $p = \sqrt{\alpha R T}$.

9.29. $A = 2 p_1 V_1$.

Решение. Пусть $p = B/V^2$, где B = const, которую определим из начальных условий: $B = p_1 V_1^2$.

Работа по сжатию газа равна

$$A = -\int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V = p_1V_1^2 \int_{V_1/3}^{V_1} \frac{\mathrm{d}V}{V^2} = p_1V_1^2\left(-\frac{1}{V_1} + \frac{3}{V_1}\right) = 2p_1V_1 .$$

9.30. $\Delta U = \dfrac{15p_1V_1}{\gamma - 1}$, $A = \dfrac{15}{2}p_1V_1$.

Решение. Процесс политропический с показателем политропы $n = -1$. Из уравнения начального состояния $\nu RT_1 = p_1V_1$ и уравнения процесса в T–V параметрах, $TV^{n-1} = \mathrm{const}$, находим конечную температуру: $T_1 = \dfrac{p_1V_1}{\nu R}\left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^2$.

Изменение внутренней энергии газа в процессе:

$$\Delta U = \nu C_V (T_2 - T_1) = \frac{\nu R}{\gamma - 1} \cdot \frac{p_1V_1}{\nu R}\left[\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 - 1\right] = \frac{15p_1V_1}{\gamma - 1} .$$

Давление газа в указанном процессе меняется по закону: $p = p_1V / V_1$. Работа газа равна

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V = \frac{p_1}{V_1}\int_{V_1}^{4V_1} V\mathrm{d}V = \frac{p_1}{2V_1}V^2\Big|_{V_1}^{4V_1} = \frac{15}{2}p_1V_1 .$$

9.31. $A_1 \approx 7{,}88$ кДж.

Решение. Процесс политропический с показателем политропы $n = 1{,}5$. Теплоемкость газа в данном процессе:

$$C = C_V \frac{n - \gamma}{n - 1} = \frac{5R}{2} \cdot \frac{3/2 - 7/5}{3/2 - 1} = \frac{1}{5}R .$$

Начальная температура газа $T_1 = \dfrac{p_1V_1}{\nu R}$, конечную температуру находим из уравнения процесса $TV^{n-1} = \mathrm{const}$:

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1/2} = \frac{p_1V_1}{\nu R\sqrt{2}} < T_1 .$$

Изменение внутренней энергии азота равно:

$$\Delta U = \nu C_V (T_2 - T_1) = \frac{5R\nu}{2} \cdot \frac{p_1 V_1}{\nu R}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) = -\frac{5(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}}\, p_1 V_1 \approx$$

$$\approx -8{,}57 \text{ кДж}.$$

Так как температура газа в процессе понижается, то газ отдает теплоты окружающей среде:

$$Q = \nu C (T_2 - T_1) = \frac{R\nu}{5} \cdot \frac{p_1 V_1}{\nu R}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) = -\frac{(\sqrt{2}-1)}{5\sqrt{2}}\, p_1 V_1 \approx -0{,}69 \text{ Дж}.$$

Из первого начала термодинамики находим работу газа:

$$A = Q - \Delta U = \frac{23(\sqrt{2}-1)}{10\sqrt{2}}\, p_1 V_1 \approx 7{,}88 \text{ кДж}.$$

9.32. $Q = \dfrac{m}{\mu} C_V \Delta T \dfrac{n-\gamma}{n-1} = 2{,}90$ кДж; $A = -\dfrac{m}{\mu} \cdot \dfrac{R\Delta T}{n-1} = 4{,}15$ кДж.

9.33. $Q = \dfrac{V_1^3 (2+\gamma)}{3a^2(\gamma-1)}\left(\beta^3 - 1\right)$.

Решение. Перепишем уравнение процесса в виде: $p = V^2/a^2$. Процесс политропический с показателем политропы $n = -2$. Молярная теплоемкость газа в процессе:

$$C = C_V \frac{n-\gamma}{n-1} = \frac{R}{\gamma-1} \cdot \frac{2+\gamma}{3}.$$

Используя уравнение Менделеева–Клапейрона $pV = \nu RT$, находим количество полученной газом теплоты:

$$Q = \nu C (T_2 - T_1) = \frac{1}{\gamma-1} \cdot \frac{2+\gamma}{3}\left(p_2 V_2 - p_1 V_1\right).$$

Подставляя $p_i = V_i^2/a^2$ ($i = 1, 2$), получаем:

$$Q = \frac{1}{(\gamma-1)a^2}\left(V_2^3 - V_1^3\right) = \frac{V_1^3 (2+\gamma)}{3a^2(\gamma-1)}\left(\beta^3 - 1\right).$$

9.34. $n = \left(\dfrac{Q}{3\beta V_1^{4/3}} + 1 \right)^{3/4}$.

9.35. $A = 2R\Delta T$.

Решение. Перепишем уравнение процесса в виде: $TV^{-1/2} = 1/\sqrt{a}$. Процесс политропический с показателем политропы $n = 1/2$. Молярная теплоемкость газа в процессе равна $C = C_V \dfrac{n-\gamma}{n-1}$. По первому началу термодинамики работа газа

$$A = Q - \Delta U = C\Delta T - C_V \Delta T = C_V \left(\frac{n-\gamma}{n-1} - 1 \right) \Delta T = \frac{R\Delta T}{1-n} = 2R\Delta T .$$

9.36. *Решение.* Из уравнения политропического процесса в p–T-переменных, $pT^{n/(1-n)} = \text{const}$, следует, что процесс политропический. Показатель политропы находим из условия: $\dfrac{n}{1-n} = -\dfrac{1}{2}$, т. е. $n = -1$.

При этом $\Delta U = \nu C_V \Delta T = \dfrac{\nu R\Delta T}{\gamma - 1}$ и $A = \nu R\Delta T(1-n) = 2\nu R\Delta T$.

9.37. $A = \dfrac{5}{8} p_1 V_1$.

Решение. Показатель политропы газа находим по формуле: $n = \dfrac{C - C_p}{C - C_V} = \dfrac{2R - 5R/2}{2R - 3R/2} = -1$. Из уравнения политропы в T–V-переменных $TV^{n-1} = \text{const}$ получаем, что температура газа увеличилась в $T_2/T_1 = \left(V_1/V_2\right)^{n-1} = \alpha^2 = 2{,}25$ раза.

Зависимость давления от объема в данном процессе определяется из уравнения политропы в p–V-переменных и начальных условий: $p = p_1 V/V_1$. Работа газа равна

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V = \frac{p_1}{V_1} \int_{V_1}^{1{,}5V_1} V\mathrm{d}V = \frac{p_1}{2V_1} V^2 \Big|_{V_1}^{1{,}5V_1} = \frac{5}{8} p_1 V_1 .$$

9.38. $\Delta T = \dfrac{\alpha A}{\nu R}$, $\Delta U = \dfrac{\alpha A}{\gamma - 1}$.

Решение. Внутренняя энергия идеального газа равно $U = \nu C_V T$, следовательно, в данном процессе $T \sim V^{\alpha}$. Процесс политропический с показателем политропы $n = 1 - \alpha$.

Работа газа в политропическом процессе равна

$$A = Q - \Delta U = \nu(C - C_V)\Delta T = \nu C_V \left(\frac{n - \gamma}{n - 1} - 1 \right) \Delta T = \frac{\nu R \Delta T}{1 - n},$$

откуда находим изменение температуры при расширении газа:

$$\Delta T = A \frac{1 - n}{\nu R} = \frac{\alpha A}{\nu R}.$$

Изменение внутренней энергии газа равно

$$\Delta U = \nu C_V \Delta T = \frac{\nu R \Delta T}{\gamma - 1} = \frac{\alpha A}{\gamma - 1}.$$

9.39. $T_{\max} = \dfrac{p_0 V_0}{2R}$.

Решение. Уравнение процесса имеет вид:

$$\left(\frac{p}{p_0} \right)^2 + \left(\frac{V}{V_0} \right)^2 = 1.$$

Подставляя $p = RT/V$, получаем уравнение:

$$\left(\frac{RT}{p_0 V} \right)^2 + \left(\frac{V}{V_0} \right)^2 = 1,$$

откуда находим: $T^2 = (p_0/V_0)^2 V^2 \left(V_0^2 - V^2 \right)$.

Для исследования полученного выражения на максимум берем производную $\mathrm{d}(T^2)/\mathrm{d}V$ и приравниваем её нулю:

$$\frac{\mathrm{d}(T^2)}{\mathrm{d}V} = 2 \left(\frac{p_0}{V_0} \right)^2 V \left(V_0^2 - 2V^2 \right) = 0.$$

Отсюда определяем объем, при котором газ имеет максимальную температуру в процессе: $V_{T_{\max}} = V_0/\sqrt{2}$. Подставляя это значение в

уравнение для T^2, находим максимальную температуру:

$$T_{\max} = \frac{p_0 V_0}{2R}.$$

9.40. Для одного моля $T = \left(p_0 V + \alpha\sqrt{V}\right)/R$. При расширении газ нагревается.

9.41. $T_0 = \sqrt{p_0/\beta}$. Следовательно, при нагревании при температурах $T < T_0$ объем газа увеличивается, а при $T > T_0$ – уменьшается.

Решение. Выражая объем из уравнения состояния идеального газа (для одного моля) $V = RT/p$, находим зависимость объема газа от температуры:

$$V = \frac{RT}{p_0 + \beta T^2}.$$

Полученная зависимость немонотонна. Исследуем её на экстремум, для чего найдем производную $\mathrm{d}V/\mathrm{d}T$:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} = \frac{p_0 - \beta T^2}{(p_0 + \beta T^2)^2} R.$$

Приравняв её нулю, определяем температуру, соответствующую максимальному объему: $T_0 = \sqrt{p_0/\beta}$. Следовательно, при нагревании при температурах $T < T_0$ объем газа увеличивается, а при $T > T_0$ – уменьшается.

9.42. $A = p_0 V_1 + \dfrac{2\alpha V_1^{3/2}}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$;

$$Q = V_1\left[\frac{5}{2}p_0 + \frac{5}{3}\alpha\sqrt{V_1}\left(2\sqrt{2} - 1\right)\right].$$

Решение. Параметры газа в начальном и конечном состояниях:

$$\{V_1,\ p_1 = p_0 + \alpha\sqrt{V_1}\ ,\ T_1 = p_1 V_1/R = V_1(p_0 + \alpha\sqrt{V_1})/R\},$$

и

$$\{V_2,\ p_2 = p_0 + \alpha\sqrt{V_2}\ ,\ T_2 = V_2(p_0 + \alpha\sqrt{V_2})/R\}.$$

Составляющие энергетического баланса газа в процессе равны: $\Delta U = C_V (T_2 - T_1) = \dfrac{3V_1}{2}\left[p_0 + \alpha\sqrt{V_1}\left(2\sqrt{2}-1\right)\right]$;

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = \int_{V_1}^{2V_1}\left(p_0 + \alpha\sqrt{V}\right)\mathrm{d}V = p_0 V_1 + \frac{2\alpha V_1^{3/2}}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right);$$

$$Q = \Delta U + A = V_1\left[\frac{5}{2}p_0 + \frac{5}{3}\alpha\sqrt{V_1}\left(2\sqrt{2}-1\right)\right].$$

9.43. $\Delta U = \nu C_V (T_2 - T_1) = -\dfrac{5}{2}\nu\left[p_0\left(V_1 - V_2\right) + \dfrac{\alpha}{4}\left(V_1^4 - V_2^4\right)\right]$.

9.44. $\dfrac{V_2}{V_1} = \ln\left(1 + \dfrac{\alpha A}{p_0}e^{-\alpha V_1}\right)$.

9.45. $A = R\left(T_0 \ln n + \beta(n-1)V\right)$.

Решение. Температура газа изменилась на $\Delta T = T_2 - T_1 = \left(T_0 + \beta V_2\right) - \left(T_0 + \beta V_1\right) = \beta(n-1)V_1$. В результате внутренняя энергия газа изменилась на

$$\Delta U = C_V (T_2 - T_1) = \beta C_V (n-1)V_1.$$

Поскольку давление газа в процессе меняется по закону: $p = RT/V = R(T_0 + \beta V)/V$, совершенная газом работа равна

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = R\int_{V_1}^{nV_1}\frac{T_0 + \beta V}{V}\,\mathrm{d}V = R\left(T_0 \ln n + \beta(n-1)V\right).$$

9.46. $Q = \nu R\left[\dfrac{(n-1)\,\alpha}{2V_1} - T_0 \ln n\right]$.

9.47. $A = \dfrac{\alpha}{2R}\left(p_2^2 - p_1^2\right)$, $Q = \dfrac{2\alpha}{R}\cdot\left(p_2^2 - p_1^2\right)$.

Решение. Найдем связь между давлением и объемом в процессе нагревания. Подставляя в заданное уравнение процесса $V = \sqrt{\alpha T}$ температуру $T = pV/R$, находим: $V = \alpha p/R$, а также

$p = RV/\alpha$. Подставляя $V = \sqrt{\alpha T}$, получаем связь температуры газа с его давлением: $T = \alpha p^2/R^2$.

Изменение внутренней энергии газа в процессе равно

$$\Delta U = C_V\left(T_2 - T_1\right) = \frac{3}{2}R \cdot \frac{\alpha}{R^2}\left(p_2^2 - p_1^2\right) = \frac{3\alpha}{2R}\left(p_2^2 - p_1^2\right).$$

Вычислим работу, совершенную газом:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RV}{\alpha}\,\mathrm{d}V = \frac{R}{2\alpha}\left(V_2^2 - V_1^2\right) = \frac{\alpha}{2R}\left(p_2^2 - p_1^2\right).$$

Количество теплоты, полученное газом,

$$Q = A + \Delta U = \left(2\alpha / R\right) \cdot \left(p_2^2 - p_1^2\right).$$

9.48. $A_{\text{вн}} \approx 1{,}9$ Дж.

Решение. Начальный объем воздуха под поршнем $V_0 = h_0 S$, его давление p_0 (так как поршень невесом). Температура воздуха $T = p_0 V_0/(\nu R) = p_0 h_0 S/(\nu R)$.

Конечный объем воздуха $V_1 = \left(h_0 + h_1\right) S$.

Так как процесс – изотермический, работа внешней силы по увеличению объема воздуха равна

$$A_{\text{вн}} = \int_{V_1}^{V_2} (p_0 - p)\mathrm{d}V = p_0\left(V_2 - V_1\right) - \nu R T \ln\left(V_2/V_1\right) =$$

$$= p_0 S\left(h_1 - h_0 \ln\frac{h_0 + h_1}{h_0}\right) \approx 1{,}9 \text{ Дж}.$$

9.49. Было убрано 2/3 всего песка.

Решение. Сила давления газа на поршень должна уравновесить вес поршня и песка и силу атмосферного давления: $pS = (m_0 + m_{\text{п}})g + p_a S$, где m_0 –масса поршня, $m_{\text{п}}$ – масса песка. Так как $T = \text{const}$, то для газа $pV = \text{const}$, откуда следует, что отношение объемов газа до и после насыпания песка равно

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{1}{n}=\frac{p_1}{p_2}=\frac{m_0 g+p_a S}{(m_0+m_{\text{п}1})\,g+p_a S},\ \rightarrow\ n=1+\frac{m_{\text{п}1}}{p_1 S}g\ ,$$

где $m_{\text{п}1}$ – масса насыпанного песка.

После того, как часть песка убрали, давление газа стало p_3, а масса песка $m_{\text{п}2}$. Рассуждая аналогично, можно записать:

$$\frac{V_2}{V_3}=\frac{1}{k}=\frac{p_3}{p_2}=\frac{(m_0+m_{\text{п}2})\,g+p_a S}{np_1 S}=\frac{p_1 S+m_{\text{п}2}g}{np_1 S}=\frac{1}{n}+\frac{m_{\text{п}2}g}{np_1 S}.$$

Следовательно, часть убранного песка равна

$$x=\frac{m_{\text{п}1}-m_{\text{п}2}}{m_{\text{п}1}}=\frac{(k-1)\,n}{(n-1)\,k}=\frac{2}{3}.$$

9.50. $\rho gh\geq p$.

Решение. Так как $T=\text{const}$, то для газа $pV=\text{const}$. Пусть высота трубки H. Для трех положений поршня можно записать:

$$pHS=(p+\rho gh)hS\ ;\ (p+\rho gh)hS=(p+\rho gx)\cdot(H-x)\,S\ .$$

Из первого уравнения определяем высоту трубки:

$$H=\frac{(p+\rho gh)h}{p}.$$

Из второго уравнения находим максимальную высоту столба жидкости x_m: $x_m=H-\dfrac{p}{\rho g}=h\left(1+\dfrac{\rho gh}{p}\right)-\dfrac{p}{\rho g}=h+\dfrac{(\rho gh)^2-p^2}{\rho gp}$.

Чтобы выполнялось $x_m\geq h$, необходимо, чтобы $\rho gh\geq p$.

9.51. $\Delta x=\dfrac{0{,}4Q}{Sp_0-mg}$.

Решение. Когда поршни находятся в равновесии, давление на поршень сверху и снизу одинаково: $p_0=p_{\text{He}}+mg/S$. При изобарическом процессе количество сообщенной газу теплоты равно $Q=\nu C_p\Delta T$, откуда определяем повышение температуры гелия: $\Delta T=Q/\left(\nu C_p\right)$.

Объем гелия при этом увеличится на

$$\Delta V = \frac{\nu R \Delta T}{p_{\text{He}}} = \frac{Q}{(5/2)\cdot(p_0 - mg/S)},$$

что позволяет найти увеличение расстояния между поршнями:

$$\Delta x = \frac{\Delta V}{S} = \frac{0{,}4Q}{Sp_0 - mg}.$$

9.52. $A = p_0 V_0 \ln\frac{4}{3}$.

Решение. Обозначим давление в левой части цилиндра p_1, а в правой – p_2. Для перемещения поршня надо приложить силу $F = (p_2 - p_1)S$. При перемещении поршня на dx внешняя сила совершает работу $\delta A = F\mathrm{d}x = (p_2 - p_1)S\mathrm{d}x = (p_2 - p_1)\mathrm{d}V$, где $\mathrm{d}V = S\mathrm{d}x$ – изменение объема правой части цилиндра. Поскольку процесс проводится изотермически, для правой и левой частей цилиндра можно записать: $p_1(V_0 + Sx) = p_0 V_0$; $p_2(V_0 - Sx) = p_0 V_0$, откуда

$$p_2 - p_1 = p_0 V_0 \frac{2Sx}{V_0^2 - V^2} = p_0 V_0 \frac{2V}{V_0^2 - V^2},$$

где $V = Sx$.

Работа внешней силы при сжатии газа в правой части до половины первоначального объема равна

$$A = p_0 V_0 \int_0^{V_0/2} \frac{2V\mathrm{d}V}{V_0^2 - V^2} = -p_0 V_0 \ln\left(V_0^2 - V^2\right)\Big|_0^{V_0/2} = p_0 V_0 \ln\frac{4}{3}.$$

9.53. $A_F = \dfrac{2p_0 V_0}{\gamma - 1}\left[\left(\dfrac{4}{3}\right)^{(\gamma-1)/2} - 1\right]$.

Решение. Так как поршень проводит теплоту, температура газа в двух частях цилиндра одинакова. Согласно уравнению состояния идеального газа, при перемещении поршня вправо на расстояние x от начального положения для правой и левой частей цилиндра можно записать:

$$p_1(V_0 + Sx) = \nu RT; \quad p_2(V_0 - Sx) = \nu RT,$$

где ν – число молей газа в каждой части цилиндра. Отсюда находим:

$$p_2 - p_1 = \nu RT\frac{2Sx}{V_0^2 - V^2} = \nu RT\frac{2V}{V_0^2 - V^2}.$$

Работа внешней силы по перемещению поршня на dx равна

$$\delta A_F = F\mathrm{d}x = \left(p_2 - p_1\right)S\mathrm{d}x = \left(p_2 - p_1\right)\mathrm{d}V = \nu RT\frac{2V\mathrm{d}V}{V_0^2 - V^2}.$$

Так как цилиндр теплоизолирован, то $\delta Q = 0$ и $\delta A = -\mathrm{d}U = -2\nu C_V\mathrm{d}T$. Следовательно, работа газа:

$$\delta A = -\delta A_F = -\nu RT\frac{2V}{V_0^2 - V^2} = -2\nu C_V\,\mathrm{d}T.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим зависимость температуры газа от изменения объема газа в левой части цилиндра:

$$\int_{T_0}^{T}\frac{\mathrm{d}T}{T} = \frac{R}{C_V}\int_0^V\frac{V\mathrm{d}V}{V_0^2 - V^2} \quad\Rightarrow\quad \ln\frac{T}{T_0} = -\frac{\gamma - 1}{2}\ln\frac{V_0^2 - V^2}{V_0^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = T_0\left(\frac{V_0^2}{V_0^2 - V^2}\right)^{(\gamma-1)/2}$$

(при преобразованиях учтено, что $C_V = R/(\gamma - 1)$).

Подставляя полученное выражение в формулу для работы внешней силы и учитывая, что $\nu RT_0 = p_0V_0$, получаем:

$$A_F = 2p_0V_0V_0^{\gamma-1}\int_0^{V_0/2}\left(V_0^2 - V^2\right)^{-(\gamma+1)/2}V\mathrm{d}V = \frac{2p_0V_0}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{(\gamma-1)/2} - 1\right].$$

9.54. $A_F = \dfrac{p_0V_0}{\gamma - 1}\left[2^{\gamma-1} - 2 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\gamma-1}\right]$.

Решение. Процессы в обеих частях цилиндра при данных условиях являются адиабатическими и описываются уравнением $pV^{\gamma} = \mathrm{const}$. При перемещении поршня вправо на расстояние x от начального положения давления в левой и правой частях цилиндра будут равны

$$p_1 = \frac{p_0 V_0^{\gamma}}{(V_0 + V)^{\gamma}}, \quad p_2 = \frac{p_0 V_0^{\gamma}}{(V_0 - V)^{\gamma}}.$$

Работа внешней силы по перемещению поршня на dx равна

$$\delta A_F = (p_2 - p_1)\,\mathrm{d}V = p_0 V_0^{\gamma}\left[(V_0 - V)^{-\gamma} - (V_0 + V)^{-\gamma}\right]\mathrm{d}V .$$

Интегрируя полученное выражение по dV в пределах от 0 до $V_0/2$, находим полную работу внешней силы:

$$A_F = \frac{p_0 V_0}{\gamma - 1}\left[2^{\gamma-1} - 2 + \left(\frac{2}{3}\right)^{\gamma-1}\right].$$

9.55. $T_1 = \dfrac{p_0 S l^{\gamma}}{\nu R (l + x)^{\gamma-1}}$, $T_2 = \dfrac{p_0 S l^{\gamma}}{\nu R (l - x)^{\gamma-1}}$.

9.56. $Q = 12\rho g h^2 S$.

§10. Циклические процессы. КПД тепловых машин

10.1. $A \approx 832$ Дж.

Решение. Обозначим температуру нагревателя T_1, а холодильника T_2. При изотермическом расширении внутренняя энергия идеального газа остается постоянной, следовательно, вся подводимая теплота Q_1 идет на работу по расширению газа:

$$Q_1 = A_{12} = \nu R T_1 \ln(V_2/V_1) > 0 .$$

При изотермическом сжатии теплота Q_2 отдается холодильнику и равно работе, затраченной на сжатие газа:

$$Q_2 = A_{34} = \nu R T_2 \ln(V_4/V_3) < 0 .$$

Записывая уравнения адиабатических процессов:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}; \quad T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1},$$

находим: $V_2 / V_1 = V_3 / V_4$ (условие замкнутости цикла Карно).

Так как при адиабатическом процессе $\Delta Q = 0$, во время адиабатического расширения газ совершает работу

$$A_{23} = A^* = -\Delta U_{23} = -\nu C_V (T_2 - T_1),$$

а во время адиабатического сжатия работа газа равна:

$$A_{41} = -\Delta U_{41} = -\nu C_V (T_1 - T_2).$$

Следовательно, полная работа газа при адиабатическом расширении и сжатии равна нулю. Работа газа за цикл равна

$$A = A_{12} + A_{34} = \nu R \ln\alpha (T_1 - T_2).$$

Разность температур найдем из данной в задаче работы A^*: $T_1 - T_2 = A^*/(\nu C_V)$. Учитывая, что для кислорода $C_V = 5R/2$, окончательно получаем: $A = 2A^* \ln\alpha / 5 \approx 832$ Дж.

10.2. $A = Q_1 (T_2 - T_1)/T_1 = 80$ кДж.

10.3. $A_{41}^* = \dfrac{3A}{2\ln(V_2/V_1)}$.

10.4. $\eta \approx 0{,}48$.

Решение. При адиабатическом сжатии

$$Q_{41} = 0 = A_{\text{газа}} + \Delta U = A_{\text{газа}} + C_V (T_1 - T_2),$$

где T_2 – температура холодильника, $C_V = 3R/2$.

Внешняя работа

$$A = -A_{\text{газа}} = C_V (T_1 - T_2) = 3R(T_1 - T_2),$$

откуда находим $(T_1 - T_2) = \dfrac{2A}{3R}$.

КПД машины, работающей по циклу Карно, равен

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{2A}{3RT_1} \approx 0{,}48.$$

10.5. $Q_1 \approx 2{,}84$ кДж, $Q_2 \approx 1{,}42$ кДж.

Решение. Максимальное давление достигается в точке 1 (начало изотермического расширения), а минимальное – в точке 3 (конец адиабатического расширения). Запишем уравнение адиабати-

ческого расширения 2-3 в переменных p–T: $pT^{\gamma/(1-\gamma)} = \text{const}$, откуда находим отношение давлений p_3/p_2:

$$\frac{p_2}{p_3} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma/(1-\gamma)} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

Количество теплоты, полученное от нагревателя, равно

$$Q_1 = A_1 = RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} = RT_1 \ln\frac{p_1}{p_2}.$$

Выражая p_2 через p_3, получаем:

$$Q_1 = RT_1 \ln\frac{p_1}{p_2} = RT_1 \ln\left[\frac{p_1}{p_3}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}\right] = RT_1\left[\ln\beta + \frac{\gamma}{\gamma-1}\ln\frac{T_2}{T_1}\right] \approx$$

$$\approx 2{,}84 \text{ кДж}.$$

Используя условие замкнутости цикла Карно $V_2/V_1 = V_3/V_4$, находим количество теплоты, отданное холодильнику:

$$Q_2 = RT_2 \ln\frac{V_4}{V_3} = RT_2 \ln\frac{p_1}{p_2} = RT_2\left[\ln\beta + \frac{\gamma}{\gamma-1}\ln\frac{T_2}{T_1}\right] \approx 1{,}42 \text{ кДж}.$$

10.6. $N \approx 172$ кВт.

Решение. Количество теплоты, которое получает машина во время изотермического расширения газа, равно

$$Q^+ = A_{12} = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

В цикле Карно $V_2/V_1 = V_3/V_4$. Из уравнения изотермического сжатия газа $pV = \text{const}$ в процессе 3-4 находим: $V_4/V_3 = p_3/p_4$. По условию задачи $p_2 = p_4$. Следовательно, $V_2/V_1 = p_2/p_3$.

Отношение давлений p_2/p_3 определяем из уравнения адиабатического расширения (см. решение задачи 10.5):

$$\frac{p_2}{p_3} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

Для количества теплоты Q^+, ежесекундно подводимой к теп-

ловой машине, получаем:

$$Q^+ = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{p_2}{p_3} = \frac{m}{\mu} RT_1 \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{T_1}{T_2} \approx 416 \text{ кВт}.$$

Поскольку полная работа газа при адиабатическом расширении и сжатии равна нулю, работа газа равна

$$A = A_{12} + A_{34} = \frac{m}{\mu} R \left(T_1 - T_2\right) \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

Подставляя найденное значение $V_2/V_1 = p_2/p_3$, находим мощность тепловой машины:

$$N = \frac{m}{\mu} R(T_1 - T_2) \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{T_1}{T_2} \approx 172 \text{ кВт}.$$

10.7. $\Delta\eta \approx -0{,}163$, т.е. КПД цикла уменьшится.

Решение. КПД цикла Карно равен: $\eta = 1 - T_2 / T_1$. Связь температур нагревателя T_1 и холодильника T_2 находим из уравнения адиабаты 2-3: $T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$, откуда

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} = n^{1-\gamma}.$$

Следовательно, КПД цикла равен $\eta = 1 - n^{1-\gamma}$.

Для водорода $\gamma_1 = 7/5$, а для гелия $\gamma_2 = 5/3$. Разность КПД циклов с разными газами в качестве рабочих веществ составит: $\Delta\eta = n^{1-\gamma_2} - n^{1-\gamma_1} = 3^{-2/3} - 3^{-2/5} \approx -0{,}163$, т.е. КПД цикла уменьшится.

10.8. $A = Q_2 \eta / (1 - \eta) \approx 10{,}8$ кДж.

10.9. $\Delta\eta \approx 3{,}9$.

Решение. Эффективность холодильной машины равна

$$\eta_{\text{х}} = \frac{1}{\eta_{\text{К}}} - 1 = \frac{T_1}{T_1 - T_2} - 1 = \frac{T_2}{T_1 - T_2}.$$

После уменьшения температур холодильника и нагревателя на ΔT холодильный коэффициент уменьшится на

$$\Delta\eta = \eta_x - \eta'_x = \frac{T_2}{T_1 - T_2} - \frac{T_2 - \Delta T}{T_1 + \Delta T - (T_2 - \Delta T)} =$$

$$= \frac{\Delta T (T_1 + T_2)}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_2 + 2\Delta T)} \approx 3{,}9 .$$

10.10. $A = Q_2 (T_1 / T_2 - 1) \approx 9$ кДж .

10.11. $A \approx 4{,}8$ кДж.

Решение. Эффективность холодильной машины, работающей по циклу Карно: $\eta_x = T_2/(T_1 - T_2)$. При замерзании воды выделяется теплота $Q = m\bar{L}_{пл}$, которую должна забрать холодильная машина.

Из определения $\eta_x = Q^+_{хм} \Big/ \left| \oint \delta A \right|$ находим требуемую механическую работу: $A = Q / \eta_x = m\bar{L}_{пл} (T_1 - T_2)/T_2 \approx 4{,}8$ кДж .

10.12. $m_1 \approx 9{,}4$ кг.

Решение. Данная машина представляет собой тепловой насос, который передает тепло от холодной воды к горячему кипятильнику. Чтобы испарилась масса m_1 воды, к ней должно быть подведено количество теплоты $Q_1 = m_1 \bar{L}_{пар}$. При замерзании воды выделяется теплота $Q_2 = m_2 \bar{L}_{пл}$, которую должен забрать тепловой насос. По определению эффективность теплового насоса равна

$$\eta_{тн} = \frac{Q^-_{тн}}{\oint A} = \frac{1}{1 + Q^+_{тн}/Q^-_{тн}} = \frac{1}{1 + Q_2/Q_1} ,$$

откуда $1 + Q_2/Q_1 = 1/\eta_{тн}$.

$\eta_{тн}$ выражается через КПД теплового двигателя, работающего по такому же циклу в прямом направлении: $\eta_{тн} = 1/\eta_{тд}$. Следовательно, $1 + Q_2/Q_1 = \eta_{тд} = 1 - T_1/T_2$, откуда $Q_1 = -Q_2 T_2/T_1$ (знак минус связан с тем, что тепловой насос отдает тепло).

Подставляя Q_1 и Q_2, находим массу образовавшегося льда:

$$m_1 = m_2 \frac{T_2 \bar{L}_{пар}}{T_1 \bar{L}_{пл}} \approx 9{,}4 \text{ кг} .$$

10.13. Вид цикла на на *p*–*V*-диаграмме приведен на рис. О.10.13.

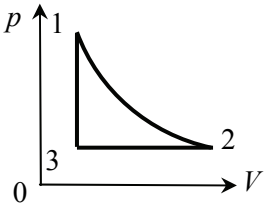


Рис. О.10.13.

$$A_{12} = RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} = RT_1 \ln\frac{T_1}{T_2},$$
$$A_{23} = p_2(V_3 - V_2) = R(T_2 - T_1),$$
$$A_{31} = 0.$$

Работа за цикл равна

$$A = R\left[T_1 \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) + T_2 - T_1\right].$$

10.14. $Q^- = 8RT_2(T_2/T_1 - 1)$.

Решение. Газ отдает теплоты на участке 3-1:

$$Q^- = Q_{31} = \Delta U_{31} + A_{31} = C_V(T_3 - T_1) + (V_3 - V_1)(p_1 + p_3).$$

Поскольку $C_V = 3R/2$ и для процесса 3-1 $p_3/V_3 = p_1/V_1$, то $A_{31} = (V_3 - V_1)(p_1 + p_3) = p_3V_3 - p_1V_1 = R(T_3 - T_1)$ и $Q^- = 2R(T_3 - T_1)$.

Для изохорического процесса 1-2 $p_2/T_2 = p_1/T_1$, а из условия задачи $p_1 + p_3 = 2p_2$. Отсюда находим отношение температур: $\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{p_3}{p_1} + 1\right)$. Учитывая, что для процесса 3-1 из-за его линейности $\frac{T_3}{T_1} = \frac{p_3V_3}{p_1V_1} = \left(\frac{p_3}{p_1}\right)^2$, получаем: $\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{T_3}{T_1}} + 1\right)$, откуда $T_3 = (2T_2 - T_1)^2/T_1$.

Подставляя T_3, окончательно находим количество отдаваемой газом теплоты: $Q^- = 2R(T_3 - T_1) = 8RT_2(T_2/T_1 - 1)$.

