

Лекция 23

1. Отражение и преломление волн на границе раздела двух сред.
2. Основные случаи граничных условий.
3. Стоячие волны.
4. Нормальные колебания стержня, струны, столба газа.
5. Акустические резонаторы.

Отражение и преломление волн на границе раздела двух сред

- Пусть имеются две среды 1 и 2, которые соприкасаются вдоль плоскости $x=0$.

- **Среда 1.** Параметры среды:

- $\rho_1, c_1, \quad Z_1 = \rho_1 \cdot c_1,$

- $k_1 = \omega / c_1, \quad \lambda_1 = c_1 \cdot T$

Отражение и преломление волн на границе раздела двух сред

- Среда 2. Параметры среды:

- $\rho_2, c_2, Z_2 = \rho_2 \cdot c_2,$

- $k_2 = \omega / c_2, \lambda_2 = c_2 \cdot T$

Отражение и преломление волн на границе раздела двух сред

- Координата границы раздела
- $x=0$.
- Среда 1: $x < 0$
- Среда 2: $x > 0$

Отражение и преломление волн на границе раздела двух сред

- Рассмотрим **плоскую волну**, распространяющуюся в направлении оси Ox в среде 1 и падающую на границу раздела $x=0$:

- $$y_{\text{п}} = A_1 \cdot \exp(i(\omega t - k_1 x))$$

- A_1 — амплитуда волны, должна быть задана
- k_1 — модуль волнового вектора

Отражение и преломление волн на границе раздела двух сред

- На **границе раздела** двух сред возникают
- 1) **отраженная** волна в среде 1
- $y_{\text{отр}} = B_1 \cdot \exp(i(\omega t + k_1 x))$
- B_1 — амплитуда отраженной волны, должна определяться.
- k_1 — модуль волнового вектора

Отражение и преломление волн на границе
раздела двух сред

2) **прошедшая** волна в среде 2

- $y_{\text{пр}} = A_2 \cdot \exp(i(\omega t - k_2 x))$
- A_2 — амплитуда прошедшей волны, должна определяться.
- k_2 — модуль волнового вектора

Основные случаи граничных условий

- **Условия на границе раздела** двух сред (**на примере струны**) для поперечных волн.
- 1. **Геометрическое** условие
- (условие непрерывности струны, ε – малая величина).
- В силу **непрерывности струны** ее **смещения** $y(x,t)$ **слева и справа** от границы раздела $x=0$ **одинаковы** в любой момент времени t :
- $$y(0 - \varepsilon, t) = y(0 + \varepsilon, t)$$

Основные случаи граничных условий

- **Условия на границе раздела** двух сред
- (на примере **струны**).
- 2. **Динамическое** условие.
- **Составляющие** $T \cdot \partial y / \partial x$ **силы**
- в **поперечном** направлении
- **слева и справа** от границы раздела $x=0$
одинаковы по величине
- в любой момент времени t и
- **противоположно направлены:**
- $$\partial y / \partial x|_{0-\varepsilon}(t) = \partial y / \partial x|_{0+\varepsilon}(t)$$

Основные случаи граничных условий

- **Условия на границе раздела** двух сред
- (на примере **струны**).
- 2. **Динамическое** условие.
- На **малый** участок, размеры и масса которого в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ стремятся к нулю, должна действовать результирующая **сила**, равная **нулю**, иначе ускорение этого участка будет **бесконечно велико**.

Отражение и преломление волн на границе раздела двух сред

- Из **условия 1** следует, что **смещения** $y(x,t)$ **слева и справа** от границы раздела $x=0$ **одинаковы**:

- $$y_{\text{п}} + y_{\text{отр}} = y_{\text{пр}}$$
- $$A_1 \cdot \exp(i(\omega t - k_1 x)) + B_1 \cdot \exp(i(\omega t + k_1 x)) = A_2 \cdot \exp(i(\omega t - k_2 x))$$

На границе раздела при $x=0$ в любой момент времени t :

$$A_1 + B_1 = A_2 \quad (1)$$

Отражение и преломление волн на границе раздела двух сред

- Из **условия 2** следует, что проекции на ось Оу **сил натяжения**, действующих на концы малого участка, по величине **одинаковы**:

$$T \cdot \partial(y_{\text{п}} + y_{\text{отр}}) / \partial x = T \cdot \partial y_{\text{пр}} / \partial x$$