10.15. $A = R(T_2 - T_1)\ln(p_1/p_2)$.

Решение. Вид цикла на на *p*–*V*-диаграмме приведен на рис. О.10.15.

$$A_{23} = RT_2 \ln\frac{V_3}{V_2} = RT_2 \ln\frac{p_1}{p_2},$$

$$A_{34} = p_2\left(V_4 - V_3\right) = R\left(T_1 - T_2\right),$$

$$A_{41} = RT_1 \ln\frac{V_1}{V_4} = RT_1 \ln\frac{p_2}{p_1}.$$

За весь цикл работа равна: $A = R(T_2 - T_1)\ln(p_1/p_2)$.

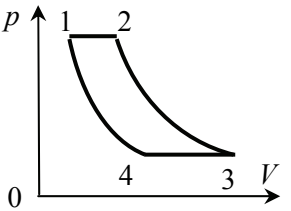


Рис. О.10.15

10.16. $\eta \approx 9{,}9\%$.

Решение. Цикл изображен на рис. О.10.16. Температуру в точке 1 определяем из уравнения изохорического процесса 1–2:

$$T_2 = p_2\frac{T_1}{p_1} = 600\ \text{K}.$$

Так как процесс 2-3 изотермический, то $T_3 = T_2 = 600\ \text{K}$.

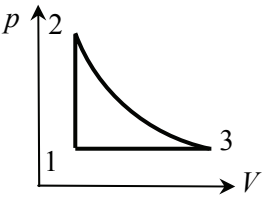


Рис. О.10.16

Газ получает теплоту на участках 1–2 и 2-3 и отдает на участке 3–1:

$$Q_{12} = C_V\left(T_2 - T_1\right) > 0, \quad Q_{31} = C_p\left(T_1 - T_2\right) < 0,$$

$$Q_{23} = A_{23} = \int_{V_1}^{V_3} p\mathrm{d}V = RT_2 \ln\frac{V_3}{V_1} > 0$$

Отношение объемов $V_3/V_1 = V_3/V_2$ находим из уравнения изотермического процесса 2-3: $V_3/V_2 = p_2/p_3 = p_2/p_1$.

КПД цикла определяется выражением:

$$\eta = 1 - \frac{C_p\left(T_2 - T_1\right)}{C_V\left(T_2 - T_1\right) + RT_2\ln(p_2/p_1)}.$$

Подставляя молярные теплоемкости газа $C_V = 5R/2$ и $C_p = 7R/2$, а также T_2, окончательно получаем:

$$\eta = 1 - \frac{7\left(p_2 - p_1\right)}{5\left(p_2 - p_1\right) + p_2\ln(p_2/p_1)} \approx 0{,}099 = 9{,}9\%.$$

10.17. $A = 450$ Дж.

Решение. Работа газа за цикл равна площади цикла:

$$A = \frac{1}{2}(p_2 - p_1 + p_3 - p_4)(V_4 - V_1).$$

Учитывая линейную зависимость $p(V)$ на участках цикла 2-3 и 4-1, можно записать: $p_4/p_1 = V_4/V_1$ и $p_3/p_2 = V_3/V_1 = V_4/V_1$. Из равенства температур в точках 2 и 4 следует, что они лежат на одной изотерме, т.е. выполняется соотношение: $p_2V_1 = p_4V_4$. Из записанных соотношений получаем: $p_4/p_1 = V_4/V_1 = p_2/p_4$ и $p_4/p_1 = p_3/p_2$.

Так как $p_2 = np_1$, из последних соотношений находим давления $p_4 = \sqrt{n}\,p_1$, $p_3 = n\sqrt{n}\,p_1$ и объем $V_4 = \sqrt{n}\,V_1$. Подставляя все эти величины, определяем работу газа за цикл:

$$A = p_1V_1\frac{(n-1)^2}{2} = 450 \text{ Дж}.$$

10.18. $\eta = \dfrac{2(T_1 - T_2)\ln 3}{5(T_1 - T_2) + 2T_1\ln 3}$.

Решение. При изотермических процессах количество теплоты равно работе, совершаемой газом в данном процессе:

$$Q_{12} = A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = RT_1\ln\frac{V_2}{V_1} = RT_1\ln 3 > 0;$$

$$Q_{34} = A_{34} = \int_{V_2}^{V_1} p\,\mathrm{d}V = -RT_2\ln 3 < 0.$$

При изохорических процессах $A_{23} = A_{41} = 0$ и

$$Q_{23} = C_V(T_2 - T_1) < 0, \quad Q_{41} = C_V(T_1 - T_2) > 0.$$

Молярная теплоемкость двухатомного газа $C_V = 5R/2$.

КПД цикла равен

$$\eta = 1 - \frac{|Q^-|}{Q^+} = 1 - \frac{5(T_1 - T_2) + 2T_2\ln 3}{5(T_1 - T_2) + 2T_1\ln 3} = \frac{2(T_1 - T_2)\ln 3}{5(T_1 - T_2) + 2T_1\ln 3}.$$

10.19. $\eta = \dfrac{2\left(n - 2\sqrt{n} + 1\right)}{5n - 2\sqrt{n} - 3} = \dfrac{2}{13} \approx 15\%$.

10.20. $\eta = 1 - \left(p_2/p_1\right)^{2/7}$.

Решение. $Q^+ = Q_{23} = \nu C_p \left(T_2 - T_1\right) = \nu C_p p_2 \left(V_3 - V_2\right)$;

$$Q^- = Q_{41} = \nu C_p \left(T_1 - T_4\right) = \nu C_p p_1 \left(V_1 - V_4\right).$$

Из уравнений адиабатических процессов $p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma}$ и $p_1 V_4^{\gamma} = p_2 V_3^{\gamma}$ получаем: $V_1 = V_2 (p_2/p_1)^{1/\gamma}$ и $V_4 = V_3 (p_2/p_1)^{1/\gamma}$.

КПД цикла равен

$$\eta = 1 - \frac{\left|Q^-\right|}{Q^+} = 1 - \frac{p_1\left(V_4 - V_1\right)}{p_2\left(V_3 - V_2\right)} = 1 - \frac{p_1}{p_2} \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\gamma} = 1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}.$$

Подставляя $\gamma = 1{,}4$, находим: $\eta = 1 - \left(p_2/p_1\right)^{2/7}$.

10.21. $A = \nu R T_1 \left[\ln n - (n-1)/n\right] \approx 2{,}87$ кДж;

$$\eta = \frac{\ln n - (n-1)/n}{\ln n + (n-1)/(2n)} \approx 0{,}30.$$

10.22. $\eta = \dfrac{n - 1 - \ln n}{\gamma(n-1)/(\gamma - 1)}$.

10.23. $\eta = \dfrac{4T_1 - 2T_3}{24T_1 - 5T_3}$.

Решение. Цикл состоит из двух изохор (2-3 и 4-1) и двух изобар (1-2 и 3-4). Запишем уравнения всех процессов цикла в T–V-переменных:

$$1 \to 2\text{: } \frac{T_1}{V_1} = \frac{T_2}{V_2}; \quad 2 \to 3\text{: } V_3 = V_2; \quad 3 \to 4\text{: } \frac{T_3}{V_2} = \frac{T_4}{V_1}; \quad 4 \to 1\text{: } V_4 = V_1.$$

Из полученной системы уравнений находим неизвестные температуры:

$$T_{\max} = T_2 = 2T_1, \quad T_{\min} = T_4 = \frac{T_3}{2}.$$

Поскольку рассматриваемый цикл состоит из политропических процессов, вычисление количеств теплоты в процессах Q_{ik} для двухатомного газа проводим по формулам:

$$Q_{12} = C_p\left(T_2 - T_1\right) = \frac{7}{2}RT_1 > 0,$$

$$Q_{23} = C_V\left(T_3 - T_2\right) = -\frac{5}{2}R\left(2T_1 - T_3\right) < 0,$$

$$Q_{34} = C_p\left(T_4 - T_3\right) = -\frac{7}{4}RT_3 < 0,$$

$$Q_{41} = C_V\left(T_1 - T_4\right) = \frac{5}{2}R\left(T_1 - \frac{1}{2}T_3\right) > 0.$$

Суммарные количества теплоты, полученные и отданные тепловой машиной, равны

$$Q^+ = Q_{12} + Q_{41} = R\left[\frac{7T_1}{2} + \frac{5}{2}\left(T_1 - \frac{T_3}{2}\right)\right] = R\left(6T_1 - \frac{5T_3}{4}\right),$$

$$Q^- = Q_{23} + Q_{34} = R\left[\frac{5}{2}\left(T_3 - 2T_1\right) - \frac{7}{4}T_3\right] = R\left(\frac{3}{4}T_3 - 5T_1\right).$$

КПД цикла равен

$$\eta = 1 - \frac{\left|Q^-\right|}{Q^+} = 1 - \frac{20T_1 - 3T_3}{24T_1 - 5T_3} = \frac{4T_1 - 2T_3}{24T_1 - 5T_3}.$$

10.24. $\eta = \dfrac{\oint \delta A}{Q^+} = \dfrac{2\pi}{28 + \pi}$

Решение. Работа газа равна площади цикла: $A = \pi p_1 V_1$.

Газ получает теплоту на участке цикла 1–2–3. Согласно первому началу термодинамики $Q^+ = \Delta U_{123} + A_{123}$.

Так как внутренняя энергия является функцией состояния, $\Delta U_{13} = C_V\left(T_3 - T_1\right)$. Температуры в состояниях 1 и 3 определяем из уравнения Менделеева–Клапейрона:

$$T_3 = 3V_1 \cdot \frac{2p_1}{R} = 6\frac{p_1 V_1}{R};\ T_1 = V_1 \cdot \frac{2p_1}{R} = 2\frac{p_1 V_1}{R}.$$

Следовательно, $\Delta U_{13} = (5R/2)\cdot 4p_1V_1/R = 10p_1V_1$.

Работу в процессе 1-2-3 вычисляем как площадь под дугой окружности 1-2-3:

$$A_{123} = 2p_1\cdot 2V_1 + \frac{1}{2}\pi p_1V_1 = \left(4+\frac{\pi}{2}\right)p_1V_1.$$

$$Q^+ = \Delta U_{13} + A_{123} = \left(14+\frac{\pi}{2}\right)p_1V_1.$$

КПД цикла равен $\eta = (\oint \delta A)/Q = 2\pi/(28+\pi)$.

10.25. $\eta = 1 - \dfrac{\gamma}{\gamma-1}\cdot\dfrac{n^{(\gamma-1)/\gamma}-1}{n^{(\gamma-1)/\gamma}\ln n}$.

Решение. На *p*–*V*-диаграмме цикл имеет вид, показанный на рис. 10.9. Газ получает теплоту на участке 1–3 и отдает ее на участке 2-3:

$$Q^+ = A_{12} = \nu RT_1\ln(V_2/V_1);\quad Q^- = \nu C_p\left(T_3 - T_1\right).$$

Из уравнения изотермы 1-2 находим: $V_2/V_1 = p_1/p_2 = n$.

Температуру T_3 определяем из уравнения адиабаты 3–1 в *p*–*T*-переменных: $pT^{\gamma/(1-\gamma)} = \text{const}$, откуда $T_3 = T_1 n^{-(\gamma-1)/\gamma}$. Молярная теплоемкость C_p двухатомного газа равна $C_p = \gamma R/(\gamma-1)$.

КПД цикла составляет:

$$\eta = 1 - \frac{\left|Q^-\right|}{Q^+} = 1 - \frac{C_p\left(T_1 - T_3\right)}{RT_1\ln n} = 1 - \frac{\gamma}{\gamma-1}\cdot\frac{n^{(\gamma-1)/\gamma}-1}{n^{(\gamma-1)/\gamma}\ln n}.$$

10.26. $\eta = 1 - \dfrac{\gamma-1}{\gamma}\cdot\dfrac{\ln n}{n^{(\gamma-1)/\gamma}-1}$.

10.27. $A_{23} = (3/5)R(1-\eta)\left(T_1 - T_3\right)$.

10.28. $\eta = 1 - n^{1-\gamma}$; КПД изменится в $\dfrac{\eta_2}{\eta_1} = \dfrac{1-(3n)^{1-\gamma}}{1-n^{1-\gamma}}$ раз.

10.29. $Q^- = \dfrac{15}{4}R\Delta T - \dfrac{5}{2}A$.

Решение. Цикл, совершаемый газом, изображен на рис. О.10.29. Газ получает теплоту на участке 3–1 и отдает на участке 2–3:

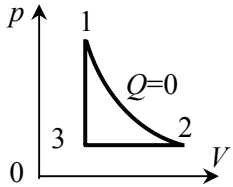


Рис. О.10.29.

$$Q^+ = C_V\left(T_1 - T_3\right);\ Q^- = C_p\left(T_3 - T_2\right) < 0\,.$$

Работа газа за цикл равна

$$A = Q^+ + Q^- = \frac{3R}{2}\left(T_1 - T_3\right) + \frac{5R}{2}\left(T_3 - T_2\right) = \\ = \frac{R}{2}\left[3\left(T_1 - T_2\right) - 2\left(T_2 - T_3\right)\right],$$

откуда получаем $T_2 - T_3 = \left(3/2\right)\Delta T - A/R$.

Искомое количество теплоты в изобарическом процессе 2-3 равно:

$$Q^- = C_p\left(T_3 - T_2\right) = \frac{5R}{2}\left(\frac{3}{2}\Delta T - \frac{A}{R}\right) = \frac{15}{4}R\Delta T - \frac{5}{2}A\,.$$

10.30. $\eta = \dfrac{2(p_1V_1 - RT_4)}{p_1V_1 + 6RT_4}$.

Решение. Из данных задачи можно определить давление в точке 2 цикла: $p_4 = RT_4/V_1 = p_2$.

Работа за цикл равна площади фигуры 1–2–3–4. Учитывая, что площади треугольников над и под линией 4-2 одинаковы, получаем: $A = (p_1 - p_2)(V_2 - V_1)$.

Газ получает теплоту на участках цикла 1–2 и 4–1. Так как в изохорическом процессе 4–1 работа газа равна 0, полученное количество тепла $Q_{41} = \Delta U_{41}$. Внутренняя энергия является функцией состояния, поэтому её изменение при переходе газа 4–1–2 равно:

$$\Delta U_{412} = C_V\left(T_2 - T_4\right) = \frac{5}{2}R\cdot\frac{p_2V_2 - p_4V_1}{R} = \frac{5}{2}p_2\left(V_2 - V_1\right).$$

Количество полученной газом теплоты находим по первому началу термодинамики: $Q^+ = \Delta U_{412} + A_{12}$.

Совершенную газом в процессе работу вычисляем как площадь трапеции под прямой 1-2: $A_{12} = \dfrac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)$.

$$Q^+ = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) + \frac{5}{2}p_2(V_2 - V_1).$$

$$\eta = \frac{\oint \delta A}{Q^+} = \frac{2(p_1 - p_2)}{p_1 + p_2 + 5p_2} = \frac{2(p_1 - p_2)}{p_1 + 6p_2}.$$

Подставляя $p_2 = RT_4 / V_1$, окончательно получаем КПД:

$$\eta = \frac{2(p_1V_1 - RT_4)}{p_1V_1 + 6RT_4}.$$

10.31. $\left|Q^-\right| = (5R/2)(1-\eta)(T_2 - T_1)$.

10.32. $\eta = \dfrac{\ln\alpha}{T_2\ln\alpha + 3(T_2 - T_1)/2}$.

10.33. $\eta \approx 17\%$.

Решение. Газ получает теплоту в процессе 1–2 и отдает ее в процессе 3–1. Вычислим количество теплоты с использованием первого начала термодинамики: $Q = \Delta U + A$.

Работу газа на участке 1-2 определим как площадь под кривой процесса:

$$A_{12} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}(p_1V_2 + p_2V_2 - p_1V_1 - p_2V_1).$$

Так как $p_2 = np_1$, из линейности процесса 1-2 следует, что $V_2 = nV_1$. Учитывая, что для одного моля газа $RT_1 = p_1V_1$, получаем: $A_{12} = (n^2 - 1)RT_1/2$.

Изменение внутренней энергии на участке 1–2 равно

$$\Delta U_{12} = C_V(T_2 - T_1) = (3R/2)(T_2 - T_1).$$

Так как $RT_2 = p_2V_2 = n^2p_1V_1 = n^2RT_1$, $T_2 = n^2T_1$ и $\Delta U_{12} = (3R/2)(n^2 - 1)T_1$. Полученное газом количество теплоты равно

$$Q^+ = Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = 2\left(n^2 - 1\right)RT_1 .$$

Определим количество отданной газом теплоты. Учитывая, что $V_3 = mV_1$,

$$A_{31} = p_1(V_1 - V_3) = -p_1V_1(m-1) = -RT_1(m-1);$$

$$\Delta U_{31} = C_V\left(T_1 - T_3\right) = \left(3R/2\right)\left(T_1 - T_3\right).$$

Так как процесс 3–1 изобарический, то $V_3/T_3 = V_1/T_1$, откуда $T_3 = mT_1$ и $\Delta U_{31} = -\left(3R/2\right)\left(m-1\right)T_1$. Тогда

$$Q^- = Q_{31} = \Delta U_{31} + A_{31} = -\left(5/2\right)RT_1\left(m-1\right).$$

КПД цикла определяем по формуле:

$$\eta = 1 - \frac{\left|Q^-\right|}{Q^+} = 1 - \frac{5RT_1\left(m-1\right)}{4RT_1\left(n^2-1\right)} = \frac{4n^2 - 5m + 1}{4(n^2-1)} = \frac{1}{6} \approx 17\%.$$

10.34. $T_4 = T_2 \cdot \dfrac{1-3\eta}{1+2\eta}$.

Решение. Работу за цикл определим как площадь ромба: $A = \dfrac{1}{2}(p_2 - p_4)(V_3 - V_1)$.

Газ получает теплоту на участках 1–2 и 2–3. Работу, совершенную газом на этих участках, найдем как площадь под кривыми процессов: $A_{12} = \dfrac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)$; $A_{23} = \dfrac{1}{2}(p_3 + p_2)(V_3 - V_2)$. Поскольку $p_1 = p_3$, суммарная работа на участке цикла 1-2-3 равна $A_{123} = \dfrac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_3 - V_1)$.

Так как внутренняя энергия является функцией состояния, её изменение между точками 1 и 3 цикла равно $\Delta U_{123} = C_V\left(T_3 - T_1\right) = \left(3R/2\right)\left(T_3 - T_1\right)$, а полученное количество теплоты – $Q^+ = \Delta U_{13} + A_{123} = \left(3R/2\right)\left(T_3 - T_1\right) + \left(p_1 + p_2\right)\left(V_3 - V_2\right)$. Подставляя $p_1 = (p_2 + p_4)/2$, $RT_3 = p_1V_3$ и $RT_1 = p_1V_1$, получаем:

$$Q^+ = \frac{1}{2}\left(3p_2 + 2p_4\right)\left(V_3 - V_1\right).$$

КПД цикла равен $\eta = \dfrac{\oint \delta A}{Q^+} = \dfrac{p_2 - p_4}{3p_2 + 2p_4} = \dfrac{2(p_1 - p_2)}{p_1 + 6p_2}$, откуда находим: $\dfrac{p_4}{p_2} = \dfrac{1 - 3\eta}{1 + 2\eta}$.

Так как объемы в точках 2 и 4 цикла одинаковы, то $p_2/T_2 = p_4/T_4$. Отсюда находим искомую температуру T_4:

$$T_4 = T_2 \frac{p_4}{p_2} = T_2 \cdot \frac{1 - 3\eta}{1 + 2\eta}.$$

10.35. $\Delta T = \dfrac{2A}{3R(1 - \eta)} = 250\ \text{K}$.

10.36. $\eta = \dfrac{\gamma\left(T_2 - T_3\right) + \left(T_4 - T_1\right)(\gamma - 1)}{\gamma\left(T_2 - T_1\right) + T_1 - T_4}$.

10.37. $\eta = 1 - \dfrac{1}{\gamma} - \dfrac{(\gamma - 1)T_1 \ln\left(T_2 / T_1\right)}{\gamma\left(T_2 - T_1\right)}$.

10.38. $\eta = \dfrac{2(\beta\ln\beta - \beta + 1)}{2\beta\ln\beta + 3(\beta - 1)}$.

Решение. Газ получает теплоту на участках 1-2 (изотерма) и 3-1 (политропа) и отдает теплоту на участке 2-3:

$$Q_{12} = A_{23} = \nu R T_1 \ln\frac{V_2}{V_1} = \nu R T_1 \ln\beta > 0;$$

$$Q_{23} = \nu C_V\left(T_3 - T_1\right) < 0; \quad Q_{31} = \nu C\left(T_1 - T_3\right) > 0.$$

Температуру T_3 найдем из уравнения политропического процесса $TV^{n-1} = \text{const}$, где показатель политропы равен

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V} = \frac{1{,}5R - 3{,}5R}{1{,}5R - 2{,}5R} = 2.$$

В итоге $T_3 = T_1(V_1/V_2)^{n-1} = T_1/\beta$. КПД цикла равен:

$$\eta = 1 - \frac{C_V(T_1 - T_3)}{C(T_1 - T_3) + RT_1\ln\beta} = 1 - \frac{5(\beta - 1)}{3(\beta - 1) + 2\beta\ln\beta} = \frac{2(\beta\ln\beta - \beta + 1)}{2\beta\ln\beta + 3(\beta - 1)}.$$

10.39. $\gamma = 5/3$; $\eta \approx 0{,}17$.

Решение. Соотношение температур газа соответствует неравенству: $T_3 > T_1 > T_2$. Газ получает теплоту на участке 2–3 и отдает ее на участках 1–2 и 3–1:

$$Q_{12} = C_p(T_2 - T_1) < 0;\ \ Q_{23} = C_V(T_3 - T_2) > 0;\ Q_{31} = C(T_1 - T_3) < 0,$$

где теплоемкость в политропическом процессе $C = C_V\,\dfrac{n - \gamma}{n - 1}$.

С учетом $V_3 = V_2$, из уравнения политропического процесса находим: $(V_2/V_1)^{n-1} = T_1/T_3 \;\rightarrow\; \rightarrow\;\; T_3 = T_1(V_1/V_2)^{n-1}$.

Из уравнения изобары 1-2 получаем:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} \;\;\rightarrow\;\; T_3 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1} = T_1\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{n-1}.$$

КПД двигателя равен

$$\eta = 1 - \frac{|Q^-|}{Q^+} = 1 - \frac{C_p(T_1 - T_2) + C(T_3 - T_1)}{C_V(T_3 - T_2)} =$$

$$= 1 - \frac{\gamma(T_1 - T_2) + \dfrac{n - \gamma}{n - 1}T_1[(T_1/T_2)^{n-1} - 1]}{T_2[(T_1/T_2)^n - 1]}.$$

Для одноатомного газа $\gamma = 5/3$ и $\eta \approx 0{,}17$.

10.40. $\eta_x = \dfrac{T_2 - T_1}{(2 - \gamma)T_2(T_1/T_2)^{1/\gamma} + (\gamma - 1)T_2 - T_1}$.

Решение. Холодильная машина получает теплоту на участке 1–2: $Q^+ = Q_{12} = C_V(T_2 - T_1)$. Совершаемая газом в ходе цикла работа равна $A = A_{23} + A_{31}$, где $A_{23} = p_2(V_3 - V_2) = R(T_3 - T_2)$ и $A_{31} = -\Delta U_{31} = -C_V(T_1 - T_3)$.

Из уравнения адиабаты находим температуру T_3: $T_3 = T_1\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$. Из уравнения изобары 1–2 получаем: $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_3}$. Следовательно, $T_3 = T_1\left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\gamma-1}$, откуда $T_3 = T_2\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{1/\gamma}$.

Холодильный коэффициент определяем по формуле:

$$\eta_{\text{х}} = \frac{Q^{+}_{\text{хм}}}{\left|\oint \delta A\right|} = \frac{C_V\left(T_2 - T_1\right)}{R\left(T_2 - T_3\right) + C_V\left(T_3 - T_1\right)} = \frac{T_2 - T_1}{\left[1-(\gamma-1)\right]T_3 + (\gamma-1)T_2 - T_1}.$$

Подставляя T_3, окончательно получаем:

$$\eta_{\text{х}} = \frac{T_2 - T_1}{(2-\gamma)T_2(T_1/T_2)^{1/\gamma} + (\gamma-1)T_2 - T_1}.$$

10.41. $Q = \eta_{\text{х}} R(T_2 - T_1)\ln n \approx 2{,}7$ кДж.

10.42. $\eta_{\text{тн}} = \frac{5(T_2 - T_1)/2 + T_2\ln 2}{(T_2 - 2T_1)\ln 2 + R(T_2 - T_1)}$.

Решение. Данная тепловая машина является тепловым насосом, и её эффективность определяется по формуле:

$$\eta_{\text{тн}} = \frac{Q^{-}_{\text{тн}}}{\oint A} = \frac{Q^{-}_{\text{тн}}}{Q^{+}_{\text{тн}} + Q^{-}_{\text{тн}}}.$$

Газ получает теплоту на участках цикла 1–2 и 2–3 и отдает тепло на участках 3–4 и 4–1:

$$Q_{12} = A_{12} = RT_1\ln(V_2/V_1) = RT_1\ln(p_1/p_2) = 2RT_1\ln 2,$$

$$Q_{23} = C_V\left(T_2 - T_1\right) = 3R\left(T_2 - T_1\right)/2,$$

$$Q_{34} = RT_2\ln(V_4/V_3) = -RT_2\ln 2 < 0,$$

$$Q_{41} = C_p\left(T_1 - T_2\right) = -5R\left(T_2 - T_1\right)/2 < 0.$$

Эффективность теплового насоса равна

$$\eta_{\text{тн}} = \frac{Q^{-}_{\text{тн}}}{Q^{+}_{\text{тн}} + Q^{-}_{\text{тн}}} = \frac{5(T_2 - T_1)/2 + T_2\ln 2}{(T_2 - 2T_1)\ln 2 + R(T_2 - T_1)}.$$

10.43. $\eta \approx 0{,}067$.

Решение. Для одноатомного газа $C_V = 3R/2$ и $C_p = 5R/2$. Следовательно, процесс 2-3 –изохорический, 1-2 – изобарический, а 3-1 – политропический с показателем политропы

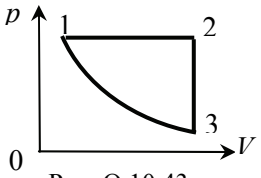


Рис. О.10.43.

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V} = \frac{3R - 5R/2}{3R - 3R/2} = \frac{1}{3}.$$

Вид процесса на p-V диаграмме представлен на рис. О.10.43. Газ получает тепло на участке 1-2 и отдает его на участках 2-3 и 3-1. Количества теплоты, получаемой и отдаваемой газом за цикл, равны:

$$Q_+ = Q_{12} = C_p\left(T_2 - T_0\right) = 5R(T_2 - T_0)/2;$$

$$Q_- = Q_{23} + Q_{31} = C_V\left(2T_0 - T_2\right) + 3R\left(T_0 - 2T_0\right) = -3RT_2/2.$$

Температуру T_2 находим из уравнений процессов 1–2 и 3–1, записывая их в T–V-параметрах:

$$1\text{–}2\text{:}\ V_2/T_2 = V_1/T_0 \ \rightarrow\ T_2 = T_0(V_2/V_1);$$

$$3\text{–}1\text{:}\ T_0V_1^{-2/3} = 2T_0V_2^{-2/3} \ \rightarrow\ V_2/V_1 = 2^{3/2},$$

откуда $T_2 = 2^{3/2}T_0$.

Так как $\oint \delta Q = Q^+ + Q^- = RT_0(2\sqrt{2} - 5/2) > 0$, то тепловая машина является тепловым двигателем с КПД

$$\eta = 1 - \frac{\left|Q^-\right|}{Q^+} = 1 - \frac{6\sqrt{2}}{5(2\sqrt{2} - 1)} \approx 0{,}067.$$

10.44. $\eta = \dfrac{2\left(\alpha + 2 - 3\alpha^{1/3}\right)}{17(\alpha - 1)}$.

Решение. Для двухатомного газа $C_V = 5R/2$ и $C_p = 7R/2$.

Следовательно, процесс 1–2 – изохорический, 2–3 – изобарический, а 3–1 – политропический с показателем политропы

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V} = \frac{17R/6 - 7R/2}{17R/6 - 5R/2} = -2\,.$$

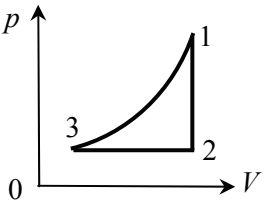


Рис. О.10.44

Вид процесса на *p*-*V* диаграмме представлен на рис. О.10.44. Газ получает теплоту на участке 3–1 и отдает его на участках 1–2 и 2–3. Количества теплоты, получаемой и отдаваемой газом за цикл, равны

$$Q^+ = Q_{31} = 17R(T_1 - T_3)/6 = 17RT_3(\alpha - 1)/6\,;$$

$$Q^- = C_V(T_2 - T_1) + C_p(T_3 - T_2) = -R(T_2 + 5T_1/2 - 7T_3/2)\,.$$

Температуру T_2 находим из уравнений процессов 2-3 и 3-1, записывая их в *T*–*V*-параметрах:

2–3: $V_3/T_3 = V_1/T_2 \rightarrow T_2 = T_3(V_1/V_3)$;

3–1: $T_1V_1^{-3} = T_3V_3^{-3} \rightarrow V_1/V_3 = (T_1/T_3)^{1/3} = \alpha^{1/3}$,

откуда $T_2 = \alpha^{1/3}T_3$.

КПД тепловой машины:

$$\eta = 1 - \frac{|Q^-|}{Q^+} = 1 - \frac{T_2/T_3 + (5/2)(T_1/T_3) - 7/2}{17(\alpha - 1)/6} = \frac{2\left(\alpha + 2 - 3\alpha^{1/3}\right)}{17(\alpha - 1)}\,.$$

10.45. $\eta = 4/9$.

Решение. Так как газ одноатомный, $C_V = 3R/2$, $C_p = 5R/2$. Следовательно, процесс 1-2 – адиабатическое расширение ($C = 0$), 2-3 – изобарическое сжатие, а 3-1 –изохорический. Вид цикла на *p*-*V* диаграмме представлен на рис. О.10.45.

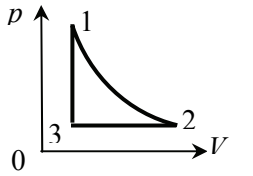


Рис. О.10.45

Количества теплоты, получаемой и отдаваемой газом за цикл, равны:

$$Q^+ = Q_{31} = C_V(T_1 - T_3)\,;$$

$$Q^- = Q_{23} = C_p(T_3 - T_2)\,.$$

Выразим температуры T_2 и T_3 через температуру T_1 из уравнений изохорического (3-1) и изобарического (2-3) процессов:

3-1: $\frac{p_3}{T_3}=\frac{p_1}{T_1}\rightarrow T_3=T_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)=\frac{T_1}{k}$;

2-3: $\frac{V_3}{T_3}=\frac{V_2}{T_2}\rightarrow T_2=T_3\left(\frac{V_2}{V_3}\right)=nT_3=\frac{nT_1}{k}$.

КПД тепловой машины:

$$\eta=1-\frac{\left|Q^-\right|}{Q^+}=1-\frac{5(n-1)}{3(k-1)}=\frac{3k-5n+2}{3(k-1)}=\frac{4}{9}.$$

§11. Второе начало термодинамики. Энтропия

11.1. $\Delta S=\frac{3}{2}R\ln\frac{T_2}{T_1}$.

Решение. В одном моле содержится N_A молекул. Термодинамическая вероятность состояния системы пропорциональна $\Gamma(E,V,N)\sim V^N E^{3N_\text{A}/2}$, где $E=3kTN_\text{A}/2$ – энергия всех молекул одноатомного газа. При изохорическом нагревании термодинамическая вероятность состояния изменится в число раз:

$$\frac{\Gamma_2(E_2)}{\Gamma_1(E_1)}=\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3N_\text{A}/2}.$$

По определению энтропия системы $S=k\ln\Gamma$. Следовательно, изменение энтропии составит:

$$\Delta S=k\ln\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}=\frac{3}{2}R\ln\frac{T_2}{T_1}.$$

11.2. Термодинамическая вероятность увеличится в $\Gamma_2(E_2)/\Gamma_1(E_1)=(1+\Delta T/T_0)^{3N_\text{A}/2}=\left(1+1/300\right)^{9\cdot10^{23}}\approx3\cdot10^{21}$ раз;

$\Delta S=(3/2)\,R\ln(1+\Delta T/T_0)\approx0{,}041$ Дж/К.

11.3. $\Gamma_2/\Gamma_1=(1+\Delta V/V_1)^{2N_\text{A}}$; $\Delta S=2R\ln(1+\Delta V/V_1)$.

11.4. $Q^{-} = T_0 \Delta S = -kT_0 \ln(\Gamma_2/\Gamma_1) = -kT_0 \ln n$.

11.5. $\Delta S/S_0 = \ln(\Gamma_2/\Gamma_1)/\ln\Gamma_1 \approx 0{,}007$.

11.6. $\Gamma_2/\Gamma_1 = \exp\left(L/(kT_0)\right) \approx e^{8\cdot10^{22}} \approx 10^{3{,}5\cdot10^{23}}$ раз.

11.7. $S_2 \approx 31{,}2$ Дж/К.

Решение. Используем выражение для энтропии идеального газа в p–T-переменных:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \nu\left(C_p \ln\frac{T}{T_1} - R\ln\frac{p}{p_1}\right),$$

откуда $S_2 = \dfrac{m_2}{m_1}\left[S_1 + R\left(\dfrac{7}{2}\ln\dfrac{T_2}{T_1} - \dfrac{p_2}{p_1}\right)\right] \approx 31{,}2$ Дж/К.

11.8. $\Delta S = \nu R\ln(V_2/V_1) = -\nu R\ln 2$.

11.9. Изменение энтропии будет больше для водорода в $n = \mu_{N_2}/\mu_{H_2} = 14$ раз.

11.10. $V_2/V_1 = \exp\left(\mu\Delta S/(mR)\right) \approx e^{1{,}45} \approx 4{,}3$.

11.11. $\Delta S = A/T \approx 1{,}6$ Дж/К.

11.12. $\Delta S_1 \approx 4{,}56$ Дж/К.

Решение. При изохорическом повышении температуры $\Delta S_1 = C_V \ln\left(T_2/T_1\right) = 3R\ln\left(T_2/T_1\right)$. При изобарическом процессе $\Delta S_2 = C_p \ln\left(T_2/T_1\right) = 4R\ln\left(T_2/T_1\right)$. Во втором процессе изменение энтропии будет больше на величину

$$\Delta S_1 = (C_p - C_V)\ln\frac{T_2}{T_1} = R\ln\frac{T_2}{T_1} \approx 4{,}56 \text{ Дж/К}.$$

11.13. Нагревание проводилось при постоянном давлении.

11.14. $\Delta S = \nu R\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\ln\alpha - \ln\beta\right)$.

Решение. Воспользуемся формулой для изменения энтропии идеального газа в параметрах (p,T):

$$\Delta S = \nu\left(C_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{p_2}{p_1}\right).$$

Подставляя $T_2/T_1 = \alpha$ и $p_2/p_1 = \beta$, а также молярную теплоемкость $C_p = R\gamma/(\gamma-1)$, получаем:

$$\Delta S = \nu\left(C_p\ln\alpha - R\ln\beta\right) = \nu R\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\ln\alpha - \ln\beta\right).$$

11.15. $V_2/V_1 = \exp\left(2\Delta S/(3R)\right)$.

11.16. $\Delta S = -6R\ln(2/5)$.

Решение. В ходе адиабатического сжатия изменение энтропии газа $\Delta S_1 = 0$. При изохорическом охлаждении изменение энтропии равно $\Delta S_2 = \nu C_V \ln(T_1/T_2)$.

Записывая уравнение адиабатического процесса в p–T-переменных $pT^{\gamma/(1-\gamma)} = \text{const}$, находим температуру газа в конце адиабатического сжатия: $T_2 = T_1\left(p_2/p_1\right)^{(\gamma-1)/\gamma} = T_1 2^{(\gamma-1)\backslash\gamma}$.

Полное изменение энтропии

$$\Delta S = \nu C_V \cdot \frac{1-\gamma}{\gamma}\ln 2 = -\nu R\ln\frac{2}{\gamma} = -6R\ln\frac{2}{5}.$$

11.17. $\Delta S = mR\dfrac{\ln\alpha - 7\ln\beta/2}{\mu}$.

11.18. $S_2 - S_1 = \nu R\dfrac{\gamma\ln\alpha - \ln\beta}{\gamma-1} = 23{,}5$ Дж/К.

11.19. $\Delta S \approx 13{,}5$ Дж/К.

Решение. Используем формулы для коэффициентов тепло-

проводности и диффузии:

$$D=\frac{1}{3}\langle v\rangle l=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\cdot\frac{kT}{\sqrt{2}\sigma p}=\frac{2}{3\sigma}\sqrt{\frac{R}{\pi\mu}}\cdot\frac{kT^{3/2}}{p}\sim\frac{T^{3/2}}{p}$$ и

$$\lambda=\frac{1}{3}\langle v\rangle l c_V\rho=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\sigma n}c_V\cdot\frac{\mu p}{RT}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\frac{kT}{\sqrt{2}\sigma p}\cdot\frac{\mu p}{RT}\sim\sqrt{T}\,.$$

Из условия задачи $T_2^{3/2}/p_2=T_1^{3/2}/p_1$ и $\sqrt{T_2}=1{,}5\sqrt{T_1}$, поэтому $T_2=(9/4)T_1$ и $p_2=(27/8)p_1$. Из формулы изменения энтропии в (p,T)-параметрах находим:

$$\Delta S=\frac{m}{\mu}\left(C_p\ln\frac{T_2}{T_1}-R\ln\frac{p_2}{p_1}\right)=\ln\frac{3}{2}\left(2C_p-3R\right)=4R\ln(3/2)\approx 13{,}5\ \text{Дж/К}\,.$$

11.20. $\Delta S_{12}\approx 3{,}7$ Дж/К.

Решение. Показатель политропы в данном процессе равен $n=-2$. Согласно определению молярной теплоемкости, $\delta Q=C\mathrm{d}T$, где теплоемкость одноатомного газа в политропическом процессе равна $C=C_V\dfrac{n-\gamma}{n-1}=\dfrac{3R}{2}\cdot\dfrac{-2-5/3}{-2-1}=\dfrac{11}{6}R$.

Изменение энтропии в процессе составляет

$$\Delta S_{12}=\int_1^2\frac{\delta Q}{T}=C\int_{T_1}^{T_2}\frac{\mathrm{d}T}{T}=C\ln\frac{T_2}{T_1}=\frac{11R}{6}\ln\frac{T_2}{T_1}\approx 3{,}7\ \text{Дж/К}\,.$$

11.21. $\Delta S\approx 11{,}5$ Дж/К.

Решение. Для одноатомного газа Показатель политропы равен $n=\dfrac{C-C_p}{C-C_V}=\dfrac{R/2-5R/2}{R/2-3R/2}=2$.

Изменение энтропии газа равно: $\Delta S=\nu\int_{T_1}^{T_2}C\dfrac{\mathrm{d}T}{T}=\nu C\ln\dfrac{T_2}{T_1}$.

Из уравнения процесса в T-V переменных следует, что $T_2/T_1=\left(V_1/V_2\right)^{n-1}=\left(V_1/V_2\right)^2$. Изменение энтропии равно

$$\Delta S = \nu C \ln \frac{T_2}{T_1} = \nu C \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{n-1} = 2R \ln 2 \approx 11{,}5 \text{ Дж/К} .$$

11.22. *Решение.* Проведя систему адиабат на графике процесса, определяем, что энтропия максимальна в т. 2, лежащей на самой высокой адиабате, и минимальна в т. 4, через которую проходит самая нижняя адиабата.

Так как энтропия является функцией состояния, разность энтропий равна

$$\Delta S_{24} = S_2 - S_4 = R \ln \frac{V_2}{V_1} + C_V \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{R}{\gamma - 1} \left[(\gamma - 1) \ln n + \ln \frac{T_2}{T_1} \right].$$

11.23. Энтропия возрастает в процессе 1–2: $\Delta S_{12} = \nu R \ln n$.

11.24. $V_x = -\dfrac{\gamma}{\gamma + 1} \cdot \dfrac{a}{b}$.

Решение. Проведем мысленно систему адиабат. Адиабата с самой большой энтропией касается прямой линии 1-2 в точке с искомым объемом V_x. Поскольку эта точка принадлежит адиабате, для неё выполняется условие: $\delta Q_{12}(V_x) = C_V \mathrm{d}T + p \mathrm{d}V = 0$.

На прямолинейном участке 1-2 зависимость $p(V)$ имеет вид:

$$p = a + bV .$$

Используя уравнение идеального газа $pV = RT$, находим:

$$T(V) = \frac{(a + bV)V}{R} , \text{ откуда } \mathrm{d}T = \frac{(a + 2bV)\mathrm{d}V}{R} .$$

Записанное ранее уравнение адиабаты с самой большой в цикле энтропией принимает вид:

$$\delta Q_{12}(V_x) = \left[\frac{C_V (a + 2bV_x)}{R} + (a + bV_x) \right] \mathrm{d}V = 0 ,$$

откуда находим искомый объем газа: $V_x = -\dfrac{\gamma}{\gamma + 1} \cdot \dfrac{a}{b}$.

Константы a и b определим по заданным параметрам цикла. Из уравнения адиабаты 2-1 находим давление в т. 2: $p_2 = p_1(V_1/V_2)^{\gamma}$. Записав систему двух уравнений:

$$\begin{cases} p_1 = a + bV_1; \\ p_2 = p_1(V_1/V_2)^{\gamma} = a + bV_2 , \end{cases}$$

находим:

$$a = \frac{p_1}{V_2(V_2 - V_1)} \cdot \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma+1} \right], \; b = \frac{p_1}{V_2 - V_1} \cdot \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma} - 1 \right] < 0 .$$

11.25. $\Delta S = R \dfrac{\gamma \ln(V_2/V) + \alpha(V_2 - V_1)}{\gamma - 1}$.

Решение. Используем первое начало термодинамики для одного моля в форме $T\mathrm{d}S = C_V \mathrm{d}T + p\mathrm{d}V$ и уравнение состояния идеального газа $p = RT/V$, из которого выражаем температуру T:

$$T = \frac{pV}{R} = \frac{p_0 e^{\alpha V} V}{R} \quad \text{и далее} \quad \mathrm{d}T = \frac{p_0 e^{\alpha V}(1 + \alpha V)}{R} \mathrm{d}V .$$

Для дифференциала энтропии получаем:

$$\mathrm{d}S = C_V \frac{\mathrm{d}T}{T} + \frac{p}{T}\mathrm{d}V = \frac{R}{\gamma - 1} \cdot \frac{p_0(1 + \alpha V) e^{\alpha V}}{p_0 e^{\alpha V} V} \mathrm{d}V + R \frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{R(\alpha + \gamma/V)}{\gamma - 1} \mathrm{d}V ,$$

После интегрирования находим:

$$\Delta S = R \frac{\gamma \ln(V_2/V) + \alpha(V_2 - V_1)}{\gamma - 1} .$$

11.26. $\Delta S = R \ln \left[\eta \left(\dfrac{p_0 \eta V_1 + \alpha}{p_0 V_1 + \alpha} \right)^{3/2} \right]$.

11.27. $\Delta S = \nu \left[R \ln n + C_V \ln \dfrac{T_0 + \alpha n^2 V_1^2}{T_0 + \alpha V_1^2} \right]$.

11.28. $V_m = \dfrac{(\gamma-1)T_0}{\beta\gamma}$.

Решение. Пусть в начале процесса энтропия газа была равна $S(V_1) = S_0$. При увеличении объема энтропия меняется по закону:

$$S(V) = S_0 + \left(R\ln\frac{V}{V_1} + C_V \ln\frac{T}{T_1} \right) = S(V_1) + R\left(\ln\frac{V}{V_1} + \frac{1}{\gamma-1}\ln\frac{T_0-\beta V}{T_0-\beta V_1} \right).$$

При максимальном значении энтропии производная $\mathrm{d}S(V)/\mathrm{d}V$ обращается в ноль:

$$\left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}V}\right|_{S_{max}} = R\left[\frac{1}{V} - \frac{\beta}{\gamma-1}\left(\frac{1}{T_0-\beta V} \right) \right]\Bigg|_{V_m} = 0,$$

т.е. $(\gamma-1)(T_0-\beta V_m)-\beta V_m = 0$, откуда $V_m = \dfrac{(\gamma-1)T_0}{\beta\gamma}$.

Найденное значение V_m соответствует максимуму энтропии, поскольку при данном значении $\dfrac{\partial^2 S}{\partial V^2} < 0$.

11.29. $\Delta S \approx 10{,}3$ Дж/К.

Решение. Выразим объем идеального газа, используя уравнение его состояния $p = \nu RT/V$:

$$V = \nu RT/p = e^{-\alpha T}\nu RT/p_0,$$

откуда $\mathrm{d}V = \dfrac{1-\alpha T}{p_0} e^{-\alpha T}\nu R\,\mathrm{d}T$.

Изменение энтропии найдем из первого начала термодинамики $T\mathrm{d}S = \nu C_V \mathrm{d}T + p\mathrm{d}V$:

$$\mathrm{d}S = \nu C_V \frac{\mathrm{d}T}{T} + \frac{p}{T}\mathrm{d}V = \frac{3R\nu}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}T}{T} + \frac{p_0 e^{\alpha T}}{T}\cdot\frac{(1-\alpha T)e^{-\alpha T}}{p_0}\nu R\,\mathrm{d}T =$$

$$= \frac{5}{2}\nu R\frac{\mathrm{d}T}{T} - \nu\alpha R\,\mathrm{d}T.$$

Искомое изменение энтропии:

$$\Delta S = \nu R\left[\frac{5}{2}\ln\frac{T_2}{T_1} - \alpha(T_2-T_1) \right] \approx 10{,}3 \text{ Дж/К}.$$

11.30. $\Delta S = R\ln\left(n^{5/2}\,\dfrac{p_0+\alpha T_1}{p_0+\alpha n T_1}\right)$.

11.31. $V(T) = Ae^{aT}T^{1/(1-\gamma)}$, где $A = V_0 e^{aT_0}T_0^{\,1/(\gamma-1)}$.

Решение. Элементарное количество теплоты, получаемое газом: $\delta Q = T\mathrm{d}S = aRT\mathrm{d}T$. По первому началу термодинамики $\delta Q = C_V\mathrm{d}T + p\mathrm{d}V = aRT\mathrm{d}T$, и для идеального газа $p\mathrm{d}V = \dfrac{RT}{V}\mathrm{d}V$. Подставляя это выражение в δQ, получаем:

$$C_V\mathrm{d}T + \frac{RT}{V}\mathrm{d}V = aRT\mathrm{d}T\text{, откуда } \frac{\mathrm{d}V}{V} = \left(a - \frac{C_V}{RT}\right)\mathrm{d}T.$$

Интегрируя полученное уравнение, с учетом начальных условий находим:

$$\ln\frac{V}{V_0} = a\,(T-T_0) - \frac{1}{\gamma-1}\ln\frac{T}{T_0},$$

откуда $V(T) = Ae^{aT}T^{1/(1-\gamma)}$, где $A = V_0 e^{aT_0}T_0^{\,1/(\gamma-1)}$.

11.32. $Q = \int\limits_{T_1}^{T_2} 2\alpha T^2\mathrm{d}T = \dfrac{2}{3}\alpha\left(T_2^3 - T_1^3\right)$.

Решение. Используя термодинамическое определение энтропии: $\mathrm{d}S = \delta Q/T$, находим количество теплоты, полученное газом при изменении температуры на $\mathrm{d}T$: $\delta Q = T\mathrm{d}S = 2\alpha T^2\mathrm{d}T$.

Так как по определению теплоемкости $\delta Q = C\mathrm{d}T$, теплоемкость газа в данном процессе: $C = 2\alpha T^2$.

Количество полученной газом теплоты равно

$$Q = \int\limits_{T_1}^{T_2} 2\alpha T^2\mathrm{d}T = \frac{2}{3}\alpha\left(T_2^3 - T_1^3\right).$$

11.33. $A = \dfrac{2}{3}\dfrac{T_1^{3/2}(2\sqrt{2}-1)}{\sqrt{\beta}} - \dfrac{3}{2}RT_1$.

Решение. Энтропия газа $S = \sqrt{T/\beta}$. Используя формулу $\delta Q = T\,\mathrm{d}S = (1/2)\sqrt{T/\beta}\;\mathrm{d}T$, находим количество полученной газом теплоты:

$$Q = (1/2)\int_{T_1}^{2T_1} \sqrt{\frac{T}{\beta}}\,\mathrm{d}T = \frac{2}{3}\sqrt{\beta}\;T_1^{3/2}\cdot\left(2^{3/2}-1\right).$$

Работу, совершенную газом, находим из первого начала термодинамики: $A = Q - \Delta U$, где изменение внутренней энергии одноатомного газа $\Delta U = C_V\left(T_1 - T_2\right) = 3RT_1/2$. Окончательно:

$$A = \frac{2}{3}\frac{T_1^{3/2}(2\sqrt{2}-1)}{\sqrt{\beta}} - \frac{3}{2}RT_1..$$

11.34. $\Delta S = 2\nu\alpha\left(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}\right)$.

11.35. $\Delta S = m\left[c_1 \ln\left(T_2/T_1\right) + c_2 - c_1\right] \approx 620$ Дж/К.

11.36. $T = T_1 \exp\left[\left(S - S_1\right)/C\right]$.

11.37. $\Delta S_{23} = 0{,}02$ Дж/К.

Решение. В процессе 1-2 $\Delta S = 0$. В обратимом процессе 3–1 $\Delta S_{31} = \nu R \ln(V_1/V_3)$, при этом газ совершает работу $A_{31} = \nu RT \ln(V_1/V_3) = -A$. Таким образом, $\Delta S_{31} = -A/T < 0$.

Так как изменение энтропии в циклическом процессе равно нулю, то $\Delta S_{23} = -(\Delta S_{12} + \Delta S_{31}) = A/T = 0{,}02$ Дж/К.

11.38. $\Delta S_{23} = \nu R \ln(T_2/T_1)$.

Решение. Процесс 1–2 – изохорический, поэтому

$$\Delta S_{12} = \nu C_V \ln\frac{T_2}{T_1}.$$

Процесс 3–1 – изобарический, поэтому $\Delta S_{31} = \nu C_p \ln(T_1/T_2)$.

Процесс 2–3 – необратимый, но состояния 2 и 3 – равновесные, поэтому изменение энтропии в процессе 2–3 можно найти как разность энтропий этих состояний. Так как изменение энтропии в циклическом процессе равно нулю, то

$$\Delta S_{23} = -(\Delta S_{12} + \Delta S_{31}) = \nu\left(C_p - C_V\right)\ln\frac{T_2}{T_1} = \nu R\ln\frac{T_2}{T_1}.$$

11.39. $\Delta S = \dfrac{3R}{2}\ln\dfrac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2} > 0.$

Решение. Установившаяся температура газов T' находится из условия, что теплообмена с окружающей средой нет, $A = 0$, следовательно, внутренняя энергия системы не изменяется:

$$2C_V T' = C_V\left(T_1 + T_2\right), \text{ откуда } T' = \frac{1}{2}\left(T_1 + T_2\right).$$

Процесс происходит при постоянном объеме, поэтому изменение энтропии равно

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = C_V\left(\ln\frac{T'}{T_1} + \ln\frac{T'}{T_2}\right) = \frac{3R}{2}\ln\frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2} > 0.$$

11.40. $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \left(\dfrac{m_1}{\mu_1} + \dfrac{m_2}{\mu_2}\right)R\ln 2.$

Решение. В процессе смешивания $\Delta Q = 0$, $A = 0$, следовательно, $\Delta(U_1 + U_2) = 0$. Так как до перемешивания температуры были одинаковы, то и после смешивания температура останется прежней.

Сначала каждый газ занимал объем V, а после перемешивания стал занимать весь объем $2V$. В силу аддитивности энтропии полное изменение энтропии системы равно:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)R\ln 2.$$

11.41. $\Delta S = \nu_0 R\ln\dfrac{(V_1+V_2)^2}{4V_1V_2} > 0$, т.к. $(V_1+V_2)^2 > 4V_1V_2$.

11.42. $\Delta S_{\mathrm{I}}=\dfrac{V_0}{T_0}\left[\left(p_1+np_2\right)\ln(n+1)-p_1\ln\left(1+\dfrac{np_2}{p_1}\right)-np_2\ln\left(\dfrac{p_1}{p_2}+n\right)\right]$.

Решение. Так как $\Delta Q=0$, перемешивание идеальных газов происходит без совершения работы ($A=0$), изменение внутренней энергии газов $\Delta U=0$, и температура газов в процессе смешивания остается прежней T_0.

Найдем установившееся давление смеси газов p. Из уравнения состояния идеального газа $p'(V_1+V_2)=\left(\nu_1+\nu_2\right)RT_0$, где количества молей первого и второго газов равны соответственно

$$\nu_1=\frac{p_1V_1}{RT_0} \quad \text{и} \quad \nu_2=\frac{p_2V_2}{RT_0}.$$

В результате получаем: $p'=\dfrac{p_1+np_2}{n+1}$.

Изменение энтропии каждого газа:

$$\Delta S_1=-\nu_1R\ln\frac{p_1+np_2}{p_1(n+1)};$$

$$\Delta S_2=-\nu_2R\ln\frac{p_1+np_2}{p_2(n+1)}.$$

Суммарное изменение энтропии смеси равно

$$\Delta S_{\mathrm{I}}=\Delta S_1+\Delta S_2=-\frac{V_0}{T_0}\left(p_1\ln\frac{p_1+np_2}{p_1(n+1)}+np_2\ln\frac{p_1+np_2}{p_2(n+1)}\right)=$$

$$=\frac{V_0}{T_0}\left[\left(p_1+np_2\right)\ln(n+1)-p_1\ln\left(1+\frac{np_2}{p_1}\right)-np_2\ln\left(\frac{p_1}{p_2}+n\right)\right].$$

11.43. $\Delta S\approx 54{,}8$ Дж/К.

Решение. Молярные теплоемкости обоих газов равны $C_V=3R/2$. Так как $\delta Q=0$ и $\delta A=0$, то $\Delta(U_1+U_2)=0$:

$$\nu C_V(T_0-T_1)+\nu C_V\left(T_0-T_1\right)=0,$$

откуда

$$T_0=\left(T_1+T_2\right)/2=(p_1V_1+p_2V_2)/(2\nu R).$$

Учитывая аддитивность энтропии, получаем:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 =$$
$$= \nu\left(R\ln\frac{V_1+V_2}{V_1} + C_V \ln\frac{T_0}{T_1}\right) + \nu\left(R\ln\frac{V_1+V_2}{V_2} + C_V \ln\frac{T_0}{T_2}\right) =$$
$$= \nu\, R\left(\ln\frac{(V_1+V_2)^2}{V_1V_2} + \frac{3}{2}\ln\frac{(p_1V_1+p_2V_2)^2}{4p_1V_1p_2V_2}\right) \approx 54{,}8 \text{ Дж/К}.$$

11.44. $\Delta S \approx 64{,}2$ Дж/К.

Решение. До начала процесса объемы левой и правой частей равны $V_0/2$, после окончания процесса – $V_1' = V_0/3$ и $V_1' = 2V_0/3$. Условие установившегося динамического равновесия $p_2' = p_1'$, откуда $T_2' = 2T_1'$.

Пусть при расширении второй газ совершает работу A, тогда первый газ совершает работу $-A$. Поскольку процессы в обоих газах адиабатические, то $\Delta U_1 - A = 0$ и $\Delta U_2 + A = 0$. Отсюда $C_V(T_1' - T_1) = C_V\left(T_2 - T_2'\right)$. С учетом соотношения температур находим: $T_1'/T_1 = 5/6$.

Изменение энтропии газа равно

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \left(R\ln\frac{V_1'}{V_1} + C_V\ln\frac{T_1'}{T_1}\right) + \left(R\ln\frac{V_2'}{V_2} + C_V\ln\frac{T_2'}{T_2}\right) =$$
$$= \left(R\ln\frac{2}{3} + \frac{5R}{2}\ln\frac{5}{6}\right) + \left(R\ln\frac{4}{3} + \frac{5R}{2}\ln\frac{10}{9}\right) = R\left(3\ln2 - \frac{19}{2}\ln3 + 10\ln5\right) \approx$$
$$\approx 64{,}2 \text{ Дж/К}.$$

11.45. $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = R\ln2$, $T_2 = T_0(2/3)^{\gamma-1} = T_0(2/3)^{2/3}$.

Решение. Для первого процесса (процесса Гей-Люссака) $T_1 = T_0$, и изменение энтропии равно $\Delta S_1 = \nu R\ln(2V_0 / V_0) = R\ln2$.

Второй процесс – обратимое адиабатическое ($\Delta S = 0$) расширение, из уравнения процесса которого $TV^{\gamma-1} = \text{const}$ находим конечную температуру: $T_2 = T_0(2/3)^{\gamma-1} = T_0(2/3)^{2/3}$.

Полное изменение энтропии равно $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = R\ln2$.

11.46. $T_2 = T_0(2/3)^{\gamma-1}$; $\Delta S = \nu R\ln(4/3)$.

11.47. $\Delta S \approx 9{,}1$ Дж/К.

Решение. Так как теплообмена с окружающей средой нет, то суммарное количество теплоты, отданное нагретой водой и полученного холодной, равно нулю: $\delta Q_1 + \delta Q_2 = 0$.

Количество теплоты, отданное или полученное веществом, равно $\Delta Q_{ik} = c_p m_i \left(T_k - T_i\right)$, где c_p – удельная теплоемкость, $m_i = \rho V_i$ – масса воды, T_k и T_i – конечная и начальная температуры.

Уравнение теплового баланса имеет вид:

$$c_p \rho V \left(T^* - T_1\right) + c_p \rho V \left(T^* - T_2\right) = 0,$$

откуда находим температуру воды T^* после установления теплового равновесия: $T^* = (T_1 + T_2)/2$.

Процесс обмена теплотой является обратимым, однако начальное и конечное состояния воды равновесные, в которых можно указать значение энтропии. Поскольку изменение энтропии в необратимом процессе определяется только параметрами начального и конечного состояний, для вычисления изменения энтропии можно заменить реальный необратимый процесс обратимым изобарическим и записать:

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T} = \frac{c_p m \mathrm{d}T}{T} \quad \text{и} \quad \Delta S_{ik} = \rho V c_p \int_{T_i}^{T_k} \frac{\mathrm{d}T}{T} = \rho V c_p \ln \frac{T_k}{T_i}.$$

Полное изменение энтропии воды ΔS равно

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \rho V c_p \ln \frac{\left(T_1 + T_2\right)^2}{4 T_1 T_2} \approx 9{,}1 \text{ Дж/К} > 0.$$

11.48. $\Delta S = m_1 c_{p1} \ln \dfrac{T^*}{T_1} + m_2 c_{p_2} \ln \dfrac{T^*}{T_2}$,

где $T^* = \dfrac{m_1 c_{p1} T_1 + m_2 c_{p2} T_2}{m_1 c_{p1} + m_2 c_{p2}}$.

11.49. *а)* $T = \text{const}$;

б) $S = S_1 + \nu C_p \ln\left(T/T_1\right)$;

в) $S = S_1 + \nu C_V \ln\left(T/T_1\right)$.

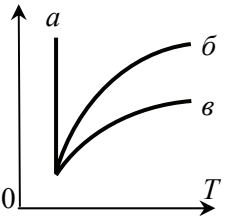


Рис. О.11.49.

Графики процессов представлены на рис. О.11.49.

11.50. *а*) $T = T_1 e^{(S/C_p)}$;

б) $T = T_1 e^{(S/C_V)}$;

в) $S = \text{const}$.

Графики процессов представлены на рис. О.11.50. Самое большое изменение энтропии будет при изобарическом процессе.

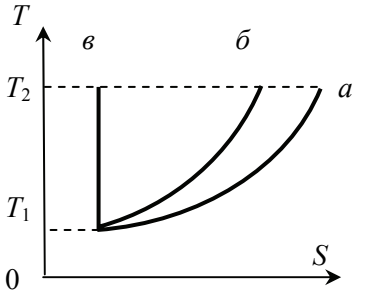
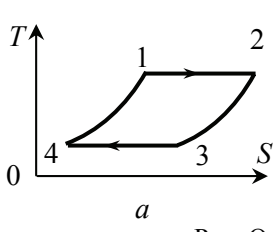


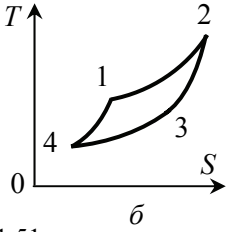
Рис. О.11.50.

11.51. См. рис. О.11.51.

11.52. См. рис. О.11.52.



а



б

Рис. О.11.51.

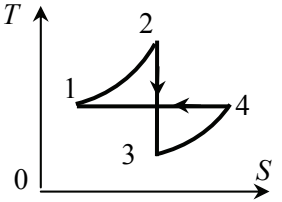
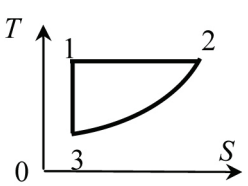
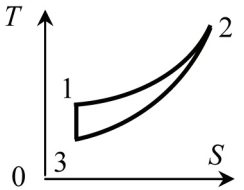


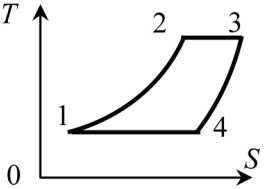
Рис. О.11.52.



а



б



в

Рис. О.11.53.

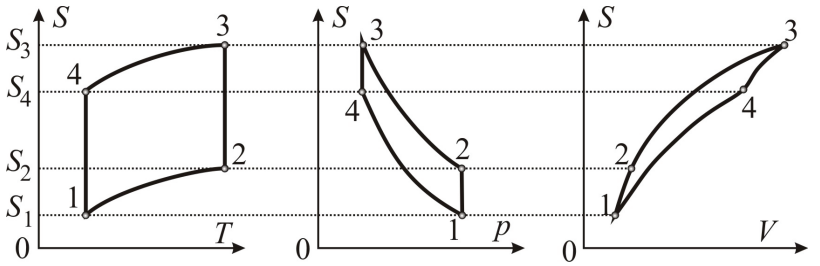


Рис. О.11.54.

11.53. См. рис. О.11.53.

11.54. $\Delta S_{12} = (5R/2)\ln(T_2/T_1)$;
$\Delta S_{23} = R\ln(p_1/p_2)$, $\Delta S_{34} = (5R/2)\ln(T_1/T_2)$, $\Delta S_{41} = R\ln(p_2/p_1)$. Цикл в разных парах переменных изображен на рис. О.11.54.

11.55. $\eta < \eta_{\text{К}}$.

Решение. Газ получает теплоту на участках 1–2 и 3–1. Получаемая в процессе теплота равна площади на T–S-диаграмме под отрезками 1–2 и 3–1, а отдаваемая газом теплота – площади под отрезком 2–3, на котором энтропия уменьшается. Тепловая машина является тепловым двигателем, КПД которого равен

$$\eta = \frac{\oint \delta A}{Q^+} = \frac{\oint \delta Q}{Q_{12} + Q_{31}}.$$

Поставляя значения $\oint \delta Q = \frac{1}{2}(T_1 - T_2)(S_2 - S_3)$ и $Q^+ = Q_{12} + Q_{31} =$

$$= \frac{1}{2}(T_1 + T_2)(S_2 - S_1) + \frac{1}{2}(T_1 + T_2)(S_1 - S_3) = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)(S_2 - S_3),$$

получаем:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2} < \eta_{\text{К}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

11.56. $A = \Delta S \cdot \Delta T = 300$ кДж.

11.57. $\eta = (n-1)/(n+1)$.

11.58. $\eta < \eta_{\text{Карно}}$.

Решение. Рассматриваемый цикл условно изображен на рис. О.11.58 сплошной замкнутой кривой, а соответствующий цикл Карно (в виде прямоугольника) пунктирной линией. Поскольку КПД цикла Карно зависит лишь от температур нагревателя

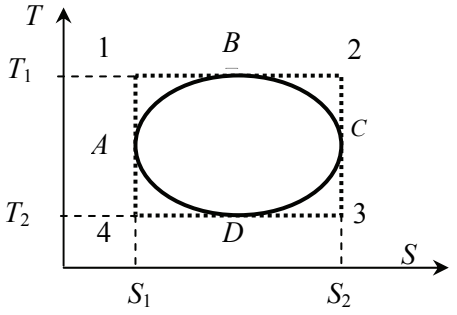


Рис. О.11.58.

и холодильника и не зависит от разности энтропий $(S_2 - S_1)$, можно взять цикл Карно такой же протяженности по оси S, как и рассматриваемый цикл.

Из рис. О.11.58 видно, что для любого цикла площадь фигуры S_1ABCS_2, т.е. количество полученной за цикл теплоты Q^+, меньше площади S_112S_2 (т.е. Q^+ в случае цикла Карно). В то же время, площадь S_1ADCS_2 (т.е. количество отданной за цикл теплоты Q^-) больше, чем площадь S_143S_2 (т.е. Q^- в случае цикла Карно).Таким образом, отношение $\left|Q^-\right|/Q^+$ для любого цикла больше, чем для цикла Карно. Следовательно КПД равен $\eta = 1 - |Q^-|/Q^+ < \eta_{\text{Карно}}$.

11.59. $\eta = 1 - \dfrac{T_3 + T_4}{T_1 + T_2}$.

11.60. $\eta = 1 - \dfrac{T_3 + T_4}{T_1 + T_2}$.

11.61. $\eta_{\text{х}} = \dfrac{3T_2 + T_4}{2(T_4 - T_2)}$, $\eta_{\text{тн}} = \dfrac{Q^-}{\oint \delta Q} = \dfrac{T_1 + T_4}{T_4 - T_2} = \dfrac{T_2 + 3T_4}{2(T_4 - T_2)}$.

Решение. Газ получает теплоту на участках 1–2 и 2–3 и отдает на участках 3–4 и 4–1. Поскольку получаемая теплота меньше отдаваемой, то машина, работающая по данному циклу, является или холодильной машиной, или тепловым насосом.

1) Если устройство используется как холодильная машина, её эффективность равна: $\eta_{\text{х}} = \dfrac{Q^+_{\text{хм}}}{\left|\oint \delta A\right|} = \dfrac{Q^+_{\text{хм}}}{\left|\oint \delta Q\right|} = \dfrac{Q_{12} + Q_{23}}{\left|\oint \delta Q\right|}$.

Модуль количества теплоты равен площади цикла (ромба) на T–S-диаграмме: $\left|\oint \delta Q\right| = \dfrac{1}{2}(T_4 - T_2)(S_3 - S_1)$.

Определяем количества теплоты, получаемые газом:

$$Q_{12} = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)(S_2 - S_1);\ \ Q_{23} = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)(S_3 - S_2).$$

Теплота, полученная за цикл холодильной машиной, равна

$$Q^{+} = Q_{12} + Q_{23} = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)(S_3 - S_1).$$

Учитывая, что $T_1 = (T_2 + T_4)/2$, находим холодильный коэффициент машины:

$$\eta_{\text{х}} = \frac{(1/2)(T_1 + T_2)(S_3 - S_1)}{(1/2)(T_4 - T_2)(S_3 - S_1)} = \frac{T_1 + T_2}{T_4 - T_2} = \frac{3T_2 + T_4}{2(T_4 - T_2)}.$$

2) Если машина является тепловым насосом, то её эффективность определяется по формуле:

$$\eta_{\text{тн}} = \frac{\left|Q^{-}_{\text{тн}}\right|}{\left|\oint \delta A\right|} = \left|\frac{Q_{34} + Q_{41}}{\oint \delta Q}\right|.$$

Количество теплоты, отдаваемой тепловым насосом, равно:

$$Q^{-} = Q_{34} + Q_{41} = \frac{1}{2}(T_1 + T_4)(S_3 - S_1).$$

Эффективность теплового насоса

$$\eta_{\text{тн}} = \frac{Q^{-}}{\oint \delta Q} = \frac{T_1 + T_4}{T_4 - T_2} = \frac{T_2 + 3T_4}{2(T_4 - T_2)}.$$

11.62. $\left|\oint \delta A\right| = \left|\oint \delta Q\right| = 10^4 \pi = 31{,}4$ кДж.

§12. Реальные газы и жидкости

12.1. $V_{\text{собст}} = 0{,}0214$ л.

Решение. Дополнительное давление газа Ван-дер-Ваальса равно

$$p_{\text{доп}} = \nu^2 \frac{a}{V^2} = \left(\frac{m}{\mu}\right)^2 \cdot \frac{a}{V^2} = 1{,}444 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Постоянная Ван-дер-Ваальса b учитывает объем, недоступный для свободного движения молекул. Её принимают равной учетверённому объёму молекул одного моля газа, если в качестве модели молекулы принять слабо притягивающиеся упругие сферы. Произведение νb равно учетверенному объему всех молекул газа:

$$V_{\text{собст}} = \frac{1}{4} b \frac{m}{\mu} = 2{,}14 \cdot 10^{-5}\,\text{м}^3 = 0{,}0214\ \text{л}.$$

12.2. $\dfrac{V_{\text{собст}}}{V} = \dfrac{mb}{4\mu V} \approx 9{,}3 \cdot 10^{-3} = 0{,}93\%$;

$$\frac{p_{\text{доп}}}{p} = \frac{(m/\mu)a}{RTV^2/(V - mb/\mu) - (m/\mu)b} \approx 0{,}063 = 6{,}3\%.$$

12.3. $\Delta p = 5{,}4 \cdot 10^5$ Па.

Решение. В реальном газе давление на стенки сосуда $p = p_{\text{внутр}} - \nu^2 a/V^2$, где результирующее внутреннее давление в газе $p_{\text{внутр}} = \nu RT/(V - \nu b)$. Поскольку газы находятся в равных по объему сосудах при одинаковой температуре и $b_1 \approx b_2$, внутреннее давление у них одинаковое. Следовательно, давления на стенки сосудов у водорода и кислорода отличаются на величину:

$$\Delta p = \frac{\nu^2}{V^2}\left(a_2 - a_1\right) = 5{,}4 \cdot 10^5\ \text{Па}.$$

12.4. *а)* $T = \dfrac{1}{\nu R}\left(p + \dfrac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(V - \nu b\right) \approx 322{,}4\ \text{К}$;

б) $T = \dfrac{pV}{\nu R} \approx 321{,}3\ \text{К}$, где $\nu = \dfrac{m}{\mu} = 150$ молей.

12.5. $p_{\text{ВдВ}} = \dfrac{RT}{V - b} - \dfrac{a}{V^2} \approx 3{,}01\ \text{МПа}$; $p_{\text{ид}} = \dfrac{RT}{V} \approx 4{,}98\ \text{МПа}$.

12.6. $\dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{\alpha p_1 + \nu^2 a/V^2}{p_1 + \nu^2 a/V_2} \approx 1{,}43$ раз.

12.7. $\delta_1 \approx 0{,}012 = 0{,}12\%$; $\delta_2 \approx 0{,}12 = 12\%$.

Решение. При $V_1 = 4{,}0$ л давление газа Ван-дер-Ваальса $p_{\text{ВдВ}} = RT/(V - b) - a/V^2 \approx 6{,}15 \cdot 10^5$ Па, а идеального газа –

$p_{\text{ид}} = RT/V = 6{,}225 \cdot 10^5$ Па. Относительная погрешность определения давления составляет:

$$\delta_1 = \frac{p_{\text{ид}} - p_{\text{ВдВ}}}{p_{\text{ВдВ}}} \approx 0{,}012 = 1{,}2\%.$$

При $V_2 = 0{,}4$ л $p_{\text{ВдВ}} = RT/(V-b) - a/V^2 \approx 5{,}56 \cdot 10^6$ Па, $p_{\text{ид}} = RT/V = 6{,}225 \cdot 10^6$ Па и относительная погрешность определения давления $\delta_2 \approx 0{,}12 = 12\%$.

12.8. $a = \dfrac{A V_1 V_2}{\nu^2 (V_2 - V_1)}$.

Решение. Дополнительное давление в газе, связанное с межмолекулярными силами притяжения, равно $p_{\text{доп}} = \nu^2 a/V^2$. При расширении газа совершается работа

$$A = -\int_{V_1}^{V_2} p_{\text{доп}}\,\mathrm{d}V = \int_{V_2}^{V_1} \frac{\nu^2 a}{V^2}\mathrm{d}V = \nu^2 a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right),$$

откуда определяем постоянную $a = \dfrac{A V_1 V_2}{\nu^2 (V_2 - V_1)}$.

12.9. Если бы расчет проводился в рамках модели идеального газа $p_{\text{ид}} = RT/V$, то внешние давления отличались бы в 5 раз.

Решение. В соответствии с уравнением Ван-дер-Ваальса внешнее давление одного моля газа равно $p = \dfrac{RT}{V-b} - \dfrac{a}{V^2}$.

В первом сосуде давление $p_1 = \dfrac{RT}{V_1 - b} - \dfrac{a}{V_1^2} \approx 6{,}55$ МПа, во втором сосуде $p_2 = \dfrac{RT}{V_2 - b} - \dfrac{a}{V_2^2} \approx 35{,}57$ МПа, то есть p_2 больше p_1 в $n = p_2/p_1 = 5{,}43$ раза.

Если бы расчет проводился в рамках модели идеального газа $p_{\text{ид}} = RT/V$, то внешние давления отличались бы в 5 раз.

12.10. $a \approx 0{,}28$ Па $\cdot$ м^6/моль^2; $b \approx 3{,}4 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

Решение. Запишем уравнения для давления газа Ван-дер-Ваальса при двух заданных в условии температур:

$$p_1 = \frac{RT_1}{V-b} - \frac{a}{V^2},\ p_2 = \frac{RT_2}{V-b} - \frac{a}{V^2}.$$

Вычитая почленно первое уравнение из второго, получаем:

$$p_2 - p_1 = \frac{R(T_2 - T_1)}{V-b},$$

откуда определяем постоянную b:

$$b = V - \frac{R(T_2 - T_1)}{p_2 - p_1} \approx 3{,}4 \cdot 10^{-5}\ \text{м}^3/\text{моль}.$$

Из первого уравнения выражаем постоянную a: $a = RT_1V^2/(V-b) - p_1V^2$ и, подставляя найденное выражение для b, находим:

$$a = \frac{V^2(p_2T_1 - p_1T_2)}{T_2 - T_1} \approx 0{,}28\ \text{Па} \cdot \text{м}^6/\text{моль}^2.$$

12.11. $\delta \approx 9{,}5\%$.

Решение. Так как можно считать, что $a \approx 0$, уравнение Ван-дер-Ваальса принимает вид: $p(V - \nu b) = \nu RT$. Без учета размеров молекул, т.е. при $b = 0$, для количества молей газа получим: $\nu = pV/RT$. С учетом b количество молей газа равно: $\nu' = pV/(bp + RT)$.

Относительная погрешность определения количества молей газа составит:

$$\delta = \frac{\nu - \nu'}{\nu'} = \frac{pb}{RT} \approx 9{,}5 \cdot 10^{-2} = 9{,}5\%.$$

12.12. $p_{\text{ВдВ}} = \dfrac{\rho RT}{\mu - \rho b} - \dfrac{\rho^2 a}{\mu^2} = 7{,}2 \cdot 10^6\ \text{Па}$;

$$p_{\text{ид}} = \frac{\rho RT}{\mu} = 22{,}6 \cdot 10^6\ \text{Па}.$$

12.13. $T_{\text{ВдВ}} = \dfrac{1}{\rho R}\left(p + \dfrac{\rho^2 a}{\mu^2}\right)(\mu - \rho b) \approx 278\ \text{К}$; $T_{\text{ид}} = \dfrac{p\mu}{\rho R} \approx 270\ \text{К}$.

12.14. $A_{12}=\left(p_1+\left(\frac{m}{\mu}\right)^2\cdot\frac{a}{V_1^2}\right)\left(V_1-\frac{m}{\mu}b\right)\ln\frac{V_2-(m/\mu)b}{V_1-(m/\mu)b}-$

$-\left(\frac{m}{\mu}\right)^2 a\left(\frac{1}{V_1}-\frac{1}{V_2}\right)\ldots$

Решение. Работа газа по расширению равна

$$A_{12}=\int_{V_1}^{V_2}\left(\frac{\nu RT}{V-\nu b}-\frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\mathrm{d}V=\nu RT\ln\frac{V_2-\nu b}{V_1-\nu b}-\nu^2 a\left(\frac{1}{V_1}-\frac{1}{V_2}\right).$$

Из уравнения Ван-дер-Ваальса определяем температуру T в начальный момент, которая остается постоянной во время всего процесса: $T=\frac{1}{\nu R}\left(p_1+\nu^2\frac{a}{V_1^2}\right)(V_1-\nu b)$, где число молей $\nu=m/\mu$. Окончательно работа газа равна:

$$A_{12}=\left(p_1+\left(\frac{m}{\mu}\right)^2\cdot\frac{a}{V_1^2}\right)\left(V_1-\frac{m}{\mu}b\right)\ln\frac{V_2-(m/\mu)b}{V_1-(m/\mu)b}-$$

$$-\left(\frac{m}{\mu}\right)^2 a\left(\frac{1}{V_1}-\frac{1}{V_2}\right)..$$

12.15. $\Delta U=(m/\mu)^2\,a\,(1/V_1-1/V_2)=204$ Дж.

12.16. $Q=\nu RT\ln\frac{V_2-\nu b}{V_1-\nu b}=13{,}2$ кДж.

12.17. $\Delta U=\frac{C_V}{R}\left[\left(p+\frac{a}{V_2^2}\right)(V_2-b)-\left(p+\frac{a}{V_1^2}\right)(V_1-b)\right]-$

$-a\left(\frac{1}{V_2}-\frac{1}{V_1}\right).$

Решение. Внутренняя энергия одного моля газа Ван-дер-Ваальса равна $U(T,V) = C_V T - a/V$.

При изобарическом расширении изменение температуры газа составляет: $\Delta T = \dfrac{1}{R}\left[\left(p + \dfrac{a}{V_2^2}\right)(V_2 - b) - \left(p + \dfrac{a}{V_1^2}\right)(V_1 - b)\right]$. Изменение внутренней энергии составляет:

$$\Delta U = \frac{C_V}{R}\left[\left(p + \frac{a}{V_2^2}\right)(V_2 - b) - \left(p + \frac{a}{V_1^2}\right)(V_1 - b)\right] - a\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right).$$

12.18. $\Delta U = \dfrac{C_V}{R}(V - \nu b)(p_2 - p_1)$.

Решение. Из данных задачи можно определить начальную и конечную температуры газа: $T_{1,2} = \dfrac{1}{\nu R}\left(p_{1,2} + \dfrac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b)$.

Изменение внутренней энергия газа при постоянном объеме равно $\Delta U = \nu C_V \Delta T = \dfrac{C_V}{R}(V - \nu b)(p_2 - p_1)$.

12.19. $\left(p + a/V^2\right)(V - b)^{(R/C_V)+1} = \text{const}$.

Решение. В случае адиабатического процесса первое начало термодинамики имеет вид: $\mathrm{d}U + p\mathrm{d}V = 0$.

Для ван-дер-ваальсовского газа $U(T,V) = C_V T - a/V$ и $\mathrm{d}U = C_V \mathrm{d}T + (a/V^2)\,\mathrm{d}V$. Подставляя эти соотношения в уравнение первого начала термодинамики, получим $C_V \mathrm{d}T + \left(p + a/V^2\right)\mathrm{d}V = 0$. Согласно уравнению Ван-дер-Ваальса $\left(p + a/V^2\right)(V - b) = RT$, поэтому

$$C_V \mathrm{d}T + \frac{RT}{V - b}\mathrm{d}V = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\int \frac{\mathrm{d}T}{T} = -\frac{R}{C_V}\int \frac{\mathrm{d}V}{V - b} \;\rightarrow\; \ln T = -\frac{R}{C_V}\ln(V - b) + \text{const}.$$

Потенцируя последнее уравнение, получаем уравнение адиабаты в T–V-переменных: $T(V-b)^{R/C_V} = \text{const}$.

Чтобы получить уравнение адиабатического процесса в p-V переменных, выразим температуру T из уравнения Ван-дер-Ваальса и подставим в полученное уравнение. В итоге получим:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V-b)^{(R/C_V)+1} = \text{const}.$$

12.20. $\left(p + \dfrac{a}{V^2}\right)(V-b)^{1+R/(C_V-C)} = \text{const}.$

Решение. Запишем первое начало термодинамики в виде $\delta Q = C\mathrm{d}T$: $C\mathrm{d}T = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V$.

Для ван-дер-ваальсовского газа $U(T,V) = C_V T - a/V$ и $\mathrm{d}U = C_V\,\mathrm{d}T + (a/V^2)\,\mathrm{d}V$. Уравнение первого начала термодинамики принимает вид: $(C - C_V)\,\mathrm{d}T = \left(p + a/V^2\right)\mathrm{d}V$. Учитывая уравнение Ван-дер-Ваальса $\left(p + a/V^2\right)(V-b) = RT$, получим:

$$(C - C_V)\,\mathrm{d}T = \frac{RT}{V-b}\,\mathrm{d}V.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$(C - C_V)\int \frac{\mathrm{d}T}{T} = R\int \frac{\mathrm{d}V}{V-b} \;\rightarrow\; \ln T = \frac{R}{C - C_V}\ln(V-b) + \text{const}.$$

Потенцируя последнее уравнение, получаем уравнение политропы в T–V-переменных: $T(V-b)^{R/(C_V-C)} = \text{const}$.

Чтобы получить уравнение политропического процесса в p–V-параметрах, выразим температуру T из уравнения Ван-дер-Ваальса и подставим в полученное уравнение. В итоге получим:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V-b)^{1+R/(C_V-C)} = \text{const}.$$

12.21. $\Delta T \approx -3{,}25\ \text{K} < 0$.

Решение. Поскольку нет теплообмена и расширение происходит в пустоту (внешняя работа по расширению $A = 0$), то, согласно первому началу термодинамики, должна сохраняться внут-

ренняя энергия газа: $U_1(V_1,T_1)=U_2(V_2,T_2)$. С учетом формулы для внутренней энергии газа Ван-дер-Ваальса, $U=\nu C_V T-\nu^2 a/V$, получаем:

$$\nu C_V T_1-\nu^2\frac{a}{V_1}=\nu C_V T_2-\nu^2\frac{a}{V_2},\ \text{где}\ V_1=V_0,\ V_2=2V_0,$$

т.е. $\nu C_V T_1-\nu^2 a/V_0=\nu C_V T_2-\nu^2 a/(2V_0)$. Отсюда находим изменение температуры газа: $\Delta T=T_2-T_1=-\nu a/2C_V V_0\approx -3{,}25\ \text{К}<0$, то есть газ охлаждается.

12.22. $V=\dfrac{aV_1}{a-C_V V_1\Delta T}\approx 2{,}6\ \text{л}$.

12.23. $a=\dfrac{C_V\Delta T}{\nu\left(1/V_1-1/V_2\right)}\approx 0{,}329\ \text{Па}\cdot\text{м}^6/\text{моль}^2$.

12.24. $a\approx 0{,}133$ Па·м^6/моль^2.

Решение. Так как при расширении в пустоту работа не совершается, то

$$Q=\Delta U=U_2-U_1=C_V T-\frac{a}{V_2}-\left(C_V T-\frac{a}{V_1}\right)=a\left(\frac{1}{V_1}-\frac{1}{V_2}\right),$$

откуда $a=\dfrac{QV_1V_2}{V_2-V_1}\approx 0{,}133$ Па·м^6/моль^2.

12.25. $Q\approx 1550$ кДж.

Решение. Так как при расширении в пустоту работа не совершается, то подведенное количество теплоты $Q=\Delta U$ и равно

$$Q=\nu\left(C_V T_2-\frac{\nu a}{V_2}\right)-\nu\left(C_V T_1-\frac{\nu a}{V_1}\right)=\nu\left[C_V\left(T_2-T_1\right)+\nu a\left(\frac{1}{V_1}-\frac{1}{V_2}\right)\right].$$

Выражая температуру из уравнения Ван-дер-Ваальса:

$T=\dfrac{1}{\nu R}\left(p+\dfrac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(V-\nu b\right)$, находим:

$$Q=\frac{C_V}{R}\left[\left(p+\frac{\nu^2 a}{V_2^2}\right)(V_2-\nu b)-\left(p+\frac{\nu^2 a}{V_1^2}\right)(V_1-\nu b)\right]+\nu^2 a\left(\frac{1}{V_1}-\frac{1}{V_2}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\left[\left(p-\frac{\nu^2 a}{V_1V_2}\right)\Delta V+\frac{\nu^3 ab}{V_1^2V_2^2}\left(V_2^2-V_1^2\right)\right]+\frac{\nu^2 a}{V_1V_2}\Delta V\approx 1550\ \text{кДж},$$

где $\Delta V=V_2-V_1$.

12.26. $T=\frac{7}{3}T_0-\frac{\nu a}{9C_VV_0}$.

Решение. Так как при смешивании газов работа не совершается и процесс является адиабатическим, то полная внутренняя энергия всей системы сохраняется:

$$\nu C_VT_0+\left[2\nu C_V\cdot 3T_0-(2\nu)^2\frac{a}{3V_0}\right]=3\nu\,C_VT-(2\nu)^2\frac{a}{4V_0}.$$

Отсюда находим установившуюся температуру:

$$T=\frac{7}{3}T_0-\frac{\nu a}{9C_VV_0}.$$

12.27. $p=\frac{4R}{3V-4b}\left(T_1-\frac{a}{24C_VV}\right)-\frac{16a}{9V^2}$.

Решение. Так как процесс является адиабатическим, то полная внутренняя энергия всей системы сохраняется:

$$C_VT_1-\frac{a}{V}+3C_VT_1-\frac{3^2a}{2V}=4C_VT-4^2\frac{a}{3V}.$$

Следовательно, установившаяся температура $T=T_1-\frac{a}{24C_VV}$.

Установившееся давление определяем из уравнения Ван-дер-Ваальса:

$$p=\frac{4RT}{3V-4b}-\frac{4^2a}{(3V)^2}=\frac{4R}{3V-4b}\left(T_1-\frac{a}{24C_VV}\right)-\frac{16a}{9V^2}.$$

12.28. $T=\frac{T_1+T_2}{2}-\frac{a(V_2-V_1)^2}{2C_VV_1V_2(V_1+V_2)}\approx 319{,}5\ \text{К}$.

12.29. $p=\dfrac{\nu_0 R}{2V-\nu_0 b}\left[T_1-\dfrac{a(\nu_1-\nu_2)^2}{2C_V\nu_0 V}\right]-\dfrac{a\nu_0^2}{4V^2}$, где $\nu_0=\nu_1+\nu_2$.

Решение. Запишем условие неизменности внутренней энергии газов:

$$\left(\nu_1 C_V T_1-\frac{\nu_1^2 a}{V}\right)+\left(\nu_2 C_V T_1-\frac{\nu_2^2 a}{V}\right)=(\nu_1+\nu_2)\,C_V T-\frac{(\nu_1+\nu_2)a}{2V},$$

откуда определяем установившуюся температуру:

$$T=T_1-\frac{a(\nu_1-\nu_2)^2}{2C_V(\nu_1+\nu_2)V}.$$

В результате смешивания газов изменилось среднее расстояние между молекулами и, как следствие, потенциальная энергия их взаимодействия возросла:

$$\Delta U_{\text{пот}}=U_{\text{пот}}^{\text{кон}}-U_{\text{пот}}^{\text{нач}}=-(\nu_1+\nu_2)^2\cdot\frac{a}{2V}-\left[-\frac{\nu_1^2 a}{V}-\frac{\nu_2^2 a}{V}\right]=$$

$$=\frac{a}{2V}\left[2\nu_1^2+2\nu_2^2-(\nu_1+\nu_2)^2\right]=\frac{a}{2V}(\nu_1-\nu_2)^2>0.$$

Так как полная внутренняя энергия в итоге осталась прежней, то кинетическая энергия молекул уменьшилась, а следовательно, уменьшилась и температура газа.

Установившееся давление определяем из уравнения Ван-дер-Ваальса:

$$p=\frac{\nu_0 R}{2V-\nu_0 b}\left[T_1-\frac{a(\nu_1-\nu_2)^2}{2C_V\nu_0 V}\right]-\frac{a\nu_0^2}{4V^2},\ \text{где}\ \nu_0=\nu_1+\nu_2.$$

12.30. $T=\dfrac{\nu_1 C_{V1}T_1+\nu_2 C_{V2}T_2}{\nu_1 C_{V1}+\nu_2 C_{V2}}-\dfrac{a(\nu_1 V_2-\nu_2 V_1)^2}{V_1V_2(V_1+V_2)(\nu_1 C_{V1}+\nu_2 C_{V2})}$;

$$p=\frac{(\nu_1+\nu_2)RT}{V_1+V_2-(\nu_1+\nu_2)b}-\frac{a(\nu_1+\nu_2)^2}{(V_1+V_2)^2}.$$

12.31. $\Delta S=\nu\left(C_V\ln\dfrac{T}{T_0}+R\ln\dfrac{V-\nu b}{V_0-\nu b}\right)$.

Решение. Согласно термодинамическому определению энтропии: $\mathrm{d}S_{\text{ВдВ}} = \dfrac{\delta Q}{T} = \dfrac{1}{T}\left(\mathrm{d}U + p\mathrm{d}V\right)$.

Используя формулу для внутренней энергии ν молей ван-дер-ваальсовского газа, $U(T,V) = \nu C_V T - \nu^2 a/V$ и выражая p из уравнения Ван-дер-Ваальса: $p = \nu RT/(V-\nu b) - \nu^2 a/V^2$, получаем:

$$\mathrm{d}S_{\text{ВдВ}} = \frac{1}{T}\left(\mathrm{d}U + p\mathrm{d}V\right) = \frac{1}{T}\left[\mathrm{d}\left(\nu C_V T - \frac{\nu^2 a}{V}\right) + \left(\frac{\nu RT}{V-\nu b} - \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\mathrm{d}V\right] =$$

$$= \nu C_V \frac{\mathrm{d}T}{T} + \nu R \frac{\mathrm{d}V}{V-\nu b}.$$

Интегрируя полученное выражение при C_V = const, для изменения энтропии находим:

$$\Delta S = \nu\left(C_V \ln\frac{T}{T_0} + R\ln\frac{V-\nu b}{V_0-\nu b}\right).$$

12.32. $\Delta S_{\text{ВдВ}} = C_V \ln\dfrac{T_2}{T_1} + R\ln\dfrac{V_2-b}{V_1-b} \approx 10{,}4$ Дж/К;

$$\Delta S_{\text{ид}} = C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + R\ln\frac{V_2}{V_1} \approx 9{,}6 \text{ Дж/К}.$$

12.33. $\Delta S = 3R\ln\dfrac{nV-b}{V-b}$.

12.34. $\Delta S = 2C_V \ln\left(1 - \dfrac{a}{C_V V T_1}\right) + 2R\ln\dfrac{2(V-b)}{V-2b}$.

Решение. Температуру газа после его адиабатического расширения в пустоту найдем из условия сохранения внутренней энергии газа в этом процессе:

$\nu C_V T_1 - \dfrac{\nu^2 a}{V} = \nu C_V T_2 - \dfrac{\nu^2 a}{2V}$, откуда $T_2 = T_1 - \dfrac{\nu a}{2VC_V} = T_1 - \dfrac{a}{VC_V}$.

Используя формулу для изменения энтропии, полученную при решении задачи 12.31, получим:

$$\Delta S = 2C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + 2R\ln\frac{2V-2b}{V-2b} = 2C_V \ln\left(1-\frac{a}{C_V V T_1}\right) + 2R\ln\frac{2(V-b)}{V-2b}.$$

12.35. $\Delta F = \dfrac{a}{V_1} - \dfrac{a}{V_2} - RT\,\ln\dfrac{V_2-b}{V_1-b}.$

Решение. По определению свободной энергии Гельмгольца: $F = U - TS$. При изотермическом расширении газа дифференциал свободной энергии равен $\mathrm{d}F = \mathrm{d}(U-TS) = \mathrm{d}U - T\mathrm{d}S$, а её изменение в процессе составляет $\Delta F = \Delta U - T\Delta S$.

Изменение внутренней энергии одного моля газа в изотермическом процессе равно $\Delta U_{12} = U_2 - U_1 = a\left(1/V_1 - 1/V_2\right)$.

По формуле для изменения энтропии (см. решение задачи 12.31) $\Delta S = R\ln\dfrac{V_2-b}{V_1-b}$, откуда находим:

$$\Delta F = \Delta U - T\Delta S = \frac{a}{V_1} - \frac{a}{V_2} - RT\ln\frac{V_2-b}{V_1-b}.$$

12.36. $a \approx 0{,}136$ Па $\cdot$ м^6/моль^2; $b \approx 3{,}22\cdot10^{-5}$ м^3/моль.

Решение. Из уравнения состояния для одного моля вещества в критической точке $p_{\text{кр}}V_{\text{кр}} = (3/8)\nu RT_{\text{кр}}$ находим критический объем: $V_{\text{кр}} = \dfrac{3RT_{\text{кр}}}{8p_{\text{кр}}} \approx 9{,}67\cdot10^{-5}$м^3/моль.

Постоянные Ван-дер-Ваальса находим по формулам:

$$a = \frac{9}{8}RT_{\text{кр}}V_{\text{кр}} \approx 0{,}136\ \text{Па}\cdot\text{м}^6/\text{моль}^2;\ b = V_{\text{кр}}/3 \approx 3{,}22\cdot10^{-5}\ \text{м}^3/\text{моль}.$$

12.37. $\rho_{\text{кр}} = \dfrac{\mu}{V_{\text{кр}}} = \dfrac{8\mu p_{\text{кр}}}{3RT_{\text{кр}}} \approx 242$ кг/м^3.

12.38. $n_{\text{кр}} = \dfrac{8N_{\text{A}}p_{\text{кр}}}{3RT_{\text{кр}}} \approx 4{,}6\cdot10^{27}\ \text{м}^{-3}$.

12.39. $p_{\text{кр}} = a/\left(27b^2\right) \approx 1{,}27\cdot10^6$ Па; $T_{\text{кр}} = \dfrac{8a}{27Rb} \approx 32{,}7$ К.

12.40.

Газ	$V_{кр}$, 10^{-5} м^3	$p_{кр}$, МПа	$T_{кр}$, К
Гелий	7,08	0,225	5,11
Аргон	9,66	4,79	148
Азот	11,6	3,35	125
Кислород	9,51	5,01	153
CO_2	12,8	7,30	301
Хлор	16,9	7,62	412
Метан CH_4	12,8	4,59	189
Этан C_2H_6	19,3	4,88	302

12.41. $V_{кр} = 4{,}3$ л.

Решение. Запишем уравнение состояния для ν молей вещества в критической точке: $p_{кр}V_{кр} = \dfrac{3}{8}\nu RT_{кр}$.

Число молей воды равно $\nu = m/\mu$, поэтому наибольший объем, который может занимать вода в жидком состоянии, равен критическому:

$$V_{кр} = \frac{3}{8}\cdot\frac{mRT_{кр}}{\mu p_{кр}} \approx 4{,}3\cdot 10^{-3}\,(\text{м}^3) = 4{,}3\ \text{л}.$$

12.42. $\Delta T = 28{,}5$ К.

Решение. Воспользуемся законом соответственных состояний: $\left(\pi + 3/\varphi^2\right)\left(\varphi - 1/3\right) = 8\tau/3$, где приведенные параметры – $\pi = p/p_{кр}$, $\varphi = V/V_{кр}$ и $\tau = T/T_{кр}$.

По условию задачи давление газа остается постоянным ($p = p_{кр}$) и $\pi = p/p_{кр} = 1$; молярный объем газа увеличился в $n = 2$ раза, поэтому $\varphi = V/V_{кр} = 2$. Приведенную температуру находим из закона соответственных состояний:

$$\tau = \frac{1}{8}\left(\pi + \frac{3}{\varphi^2}\right)(3\varphi - 1),$$

откуда $T = \tau T_{кр} = \left(\pi + 3/\varphi^2\right)(3\varphi - 1)\,T_{кр}/8 = 332{,}5$ К.

Температура увеличилась на $\Delta T = T - T_{\text{кр}} = 28{,}5$ К.

12.43. В 3 раза.

Решение. По условию задачи объем газа остается постоянным ($V = V_{\text{кр}}$) и $\varphi = V/V_{\text{кр}} = 1$; температура газа увеличилась в $n = 1{,}5$ раза, следовательно, $\tau = T/T_{\text{кр}} = 1{,}5$. Приведенное давление $\pi = p/p_{\text{кр}}$ находим из закона соответственных состояний:

$$\left(\pi + \frac{3}{\varphi^2}\right)\left(\varphi - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}\tau \;\rightarrow\; \pi = \frac{p}{p_{\text{кр}}} = \frac{8\tau}{3\varphi - 1} - \frac{3}{\varphi^2} = 3,$$

т.е. давление увеличится в 3 раза.

12.44. $\dfrac{p}{p_{\text{кр}}} = \dfrac{8\tau}{3\varphi - 1} - \dfrac{3}{\varphi^2} = 2{,}45$, где $\varphi = V/V_{\text{кр}}$ и $\tau = T/T_{\text{кр}}$.

12.45. $\dfrac{T}{T_{\text{кр}}} = \dfrac{1}{8}\left(\pi + \dfrac{3}{\varphi^2}\right)(3\varphi - 1) = 3{,}33$.

12.46. В 1,5 раза.

12.47. *Решение.* Из уравнения критического состояния $p_{\text{кр}}V_{\text{кр}} = (3/8)\nu R T_{\text{кр}}$, где по условию задачи критический объем равен объему трубки V_0, находим число молей воды: $\nu = \dfrac{8 p_{\text{кр}} V_0}{3 R T_{\text{кр}}}$.

С другой стороны, $\nu = m/\mu = \rho V/\mu$. Приравнивая эти выражения, получаем: $\dfrac{V}{V_0} = \dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{\mu p_{\text{кр}}}{\rho R T_{\text{кр}}} \approx 0{,}19 \approx \dfrac{1}{5}$. т.е. водой при комнатной температуре нужно было бы заполнить приблизительно 1/5 часть трубки.

12.48. $\Delta T = b\Delta p/C_p$.

Решение. Подставляя $a = 0$ в формулу для дифференциального эффекта Джоуля – Томсона $\left(\dfrac{\partial T}{\partial p}\right)_H \approx \dfrac{1}{C_p}\left(\dfrac{2a}{RT} - b\right)$, получим:

$\left(\dfrac{\partial T}{\partial p}\right)_H = -\dfrac{b}{C_p} < 0$. Так как в процессе дросселирования давление уменьшается, то $\Delta T > 0$, то есть газ нагревается.

Интегрируя полученное выражение, находим изменение температуры в процессе Джоуля – Томсона: $\Delta T = -\dfrac{b}{C_p}\int\limits_{p}^{p-\Delta p} \mathrm{d}p = \dfrac{b\Delta p}{C_p}$.

12.49. $\Delta T \approx -\dfrac{2a\Delta p}{C_p RT}$.

Решение. Воспользуемся формулой для дифференциального эффекта Джоуля – Томсона в случае газа Ван-дер-Ваальса:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{\dfrac{2a}{RT}\left(1-b/V\right)^2 - b}{C_p\left[1-\dfrac{2a}{RTV}\left(1-b/V\right)^2\right]},$$

Полагая $b = 0$, получим:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{2a}{C_p\left(RT-2a/V\right)}.$$

Выразим температуру газа из уравнения Ван-дер-Ваальса для одного моля при $b = 0$: $\left(p + a/V^2\right)V = RT$, и подставив её в полученную ранее формулу, находим:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{2a}{C_p\left(pV + a/V - 2a/V\right)} = \frac{2a/V}{C_p\left(p - a/V^2\right)}.$$

При $p > a/V^2$, когда внешнее давление p превосходит дополнительное давление a/V^2, $\left(\partial T/\partial p\right)_H > 0$. Так как в процессе дросселирования давление уменьшается, то $\Delta T < 0$, то есть газ охлаждается.

Интегрируя, получаем изменение температуры ΔT:

$$\Delta T = \frac{2a}{C_p\left(RT-2a/V\right)}\int\limits_{p}^{p-\Delta p}\mathrm{d}p \approx -\frac{2a\Delta p}{C_p RT}.$$

12.50. $T_i = \dfrac{27}{4} T_{\text{кр}}$.

Решение. Критическая температура $T_{\text{кр}}$ газа Ван-дер-Ваальса и температура инверсии T_i связаны с постоянными Ван-дер-Ваальса соотношениями: $T_{\text{кр}} = \dfrac{8a}{27Rb}$, $T_i = \dfrac{2a}{Rb}$. Отсюда получаем:

$$T_i = \frac{2a}{Rb} = \frac{2}{R} \cdot \frac{27R}{8} T_{\text{кр}} = \frac{27}{4} T_{\text{кр}}.$$

12.51. *Решение.*, Воспользовавшись связью температур инверсии и критической температуры (см. решение задачи 12.50), находим температуру инверсии водорода: $T_i = (27/4) T_{\text{кр}} \approx 224$ К.

Следовательно, водород будет охлаждаться в процессе дросселирования при исходной температуре $T < 224$ К.

12.52. $T_1 < \dfrac{2a}{bR}\left(1 - \dfrac{b}{V_1}\right) = 30{,}4$ К.

12.53. Так как исходная температура газа меньше его температуры инверсии $T_i = (27/4) T_{\text{кр}} \approx 844$ К, азот будет охлаждаться.

12.54. а) $\Delta T \approx -0{,}2$ К; *б*) $\Delta T \approx +0{,}25$ К.

Решение. Из уравнения состояния идеального газа определяем приближенно молярный объем газа: $V_1 \approx RT_1/p_1$. Используем формулу для интегрального эффекта Джоуля – Томсона:

$$\Delta T \approx \frac{1}{C_p}\left(\frac{RT_1 b}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1}\right).$$

а) При $T_1 = 173$ К $V_1 \approx \dfrac{RT_1}{p_1} \approx 1{,}44 \cdot 10^{-3}\text{м}^3$ и $\Delta T \approx -0{,}2$ К.

б) При $T_2 = 300$ К $V_2 \approx \dfrac{RT_2}{p_1} \approx 2{,}49 \cdot 10^{-3}\text{м}^3$, $\Delta T \approx +0{,}25$ К.

12.55. $T_2 = T_1 + \dfrac{\Delta p}{C_p}\left(\dfrac{2a}{RT} - b\right) \approx 297{,}5\ ^\circ\text{C}$.

12.56. $T_i = \dfrac{2a}{Rb}$. CO_2: $T_i = 2030$ К; водород: $T_i = 220$ К; $T_i = 1000$ К.

12.57. $\Delta T \approx \dfrac{\Delta p}{C_p}\left(\dfrac{2a}{RT} - b\right)$. CO_2: $\Delta T = -0{,}08$ К; водород: $\Delta T = +0{,}0024$ К; аргон: $\Delta T = -0{,}036$ К.

12.58. *Решение.* Начальное давление газа определяем из уравнения Ван-дер-Ваальса: $p_1 = \dfrac{RT}{V - b} - \dfrac{a}{V^2}$. Изменение температуры газа находим по формуле интегрального эффекта Джоуля – Томсона: $\Delta T = \dfrac{\Delta p}{C_p}\left(\dfrac{2a}{RT} - b\right)$.

В случае CO_2 $p_1 = 7{,}4 \cdot 10^6$ Па и $\Delta T = -63$ К; в случае водорода $p_1 = 3{,}15 \cdot 10^7$ Па и $\Delta T = +7{,}6$ К; в случае аргона $p_1 = 1{,}9 \cdot 10^7$ Па и $\Delta T = -69$ К.

12.59. *Решение.* Поскольку энтропия является функцией состояния, для вычисления её изменения заменим реальный процесс Джоуля – Томсона адиабатическим процессом, переводящим газ в то же конечное состояние. Так как при дросселировании энтальпия газа не изменяется, $\mathrm{d}H(S, p) = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p = 0$, справедливо неравенство:

$\left(\partial S/\partial p\right)_H = -V/T < 0$. Поскольку давление в процессе Джоуля – Томсона понижается, то энтропия возрастает.

12.60. *Решение.* В процессе Джоуля – Томсона (дросселировании) изменение температуры определяется формулой:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{V}{C_p}\left[\frac{T}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - 1\right].$$

При адиабатическом обратимом расширении газа его энтропия остается постоянной ($\mathrm{d}S = 0$), изменение энтальпии в естественных переменных при адиабатическом процессе равно

$$\mathrm{d}H_S = (T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p)_S = V\mathrm{d}p\,.$$

Поскольку теплоемкость равна $C_p = \left(\partial H/\partial T\right)_p$, используем выражение для дифференциала энтальпии $\mathrm{d}H$ в естественных переменных (S, p) и в переменных (T, p), удобных для поиска производной $\left(\partial T/\partial p\right)_S$. Дифференциал энтальпии в переменных (T, p) имеет вид:

$$\mathrm{d}H = C_p\mathrm{d}T + \left[V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right]\mathrm{d}p\,.$$

Приравнивая выражения для $\mathrm{d}H$ в разных переменных, получаем: $V\mathrm{d}p = C_p\mathrm{d}T + \left[V - T\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right]\mathrm{d}p$. Отсюда искомый коэффициент: $\left(\dfrac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \dfrac{T\left(\partial V/\partial T\right)_p}{C_p} = TV\dfrac{\alpha_p}{C_p}$.

Следовательно, $\left(\dfrac{\partial T}{\partial p}\right)_S - \left(\dfrac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \dfrac{V}{C_p} > 0$, т.е. понижение температуры при адиабатическом обратимом расширении больше, чем при дросселировании (при одинаковых начальном и конечном давлениях газа).

§13. Поверхностные явления

13.1. $f_{\mathrm{ex}} = 2(\sigma_2 - \sigma_1)l$.

Решение. Согласно силовому определению σ, сила поверхностного натяжения на границе соприкосновения пленки с планкой пропорциональна длине планки l. Поскольку у пленки две поверхности, то модуль силы поверхностного натяжения равен $f = 2\sigma l$, причем силы со стороны пленок будут направлены перпендикулярно планке в противоположные стороны. Суммарная сила по-

верхностного натяжения, действующая на планку, равна $f = 2(\sigma_2 - \sigma_1)\, l$ и направлена в сторону 2-й пленки.

Чтобы удержать планку, к ней надо приложить внешнюю силу, направленную против силы поверхностного натяжения *f*, т.е. в сторону пленки 1, и равную ей по величине: $f_{\text{ex}} = 2(\sigma_2 - \sigma_1)l$.

13.2. $d \approx 2$ мм.

Решение. На рамку действуют сила тяжести $m\mathbf{g}$ и сила поверхностного натяжения пленки $\mathbf{f}$, которые в состоянии равновесия перекладины уравновешивают друг друга: $\mathbf{f} + m\mathbf{g} = 0$.

Сила поверхностного натяжения равна $f = 2\sigma l$ (поскольку у пленки две поверхности), а $mg = \rho V g = \rho g\left(\pi d^2 l/4\right)$, где d – диаметр перекладины, l – её длина. Приравнивая модули этих сил, получаем:

$2\sigma l = \rho g\left(\pi d^2 l/4\right)$, откуда $d = \sqrt{8\sigma/(\pi\rho g)} \approx 2$ мм.

13.3. $l = A/(2\sigma\Delta x) \approx 5{,}8$ см.

Решение. Внешняя сила f_{ex} совершает работу против силы поверхностного натяжения f и равна ей по величине: $f_{\text{ex}} = -f$. Поскольку у мыльной пленки две поверхности, сила поверхностного натяжения равна $f = -2\sigma l$ (знак минус означает, что сила направлена против перемещения перемычки).

Работа внешней силы по перемещению перемычки на расстояние Δx $\delta A_{ex\,T} = f_{ex}\mathrm{d}x = 2\sigma l\Delta x = \sigma\Delta S$, где $\Delta S = 2l\Delta x$ – изменение площади поверхности мыльной пленки (с учетом обеих сторон). Отсюда находим: $l = A/(2\sigma\Delta x) \approx 5{,}8$ см.

13.4. $d = \sqrt{\dfrac{6\sigma}{\rho g}}$.

Решение. Давление в капле будет отличаться от атмосферного на величину давления Лапласа $\Delta p = 2\sigma/r = 4\sigma/d$. Поскольку горизонтальные составляющие сил поверхностного натяжения, действующие на участки поверхности капли, в силу симметрии задачи в сумме равны нулю, сила поверхностного натяжения, действую-

щая на каплю, будет направлена вверх, к центру кривизны поверхности капли. Модуль этой силы равен: $f_\sigma = \Delta p \cdot \pi r^2 = 2\sigma\pi r = \sigma\pi d$.

Эта сила должна уравновешивать силу тяжести: $mg = \sigma\pi d$.

Выражая массу капли через плотность воды ρ: $m = \rho \cdot 4\pi r^3/3$, получаем: $4\pi(d/2)^3\rho g/3 = \pi\sigma d$, откуда находим диаметр капли:

$$d = \sqrt{\frac{6\sigma}{\rho g}}.$$

13.5. $d_2 \approx 4{,}5$ мм.

Решение. Чтобы капля оторвалась, надо разорвать поверхностную пленку длиной $l = 2\pi r_1 = \pi d_1$ по окружности соприкосновения капли и капилляра. Для этого надо приложить силу $f = \sigma\pi d_1$, в качестве которой выступает вес капли: $mg = \sigma\pi d_1$.

Пренебрегая небольшим отличием объема капли от объема шара (поскольку диаметр капилляра мал), выразим массу капли через ее объем и плотность воды: $m = \rho V \cong (4/3)\pi r_2^3\rho$. Предыдущее уравнение при этом принимает вид:

$(1/6)\pi d_2^3\rho g = \sigma\pi d_1$, откуда $d_2 = \sqrt[3]{\dfrac{6\sigma d_1}{\rho g}} \approx 4{,}5$ мм.

13.6. $\Delta l = \dfrac{4N\sigma}{\rho g d} \approx 15$ см.

Решение. Чтобы капля оторвалась, надо разорвать поверхностную пленку длиной $l = 2\pi r = \pi d$. Для этого надо приложить силу $f = \sigma\pi d$, в качестве которой выступает вес капли $mg = \sigma\pi d$, откуда $m = \sigma\pi d/g$. Масса всех оторвавшихся капель $M = N\sigma\pi d/g$.

С другой стороны, масса оторвавшихся капель равна уменьшению массы проволоки: $M = (\pi d^2/4)\rho \cdot \Delta l$. Приравнивая полученные выражения, находим:

$$\frac{N\sigma\pi d}{g} = \frac{\pi d^2}{4}\rho \cdot \Delta l, \text{ откуда } \Delta l = \frac{4N\sigma}{\rho g d} \approx 15 \text{ см}.$$

13.7. $\sigma = \dfrac{Mg}{\pi N d} \approx 22{,}2 \cdot 10^{-3}$ Н/м.

13.8. $p \approx 1{,}7 \cdot 10^5$ Па.

Решение. На глубине h давление равно $p_h = p_0 + \rho g h$, где ρ – плотность воды. Давление в пузырьке будет отличаться от внешнего на величину давления Лапласа $\Delta p = 2\sigma/r$. Следовательно, давление в пузырьках воздуха равно $p = p_0 + \rho g h + 2\sigma/r \approx 1{,}7 \cdot 10^5$ Па.

13.9. $\rho/\rho_0 \approx 2{,}8$.

Решение. Давление в пузырьке на глубине h равно $p = p_0 + \rho_1 g h + 2\sigma/r$, где ρ_1 – плотность воды.

Воздух, находящийся в пузырьке в объеме V, при давлении p_0 занимал бы объем V_0. Если температура остается постоянной, из уравнения Менделеева–Клапейрона получаем: $pV = p_0 V_0$, откуда следует, что плотность воздуха ρ в пузырьке на глубине h и плотность воздуха ρ_0 при давлении p_0 связаны соотношением:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{V_0}{V} = \frac{p}{p_0} = \frac{p_0 + \rho_1 g h + 2\sigma/r}{p_0} \approx 2{,}8 .$$

13.10. $h = \dfrac{p_0(\rho/\rho_0 - 1) - 4\sigma/d}{\rho_1 g} \approx 4{,}0$ м,

где $\rho_0 = \mu p_0/(RT) \approx 1{,}19$ кг/м^3 – плотность воздуха около поверхности воды, $\rho_1 = 10^3$ кг/м^3 – плотность воды, μ – молярная масса воздуха.

13.11. $h \approx 2$ м.

Решение. Давления воздуха в пузырьке на глубине h и вблизи поверхности воды равны соответственно

$$p_1 = p_0 + \rho g h + 4\sigma/d \quad \text{и} \quad p_2 = p_0 + 4\sigma/d .$$

Так как температура воздуха в пузырьке не меняется, по закону Бойля–Мариотта можно записать:

$$\left(p_0 + \rho g h + \frac{4\sigma}{d}\right) \cdot \frac{\pi d^3}{6} = \left(p_0 + \frac{4\sigma}{nd}\right) \cdot \frac{\pi (nd)^3}{6} ,$$

откуда находим: $h = \dfrac{p_0\left(n^3 - 1\right) + 4\sigma\left(n^2 - 1\right)/d}{\rho g} \approx 2$ м.

13.12. $r_2 \approx \left(\dfrac{p_0 + \rho g h + 2\sigma/r_1}{p_0 + 2\sigma/r_{2_0}} \right)^{1/3} r_1 \approx 0{,}423$ мм.

Решение. Так как температура газа в пузырьке не меняется, по закону Бойля–Мариотта можно записать:

$$\left(p_0 + \rho g h + \frac{2\sigma}{r_1} \right) \cdot \frac{4\pi r_1^3}{3} = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{r_2} \right) \cdot \frac{4\pi r_2^3}{3} .$$

Оценим добавочное лапласовское давление $\Delta p = 2\sigma/r$. Когда пузырек находится на дне, $\Delta p_1 = 2\sigma/r_1 = 3{,}65 \cdot 10^3$ Па $<< p_0$. На поверхности водоема $r_2 > r_1$ и $\Delta p_2 << p_0$, поэтому в первом приближении можно пренебречь давлением Лапласа. Тогда записанное уравнение принимает вид: $\left(p_0 + \rho g h\right) r_1^3 = p_0 r_{2_0}^3$, откуда

$$r_{2_0} \approx \left(1 + \frac{\rho g h}{p_0} \right)^{1/3} r_1 \approx 0{,}00424 \text{ мм} .$$

Найденное значение можно уточнить, используя метод последовательных приближений. В первом приближении

$$r_2 \approx \left(\frac{p_0 + \rho g h + 2\sigma/r_1}{p_0 + 2\sigma/r_{2_0}} \right)^{1/3} r_1 \approx 0{,}423 \text{ мм} .$$

13.13. $h \approx 20$ см.

Решение. Ртуть образует под отверстием каплю полусферической формы, давление в которой отличается от атмосферного на величину давления Лапласа $\Delta p = 4\sigma/d$.

При толщине h слоя ртути она оказывает на дно давление $p_h = \rho g h$. Когда ртуть не выливается из отверстия, это гидравлическое давление компенсируется давлением Лапласа: $\rho g h = 4\sigma/d$, откуда находим: $h = 4\sigma/(\rho g d) \approx 20$ см.

13.14. $r_2 - r_1 \approx 0{,}13$ мм.

Решение. Пусть внешнее давление равно p_0, радиус кривизны поверхности капли в её верхней точке r_1, а в нижней r_2. Давление

внутри капли в её верхней точке $p_1 = p_0 + 2\sigma/r_1$, а в нижней $p_2 = p_0 + 2\sigma/r_2 + \rho g h$, где ρ – плотность воды. Так как капля падает равномерно, эти давления равны друг другу:

$$p_0 + \frac{2\sigma}{r_1} = p_0 + \frac{2\sigma}{r_2} + \rho g h ,$$

откуда находим: $2\sigma(r_2 - r_1)/(r_1 r_2) = \rho g h$.

Считая в первом приближении $r_1 \approx r_2 = h/2$, для разности радиусов кривизны получаем: $r_2 - r_1 \approx \dfrac{\rho g h^3}{8\sigma} = 0{,}13$ мм.

13.15. $h = \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{m}{\pi a^2} - \dfrac{2\sigma}{gR}\right)$.

Решение. Избыточное давление под верхней поверхностью капли равно $\Delta p = 2\sigma/R$, а вблизи плоскости – $\Delta p = 2\sigma/R + \rho g h$. Оно уравновешивается давлением со стороны плоскости, созданным лежащей на ней каплей: $\dfrac{2\sigma}{R} + \rho g h = \dfrac{mg}{\pi a^2}$. Отсюда высота капли:

$$h = \frac{1}{\rho}\left(\frac{m}{\pi a^2} - \frac{2\sigma}{gR}\right).$$

13.16. *а)* $p_1 = p_0 + 2\sigma\left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R-h}\right)$; *б)* $p_2 = p_0 + 2\sigma/R$.

13.17. $p_x = \alpha^3 p_0 + 4\sigma\alpha(\alpha^2 - 1)/r$.

Решение. Запишем уравнение изотермического процесса $pV = \text{const}$ для воздуха в мыльном пузыре: $p_{i1} \cdot (4/3)\pi r^3 = p_{i2} \cdot (4/3)\pi (r/\alpha)^3$, откуда находим: $p_{i2} = \alpha^3 p_{i1}$.

Давление внутри пузыря p_i больше внешнего давления p_e на величину $p_i - p_e = 4\sigma/r$ (с учетом внешней и внутренней поверхностей пузыря). Получаем систему уравнений:

$$p_0 = p_{i1} - \frac{4\sigma}{r};\ p_x = p_{i2} - \frac{4\sigma}{(r/\alpha)} = \alpha^3 p_{i1} - \frac{4\sigma\alpha}{r},$$

откуда определяем давление p_x наружного воздуха после его сжатия: $p_x = \alpha^3 p_0 + 4\sigma\alpha\left(\alpha^2 - 1\right)/r$.

13.18. $R = \dfrac{\sigma}{\rho g h}$.

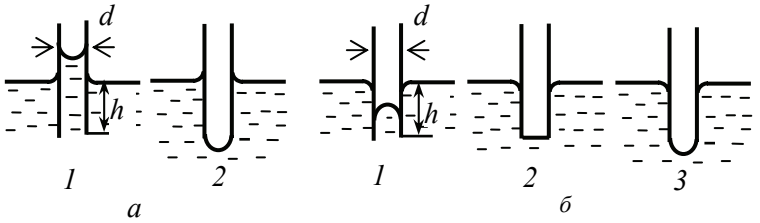


Рис. О.13.19.

13.19. $\Delta p = \rho g h + 4\dfrac{\sigma}{d}$.

Решение. Положения уровня жидкости в капилляре приведены на рис. О.13.19 (*а* – для смачивающей, *б* – для несмачивающей). Наибольшему давлению воздуха в капилляре соответствуют положения *1* на О.13.19 *а* и *3* на рис. О.13.19 *б*. Разность между давлением в капилляре и атмосферным давлением для этих случаев равна: $\Delta p = \rho g h + 4\sigma/d$.

13.20. $\sigma = \dfrac{1}{4}\rho g h d \approx 0{,}021$ Н/м.

13.21. $\sigma_2 = \sigma_1 \dfrac{\rho_2 \Delta h_2}{\rho_1 \Delta h_1} \approx 0{,}0225$ Н/м.

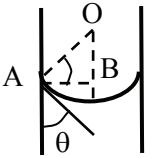


Рис. О.13.22.

13.22. $\theta = \arccos\left(\rho g r h/\sigma\right)$.

Решение. Радиус кривизны поверхности жидкости определяется краевым углом θ и радиусом капилляра r (рис. О.13.22). Угол $\angle OAB = \theta$ (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами). Из ΔOAB находим: $R = \dfrac{AB}{\cos\theta} = \dfrac{r}{\cos\theta}$.

Таким образом, жидкость в капилляре поднимется на высоту $h = \sigma\cos\theta/(\rho g r)$, откуда находим: $\theta = \arccos\left(\rho g r h/\sigma\right)$.

13.23. $h = -\dfrac{2\sigma\cos\theta}{\rho g d}$.

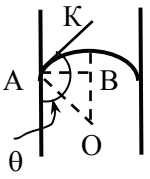


Рис. О.13.23.

Решение. Давления над и под искривленной поверхностью жидкости между пластинами отличаются на величину лапласовского давления, причем давление со стороны центра кривизны больше. Давление Лапласа равно: $\Delta p = \sigma\left(1/R + 1/\infty\right) = \sigma/R$, где R – радиус кривизны в направлении, перпендикулярном пластинам, а в направлении вдоль пластин радиус кривизны бесконечно большой.

Так как давление над жидкостью между пластинами равно атмосферному, а давление под поверхностью жидкости вблизи её верхней точки равно давлению внешней жидкости на глубине h, получаем: $\rho g h = \sigma/R$.

Радиус кривизны поверхности жидкости определяется краевым углом θ и расстоянием d между пластинами (рис. О.13.23). Угол $\angle OAB = \pi - \theta$ (как углы с взаимно перпендикулярными сторонами). Из ΔOAB находим: $R = \dfrac{AB}{\cos(\pi - \theta)} = -\dfrac{d}{2\cos\theta}$, т. е. жидкость между пластинами опустится на $h = -\dfrac{2\sigma\cos\theta}{\rho g d}$.

13.24. $h = 2\sigma/(l\rho g\varphi)$

Решение. На рис. О.13.24 изображен профиль установившегося в клине мениска жидкости. Направим ось Y вертикально вверх вдоль ребра клина ось X – горизонтально вдоль поверхности клина. Высоту поднятия жидкости h будем отсчитывать по оси Y от уровня жидкости вне клина.

При полном смачивании первый радиус кривизны r_1 поверхности на расстоянии x от ребра клина равен половине расстояния d между пластинами, которое составляет $d = 2x\,\mathrm{tg}(\varphi/2)$. Если угол φ мал, то $d \approx x\varphi$ и соответственно $r_1 = x\varphi/2$.

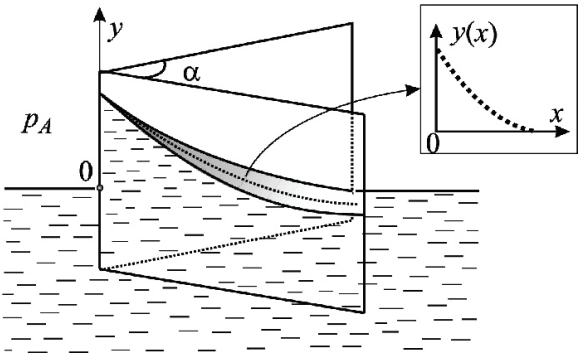


Рис. О.13.24.

Второй радиус кривизны r_2 при малом угле φ значительно превосходит r_1. Поэтому при вычислении дополнительного давления Лапласа над искривленной поверхностью жидкости можно использовать приближение:

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right) \approx \frac{\sigma}{r_1} = \frac{2\sigma}{x\varphi}.$$

Давление Лапласа Δp уравновешивается гидростатическим давлением столба жидкости между пластинами: $2\sigma/(x\varphi) = \rho g h$, откуда находим высоту поднятия жидкости на расстоянии l от ребра клина: $h = 2\sigma/(l\rho g\varphi)$.

13.25. $d = \dfrac{4\sigma\cos\theta(l-h)}{p_0 h + \rho g h(l-h)}$.

Решение. Считаем процесс изотермическим. Для воздуха в капилляре над уровнем жидкости запишем уравнение изотермического процесса pV = const: $Slp_0 = S(l-h)p_к$, где S – площадь поперечного сечения капилляра, $p_к$ – давление воздуха в капилляре. Отсюда $p_к = p_0 l/(l-h)$.

Давление над мениском жидкости в капилляре (со стороны центра кривизны) больше давления в жидкости непосредственно под ним на величину лапласовского давления $\Delta p = (4\sigma\cos\theta)/d$. С учетом гидростатического давления запишем, что давление в капилляре на уровне внешней жидкости равно атмосферному:

$$p_0 = p_к - \Delta p + \rho g h = p_0 \frac{l}{l-h} - \frac{4\sigma\cos\theta}{d} + \rho g h,$$

откуда находим диаметр капилляра: $d = \dfrac{4\sigma\cos\theta(l-h)}{p_0 h + \rho g h (l-h)}$.

13.26. $l_1 \approx 17{,}3$ см.

Решение. Ртуть не смачивает стекло, поэтому мениск ртути в капилляре будет иметь вид полусферы, находящейся внутри капилляра. Давление под мениском ртути (со стороны центра кривизны) больше давления воздуха непосредственно рядом с ним на величину лапласовского давления $\Delta p = 4\sigma/d$, поэтому ртуть частично втянется внутрь капилляра, и столбик воздуха будет иметь длину l_1. С учетом гидростатического давления запишем:

$$p_1 = p_0 + \rho g h + 4\frac{\sigma}{d}.$$

Для воздуха в капилляре запишем уравнение изотермического процесса $pV = \text{const}$: $Sl_0 p_0 = Sl_1 p_1$, где S – площадь поперечного сечения капилляра. Подставляя значение p_1, получаем: $l_0 p_0 = l_1(p_0 + \rho g h + 4\sigma/d)$, откуда определяем длину столбика воздуха:

$$l_1 = \frac{l_0 p_0}{p_0 + \rho g h + 8\sigma/d} \approx 17{,}3 \text{ см}.$$

13.27. $h = \dfrac{2\sigma\cos\theta}{\rho(g+a)d}$.

13.28. $m = 2\pi\sigma r/g \approx 12$ мг.

13.29. $\omega = \dfrac{2}{l}\sqrt{\dfrac{\sigma}{\rho r}}$.

Решение. Направим ось X вдоль капилляра, начало отсчета поместим в его середине. Выделим участок жидкости длиной dx на расстоянии x от оси вращения. При вращении капилляра на выделенный участок жидкости в системе координат, связанной с капилляром, будет действовать центробежная сила

$$\mathrm{d}F_{\text{цб}} = \mathrm{d}m\,\omega^2 x = \rho\pi r^2\,\mathrm{d}x\,\omega^2 x,$$

а полная центробежная сила, действующая на всю жидкость, равна:

$$F_{\text{цб}} = \int_0^l \pi\rho r^2\omega^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi\rho r^2\omega^2 l^2.$$

На жидкость также действует сила поверхностного натяжения на конце капилляра $F_\sigma = 2\pi r\sigma$ (см. решение задачи 13.4). В момент, когда жидкость начнет вытекать из капилляра, эти силы по модулю равны друг другу $\rho r^2\omega^2 l^2/2 = 2\pi\sigma r$, откуда находим искомую частоту вращения: $\omega = \dfrac{2}{l}\sqrt{\dfrac{\sigma}{\rho r}}$.

13.30. $h = \dfrac{2\sigma}{\rho g\left(r_1 - r_2\right)} \approx 7{,}4$ см.

13.31. $h = \dfrac{R}{\alpha}\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{4\sigma\,\alpha}{\rho g R^2}}\right)$.

Решение. Жидкость поднимется на высоту h. Обозначим r' радиус окружности, по которой жидкость касается капилляра на этой высоте (см. рис. О.13.31). Давление Лапласа над искривленной поверхностью жидкости равно гидростатическому давлению, создаваемому поднявшейся жидкостью: $2\sigma / r' = \rho g h$. Отсюда находим высоту поднятия жидкости: $h = \dfrac{2\sigma}{\rho g r'}$.

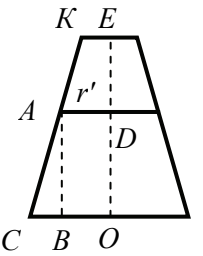


Рис. О.13.31.

На рис. О.13.31 изображен в разрезе конический капилляр. $KE = r$, $CO = R$, $AD = r'$, $\angle CAB = \alpha/2$. Из ΔABC получаем: $R - r' = h\,\mathrm{tg}(\alpha/2)$, откуда $r' = R - h\,\mathrm{tg}(\alpha/2)$. Подставляя это выражение в записанное ранее уравнение для h, получаем:

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g\left(R - h\,\mathrm{tg}(\alpha/2)\right)}.$$

Перепишем полученное соотношение в виде квадратного уравнения относительно h:

$$h^2 - \frac{R}{\mathrm{tg}(\alpha/2)} + \frac{2\sigma}{\rho g \mathrm{tg}(\alpha/2)} = 0 .$$

Решая это уравнение, находим:

$$h = \frac{R}{2\mathrm{tg}(\alpha/2)}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{8\sigma\ \mathrm{tg}(\alpha/2)}{\rho g R^2}}\right).$$

С учетом малости угла α окончательно получаем:

$$h = \frac{R}{\alpha}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\sigma\,\alpha}{\rho g R^2}}\right).$$

13.32. $h = \dfrac{r}{2\mathrm{tg}(\alpha/2)}\left(\sqrt{1 + \dfrac{8\sigma\ \mathrm{tg}(\alpha/2)}{\rho g r^2}} - 1\right) \approx \dfrac{r}{\alpha}\left(\sqrt{1 + \dfrac{4\sigma\alpha}{\rho g r^2}} - 1\right).$

13.33. $\Delta h = \dfrac{4\sigma\cos\theta\left(d_2 - d_1\right)}{\rho g d_1 d_2}.$

Решение. Высоту поднятия жидкости в капиллярах найдем из условия равенства гидростатического давления, создаваемого столбом жидкости, и давления Лапласа над искривленной поверхностью: $\rho g h = \dfrac{2\sigma}{r} = \dfrac{4\sigma\cos\theta}{d}$, откуда $h = \dfrac{4\sigma\cos\theta}{\rho g d}$.

Разность уровней жидкости в капиллярах равна:

$$\Delta h = \frac{4\sigma\cos\theta}{\rho g}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) = \frac{4\sigma\cos\theta\left(d_2 - d_1\right)}{\rho g d_1 d_2},$$

причем жидкость выше поднимется в более узком капилляре.

13.34. $r_2 = \dfrac{2\sigma r_1}{2\sigma + \rho g r_1 \Delta h} \approx 0{,}12$ мм.

13.35. $Q = \dfrac{2\pi\sigma^2}{\rho g}.$

Решение. При погружении капилляра в жидкость она поднимется в нем на высоту $h = 2\sigma/(\rho g r)$ (см. решение задачи 13.31). При этом потенциальная энергия столбика жидкости увеличится до

$$W_{\text{п}} = \frac{\rho\pi r^2 h}{m} \cdot g \cdot \frac{h}{2} = \frac{2\pi\sigma}{\rho g}.$$

Сила поверхностного натяжения $F_\sigma = 2\pi r\sigma$, направленная вверх, совершит при этом положительную работу.

$$A_\sigma = -F_\sigma h = -2\pi r\sigma h = \frac{4\pi\sigma^2}{\rho g} = 2W_{\text{п}}..$$

Избыток энергии выделится в виде теплоты:

$$Q = A_\sigma - W_{\text{п}} = \frac{2\pi\sigma^2}{\rho g}.$$

13.36. $t = \dfrac{R}{v} = \sqrt{\dfrac{M}{2\pi\sigma}} \approx 0{,}23$ с.

Решение. На движущийся увеличивающийся валик мыльного раствора радиусом r действует сила поверхностного натяжения $F_\sigma = 4\pi\sigma r$ (учтено, что у пленки две стороны). Уравнение движения этого валика имеет вид:

$$\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = F_\sigma,$$

где $m = \dfrac{\pi r^2}{\pi R^2} M = M\left(\dfrac{r}{R}\right)^2$ – переменная масса валика. Подставляя её в уравнение движения и дифференцируя, получаем:

$$\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = \frac{M}{R^2}\left(\frac{2rv\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + \frac{r^2\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right) = 4\pi\sigma r.$$

Так как $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t = v$, уравнение можно переписать в виде:

$$v^2 + \frac{r}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{2\sigma\pi R^2}{M} = \text{const} > 0.$$

Полагая для оценки $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 0$, получаем, что скорость движения валика постоянна (v = const) и равна $v = \sqrt{2\pi\sigma R^2/M}$.

Тогда время «схлопывания» мыльной пленки: $t = \dfrac{R}{v} =$

$= \sqrt{\dfrac{M}{2\pi\sigma}} \approx 0{,}23$ с.

13.37. $\Delta F \approx -3{,}5$ мкДж.

Решение. Свободные энергии поверхностей капель до слияния равны $F_1 = \sigma \cdot \pi d_1^2$.и $F_2 = \sigma \cdot \pi d_2^2$ соответственно.

Массы капель равны:

$$m_1 = \frac{4}{3}\rho\,\pi\left(\frac{d_1}{2}\right)^3 = \frac{\pi\rho}{6} d_1^3 \quad \text{и} \quad m_2 = \frac{\pi\rho}{6} d_{21}^3 .$$

Поскольку масса жидкости в процессе слияния капель не меняется, то масса m_3 новой капли равна

$$m_3 = m_1 + m_2 = \frac{\pi\rho}{6}\left(d_1^3 + d_2^3\right) = \frac{\pi\rho}{6} d_3^3 ,$$

откуда находим диаметр d_3 капли после слияния: $d_3 = \sqrt[3]{d_1^3 + d_2^3}$.

Свободная энергия поверхности новой капли равна

$$F_3 = \sigma \cdot \pi d_3^2 = \sigma\pi\left(d_1^3 + d_2^3\right)^{2/3}$$

Изменение свободной энергии поверхностного слоя при слиянии капель составляет

$$\Delta F = F_3 - F_1 - F_2 = \pi\sigma\left[\left(d_1^3 + d_2^3\right)^{2/3} - d_1^2 - d_2^2\right] \approx -3{,}5 \text{ мкДж} .$$

Свободная энергия капель при их слиянии уменьшается.

13.38. $\Delta F = 8\pi\sigma\left(r_3^2 - r_1^2 - r_2^2\right)$.

13.39. $A \approx 80$ мкДж.

Решение. Свободная энергия поверхности одной капли диаметра d_1 равна $F_1 = \sigma \cdot \pi d^2$. Изотермическая работа по разделению капли равна изменению свободной энергии ΔF поверхностного слоя: $A = \Delta F = 2F_2 - F_1 = \pi\sigma(2d_2^2 - d_1^2)$.

Первоначальная масса капли равна $m_1 = \frac{4}{3}\rho\,\pi\left(\frac{d_1}{2}\right)^3 = \frac{\pi\rho}{6}d_1^3$.

Поскольку масса жидкости в процессе разделения капель не меняется, масса каждой из новых капель $m_2 = m_1/2 = \pi\rho d_1^3/12 = \pi\rho d_2^3/6$, откуда находим диаметр d_2 новых капель: $d_2 = d_1/\sqrt[3]{2}$.

Свободная энергия поверхностей новых капель равна $2F_2 = 2\sigma\cdot\pi d_2^2 = 2\sigma\pi {d_1}^2/2^{2/3} = \pi\sigma d_1^2\sqrt[3]{2}$. Работа по разделению капли составляет: $A = \pi\sigma\left(2d_2^2 - d_1^2\right) = \pi\sigma d_1^2\left(2^{4/3} - 1\right) \approx 80$ мкДж.

13.40. $A = 5{,}1\cdot10^{-5}$ Дж.

Решение. Первоначальный диаметр капли равен $d_1 = [6m/(\pi\rho)]^{1/3} \approx 13$ мм. Свободная энергия поверхности капли

$$F_1 = \sigma\cdot\pi d_1^2 = \sigma\pi\left(\frac{6m}{\pi\rho}\right)^{2/3}.$$

Масса новых капель $m_1 = \pi\rho d_0^3/6$, их число равно $N = m/m_1 = \frac{6m}{\pi\rho d_0^3} \approx 265$. Свободная энергия поверхностей новых капель равна

$$NF_2 = N\sigma\cdot\pi d_0^2 = \frac{6m\sigma}{\pi\rho d_0^3}\cdot\pi d_0^2 = \frac{6m\sigma}{\rho d_0}.$$

Работа по изотермическому разделению капли равна изменению свободной энергии ΔF поверхностного слоя и составляет

$$A = F_2 - F_1 = \frac{6m\sigma}{\rho d_0} - \sigma\pi\left(\frac{6m}{\pi\rho}\right)^{2/3} \approx 6\cdot10^{-5} - 9{,}3\cdot10^{-6} = 5{,}1\cdot10^{-5}\text{ Дж}..$$

13.41. $\Delta T \approx 1{,}55\cdot10^{-4}$ К.

Решение. Используем результаты задачи 13.32, считая диаметры капель до слияния $d_1 = d_2 = 2r$. Радиус новой капли равен $R = r\sqrt[3]{2}$. При слиянии капель свободная энергия поверхностного слоя уменьшится на величину

$$\Delta F = \pi\sigma\left[\left(d_1^3 + d_2^3\right)^{2/3} - d_1^2 - d_2^2\right] = 4\pi\sigma r^2\left(2 - 2^{2/3}\right).$$

Эта энергия выделится в виде тепла и пойдет на нагрев получившейся капли (нагрев воздуха и деревянной плиты считаем незначительным):

$$\Delta F = \Delta W = cm\Delta T = c\rho\cdot(4/3)\,\pi R^3\Delta T = (8/3)\,\pi r^3 c\rho\Delta T\,,$$

откуда находим изменение температуры:

$$\Delta T = 3\sigma\frac{1-2^{-1/3}}{c\rho r} \approx 1{,}55\cdot10^{-4}\ \text{К}\,.$$

13.42. $P \approx 4{,}8\cdot10^8$ Вт.

Решение. Выделение тепла происходит вследствие уменьшения поверхностной энергии жидкости при слиянии малых капель в более крупные. Энергия, которая выделяется при образовании одной большой капли из n маленьких, равна

$$\Delta F = nF_2 - F_1 = \pi\sigma\left(nS_2 - S_1\right) = \pi\sigma\left(nd^2 - D^2\right).$$

Число n капель, из которых образовалась одна большая, находим из равенства их объемов: $(4/3)\pi(D/2)^3 = n\cdot(4/3)\pi(d/2)^3$, откуда $n = (D/d)^3$. Число больших капель можно найти, зная общий объем выпавшей воды: $N = \dfrac{Sh}{(4/3)\pi(D/2)^3} = \dfrac{6Sh}{\pi D^3}$. Полная выделившаяся энергия равна $\Delta E = N\Delta F = \left(6Sh\sigma/D\right)\cdot\left(D/d - 1\right) \approx$ $\approx 2{,}9\cdot10^{11}$ Дж.

Мощность тепловыделения за время дождя составляет

$$P = \Delta E\,/\,\tau \approx 4{,}8\cdot10^8\ \text{Вт}\,.$$

13.43. $A = 8\pi\sigma r^2\left(2^{2/3} - 1\right)$.

Решение. Конечный объем пузыря $V_2 = 2V_1$. Используя формулу для объема сферического пузыря $V = (4/3)\,\pi r^3$, находим радиус нового пузыря: $R = r\sqrt[3]{2}$. При этом площадь поверхности пузыря изменяется на величину $\Delta S = 4\pi\left(R^2 - r^2\right) = 4\pi r^2\left(2^{2/3} - 1\right)$.

Изотермическая работа по изменению площади поверхностного слоя равна изменению свободной энергии ΔF поверхности пузыря. Учитывая, что у мыльного пузыря две поверхности (внешняя и внутренняя), находим искомую работу:

$$A = \Delta F = 2\sigma\Delta S = 8\pi\sigma r^2 \left(2^{2/3} - 1\right).$$

13.44. $Q = mgH - mg\left(\dfrac{3m}{4\pi\rho n}\right)^{1/3} + 4\pi\sigma\left(\dfrac{3m}{4\pi\rho}\right)^{2/3}(1 - n^{1/3})$.

Решение. Потенциальная энергия капли до падения (при нормировке $W = 0$ на поверхности плиты) равна $W_1 = mgh + \sigma S_1$, а потенциальная энергия всех капель, образовавшихся после удара о плиту, составляет $W_2 = nmgr + n\sigma S_1$, где r – радиус мелких капель, $S_1 = 4\pi R^2$ и $S_1 = 4\pi r^2$ – площади поверхности начальной и одной мелкой капли соответственно.

Поскольку масса воды при ударе не меняется, радиусы первоначальной R и мелкой r капель равны соответственно

$$R = \left(\frac{m}{\rho\cdot(4/3\pi)}\right)^{1/3} = \left(\frac{3m}{4\pi\rho}\right)^{1/3} \text{ и } r = \left(\frac{3m}{4\pi\rho n}\right)^{1/3}.$$

Выделившееся количество теплоты равно разности начальной и конечной потенциальных энергий капель:

$$Q = W_1 - W_2 = mgH - mg\left(\frac{3m}{4\pi\rho n}\right)^{1/3} + 4\pi\sigma\left(\frac{3m}{4\pi\rho}\right)^{2/3}\left(1 - n^{1/3}\right).$$

13.45. $h = \dfrac{3\sigma\left(\sqrt[3]{n} - 1\right)}{\rho g R}$.

13.46. $F \approx 1{,}5$ Н.

Решение. Капля примет форму диска с вогнутой периферийной поверхностью, радиусы кривизны которой $r_1 \to \infty$ и $r_2 = h\cos\theta/2$. Давление жидкости между пластинами p_i меньше атмосферного на величину давления Лапласа:

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \sigma\left(\frac{1}{\infty} + \frac{1}{h\cos\theta/2}\right) = \frac{2\sigma}{h\cos\theta}.$$

Пластинки будут притягиваться друг к другу с силой $F = S\Delta p$, где площадь диска $S = V/h = m/(\rho h)$ (здесь V – объем капли).

Сила притяжения пластин равна

$$F = \frac{m}{\rho h} \cdot \frac{2\sigma}{h\cos\theta} = \frac{2\sigma m}{\rho h^2 \cos\theta} \approx 1{,}5 \text{ Н}.$$

13.47. $F = \dfrac{2\sigma S}{d} = 29{,}2$ Н.

Решение. Поверхность смачивающей жидкости между пластинками имеет форму диска с вогнутой периферийной поверхностью, радиусы кривизны которой $r_1 \to \infty$ и $r_2 = d/2$. Давление жидкости между пластинами p_i меньше атмосферного на величину давления Лапласа: $\Delta p = \sigma\,(1/r_1 + 1/r_2) = 2\sigma/h$.

Пластинки будут притягиваться друг к другу с силой $F = S\Delta p$. Чтобы оторвать пластинки друг от друга, надо приложить такую же внешнюю силу: $F = 2\sigma S/d = 29{,}2$ Н.

13.48. $\theta \approx 140°$.

Решение. Капля примет форму диска с выпуклой периферийной поверхностью, радиусы кривизны которой $r_1 \to \infty$ и $r_2 = (d/2)\cdot|\cos\theta|$, где d – расстояние между пластинками, равное

$$d = \frac{V}{S} = \frac{m/\rho}{\pi R^2}$$

(V – объем капли, $S = \pi R^2$ – площадь её сечения).

Давление жидкости между пластинами p_i больше атмосферного на величину давления Лапласа: $\Delta p = \sigma(1/r_1 + 1/r_2) = 2\sigma|\cos\theta|/d$. Сила F, приложенная к пластинке, создает давление $p_F = F/(\pi R^2)$ (в пренебрежении искривленностью боковой поверхности капли). В состоянии равновесия $p_F = \Delta p$: $2\sigma|\cos\theta|/d = F/(\pi R^2)$, откуда находим:

$$|\cos\theta| = \frac{Fd}{2\sigma\pi R^2} = \frac{Fm}{2\sigma\rho\left(\pi R^2\right)^2} \approx 0{,}767.$$

С учетом того, что ртуть не смачивает стекло, $\theta \approx 140°$.

13.49. $F = 2\sigma V/a^2$.

13.50. $f_m = \dfrac{2\ell\sigma^2}{\rho g d^2}$.

Решение. Рассуждая, как при решении задачи 13.23, находим высоту поднятия жидкости между пластинами: $h = \dfrac{2\sigma\cos\theta}{\rho g d}$.

Будем отсчитывать уровень y жидкости между пластинами от уровня внешней жидкости. Пусть атмосферное давление равно p_A. Давление в жидкости между пластинами $p_i = p_A - \rho g y$ меньше давления p_e снаружи: $p_i < p_e = p_A$. Поэтому результирующие силы давления f стремятся сблизить пластины. На полоску пластины, имеющую координату y, ширину $\mathrm{d}y$ и длину ℓ, действует сила

$$\mathrm{d}f = l\mathrm{d}y\left(p_A - p_i\right) = l\mathrm{d}y(\rho g y).$$

Результирующая сила, действующая на каждую из пластин, равна

$$f = \int_0^h l\rho g y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\rho g l h^2 = \frac{1}{2}\rho g l\left(\frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g d}\right)^2 = \frac{2l\sigma^2\cos^2\theta}{\rho g d^2}.$$

При полном смачивании ($\theta = 0$) сила притяжения пластин имеет максимальное значение: $f_m = \dfrac{2\ell\sigma^2}{\rho g d^2}$.

13.51. $F = mg + 2\pi R^2\sqrt{\rho g\sigma}$.

Решение. Форма кривых поверхностей жидкости показана на рис. О.13.51. Она удовлетворяет соотношению $\sigma / r = \rho g h$, где r – радиус кривизны поверхности, h – высота рассматриваемой точки над поверхностью жидкости (кривизной сечения этой поверхности плоскостью, параллельной пластине, можно пренебречь, то есть считать радиус кривизны этого сечения $r_2 \to \infty$). На рис. О.13.51 *в* показано положение пластины, соответствующее максимальному растяжению пружины.

Из-за искривления поверхности жидкости давление в ней под пластиной будет меньше атмосферного давления на величину давления Лапласа Δp. Считая $r_1 = h/2$ и $r_2 \to \infty$, находим

$\Delta p = \sigma/r_1 = 2\sigma/h$. Поскольку вес пластины до её соприкосновения с водой был уравновешен первоначальным растяжением пружины, при максимальной высоте подъема пластины над водой лапласовское давление должно быть скомпенсировано давлением столба жидкости под пластиной на высоте $h/2$ ((где произойдет разрыв поверхности жидкости): $\Delta p = 2\sigma/h = \rho g h/2$. Отсюда определяем максимально возможную высоту поднятия воды: $h = 2\sqrt{\sigma/(\rho g)}$.

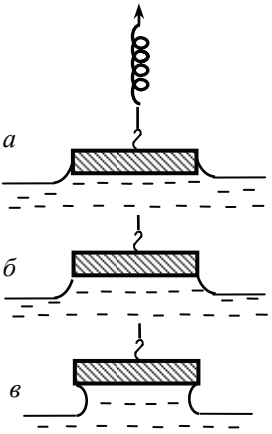


Рис. О.13.51.

Разность атмосферного и гидростатического давлений на пластину направлена вниз и равна $\rho g h$, а соответствующая сила давления $F_1 = \rho g h S = \rho g h \cdot \pi R^2 = 2\pi R^2 \sqrt{\rho g \sigma}$. Сила, с которой натянута пружина, должна уравновесить вес пластины и силу F_1:

$$F = mg + 2\pi R^2 \sqrt{\rho g \sigma}\ .$$

13.52. $\sigma = \dfrac{4}{\rho g}\left[\dfrac{k\Delta l}{\pi\left(d_2^2 - d_1^2\right)}\right]^2$.

Указание. См. решение задачи 13.51.

13.53. $H = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\sqrt{\dfrac{\sigma}{\rho g}}$.

Решение. Предположим, что лужа жидкости настолько широка, что один из радиусов кривизны поверхности лужи можно считать равным бесконечности.

Рассмотрим боковую поверхность лужи, препятствующую её бесконечному растеканию. Направим ось X горизонтально, а ось Y вертикально вверх, совместив начало координат с плоскостью (см. рис. О.13.53). Выделим элемент боковой поверхности длиной Δl и толщиной $\mathrm{d}h$, находящийся на высоте y. Давление внутри жидкости вблизи этого элемента равно $p = p_0 + \rho g(H - y)$, где p_0 – атмосферное давление. На выделенный элемент поверхности действуют силы натяжения F_1 и F_2, направленные под некоторым углом друг к

другу и равные $\sigma\Delta l$, и разность сил давления в жидкости и вне её (атмосферного) $F_3 = \rho g(H - y)\Delta l\, \mathrm{d}h$.

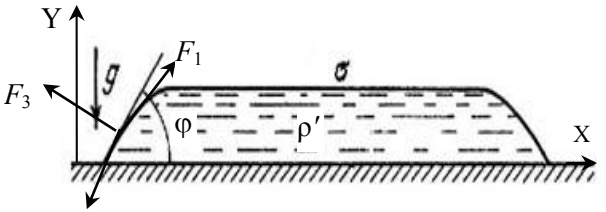


Рис. О.13.53.

Ширина элемента $\mathrm{d}h$ связана с его проекциями на оси X и Y соотношениями: $\mathrm{d}x = \mathrm{d}h\cos\varphi$ и $\mathrm{d}y = \mathrm{d}h\sin\varphi$, где φ – угол между касательной к выделенной площадке и горизонтальной осью X. При равновесии сумма горизонтальных (как и вертикальных) проекций сил натяжения и силы давления равна нулю, т. е.

$$\sigma\Delta l(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2) = \rho g(H - y)\Delta l\, \mathrm{d}h\sin\varphi .$$

Учитывая, что $\mathrm{d}h\sin\varphi = \mathrm{d}y$, и при малых изменениях угла φ $\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 \approx -\sin\varphi\, \mathrm{d}\varphi$ (знак «минус» появляется потому, что с увеличением y угол φ уменьшается, следовательно, $\mathrm{d}\varphi < 0$), приходим к уравнению:

$$-\sigma\sin\varphi\, \mathrm{d}\varphi = \rho g(H - y)\mathrm{d}y .$$

Интегрируя его с использованием условия, что при $y = H$ $\varphi = 0$, получаем: $-\int_{\theta}^{0} \sigma\sin\varphi\, \mathrm{d}\varphi = \rho g \int_{0}^{H} (H - y)\, \mathrm{d}y \quad \rightarrow \quad 1 - \cos\theta = \rho g H^2/(2\sigma)$,

откуда $H = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\sqrt{\dfrac{\sigma}{\rho g}}$.

13.54. $H \approx 3{,}8$ мм.

Решение. Воспользуемся решением задачи 13.53, считая, что краевой угол $\theta = \pi$. Получаем: $H = 2\sqrt{\dfrac{\sigma}{\rho g}} \approx 3{,}8$ мм.

13.55. $H = 2\sqrt{\dfrac{\sigma}{\rho g}} \approx 5{,}5$ мм.

13.56. *Решение.* Уравнение динамического равновесия капли на поверхности твердого тела для сил, действующих на единицу длины разрыва поверхности, имеет вид (уравнение Юнга):
$\sigma_{тг} = \sigma_{жт} + \sigma_{жг}\cos\theta$, откуда находим:

$$\theta = \arccos\{(\sigma_{тг} - \sigma_{жт})/\sigma_{жг}\}.$$

13.57. $x \approx 2{,}3$ см.

Решение. На плавающий на поверхности воды кубик действует направленная вниз сила поверхностного натяжения $F_\sigma = 4a\sigma$, , сила тяжести $F_{mg} = mg$ и выталкивающая сила F_A. Пусть нижняя грань кубика находится от поверхности жидкости на расстоянии x. Тогда, согласно закону Архимеда, действующая на кубик выталкивающая сила равна $F_A = a^2 x\rho_в g$, где x отсчитывается от поверхности воды (пренебрегаем тем, что из-за небольшого поднятия воды по стенкам кубика глубина его погружения в воду будет немного больше). Кубик будет находиться в равновесии, если сумма всех действующих на него сил равна нулю, т.е. $4a\sigma + mg = a^2 x\rho_в g$, откуда получаем:

$$x = \frac{mg + 4\sigma a}{a^2\rho_в g} \approx 2{,}3 \text{ см}.$$

Легко убедиться, что учет сил поверхностного натяжения дает поправку примерно 0,1 см.

13.58. $a = \sqrt{\dfrac{4\sigma}{g(\rho_0 - \rho)}}$.

Решение. Для оценки длины ребра пренебрежем тем, что из-за искривления поверхности воды вблизи стенок кубика глубина его погружения в воду немного меньше длины ребра кубика. Решение задачи аналогично решению задачи 13.57, однако в случае полного несмачивания сила поверхностного натяжения будет направлена вертикально вверх. Условие устойчивого плавания кубика запишется в виде: $4a\sigma + a^2 x\rho g = mg$, где $m = \rho_0 a^3$ – масса кубика, $x \approx a$ – расстояние от поверхности воды до нижней грани кубика.

Подставляя указанные величины, приходим к уравнению:

$$4a\sigma = a^3(\rho_0 - \rho)g \text{, откуда } a = \sqrt{\frac{4\sigma}{g(\rho_0 - \rho)}}.$$

13.59. $H = \sqrt{\dfrac{2\sigma}{\rho g}(1 - \sin\theta)}.$

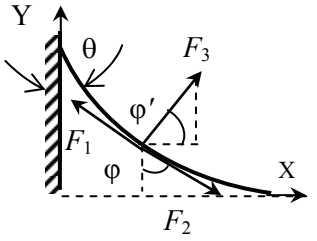


Рис. О.13.59.

Решение. Так как стенка длинная, один из радиусов кривизны поверхности жидкости можно считать бесконечно большим.

Направим ось X горизонтально, а ось Y вертикально вверх, совместив начало координат с горизонтальной поверхностью жидкости. Выделим элемент боковой поверхности длиной Δl и толщиной $\mathrm{d}h$, находящийся на высоте y (рис. О.13.59). Давление внутри жидкости вблизи этого элемента равно $p = p_0 + \rho g(H - y)$, где p_0 – атмосферное давление. На выделенный элемент поверхности действуют силы натяжения F_1 и F_2, направленные под некоторым углом друг к другу и равные $\sigma\Delta l$, и разность сил давления в жидкости и атмосферного $F_3 = \rho g(H - y)\Delta l\,\mathrm{d}h$.

Ширина элемента $\mathrm{d}h$ связана с его проекциями на оси X и Y соотношениями: $\mathrm{d}x = \mathrm{d}h\sin\varphi$ и $\mathrm{d}y = \mathrm{d}h\cos\varphi$, где φ – угол между касательной к выделенной площадке и вертикальной осью X. При равновесии сумма горизонтальных (как и вертикальных) проекций сил натяжения и силы давления равна нулю, т. е.

$$\sigma\Delta l(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2) = \rho g(H - y)\Delta l\,\mathrm{d}h\cos\varphi.$$

Учитывая, что $\mathrm{d}h\cos\varphi = \mathrm{d}y$ и, кроме того, при малых углах φ $\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2 \approx -\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$ (знак «минус» появляется потому, что с увеличением y угол φ уменьшается, следовательно, $\varphi_1 < \varphi_2$), приходим к уравнению:

$$-\sigma\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \rho g(H - y)\mathrm{d}y.$$

Интегрируя с учетом условий, что $\varphi = \theta$ при $y = H$ и $\varphi = \pi/2$ при $y = 0$, получаем:

$$-\int_{\pi/2}^{\theta} \sigma\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \rho g\int_0^H (H - y)\,\mathrm{d}y \;\rightarrow\; 1 - \sin\theta = \rho g H^2/(2\sigma),$$

откуда $H = \sqrt{\dfrac{2\sigma}{\rho g}(1-\sin\theta)}$.

13.60. $C = C_V + \dfrac{p_0 + 4\sigma/r}{p_0 + 8\sigma/(3r)}R.$

Решение. При нагревании газа в пузыре его температура будет увеличиваться. Пренебрегая температурной зависимостью коэффициента поверхностного натяжения мыльной пленки, запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для газа внутри пузыря, учитывая дополнительное давление Лапласа $\Delta p = 4\sigma/r$:

$$\left(p_0 + 4\frac{\sigma}{r}\right)\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = \nu R T\,.$$

Взяв полный дифференциал правой и левой частей, получаем: $\left[p_0 + 8\sigma/(3r)\right]\cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \nu R\,\mathrm{d}T$, откуда находим изменение объема газа:

$$\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{\nu R\,\mathrm{d}T}{p_0 + 8\sigma/(3r)}.$$

Запишем первое начало термодинамики для газа в пузыре: $\delta Q = \nu C\,\mathrm{d}T = \nu C_V\,\mathrm{d}T + p\,\mathrm{d}V$, или

$$\nu C\,\mathrm{d}T = \nu C_V\,\mathrm{d}T + \frac{p_0 + 4\sigma/r}{p_0 + 8\sigma/(3r)}\cdot\nu R\,\mathrm{d}T\,,$$

откуда находим:

$$C = C_V + \frac{p_0 + 4\sigma/r}{p_0 + 8\sigma/(3r)}R\,.$$

§14. Фазовые переходы

14.1. $m_{\text{п}} \approx 0{,}7$ г ; $V_{\text{п}} \approx 90$ мл ; $m_{\text{ж}} \approx 2$ кг ; $V_{\text{ж}} \approx 3$ л .

Решение. Общая масса воды и пара $m = m_{\text{п}} + m_{\text{ж}}$, где m – масса всего вещества; $m_{\text{ж}}$ и $m_{\text{п}}$ – массы жидкости и насыщенного пара.

Суммарный объем пара и жидкости

$$V = V_{ж} + V_{п} = \frac{m_{ж}}{\rho_{ж}} + \frac{m_{п}}{\rho_{п}}.$$

Подставляя в последнее уравнение $m_{ж} = m - m_{п}$, получаем: $V - m/\rho_{ж} = m_{п}(1/\rho_{п} - 1/\rho_{ж})$, откуда находим:

$$m_{п} = \frac{V - m/\rho_{ж}}{1/\rho_{п} - 1/\rho_{ж}} = \frac{(V\rho_{ж} - m)\,\rho_{п}}{\rho_{ж} - \rho_{п}} \approx 0{,}7 \text{ г}.$$

Объем пара равен $V_{п} = \frac{m_{п}}{\rho_{п}} = \frac{V\rho_{ж} - m}{\rho_{ж} - \rho_{п}} \approx 90$ мл.

Масса и объем жидкой воды составляют:

$$m_{ж} = m - m_{п} = m - \frac{(m - V\rho_{п})\,\rho_{ж}}{\rho_{ж} - \rho_{п}} \approx 2 \text{ кг};\ V_{ж} = \frac{m - V\rho_{п}}{\rho_{ж} - \rho_{п}} \approx 3 \text{ л}.$$

14.2. $\frac{m_{ж}}{m} = \frac{(n-1)\,k}{(k-1)\,n}$.

Решение. Объем вещества в конечном состоянии складывается из объема жидкости и ее насыщенного пара: $V = V_{ж} + V_{п}$. По условию задачи $V_{0п}/V = n$, или $V = V_{0п}/n$, где $V_{0п}$ – начальный объем вещества, полностью находящегося в состоянии насыщенного пара. Следовательно, $V_{0п}/n = V_{ж} + V_{п}$.

Выразив $V_{0п}$, $V_{ж}$ и $V_{п}$ через соответствующие удельные объемы $\upsilon_{0п}$, $\upsilon_{ж}$ и $\upsilon_{п}$, получим:

$$\upsilon_{0п}\frac{m}{n} = \upsilon_{ж}m_{ж} + \upsilon_{п}m_{п},$$

где m – масса всего вещества; $m_{ж}$ и $m_{п}$ – массы жидкости и насыщенного пара в конечном состоянии.

По условию задачи $\upsilon_{п}/\upsilon_{ж} = k$. Подставляя $\upsilon_{ж} = \upsilon_{п}/k$ в предыдущую формулу, получим: $m/n = m_{ж}/k + m_{п}$.

Поскольку $m_{п} = m - m_{ж}$, $m/n = m_{ж}/k + m - m_{ж}$, откуда находим: $\frac{m_{ж}}{m} = \frac{(n-1)\,k}{(k-1)\,n}$.

14.3. $\Delta m = \frac{A\mu}{RT}$.

14.4. $m_{\text{в}} = m + \dfrac{c_2(t_0 - t_1) + \overline{L}_{\text{пл}}}{c_1(t_2 - t_0) + \overline{L}_{\text{пар}}} m \approx 113$ г, где $t_0 = 0$ °C.

14.5. $Q = mc(t_1 - t_0) + p_0 Sh\left(\dfrac{\mu \overline{L}_{\text{пар}}}{RT}\right)$.

Решение. Первоначально воду надо нагреть до температуры кипения при нормальном атмосферном давлении $t_0 = 100$ºC. Для этого потребуется количество теплоты $Q_1 = mc(t_0 - t_1)$.

Для испарения части воды объемом $\Delta V = Sh$ (пренебрегая небольшим понижение уровня воды) потребуется количество теплоты $Q_2 = \Delta m \overline{L}_{\text{пар}}$, где масса испарившейся воды $\Delta m = \mu\nu = \mu \dfrac{p_0 Sh}{RT}$.

Полное количество теплоты, сообщенное воде, равно

$$Q = mc(t_1 - t_0) + p_0 Sh\left(\frac{\mu \overline{L}_{\text{пар}}}{RT}\right).$$

14.6. $\Delta h = \dfrac{m\overline{L}_{\text{пл}}}{p_0 S(RT + \mu \overline{L}_{\text{пар}})}$.

Решение. Поскольку температура и давление насыщенного пара соответствуют параметрам его конденсации, при опускании поршня эти параметры меняться не будут. При сжатии пара он получит количество теплоты $Q_1 = p_0 S\Delta h$.

Часть пара при уменьшении объема под поршнем сконденсируется с выделением теплоты. Массу сконденсировавшегося пара найдем из уравнения Менделеева–Клапейрона: $\Delta m = \dfrac{\mu p_0 S\Delta h}{RT}$.

Количество выделившейся теплоты составит

$$Q_2 = \overline{L}_{\text{пар}} \Delta m = \frac{\mu p_0 S\Delta h}{RT} \overline{L}_{\text{пар}}.$$

Для плавления льда требуется количество теплоты $Q_3 = m\overline{L}_{\text{пл}}$. Из уравнения теплового баланса получаем:

$$Q_3 = Q_1 + Q_2, \rightarrow m\overline{L}_{\text{пл}} = p_0 S\Delta h + \frac{\mu p_0 S\Delta h}{RT} \overline{L}_{\text{пар}},$$

откуда определяем высоту, на которую надо опустить поршень:

$$\Delta h = \frac{m\overline{L}_{\text{пл}}}{p_0 S(RT + \mu\overline{L}_{\text{пар}}}.$$

14.7. $L_{\text{пар}} \approx 5500$ Дж/моль.

Решение. Так как $V = \text{const}$, из уравнения Менделеева–Клапейрона получаем: $\frac{(\nu_1 + \nu_2)T_2}{\nu_1 T_1} = \frac{p_2}{p_1}$, где ν_1 – число молей газа до впрыскивания жидкого азота, ν_2 – число молей жидкого азота. Отсюда находим $\nu_2 = \nu_1\left(\frac{p_2 T_1}{p_1 T_2} - 1\right)$. При испарении жидкого азота он поглощает тепло, которое отдает газ в сосуде при охлаждении. Уравнение теплового баланса имеет вид:

$$\nu_1 c_V (T_1 - T_2) = \nu_2 L_{\text{пар}} + \nu_2 C_V (T_2 - T),$$

откуда с учетом ν_2 находим:

$$L_{\text{пар}} = \frac{T_2 p_1 C_V (T_1 - T_2)}{T_1 p_2 - T_2 p_1} - C_V (T_2 - T) \approx 5500 \text{ Дж/моль}.$$

14.8. $\frac{\Delta U}{Q} \approx 0{,}92$.

Решение. Из первого закона термодинамики для процесса испарения изменение внутренней энергии системы равно

$$\Delta U = Q - A = \overline{L}_{\text{пар}} m - A,$$

где m – масса воды.

Работа, совершаемая в процессе парообразования (при постоянном давлении), равна: $A = p(V_{\text{п}} - V_{\text{ж}}) \approx pV_{\text{п}}$, где $V_{\text{п}}$ и $V_{\text{ж}}$ – объем массы m воды в газообразном и жидком состояниях. Считая пар идеальным газом, используем для него уравнение Менделеева–Клапейрона и получим: $A \approx pV_{\text{п}} = (m/\mu)RT$.

Следовательно, $\Delta U = \overline{L}_{\text{пар}} m - (m/\mu)RT$, откуда искомая величина равна: $\frac{\Delta U}{Q} = 1 - \frac{RT}{\mu\overline{L}_{\text{пар}}} \approx 0{,}92$.

14.9. $\bar{L}_{\text{пар}} \approx 3{,}0 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Решение. Так как удельный объем паров намного больше удельного объема жидкой ртути ($\upsilon_{\text{ж}} << \upsilon_{\text{п}}$), считаем $\upsilon_{\text{п}} - \upsilon_{\text{ж}} \approx \upsilon_{\text{п}}$. Пары ртути рассматриваем как идеальный газ, тогда $\upsilon_{\text{п}} = RT/(\mu p_0)$.

При этом уравнение Клапейрона – Клаузиуса принимает вид:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{\bar{L}_{\text{пар}}}{T\left(\upsilon_{\text{п}} - \upsilon_{\text{ж}}\right)} \approx \frac{\bar{L}_{\text{пар}}}{T\upsilon_{\text{п}}} = \frac{\bar{L}_{\text{пар}} \cdot \mu p}{RT^2},$$

откуда определяем удельную теплоту парообразования ртути:

$$\bar{L}_{\text{пар}} = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}\right)_{\text{ж-п}} \cdot \frac{RT^2}{\mu p} \approx 3{,}0 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}.$$

14.10. $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}p} = \dfrac{T_0\left(\upsilon_2 - \upsilon_1\right)}{\bar{L}_{12}} \approx 1{,}67 \cdot 10^{-7}$ К/Па.

14.11. $\Delta T = \dfrac{T\Delta\upsilon}{\bar{L}_{\text{пл}}}\Delta p \approx -7{,}4 \cdot 10^{-6}$ К.

14.12. $p_1 \approx 1{,}038$ атм.

Решение. Поскольку температура насыщенного пара, заданная в задаче, $t_1 = 79{,}4$ ºС мало отличается от температуры кипения спирта при нормальном давлении $t_0 = 78{,}4$ºС, можно использовать уравнением Клапейрона – Клаузиуса для конечных приращений ΔT и Δp:

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{\bar{L}_{\text{пар}}}{T(\upsilon_{\text{п}} - \upsilon_{\text{в}})},$$

где $\Delta p = p_1 - p_0$ – разность между давлением насыщенных паров при температуре t_1 и нормальным давлением p_0, $\Delta T = t_1 - t_0$, $\upsilon_{\text{п}}$ и $\upsilon_{\text{в}}$ – удельные объемы насыщенного пара и жидкого спирта соответственно.

Считая насыщенный пар идеальным газом, определяем его молярный объем из уравнения Клапейрона – Менделеева:

$V_{\text{п}} \cong RT/p_0$, откуда для удельного объема $\upsilon_{\text{п}}$ получаем: $\upsilon_{\text{п}} = \dfrac{V_{\text{п}}}{\mu} \cong \dfrac{RT}{\mu p_0}$, где $\mu = 46 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса спирта.

Считая, что удельный объем жидкости много меньше удельного объема пара $\upsilon_{\text{в}} << \upsilon_{\text{п}}$, перепишем первое уравнение в виде:

$$\frac{p_1 - p_0}{t_1 - t_0} = \frac{\overline{L}_{\text{пар}}}{T_0\left(\upsilon_{\text{п}} - \upsilon_{\text{в}}\right)} \approx \frac{\overline{L}_{\text{пар}}}{T_0 \upsilon_{\text{п}}} = \frac{\mu \overline{L}_{\text{пар}}}{RT_0^2} p_0,$$

откуда определяем искомое давление насыщенных паров:

$$p_1 = p_0\left[1 + \frac{\mu \overline{L}_{\text{пар}}}{RT_0^2}\left(t_1 - t_0\right)\right] \approx 1{,}038 \text{ атм}.$$

14.13. $\overline{L}_{\text{пар}} = \dfrac{RT_1T_2}{\mu\left(T_2 - T_1\right)} \ln\dfrac{p_2}{p_1} \approx 62$ кДж/моль.

Решение. Запишем уравнение Клапейрона – Клаузиуса для парообразования: $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \dfrac{\overline{L}_{\text{пар}}}{T\left(\upsilon_{\text{п}} - \upsilon_{\text{ж}}\right)}$. Считая пары ртути идеальным газом, выразим их удельный объем: $\upsilon_{\text{п}} \cong \dfrac{RT}{\mu p}$.

Так как удельный объем жидкой ртути $\upsilon_{\text{ж}}$ значительно меньше удельного объема её паров $\upsilon_{\text{п}}$, считаем $\upsilon_{\text{п}} - \upsilon_{\text{ж}} \approx \upsilon_{\text{п}}$. При этом уравнение Клапейрона – Клаузиуса принимает вид:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{\overline{L}_{\text{пар}}}{T\left(\upsilon_{\text{п}} - \upsilon_{\text{ж}}\right)} \approx \frac{\overline{L}_{\text{пар}}}{T\upsilon_{\text{п}}} = \frac{\overline{L}_{\text{пар}} \cdot \mu p}{RT^2}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\overline{L}_{\text{пар}}\mu}{R} \int_{T_1}^{T_2} \frac{\mathrm{d}T}{T^2}; \rightarrow \ln\frac{p_2}{p_1} = \frac{\overline{L}_{\text{пар}}\mu}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right),$$

откуда находим среднее значение удельной теплоты испарения ртути в указанном интервале температур:

$$\overline{L}_{\text{пар}} = \frac{RT_1T_2}{\mu\left(T_2 - T_1\right)} \ln\frac{p_2}{p_1} \approx 62 \text{ кДж/моль}.$$

14.14. $L_1 - L_2 = R\left(\dfrac{T_1T_2}{T_2-T_1}\ln\dfrac{p_2}{p_1} - \dfrac{T_3T_4}{T_4-T_3}\ln\dfrac{p_4}{p_3}\right) \approx 4{,}27$ кДж/моль ;

$$L(T)\left[\frac{\text{кДж}}{\text{моль}}\right] = \frac{L_{\text{I}}\langle T_{\text{II}}\rangle - L_{\text{II}}\langle T_{\text{I}}\rangle}{\langle T_{\text{II}}\rangle - \langle T_{\text{I}}\rangle} - \frac{L_{\text{I}} - L_{\text{II}}}{\langle T_{\text{II}}\rangle - \langle T_{\text{I}}\rangle}T\,.$$

14.15. $p_2 \approx 0{,}46\cdot 10^5$ Па.

Решение. Так как $V_{\text{ж}} << V_{\text{п}}$, то $V_{\text{п}} - V_{\text{ж}} \approx V_{\text{п}}$. Считая пары уксусной кислоты идеальным газом, выразим их удельный объем: $v_{\text{п}} \cong \dfrac{RT}{\mu p}$. Запишем уравнение Клапейрона – Клаузиуса:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{\overline{L}_{\text{пар}}}{T(v_{\text{п}} - v_{\text{ж}})} \approx \frac{\overline{L}_{\text{пар}}}{Tv_{\text{п}}} = \frac{\overline{L}_{\text{пар}}\cdot\mu p}{RT^2}\,.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\int_{p_2}^{p_1}\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mu\overline{L}_{\text{пар}}}{R}\int_{T_2}^{T_1}\frac{\mathrm{d}T}{T^2}\,;\ \rightarrow\ \ln\frac{p_1}{p_2} = -\frac{\mu\overline{L}_{\text{пар}}}{R}\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right),$$

откуда находим давление насыщенного пара при температуре t_2:

$$p_2 = p_1\exp\left[-\frac{\mu L_{\text{пар}}}{R}\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)\right] \approx 0{,}46\cdot 10^5\,\text{Па}\,.$$

14.16. $p_1 = p_0\exp\left[-\dfrac{L_{\text{пар}}}{R}\left(\dfrac{1}{T_1}-\dfrac{1}{T_0}\right)\right] \approx 1{,}97\cdot 10^4\,\text{Па}\,.$

14.17. $\rho_{\text{п}} = \dfrac{1}{v_{\text{п}}} = \dfrac{T\Delta p}{\overline{L}_{\text{пар}}\Delta T} = 0{,}60$ кг/м^3.

14.18. $\dfrac{\Delta T}{\Delta h} \approx -3\,\dfrac{\text{К}}{\text{км}}$.

Решение. Давление воздуха при подъеме на Δh определяется барометрической формулой:

$$p = p_0\exp\left(-\frac{\mu g\Delta h}{RT_0}\right) \approx p_0\left(1-\frac{\mu g\Delta h}{RT_0}\right).$$

Разложение экспоненты в ряд Тейлора по малому параметру возможно, так как величина

$$\frac{\mu g \Delta h}{RT_0} = 29 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{9{,}8 \Delta h}{8{,}3 \cdot 293} \approx 1{,}17 \cdot 10^{-4} \Delta h$$

является малой по сравнению с единицей вплоть до нескольких километров подъема.

Следовательно, на высоте h давление изменяется на величину

$$\Delta p = -p_0 \frac{\mu g \Delta h}{RT_0} \approx -0{,}117 p_0 \Delta h \left[\text{км}\right].$$

Поскольку изменение давления невелико по сравнению с p_0, для оценки изменения температуры кипения воды с высотой используем уравнение Клапейрона – Клаузиуса в конечных приращениях, считая, что удельный объем воды $v_{\text{в}} = 10^{-3}$ м^3/кг много меньше $v_{\text{п}}$ и $v_{\text{п}} - v_{\text{в}} \approx v_{\text{п}}$: $\dfrac{\Delta p}{\Delta T} = \dfrac{\bar{L}_{\text{пар}}}{T_1 v_{\text{п}}}$, откуда получаем: $\dfrac{\Delta T}{\Delta p} = \dfrac{T_1 v_{\text{п}}}{\bar{L}_{\text{пар}}}$ ($T_1 = 373$ К – температура кипения воды при $p_0 = 1$ атм).

Подставляя Δp, окончательно находим:

$$\frac{\Delta T}{\Delta h} = -\frac{T_1 v_{\text{п}} p_0 \mu g}{\bar{L}_{\text{пар}} R T_0} \approx -3 \text{ К/км}.$$

14.19. $h \approx 5{,}2$ км.

Решение. При нормальном давлении p_0 вода кипит при температуре $T_1 = 373$ К. Считая пары воды идеальным газом, получаем формулу для связи давления с температурой кипения (см. решение задачи 14.5): $p = p_0 \exp\left[\dfrac{\mu L_{\text{пар}}}{R}\left(\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T}\right)\right]$.

Согласно барометрической формуле $p = p_0 \exp\left[-\dfrac{\mu g h}{RT_0}\right]$, где T_0 – температура окружающего воздуха. Подставляя это выражение в первую формулу, получим:

$\frac{\mu\bar{L}_{\text{пар}}}{R}\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)=-\frac{\mu g h}{RT_0}$, откуда $h=\frac{(T_0-T_1)T_0}{T_1T_2}\cdot\frac{\bar{L}_{\text{пар}}}{g}\approx 5{,}2$ км.

Следует отметить, что при таком перепаде высот барометрическая формула дает только приближенную оценку давления, так как температура атмосферы с подъемом достаточно сильно понижается, и её нельзя считать постоянной.

14.20. $m\approx 3900$ кг.

Решение. Поскольку начальная температура льда мало отличается от температуры его плавления при нормальном давлении p_0, можно использовать уравнение Клапейрона – Клаузиуса для конечных приращений ΔT и Δp: $\frac{\Delta p}{\Delta T}=\frac{\bar{L}_{\text{пл}}}{T(\upsilon_{\text{л}}-\upsilon_{\text{в}})}$, где $\Delta p=p_1-p_0$ – разность между давлением на лед при температуре t_1 и нормальным давлением p_0, $\Delta T=t_1-t_0$.

Избыточное давление на лед, создаваемое столбом, равно $\Delta p=\frac{mg}{S}=\frac{mg}{\pi R^2}$. Из уравнения Клапейрона – Клаузиуса находим массу столба: $m=\frac{\pi R^2\bar{L}_{\text{пар}}\Delta T}{T_0\left(\upsilon_{\text{л}}-\upsilon_{\text{в}}\right)g}\approx 3900$ кг.

14.21. $\Delta l\approx 4{,}8$ см.

Решение. Считаем $\upsilon_{\text{п}}-\upsilon_{\text{ж}}\approx\upsilon_{\text{п}}$. Пары спирта рассматриваем как идеальный газ, тогда $\upsilon_{\text{п}}=RT/(\mu p_0)$. При этом уравнение Клапейрона – Клаузиуса принимает вид:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}=\frac{\bar{L}_{\text{пар}}}{T\left(\upsilon_{\text{п}}-\upsilon_{\text{ж}}\right)}\approx\frac{\bar{L}_{\text{пар}}}{T\upsilon_{\text{п}}}=\frac{\bar{L}_{\text{пар}}\cdot\mu p}{RT^2}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\int_{p_0}^{p}\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{\bar{L}_{\text{пар}}\mu}{R}\int_{T_0}^{T}\frac{\mathrm{d}T}{T^2};\ \rightarrow\ \ln\frac{p}{p_0}=\frac{\bar{L}_{\text{пар}}\mu}{R}\left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T}\right),$$

где (p_0, T_0) – параметры начального состояния системы.

Отсюда находим зависимость давления насыщенного пара от температуры: $p = p_0 \exp\left[\dfrac{\overline{L}_{\text{пар}}\mu}{R}\left(\dfrac{1}{T_0} - \dfrac{1}{T}\right)\right]$.

Давление создается сжатой пружиной. При выполнении закона Гука сила давления пружины на дощечку $F = k\Delta l$, откуда дополнительное давление на газ в сосуде равно

$$\Delta p = \frac{F}{S} = \frac{k\Delta l}{\left(\pi d^2/4\right)} = \frac{4k\Delta l}{\pi d^2}.$$

С учетом атмосферного давления $p = p_0 + \Delta p$. Подставляя это выражение в полученную ранее формулу, получаем:

$$p_0 + \frac{4k\Delta l}{\pi d^2} = p_0 \exp\left[\frac{\overline{L}_{\text{пар}}\mu}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right],$$

откуда определяем сжатие пружины Δl:

$$\Delta l = \frac{\pi d^2 p_0}{4k}\left\{\exp\frac{\overline{L}_{\text{пар}}\mu}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right) - 1\right\} \approx 4{,}8 \text{ см}.$$

14.22. $\Delta m \cong \dfrac{\mu V p_0 \Delta T}{RT^2}\left(\dfrac{\overline{L}_{\text{пар}}\mu}{RT} - 1\right)$.

Решение. Поскольку температура насыщенного пара мало отличается от температуры кипения воды при нормальном давлении, запишем уравнением Клапейрона – Клаузиуса для конечных приращений ΔT и Δp:

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{\overline{L}_{\text{пар}}}{T\left(\upsilon_{\text{п}} - \upsilon_{\text{в}}\right)} \approx \frac{\overline{L}_{\text{пар}}}{T\upsilon_{\text{п}}},$$

где $\Delta p = p_1 - p_0$ – разность между давлением насыщенного пара при температуре t_1 и нормальным давлением p_0, $\Delta T = t_1 - t_0$, $\upsilon_{\text{п}}$ и $\upsilon_{\text{в}}$ – удельные объемы насыщенного пара и воды соответственно и $\upsilon_{\text{п}} - \upsilon_{\text{ж}} \approx \upsilon_{\text{п}}$.

Считая пар идеальным газом, находим его удельный объем: $\upsilon_{\text{п}} = \dfrac{V_{\text{п}}}{\mu} \cong \dfrac{RT}{\mu p}$ и из уравнения Клапейрона – Клаузиуса получаем:

$$\Delta p \approx \frac{\overline{L}_{\text{пар}}}{T v_{\text{п}}}\Delta T = \frac{\overline{L}_{\text{пар}} \cdot \mu p}{RT^2}\Delta T \ .$$

Запишем уравнения состояния идеального газа для нормальных условий и при повышенной температуре:

$$p_0 V = \frac{m}{\mu} RT \ ; \quad (p_0 + \Delta p) V = \frac{m_1}{\mu} R(T + \Delta T) \ ,$$

откуда находим увеличение массы насыщенного пара:

$$\Delta m = m_1 - m = \frac{\mu V}{R}\left(\frac{p_0 + \Delta p}{T + \Delta T} - \frac{p_0}{T}\right) \cong$$

$$\cong \frac{\mu V}{RT^2}\left[T\frac{p_0 \overline{L}_{\text{пар}}\mu}{RT^2} \cdot \Delta T - p_0 \Delta T\right] = \frac{\mu V p_0 \Delta T}{RT^2}\left(\frac{\overline{L}_{\text{пар}}\mu}{RT} - 1\right).$$

14.23. $V > 1{,}41$ л.

Решение. Используя уравнение Клапейрона – Клаузиуса, найдем изменение объема при плавлении 1 моля олова:

$$\Delta V = V_{\text{ж}} - V_{\text{тв}} = \frac{L_{\text{пл}}}{T_{\text{пл}}} \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}p} .$$

Количество молей олова $\nu = m/\mu$. Общее изменение объема олова при плавлении составит $\nu \Delta V$. Объем твердого олова $V_{\text{тв}} = m/\rho$, следовательно, объем жидкого олова будет равен

$$V_{\text{ж}} = \frac{m}{\rho} + \frac{m}{\mu} \cdot \frac{L_{\text{пл}}}{T_{\text{пл}}} \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}p} \approx 1{,}41 \text{ л} .$$

Следовательно, объем тигля должен быть больше 1,41 л.

14.24. $p_2 \approx 4{,}82$ кПа.

Решение. Сублимацию вещества можно рассматривать как последовательное превращение твердого вещества в жидкое, а затем в парообразное, поэтому удельная теплота сублимации $\overline{L}_3$ равна $\overline{L}_3 = \overline{L}_1 + \overline{L}_2$.

Поскольку температуры $T_1 = 279$ К и $T_2 = 278$ К близки, можно записать уравнение Клапейрона – Клаузиуса для конечных приращений ΔT и Δp:

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{\bar{L}_3}{T\left(\upsilon_{\text{п}} - \upsilon_{\text{л}}\right)}.$$

Считая насыщенный пар идеальным газом, выражаем его удельный объем: $\upsilon_{\text{п}} = \dfrac{V_{\text{п}}}{\mu} \cong \dfrac{RT_0}{\mu p_0}$, где $\mu = 78 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса бензола.

Так как удельный объем твердого бензола значительно меньше удельного объема газа $\upsilon_{\text{л}} << \upsilon_{\text{п}}$, считаем $\upsilon_{\text{п}} - \upsilon_{\text{л}} \approx \upsilon_{\text{п}}$. Тогда записанное уравнение принимает вид:

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{\bar{L}_3}{T\left(\upsilon_{\text{п}} - \upsilon_{\text{л}}\right)} \approx \frac{\bar{L}_1 + \bar{L}_2}{RT_1^2}\mu p_0,$$

откуда находим давление пара над поверхностью твердого бензола при температуре T_2:

$$p_2 = p_1 + \Delta p \approx p_1\left[1 + \frac{\left(\bar{L}_1 + \bar{L}_2\right)\mu}{RT_1^2}\left(T_2 - T_1\right)\right] \approx 4{,}82 \text{ кПа}.$$

14.25. $\bar{L}_{12} \approx \dfrac{(\alpha - \beta)RT_0^2}{\mu p}$.

Решение. Из уравнения Клапейрона – Клаузиуса для кривых возгонки и испарения определяем соответствующие удельные теплоты фазовых переходов:

$$\bar{L}_{13} = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}\right)_{13} T_0\left(\upsilon_3 - \upsilon_1\right), \quad \bar{L}_{23} = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}\right)_{23} T_0\left(\upsilon_3 - \upsilon_2\right).$$

Возгонку вещества можно рассматривать как последовательное превращение твердого вещества в жидкое, а затем в парообразное, поэтому удельная теплота возгонки $\bar{L}_{13}$ равна $\bar{L}_{13} = \bar{L}_{12} + \bar{L}_{23}$. Искомая удельная теплота плавления:

$$\bar{L}_{12} = \bar{L}_{13} - \bar{L}_{23} = T_0\left[\alpha\left(\upsilon_3 - \upsilon\right)_1 - \beta\left(\upsilon_3 - \upsilon_2\right)\right].$$

Так удельный объем пара много больше удельных объемов жидкости и твердой фазы, можно считать, что $\upsilon_3 - \upsilon_1 \approx \upsilon_3$ и $\upsilon_3 - - \upsilon_2 \approx \upsilon_3$. Определим удельный объем пара из уравнения иде-

ального газа: $v_3 = \frac{V_3}{\mu} \cong \frac{RT_0}{\mu p}$. Подставляя эти выражения в полученное ранее соотношение, находим:

$$\bar{L}_{12} \approx T(\alpha - \beta) v_3 = \frac{(\alpha - \beta) R T_0^2}{\mu p}.$$

14.26. $\bar{L}_{13} \approx \frac{\alpha R T_0^2}{\mu p} - \bar{L}_{23}$.

14.27. $L_{\text{пар}} = \frac{Rb}{(1 + c/T)^2}$.

Решение. Считаем, что $V_{\text{п}} - V_{\text{ж}} \approx V_{\text{п}}$. Пары аммиака рассматриваем как идеальный газ, тогда $V_{\text{п}} = RT/p$.

При этом уравнение Клапейрона – Клаузиуса принимает вид:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{L_{\text{пар}}}{T\left(V_{\text{п}} - V_{\text{ж}}\right)} \approx \frac{L_{\text{пар}}}{TV_{\text{п}}} = \frac{L_{\text{пар}} \cdot p}{RT^2},$$

откуда получаем: $\frac{\mathrm{d}(\ln p)}{\mathrm{d}T} = \frac{L_{\text{пар}}}{RT^2}$. Используя данную в задаче зависимость $\ln p$, находим: $\frac{L_{\text{пар}}}{RT^2} = \frac{b}{(T + c)^2}$, откуда получаем искомую зависимость:

$$L_{\text{пар}} = \frac{Rb}{(1 + c/T)^2}.$$

14.28. $\bar{L}_{\text{пар}} = \frac{RT}{\mu}$.

14.29. $p = A \exp\left[-\left(\frac{\alpha \mu}{RT} + \beta T \right) \right]$, где A – константа.

Решение. Считая пар идеальным газом, находим его удельный объем: $v_{\text{п}} = \frac{V_{\text{п}}}{\mu} \cong \frac{RT}{\mu p}$, и из уравнения Клапейрона – Клаузиуса получаем:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}=\frac{\bar{L}_{\text{пар}}}{T\left(v_{\text{п}}-v_{\text{ж}}\right)}\approx\frac{\bar{L}_{\text{пар}}}{Tv_{\text{п}}}=\frac{\bar{L}_{\text{пар}}\cdot\mu p}{RT^2}=\frac{\left(\alpha-\beta T^2\right)\mu p}{RT^2}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\int\limits_{p_0}^{p}\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{\mu}{R}\int\limits_{T_0}^{T}\frac{(\alpha-\beta T^2)\,\mathrm{d}T}{T^2};\rightarrow\ln\frac{p}{p_0}=\frac{\mu}{R}\left[\alpha\left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T}\right)-\beta\left(T-T_0\right)\right],$$

где (p_0, T_0) – параметры начального состояния системы.

Отсюда находим зависимость давления насыщенного пара от температуры: $p=A\exp\left[-\left(\dfrac{\alpha\mu}{RT}+\beta T\right)\right]$, где A – константа.

14.30. $\Delta T = 0{,}074$ К.

Решение. Согласно уравнению Клапейрона – Клаузиуса $\mathrm{d}p=\dfrac{\bar{L}_{\text{пл}}\mathrm{d}T}{T\left(v_{\text{л}}-v_{\text{в}}\right)}$. Интегрируя это уравнение, находим:

$$\int\limits_{p_0}^{p}\mathrm{d}p=\frac{\bar{L}_{\text{пл}}}{\left(v_{\text{л}}-v_{\text{в}}\right)}\int\limits_{T_0}^{T}\frac{\mathrm{d}T}{T}\ \rightarrow\ (p-p_0)=\frac{\bar{L}_{\text{пл}}}{(v_{\text{л}}-v_{\text{в}})}\ln\frac{T}{T_0},$$

откуда выражаем новую температуру плавления льда:

$$T=T_0\exp\left[\frac{(v_{\text{л}}-v_{\text{в}})(p-p_0)}{\bar{L}_{\text{пл}}}\right].$$

При скольжении конькобежца избыточное давление на лед равно $p-p_0=mg/S=9{,}8\cdot10^5$ Па. Окончательно получаем:

$$T=T_0\exp\left[\frac{(v_{\text{л}}-v_{\text{в}})mg}{S\bar{L}_{\text{пл}}}\right]\approx273{,}074\text{ К},$$

т.е. температура плавления увеличится на $\Delta T = 0{,}074$ К.

14.31. $\dfrac{\Delta m}{m}\approx0{,}0045.$

Решение. При повышении давления на $\Delta p=p_0(n-1)$ температура плавления льда повысится на (см. решение задачи 14.30)

$$\Delta T = T_0 \left\{ 1 - \exp\left[\frac{(\upsilon_л - \upsilon_в) p_0 (n-1)}{\overline{L}_{пл}} \right] \right\} \approx 0{,}73 \text{ К} .$$

При этом лед оказывается перегретым и частично расплавится за счет теплоты $Q = c_л m \Delta T$, выделенной при остывании куска льда до температуры t_0. На плавление массы Δm льда требуется количество теплоты $Q = \overline{L}_{пл} \Delta m$. Приравнивая эти величины, находим: $\overline{c}_л m \Delta T = \overline{L}_{пл} \Delta m$, откуда определяем часть растаявшего льда:

$$\frac{\Delta m}{m} = c_л T_0 \left\{ 1 - \exp\left[\left(\upsilon_л - \upsilon_в \right) p_0 \frac{n-1}{\overline{L}_{пл}} \right] \right\} / \overline{L}_{пл} \approx 0{,}0045 .$$

14.32. $\Delta S \approx 3{,}5$ кДж/К.

Решение. При нагревании воды от температуры T_1 до температуры T_2 изменение энтропии равно $\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_2} cm \frac{\mathrm{d}T}{T} = cm \ln \frac{T_2}{T_1}$, а при испарении воды составляет $\Delta S_2 = \overline{L}_{исп} m / T_2$.

Полное изменение энтропии воды в процессе нагревания и испарения равно

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = m \left(\frac{\overline{L}_{исп}}{T_2} + c \ln \frac{T_2}{T_1} \right) \approx 3{,}5 \text{ кДж/К} .$$

14.33. $\Delta S \approx 14{,}5$ Дж/К.

Решение. Пренебрегая удельным объемом жидкого спирта по сравнению с удельным объемом его паров, запишем уравнение Клапейрона – Клаузиуса:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{\overline{L}_{пар}}{T\left(\upsilon_п - \upsilon_в\right)} \approx \frac{\overline{L}_{пар}}{T \upsilon_п} = \frac{\mu p \overline{L}_{пар}}{RT^2} .$$

Здесь $\upsilon_п = \frac{V_п}{\mu} \cong \frac{RT}{\mu p}$ – удельный объем паров спирта как идеального газа. Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\ln \frac{p_1}{p_2} = \frac{\overline{L}_{пар} \mu}{R} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right),$$

откуда находим удельную теплоту испарения спирта:

$$\overline{L}_{\text{пар}} = \frac{R\ln(p_1 / p_2)}{\mu(1/T_2 - 1/T_1)}.$$

Изменение энтропии массы m спирта в результате испарения при температуре T_3 составляет:

$$\Delta S = \frac{m\overline{L}_{\text{исп}}}{T_3} = \frac{mR\ln(p_1/p_2)}{\mu T_3(1/T_2 - 1/T_1)} \approx 14{,}5 \text{ Дж/К}.$$

14.34. $m = \dfrac{T}{\overline{L}_{\text{пл}}}\Delta S$.

14.35. $\overline{L}_{\text{пар}} = T\Delta\overline{S} \approx 2{,}24 \cdot 10^3$ кДж/кг.

14.36. $\Delta T = \Delta p \mu\nu \dfrac{1/\rho_{\text{л}} - 1/\rho_{\text{в}}}{\Delta S} = 0{,}009$ К.

14.37. $\Delta p \approx 0{,}6$ Па.

Решение. Изменение энтропии при испарении ν молей жидкости равно $\Delta S = \nu L_{\text{пар}}/T_1$, откуда молярная теплота парообразования $L_{\text{пар}} = T_1\Delta S/\nu$.

Из уравнения Клапейрона – Клаузиуса для конечных приращений $\dfrac{\Delta p}{\Delta T} = \dfrac{L_{\text{пар}}}{T(V_{\text{п}} - V_{\text{в}})} \approx \dfrac{L_{\text{пар}}}{TV_{\text{п}}}$ где $V_{\text{п}} = RT/p$ – молярный объем пара как идеального газа, находим изменение давления насыщенных паров при увеличении температуры на ΔT:

$$\Delta p = \frac{L_{\text{пар}}\, p\Delta T}{RT_1^2} = \frac{\Delta S p \Delta T}{\nu R T_1} \approx 0{,}6 \text{ Па}.$$

14.38. $\Delta S = m\left(\dfrac{\overline{L}_{\text{пл}}}{T_1} + c\ln\dfrac{T_2}{T_1} + \dfrac{\overline{L}_{\text{пар}}}{T_2}\right) = 8{,}6$ кДж/К.

14.39. 1) $\Delta S = \dfrac{m_1\overline{L}_{\text{пл}}}{T_1} + c_2\left(m_1\ln\dfrac{T}{T_1} - m_2\ln\dfrac{T_2}{T}\right)$,

где $T = \dfrac{m_1T_1 + m_2T_2 - m_1\overline{L}_{\text{пл}}/c_2}{m_1 + m_2}$,

$$2)\ \Delta S = m_2 c_2 \left(\frac{T_2}{T_1} - \ln \frac{T_2}{T_1} - 1 \right).$$

Решение. Так как конечная температура системы неизвестна, рассмотрим два случая.

1) Если $m_1 L_1 < c_2 m_2 (t_2 - 0\ \mathrm{C^o})$, то весь лед плавится весь, происходит нагревание воды, образовавшейся в результате плавления льда, и изменение энтропии при повышении температуры на $\mathrm{d}T$ равно

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{\mathrm{d}T} = -\frac{m_2 c_2 \mathrm{d}T}{T} + \frac{m_1 c_2 \mathrm{d}T}{T} + \frac{\mathrm{d}m_1 \overline{L}_{\text{пл}}}{T_1},$$

откуда в результате интегрирования получаем:

$$\Delta S = \frac{m_1 \overline{L}_{\text{пл}}}{T_1} + c_2 \left(m_1 \ln \frac{T}{T_1} - m_2 \ln \frac{T_2}{T} \right),$$

где конечная температура T определяется из уравнения теплового баланса:

$$T = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2 - m_1 \overline{L}_{\text{пл}} / c_2}{m_1 + m_2}.$$

2). Если $m_1 L_1 > c_2 m_2 (t_2 - 0\ \mathrm{C^o})$, лед растает не весь, конечная температура смеси $t_1 = 0^{\circ}\mathrm{C}$. Пусть Δm_1 – масса растаявшего льда. Количество теплоты, которое требуется для его плавления, равно количеству теплоты, выделившемуся при остывании воды:

$$Q_1 = \Delta m_1 L_1 = m_2 c_2 (T_2 - T_1).$$

Изменение энтропии льда в процессе плавления равно

$$\Delta S_1 = \frac{Q_1}{T_1} = \frac{m_2 c_2 (T_2 - T_1)}{T_1},$$

а изменение энтропии воды при ее охлаждении составляет

$$\Delta S_2 = m_2 c_2 \int_{T_2}^{T_1} \frac{1}{T} \mathrm{d}T = -m_2 c_2 \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Полное изменение энтропии составляет

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = m_2 c_2 \left(\frac{T_2}{T_1} - \ln \frac{T_2}{T_1} - 1 \right).$$

14.40. См. решение задачи 14.39. Весь лед растает.

$$T_0 = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2 - m_2 \overline{L}_{\text{пл}}/c}{m_1 + m_2} \approx 293 \text{ К},$$

$$\Delta S = \frac{m_2 \overline{L}_{\text{пл}}}{T_2} + c\left(m_2 \ln \frac{T_0}{T_2} - m_1 \ln \frac{T_1}{T_0} \right) \approx 40{,}4 \text{ Дж/К}.$$

14.41. $t_3 \approx 268{,}6$ К; $\Delta S \approx 267$ Дж/К.

Решение. Для решения задачи сначала надо провести оценку баланса теплоты. Чтобы нагреть лед до температуры плавления $t_0 = 0$ºС, потребуется количество теплоты

$$Q_1 = m_1 c_1 (t_0 - t_1) = 44{,}5 \text{ кДж}.$$

При остывании до 0 ºС вода отдаст количество теплоты

$$Q_2 = m_2 c_2 (t_2 - t_0) = 6{,}3 \text{ кДж},$$

а при замерзании выделит

$$Q_3 = m_2 \overline{L}_{\text{пл}} = 33{,}6 \text{ кДж}.$$

Поскольку $Q_2 + Q_3 < Q_1$, лед не растает, вода остынет и замерзнет, а получившийся лед охладится до температуры t_3, до которой нагреется первоначально находившийся в калориметре лед. По условию теплового баланса

$$m_1 c_1 (t_3 - t_1) = \ = m_2 c_2 (t_2 - t_0) + m_2 \overline{L}_{\text{пл}} + c_1 m_2 (t_0 - t_3),$$

откуда

$$t_3 = \frac{c_1 m_1 t_1 + c_2 m_2 t_2 - t_0 m_2 (c_2 - c_1) + m_2 \overline{L}_{\text{пл}}}{c_1 (m_1 + m_2)} \approx -4{,}4 \text{ °C} = 268{,}6 \text{ K} = T_3.$$

Рассчитав изменение энтропии для каждого этапа процесса установления теплового равновесия, в итоге получаем:

$$\Delta S = \frac{m_{21} \overline{L}_{\text{пл}}}{T_0} + c_1 \left(m_2 \ln \frac{T_3}{T_0} + m_1 \ln \frac{T_3}{T_1} \right) + c_2 m_2 \ln \frac{T_0}{T_2} \approx 267 \text{ Дж/К}.$$

14.42. $\Delta S \approx 0{,}036$ Дж/К.

Решение. Количество теплоты, отданное железом при его остывании до температуры плавления льда $t_0 = 0$ ºС равно

$$Q_1 = m_1 c (t_1 - t_0) = 3680 \text{ Дж},$$

а количество тепла, требуемое для таяния всего льда, составляет:

$$Q_2 = m_2 \overline{L}_{\text{пл}} \approx 26900 \text{ Дж}.$$

Следовательно, растает только его часть льда массой Δm_2. Температура равновесного состояния системы будет $t_0 = 0$ ºС.

Количество теплоты, которое требуется для плавления массы Δm_2 льда, равно количеству теплоты, выделившемуся при остывании железа:

$$Q = \Delta m_2 \overline{L}_{\text{пл}} = m_1 c\left(t_1 - t_0\right).$$

Изменение энтропии массы Δm_2 растаявшего льда равно: $\Delta S_1 = Q/T_0 = m_1 c\left(T_1 - T_0\right)/T_0$, а изменение энтропии железа при его охлаждении составляет

$$\Delta S_2 = m_1 c \int_{T_1}^{T_0} \mathrm{d}T/T = -m_1 c \ln\left(T_1/T_0\right).$$

Полное изменение энтропии составляет

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = m_1 c\left(\frac{T_1}{T_0} - \ln\frac{T_1}{T_0} - 1\right) \approx 0{,}036 \text{ Дж/К}.$$

14.43. $\Delta S = 1{,}53$ Дж/К.

Решение. Количество теплоты, отданное при отвердевании олова и его охлаждении до температуры таяния льда $t_1 = 0$ ºС, идет на плавление части льда массой Δm_1:

$$Q = \Delta m_1 \overline{L}_{\text{пл}\,\mathrm{H_2O}} = m\overline{L}_1 + mc\left(t_2 - t_1\right).$$

Изменение энтропии массы Δm_1 растаявшего льда равно

$$\Delta S_1 = \frac{Q}{T_1} = \frac{mc\left(T_2 - T_1\right) + m\overline{L}_1}{T_1},$$

а изменение энтропии олова при его отвердевании и охлаждении составляет:

$$\Delta S_2 = -\frac{m\overline{L}_1}{T_2} + mc\int_{T_2}^{T_1} \mathrm{d}T/T = -\frac{m\overline{L}_1}{T_2} - mc\ln\left(T_2/T_1\right).$$

Полное изменение энтропии составляет

$$\Delta S = m\overline{L}_1\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) + mc\left[\frac{T_2}{T_1} - 1 - \ln\frac{T_2}{T_1}\right] = 1{,}53 \text{ Дж/К}.$$

14.44. $C = C_p - \dfrac{L_{\text{ж-п}}}{T}$.

Решение. Согласно определению молярной теплоемкости, $C = \dfrac{\delta Q}{\mathrm{d}T} = \dfrac{T\mathrm{d}S}{\mathrm{d}T}$, где производная $\mathrm{d}S/\mathrm{d}T$ берется вдоль кривой фазового равновесия насыщенного пара и воды. При этом изменение температуры T сопровождается изменением давления p, поэтому удобно представить энтропию как функцию p и T:

$$\mathrm{d}S(p,T) = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p\,.$$

Тогда для молярной теплоемкости пара находим:

$$C = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p + T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}\right)_{\text{ж-п}},$$

где производная $\left(\mathrm{d}p/\mathrm{d}T\right)_{\text{ж-п}}$ вычисляется вдоль кривой равновесия фаз, т.е. определяется уравнением Клапейрона – Клаузиуса:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{L_{\text{ж-п}}}{T\left(V_{\text{п}} - V_{\text{ж}}\right)} \approx \frac{L_{\text{ж-п}}}{TV_{\text{п}}}, \text{ где } V_{\text{п}} = RT/p\,.$$

Так как $T\left(\partial S/\partial T\right)_p = C_p$, уравнение для молярной теплоемкости принимает вид:

$$C = C_p + T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \frac{L_{\text{ж-п}}}{TV_{\text{п}}} = C_p + \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \frac{L_{\text{ж-п}}p}{RT}.$$

Воспользовавшись соотношением Максвелла

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

и учтя, что для идеального газа $\left(\partial V/\partial T\right)_p = R/p$, окончательно для молярной теплоемкости вдоль кривой фазового равновесия «вода – пар» находим:

$$C = C_p - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \frac{L_{\text{ж-п}}p}{RT} = C_p - \frac{R}{p}\cdot\frac{L_{\text{ж-п}}p}{RT} = C_p - \frac{L_{\text{ж-п}}}{T}\,.$$

14.45. $\dfrac{\mathrm{d}L_{ij}}{\mathrm{d}p}=\left(1+\dfrac{T}{L_{ij}}\Delta C_{pij}\right)\left(V_j-V_i\right)-T\left(\alpha_{pj}V_j-\alpha_{pi}V_i\right),$

Решение. Представляя скрытую молярную теплоту перехода L_{ij} как функцию давления и температуры, можно записать:

$$\frac{\mathrm{d}L_{ij}}{\mathrm{d}p}=\left(\frac{\partial L_{ij}}{\partial T}\right)_p\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}p}+\left(\frac{\partial L_{ij}}{\partial p}\right)_T,$$

где производная $\mathrm{d}L_{ij}/\mathrm{d}p$ берется вдоль кривой фазового равновесия. Молярную теплоту перехода можно выразить через разность молярных энтропий фаз, претерпевающих переход: $L_{ij}=T(S_j-S_i)$. Тогда уравнение принимает вид:

$$\frac{\mathrm{d}L_{ij}}{\mathrm{d}p}=T\left[\left(\frac{\partial S_j}{\partial p}\right)_T-\left(\frac{\partial S_i}{\partial p}\right)_T\right]+\left[\left(S_j-S_i\right)+T\left(\frac{\partial S_j}{\partial T}\right)_p-T\left(\frac{\partial S_i}{\partial T}\right)_p\right]\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}p}.$$

Воспользовавшись соотношением Максвелла

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T=-\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

и выражением для молярной теплоемкости $T\left(\partial S/\partial T\right)_p=C_p$, а также учитывая, что производная $\left(\mathrm{d}T/\mathrm{d}p\right)$ вычисляется вдоль кривой равновесия фаз, т.е. определяется уравнением Клапейрона – Клаузиуса $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}=\dfrac{L_{ij}}{T\left(V_j-V_i\right)}$, окончательно получаем:

$$\frac{\mathrm{d}L_{ij}}{\mathrm{d}p}=T\left[\left(\frac{\partial V_j}{\partial T}\right)_p-\left(\frac{\partial V_i}{\partial T}\right)_p\right]+\left[\left(S_j-S_i\right)+C_{pj}-C_{pi}\right]\frac{T\left(V_j-V_i\right)}{L_{ij}}=$$

$$=\left(1+\frac{T}{L_{ij}}\Delta C_{pij}\right)\left(V_j-V_i\right)-T\left(\alpha_{pj}V_j-\alpha_{pi}V_i\right),$$

где $\alpha_p=\dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}\right)_p$ – коэффициент объемного теплового расширения, $\Delta C_{pij}=C_{pj}-C_{pi}$.

14.46. Решение аналогично решению задачи 14.45.

$$\frac{\mathrm{d}L_{ij}}{\mathrm{d}T} = L_{ij}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{\Delta V_{ij}}\left(\frac{\partial \Delta V_{ij}}{\partial T}\right)_p\right) + \Delta C_{pij}\,.$$

§15. Термодинамические потенциалы

15.1. *Решение.* Если объединить первое и второе начала термодинамики, то для обратимых (равновесных) процессов получится уравнение, называемое уравнением Гиббса: $T\mathrm{d}S = \mathrm{d}U + \delta A$, откуда

$$\mathrm{d}U(S,V) = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V\,.$$

Второе и третье соотношения следуют из полученного.

15.2. *Решение.* Из определения энтальпии $H = U + pV$ для её полного дифференциала получаем:

$$\mathrm{d}H = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = (T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V) + p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p\,.$$

Второе и третье соотношения следуют из полученного.

15.3. *Решение.* Из определения свободной энергии $F = U - TS$ для её полного дифференциала получаем:

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}(U - TS) = \mathrm{d}U - T\mathrm{d}S - S\mathrm{d}T =$$
$$= (T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V) - T\mathrm{d}S - S\mathrm{d}T = -S\mathrm{d}T - p\mathrm{d}V\,.$$

Второе и третье соотношения следуют из полученного.

15.4. *Решение.* Используя определение термодинамического потенциала Гиббса $G = H - TS$, получаем:

$$\mathrm{d}G = \mathrm{d}(H - TS) = \mathrm{d}H - S\mathrm{d}T - T\mathrm{d}S =$$
$$= \left(T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p\right) - S\mathrm{d}T - T\mathrm{d}S = V\mathrm{d}p - S\mathrm{d}T.$$

Второе и третье соотношения следуют из полученного.

15.5. *Решение.* Найдем полный дифференциал давления, считая его функцией температуры T и объема V:

$$\mathrm{d}p = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V .$$

При изобарическом процессе $\mathrm{d}p = 0$, и уравнение принимает вид: $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V = 0$. Деля его на $\mathrm{d}V$, получаем:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = 0$$

(здесь учтено, что производная температуры по объему является частной производной, так как берется при p = const).

Из последнего уравнения окончательно получаем:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -1 .$$

15.6. $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$; $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V$; $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = -\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p$; $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = -\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$

Решение. Запишем выражение для полного дифференциала потенциала Гиббса: $\mathrm{d}G = V\mathrm{d}p - S\mathrm{d}T$, из которого можно найти параметры системы S и V:

$$V = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T , \quad S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p .$$

Известно, что смешанные производные второго порядка, отличающиеся друг от друга только порядком дифференцирования, равны между собой, поэтому можно записать:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{\partial^2 G}{\partial T \partial p}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\frac{\partial^2 G}{\partial p \partial T},$$

откуда следует соотношение: $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$.

Три других соотношения Максвелла получаются аналогично из выражений для полных дифференциалов энтальпии H, внутрен-

ней энергии U и свободной энергии Гельмгольца F в их естественных переменных.

15.7. $\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\dfrac{\partial S}{\partial V}\right)_T - p.$ $\left(\dfrac{\partial H}{\partial p}\right)_T = V - T\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_p.$

Решение. Рассмотрим бесконечно малый квазистатический изотермический процесс. Поделив соотношение $T\mathrm{d}S = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V$ на $\mathrm{d}V$, получим: $\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\dfrac{\partial S}{\partial V}\right)_T - p.$.

Воспользовавшись соотношением Максвелла, получим $\left(\dfrac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\dfrac{\partial p}{\partial T}\right)_V$, окончательно находим: $\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\dfrac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$.

Из полного дифференциала энтальпии в естественных переменных: $\mathrm{d}H(S,p) = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p$ получаем: $(\partial H/\partial p)_T = T(\partial S/\partial p)_T + V$ и, используя соотношение Максвелла $(\partial S/\partial p)_T = -(\partial V/\partial T)_p$, окончательно находим:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p.$$

15.8. $\mathrm{d}S(T,V) = C_V\dfrac{\mathrm{d}T}{T} + \left(\dfrac{\partial p}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}V.$

Решение. Запишем выражение для полного дифференциала энтропии в переменных (T,V), используя его выражение в естественных переменных:

$$\mathrm{d}S(T,V) = \frac{\mathrm{d}U}{T} + p\frac{\mathrm{d}V}{T} = \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V\right] + \frac{p}{T}\mathrm{d}V =$$

$$= C_V\frac{\mathrm{d}T}{T} + \left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + \frac{p}{T}\right]\mathrm{d}V.$$

Подставляя соотношение $(\partial U/\partial V)_T = T(\partial S/\partial V)_T - p$ (см. решение задачи 15.6) в выражение для дифференциала энтропии, окончательно получаем:

$$\mathrm{d}S(T,V) = C_V \frac{\mathrm{d}T}{T} + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}V .$$

15.9. $\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T = -C_V \left(\dfrac{\partial T}{\partial V}\right)_S - p$

Решение. Из первого начала термодинамики получаем:

$$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V \text{, откуда } \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - p .$$

Учитывая функциональную связь S, V и T, $f(S,V,T) = 0$, получаем: $\left(\dfrac{\partial S}{\partial V}\right)_T = -\left(\dfrac{\partial S}{\partial T}\right)_V \left(\dfrac{\partial T}{\partial V}\right)_S$. Из выражения для полного дифференциала энтропии (см. задачу 15.9)

$$\mathrm{d}S(T,V) = C_V \frac{\mathrm{d}T}{T} + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}V$$

следует, что $\left(\partial S/\partial T\right)_V = C_V/T$. Подставляя записанные соотношения в формулу для $\left(\partial U/\partial V\right)_T$, окончательно получаем:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = -C_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S - p .$$

15.12. $\mathrm{d}H = C_p \mathrm{d}T + \left[V - T\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right]\mathrm{d}p,$

$$\mathrm{d}S = C_p \frac{\mathrm{d}T}{T} - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}p.$$

Решение. Запишем полный дифференциала энтальпии в естественных переменных: $\mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p$.

Будем считать энтальпию функцией независимых переменных – давления p и температуры T. Запишем полный дифференциал H как функцию этих двух параметров:

$$\mathrm{d}H(T,p) = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p = C_p \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p$$

(здесь учтено, что при изобарических процессах для одного моля вещества: $\mathrm{d}H_p(S,p)=\delta Q_p=C_p\mathrm{d}T$, где C_p – молярная теплоемкость при постоянном давлении: $C_p=\left(\mathrm{d}H/\mathrm{d}T\right)_p$).

Переписав первое уравнение в виде: $T\mathrm{d}S=\mathrm{d}H-V\mathrm{d}p$, подставим в него H как функцию p и T и получим:

$$\mathrm{d}S=\frac{1}{T}\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p\mathrm{d}T+\frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T-V\right]\mathrm{d}p\,.$$

Из условия равенства смешанных частных производных $\dfrac{\partial^2 S}{\partial p\partial T}=\dfrac{\partial^2 S}{\partial T\partial p}$ следует:

$$\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p\right]_T=\frac{\partial}{\partial T}\left\{\frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T-V\right]\right\}_p\,.$$

Произведя дифференцирование, приходим к уравнению:

$$\frac{1}{T}\cdot\frac{\partial^2 H}{\partial p\partial T}=-\frac{1}{T^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T+\frac{1}{T}\cdot\frac{\partial^2 H}{\partial T\partial p}+\frac{V}{T^2}-\frac{1}{T}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p,$$

откуда находим: $\left(\dfrac{\partial H}{\partial p}\right)_T=V-T\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_p$.

Подставляя это выражение в формулу для $\mathrm{d}H$, получаем дифференциал энтальпии в параметрах T и давления p:

$$\mathrm{d}H=C_p\mathrm{d}T+\left[V-T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right]\mathrm{d}p\,.$$

Для полного дифференциала энтропии находим:

$$\mathrm{d}S=\frac{V\mathrm{d}p}{T}-\frac{\mathrm{d}T}{T}=C_p\frac{\mathrm{d}T}{T}-\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\mathrm{d}p\,.$$

15.13. $C_p-C_V=TV\dfrac{\alpha_p^2}{\chi_T}$.

Решение. Приравниваем дифференциалы энтропии в переменных (T, V) (см. задачу 15.8) и (T, p) (см. задачу 15.12):

$$C_V \frac{\mathrm{d}T}{T} + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}V = C_p \frac{\mathrm{d}T}{T} - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}p,$$

откуда

$$C_p - C_V = T\left[\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}\right].$$

Для изобарического процесса $\mathrm{d}p = 0$, и формула принимает искомый вид: $C_p - C_V = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$.

Параметры состояния p, V и T связаны между собой уравнением состояния, поэтому их частные производные связаны между собой соотношением (см. задачу 15.5):

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -1,$$

из которого $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \Big/ \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \frac{\alpha_p}{\chi_T}$.

Подставляя полученное выражение в формулу для C_p - C_V, находим: $C_p - C_V = T\frac{\alpha_p}{\chi_T}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = TV\frac{\alpha_p^2}{\chi_T}$.

15.14. $C_p - C_V = T\dfrac{\left[\partial^2 F/(\partial T\,\partial V)\right]^2}{(\partial^2 F/\partial V^2)_T}$.

Решение. Используем формулу, полученную при решении задачи 15.13: $C_p - C_V = T\left[\left(\partial p/\partial T\right)_V \left(\partial V/\partial T\right)_p\right]$, где давление выразим через первую производную от свободной энергии $p = -\left(\partial F/\partial V\right)_T$. Тогда $\left(\partial p/\partial T\right)_V = -\partial^2 F \big/ \partial V \partial T$.

Так как p, V и T функционально связаны, используем соотношение $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -1$, из которого находим:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\frac{(\partial p/\partial T)_V}{(\partial p/\partial V)_T} = -\frac{\left(\partial^2 F/\partial V \partial T\right)}{\left(\partial^2 F/\partial V^2\right)_T}.$$

Таким образом,

$$C_p - C_V = T\frac{\left[\partial^2 F/(\partial T\,\partial V)\right]^2}{(\partial^2 F/\partial V^2)_T}.$$

15.15. $p = -\left(\dfrac{\partial F}{\partial V}\right)_T = \dfrac{RT}{V}$; $U = F + TS = C_V T$.

Решение. Исходя из выражения для полного дифференциала свободной энергии $\mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T - p\mathrm{d}V$, находим энтропию и давление системы в переменных T, V:

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = C_V \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + R\ln\left(\frac{V}{V_0}\right) - a,\ p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = \frac{RT}{V}.$$

Последнее уравнение является термическим уравнением состояния. Калорическое уравнение состояния находим из соотношения: $U = F + TS = C_V T$.

15.16. $\Delta F = \Delta U - T\Delta S = -\nu RT\ln 2 < 0.$

Решение. При расширении газа в вакуум работа не совершается, внутренняя энергия не изменяется: $(\Delta U = 0)$, а следовательно, температура остается неизменной. Процесс необратимый, изменения энтропии азота составляет $\Delta S = \nu R\ln(2V/V) = \nu R\ln 2$.

Поскольку внутренняя энергия и температура не меняются, то изменение свободной энергии $F = U - TS$ определяется только изменением энтропии: $\Delta F = \Delta U - T\Delta S = -\nu RT\ln 2 < 0.$.

15.17. $\Delta F = -\left(\dfrac{m_1}{\mu_1}\ln\dfrac{V_1+V_2}{V_1} + \dfrac{m_2}{\mu_2}\ln\dfrac{V_1+V_2}{V_2}\right)RT < 0.$

Решение. В процессе смешивания $\Delta Q = 0$ и $A = 0$, следовательно, $\Delta(U_1 + U_2) = 0$. Так как до перемешивания температуры были одинаковы, то и после смешивания температура останется прежней.

Полное изменение ΔS энтропии системы равно

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \left(\frac{m_1}{\mu_1} \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2} \right) R .$$

Поскольку внутренняя энергия и температура не меняются, изменение свободной энергии $F = U - TS$ определяется только изменением энтропии:

$$\Delta F = \Delta U - T\Delta S = -\left(\frac{m_1}{\mu_1} \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2} \right) RT < 0 .$$

15.18. $\Delta G = -\nu_1 RT \ln\left(\frac{V}{V_1}\right) - \nu_2 RT \ln\left(\frac{V}{V_2}\right) < 0.$

Решение. При смешивании внутренняя энергия идеальных газов не изменяется ($\Delta U = 0$), а следовательно, остается неизменной температура: $T = \text{const}$. При изотермическом процессе полный дифференциал потенциала Гиббса ($G = H - TS$) равен

$$\mathrm{d}G_{T=\text{const}} = \mathrm{d}(H - TS) = \mathrm{d}H - T\mathrm{d}S \quad \text{и} \quad \Delta G_{T=\text{const}} = \Delta H - T\Delta S \ .$$

Так как энтальпия является функцией состояния, её изменение равно разности значений энтальпии в конечном и начальном состояниях:

$$\Delta H = H_2 - H_1 = (U_2 + p_2V_2) - (U_1 + p_1V_1) = U_2 - U_1 +$$
$$+ p_2V_2 - p_1V_1 = \nu C_V (T_2 - T_1) + \nu R(T_2 - T_1) = \nu C_p (T_2 - T_1).$$

Поскольку при смешивания температура не изменилась, то

$$\Delta H = \nu C_p \Delta T = 0 \ \text{и} \ \Delta G = -T\Delta S \ .$$

Изменения энтропии азота и кислорода составляют

$$\Delta S_1 = \nu_1 R \ln\left(\frac{V}{V_1}\right), \quad \Delta S_2 = \nu_2 R \ln\left(\frac{V}{V_2}\right),$$

где $V = V_1 + V_2$. Изменение потенциала Гиббса равно

$$\Delta G = -\nu_1 RT \ln\left(\frac{V}{V_1}\right) - \nu_2 RT \ln\left(\frac{V}{V_2}\right) < 0.$$

Из задач 15.16–15.18 следует, что при необратимых процессах термодинамические потенциалы F и G стремятся к нулю.

15.19. $\Delta F = -\nu R \ln\left(V_2/V_1\right) = -38$ Дж .

15.20. $\Delta F = -\nu R \ln \dfrac{V_1}{V_0} = \dfrac{p_0 V_0}{T_0} \ln \dfrac{p_1}{p_0}$.

15.21. $\Delta H = \dfrac{7}{2} \nu R (T_2 - T_1)$.

Решение. Внутренняя энергия ν молей идеального газа равна $U = \nu C_V T$, изменение энтальпии, с учетом уравнения состояния $pV = \nu RT$ и $C_V + R = C_p$ равно:

$$\Delta H = \Delta U + p\Delta V = \nu(C_V \Delta T + R\Delta T) = \nu C_p \Delta T = \frac{7}{2} \nu R\,(T_2 - T_1)\,.$$

15.22. $\Delta F = \nu \left\{ \left(S_0 - C_V\right)\left(T_1 - T_2\right) - T_2 \left[C_V \ln\left(\dfrac{T_2}{T_1}\right) + R \ln\left(\dfrac{V_2}{V_1}\right) \right] \right\} =$

= 126 кДж/К.

15.23. $H = C_V T - \dfrac{2a}{V} + \dfrac{RTV}{V-b}$.

Решение. Используем выражения для внутренней энергии и давления одного моля газа Ван-дер-Ваальса:

$$U = C_V T - \frac{a}{V}, \quad p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}.$$

В результате для энтальпии получаем:

$$H = U + pV = C_V T - \frac{2a}{V} + \frac{RTV}{V-b}\,.$$

15.24. $\Delta F = \dfrac{a\,(n-1)}{nV} - RT \ln \dfrac{nV-b}{V-b}$.

Решение. Поскольку $F = U - TS$, используем выражения для внутренней энергии и энтропии одного моля газа Ван-дер-Ваальса:

$$U = C_V T - \frac{a}{V}, \quad S = S_0 + C_V \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V-b}{V_0 - b}\,.$$

В итоге, для изменения свободной энергии в процессе расширения газа при T = const получим:

$$\Delta F = \frac{a\,(n-1)}{nV} - RT\,\ln\frac{nV-b}{V-b}\,.$$

15.25. $\Delta S = \dfrac{\nu^2}{T}\left(\dfrac{a}{V_1}-\dfrac{a}{V_2}\right)-\dfrac{\Delta F}{T}.$

Решение. Внутренняя энергия ν молей газа Ван-дер-Ваальса равна $U = \nu C_V T - \nu^2 a/V$. Изменение свободной энергии в процессе расширения газа при T = const составляет

$$\Delta F = \nu^2\left(\frac{a}{V_1}-\frac{a}{V_2}\right) - T\Delta S\,,$$

откуда находим изменение энтропии газа:

$$\Delta S = \frac{\nu^2}{T}\left(\frac{a}{V_1}-\frac{a}{V_2}\right)-\frac{\Delta F}{T}\,.$$

15.26. $\Delta G = 2a\dfrac{n-1}{nV} - \dfrac{RTV\,(n-1)}{(V-b)\,(nV-b)} - RT\ln\dfrac{nV-b}{V-b}.$

Решение. При изотермическом процессе $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$.

Для определения изменения энтальпии ΔH газа воспользуемся формулой, полученной в задаче 15.23:

$$H = U + pV = C_V T - \frac{2a}{V} + \frac{RTV}{V-b}\,.$$

Изменение энтропии газа при T = const равно

$$\Delta S_{\text{ВдВ}} = C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + R\,\ln\frac{V_2-b}{V_1-b} = R\ln\frac{nV-b}{V-b}\,.$$

Для изменения потенциала Гиббса получаем:

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S = 2a\,\frac{n-1}{nV} - \frac{RTV(n-1)}{(V-b)(nV-b)} - RT\ln\frac{nV-b}{V-b}\,.$$

15.27. $F(p,T)$ и $G(p,T)$ с ростом температуры при $p = \text{const}$ уменьшается.

Решение. 1) Внутренняя энергия одного моля идеального газа равна $U = C_V T$, а энтропия

$$S(U,V) = S_0 + C_V \ln\frac{T}{T_0} + R\ln\frac{V}{V_0} = S_0 + C_p \ln\frac{T}{T_0} - R\ln\frac{p}{p_0}.$$

Следовательно, свободная энергия моля идеального газа:

$$F(p,T) = U - TS = C_V T - TS_0 - TC_p \ln\frac{T}{T_0} + RT\ln\frac{p}{p_0}.$$

Скорость ее изменения с температурой составляет

$$\left(\frac{\mathrm{d}F(p,T)}{\mathrm{d}T}\right)_p = \left(\frac{\mathrm{d}(U-TS)}{\mathrm{d}T}\right)_p = C_V - T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p - S =$$

$$= (C_V - C_p) - S = -(R+S) < 0.$$

2) Потенциал Гиббса и его дифференциал (как функции p и T) равны:

$$G(p,T) = H - TS = C_p T - TS, \quad \mathrm{d}G(p,T) = C_p \mathrm{d}T - S\mathrm{d}T - T\mathrm{d}S$$

в приближении $C_p = \mathrm{const}$ (с учетом полученного ранее выражения для энтропии и энтальпии $H = C_p T$) принимают вид:

$$G(p,T) = H - TS = T\left(C_p - S_0 + R\ln\frac{p}{p_0}\right) - C_p T \ln\frac{T}{T_0},$$

$$\mathrm{d}G(p,T) = C_p \mathrm{d}T - S\mathrm{d}T - T\mathrm{d}S = -S\mathrm{d}T + RT\frac{\mathrm{d}p}{p}.$$

Скорость изменения потенциала Гиббса с температурой (при p = const) определяется только энтропией:

$$\left(\frac{\mathrm{d}G(p,T)}{\mathrm{d}T}\right)_p = \left(\frac{\mathrm{d}(H-TS)}{\mathrm{d}T}\right)_p = C_p - T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p - S = -S < 0.$$

С ростом температуры при постоянном давлении $S > 0$, поэтому свободная энергия F и потенциал Гиббса G уменьшаются.

15.28. $S = C_V - \dfrac{\Delta F}{T_2 - T} = \dfrac{R}{\gamma - 1} + \dfrac{\Delta F}{T\left[1 - (V_1/V_2)^{\gamma-1}\right]}.$

Решение. При адиабатическом обратимом расширении энтропия газа не изменяется: в течение всего процесса $S = \mathrm{const}$ и $\Delta S = 0$.

Изменение энтропии идеального газа в процессе расширения выражается формулой:

$$\mathrm{d}S(V,T,\nu)=\nu C_V\frac{\mathrm{d}T}{T}+\frac{p}{T}\mathrm{d}V=\nu C_V\frac{\mathrm{d}T}{T}+\nu R\frac{\mathrm{d}V}{V},$$

откуда

$$\Delta S=R\ln\frac{V_2}{V_1}+C_V\ln\frac{T_2}{T}=0.$$

Из этого уравнения получаем:

$$\ln\frac{T_2}{T}=-\frac{R}{C_V}\ln\frac{V_2}{V_1}=(\gamma-1)\ln\frac{V_1}{V_2},$$

откуда находим температуру в конце расширения:

$$T_2=Te^{(\gamma-1)\ln(V_1/V_2)}=T(V_1/V_2)^{\gamma-1}.$$

При этом изменение температуры в процессе расширения газа равно $\Delta T=T_2-T=T\left[\left(V_1/V_2\right)^{\gamma-1}-1\right]<0$, а изменение внутренней энергии газа составляет: $\Delta U=C_V(T_2-T)$.

С учетом того, что в процессе $S=\mathrm{const}$ изменение свободной энергии $F=U-TS$ равно:

$$\Delta F=\Delta U-S(T_2-T)=C_V\left(T_2-T\right)-S\left(T_2-T\right),$$

откуда находим энтропию при температуре T:

$$S=C_V-\frac{\Delta F}{T_2-T}=\frac{R}{\gamma-1}+\frac{\Delta F}{T\left[1-\left(V_1/V_2\right)^{\gamma-1}\right]}.$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Некоторые физические постоянные

Число Авогадро	$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Число Лошмидта	$N_L = 2{,}69 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Универсальная газовая постоянная	$R = 8{,}31$ Дж/(моль·К)
Молярный объем идеального газа	$V_0 = 22{,}4$ л/моль
Постоянная Планка	$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
	$\hbar = h/2\pi = 1{,}0546 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Масса электрона	$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса протона	$m_p = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг
Заряд электрона	$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл
Средний радиус Земли	$R_З = 6370$ км
Масса Земли	$M_З = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг

2. Относительные атомные массы некоторых веществ

Азот	N	14	Медь	Cu	64
Аргон	Ar	40	Натрий	Na	23
Водород	H	1	Неон	Ne	20
Вольфрам	W	184	Олово	Sn	119
Гелий	He	4	Ртуть	Hg	201
Железо	Fe	56	Свинец	Pb	207
Золото	Au	197	Серебро	Ag	108
Йод	I	127	Углерод	C	12
Калий	K	38	Хлор	Cl	35,5
Кислород	O	16			

3. Некоторые интегралы

$$I = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$$

$$I_{2n} = \int_0^\infty x^{2n}\, \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}\cdot\alpha^{-n},$$

$$I_{2n+1} = \int_0^\infty x^{2n+1}\, \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\, dx = \frac{1}{2}\frac{n!}{\alpha^{n+1}}.$$

4. Плотности веществ

Газы (при норм. условиях)	Плотность ρ, кг/м^3
Азот	1,25
Аммиак	0,77
Водород	0,09
Воздух	1,293
Кислород	1,43
Метан	0,72
Углекислый газ	1,98
Хлор	3,21

Жидкости	Плотность ρ, кг/м^3
Бензол	880
Вода	1000
Ртуть	13600
Спирт этиловый	790
Эфир (20ºС)	714

Твердые вещества	Плотность ρ, кг/м^3
Алюминий	2700
Вольфрам	19100
Гуммигут	1200
Железо (сталь)	7800
Лед	916
Медь	8900
Натрий	970
Никель	8900
Олово	7400
Свинец	11300
Серебро	10500
Титан	4500
Цинк	7000

5. Физические параметры газов при нормальных условиях

Вещество	Коэф. теплопроводности λ, 10^{-3} Вт/(м·К)	Коэф. вязкости η, 10^{-6} Па·с	Эффективный диаметр молекулы *d*, нм
He	141,5	18,9	0,20
Ar	16,2	22,1	0,35
H_2	168,4	8,4	0,27
N_2	24,3	16,7	0,37
O_2	24,4	19,2	0,35
CO_2	23,2	14,0	0,40
H_2O (пары)	15,8	9,0	0,30
Воздух	24,1	17,2	0,35

6. Некоторые внесистемные единицы

1 атм = $1{,}013 \cdot 10^5$ Па; 1 л = 10^{-3}м^3,

1 год = $3{,}11 \cdot 10^7$с.

7. Постоянные Ван-дер-Ваальса газов

Вещество	*a*, м^{6}Па/моль^2	*b*, 10^{-6}м^3/моль
Азот N_2	0,135	38,62
Водород H_2	0,0245	26,653
Гелий He	0,00338	23,606
Углекислый газ CO_2	0,361	42,84
Аргон Ar	0,1344	32,213
Кислород O_2	0,136	31,70
Метан CH_4	0,2256	42,72
Хлор Cl_2	0,650	56,24
Этан C_6H_6	0,5427	64,187
Пары воды H_2O	0,5451	30,41

8. Физические параметры жидкостей

Вещество	Удельная теплоемкость c при норм. условиях, Дж/(кг·К)	Удельная теплота парообразования $\overline{L}_{\text{пар}}$ при норм. условиях, Дж/г	Коэф. поверхностного натяжения σ при норм. атм. давлении, мН/м
Вода	4180	2250	73
Спирт	2420	853	22
Ртуть	140	284	490

9. Физические параметры твердых тел

Вещество	Удельная теплоемкость c при нормальных условиях, Дж/(кг·К)	Удельная теплота плавления $\overline{L}_{\text{пл}}$ при норм. условиях, Дж/г	Температура плавления $t_{\text{пл}}$, ºС
Лед	2090	330	0
Алюминий	900	393	660
Железо	460	270	1538
Медь	390	213	1085
Натрий	1230	113	98
Олово	230	59	232
Свинец	130	25	327
Серебро	230	87	962

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гинзбург В.Л., Левин Л.М., Рабинович М.С., Сивухин Д.В., Четверикова Е.С.* Сборник задач по общему курсу физики. Ч.2. Оптика. Молекулярная и атомная физика. – М.-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. 280 с.

2. *Миронова Г.А., Брандт Н.Н., Васильева О.Н., Салецкий А.М.* Молекулярная физика и термодинамика. Разработка семинарских занятий. – М.: Физический факультет МГУ, 2014. 752 с.

3. *Миронова Г.А., Брандт Н.Н., Васильева О.Н., Салецкий А.М.* Молекулярная физика и термодинамика. Методика решения задач. – М.: Физический факультет МГУ, 2016. 416 с.

4. *Миронова Г.А., Брандт Н.Н., Салецкий А.М.* Молекулярная физика в вопросах и задачах. – СПб.: Лань, 2012. 480 с.

5. *Кассандрова О.Н., Матвеев А.Н., Попов В.В.* Разработка семинаров по молекулярной физике. – М.: Изд-во Московского университета, 1982. 192 с.

6. *Матвеев А.Н.* Молекулярная физика. – М.: Высшая школа, 1981. 400 с.

7. *Алешкевич В.А.* Курс общей физики. Молекулярная физика – М.: Физматлит, 2016. 312 с.

8. *Иродов И.Е.* Задачи по общей физике. – М.: Наука, 1988. 416 с.

9. Сборник задач по общему курсу физики. Термодинамика и молекулярная физика / Под ред. Д.В. Сивухина. – М.: Физматлит, Лань, 2006. 176 с.

Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике. – М.: Наука, 1982. 272 с.

Учебное издание

ВАСИЛЬЕВА Ольга Николаевна
САЛЕЦКИЙ Александр Михайлович

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА.
СБОРНИК ЗАДАЧ

Подписано в печать 17.11.2017.
Формат 60x90/16. Объем 25 п. л. Тираж 200 экз.
Заказ №

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
119991 Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 2