- Оператор $T \cdot \partial / \partial x$ действует на обе части равенства

$$A_1 \cdot \exp(i(\omega t - k_1 x)) + B_1 \cdot \exp(i(\omega t + k_1 x)) = A_2 \cdot \exp(i(\omega t - k_2 x)).$$

Отражение и преломление волн на границе раздела двух сред

Дифференцируя левые и правые части, получаем

$$T \cdot \partial / \partial x (A_1 \cdot \exp i(\omega t - k_1 x) + B_1 \cdot \exp i(\omega t + k_1 x)) = \\ -i \cdot k_1 \cdot T \cdot A_1 \cdot \exp(i(\omega t - k_1 x)) + i \cdot k_1 \cdot T \cdot B_1 \cdot \exp i(\omega t + k_1 x).$$

$$T \cdot \partial / \partial x A_2 \cdot \exp i(\omega t - k_2 x) = \\ = -i \cdot k_2 \cdot T \cdot A_2 \cdot \exp i(\omega t - k_2 x).$$

На границе раздела при $x=0$ имеем:

$$-k_1 \cdot T \cdot A_1 + k_1 \cdot T \cdot B_1 = -k_2 \cdot T \cdot A_2 \quad (2)$$

Отражение и преломление волн на границе
раздела двух сред
Из **условий** на **границе раздела** получена
система уравнений для амплитуд B_1 и A_2 :

$$A_1 + B_1 = A_2 \quad (1)$$

$$-k_1 \cdot T \cdot A_1 + k_1 \cdot T \cdot B_1 = -k_2 \cdot T \cdot A_2 \quad (2)$$

Преобразуем произведение $k \cdot T$,
используя определения $T/\rho = c^2$, $c \cdot \rho = Z$:
 $k \cdot T = (\omega/c) \cdot T \cdot \rho / \rho = (\omega/c) \cdot c^2 \cdot \rho = \omega \cdot Z$. Для двух
сред имеем: $k_1 \cdot T = \omega \cdot Z_1$, $k_2 \cdot T = \omega \cdot Z_2$.

Отражение и преломление волн на границе раздела двух сред

Используя волновые сопротивления двух сред, получаем **систему уравнений** для амплитуд B_1 и A_2 :

$$A_1 + B_1 = A_2$$

$$-Z_1 \cdot A_1 + Z_1 \cdot B_1 = -Z_2 \cdot A_2$$

Умножим первое уравнение на Z_2 и прибавим левые и правые части к соответствующим частям второго. Получим для амплитуды отраженной волны:

$$B_1 = A_1 \cdot (Z_1 - Z_2) / (Z_1 + Z_2)$$

Отражение и преломление волн на границе
раздела двух сред

Система уравнений для амплитуд B_1 и A_2 :

$$A_1 + B_1 = A_2$$

$$-Z_1 \cdot A_1 + Z_1 \cdot B_1 = -Z_2 \cdot A_2$$

Умножим первое уравнение на $(-Z_1)$ и прибавим левые и правые части к соответствующим частям второго. Получим для амплитуды прошедшей волны:

$$A_2 = A_1 \cdot 2 \cdot Z_1 / (Z_1 + Z_2)$$

Отражение и преломление волн
на границе раздела двух сред
Амплитуды отраженной и
прошедшей волн
определяются амплитудой
падающей волны и **волновыми**
сопротивлениями двух сред:

$$B_1 = A_1 \cdot (Z_1 - Z_2) / (Z_1 + Z_2)$$

$$A_2 = A_1 \cdot 2 \cdot Z_1 / (Z_1 + Z_2)$$

Отражение и преломление волн
на границе раздела двух сред
Формулы для амплитуд

$$B_1 = A_1 \cdot (Z_1 - Z_2) / (Z_1 + Z_2)$$

$$A_2 = A_1 \cdot 2 \cdot Z_1 / (Z_1 + Z_2)$$

иллюстрируют целесообразность
введения понятия

ВОЛНОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ $Z = \rho \cdot c$.

Отражение и преломление волн на границе раздела двух сред

Определения:

1. **Амплитудный** коэффициент **отражения**:

$$R_{\text{отр}} = B_1 / A_1 = (Z_1 - Z_2) / (Z_1 + Z_2)$$

2. **Амплитудный** коэффициент **прохождения**:

$$R_{\text{пр}} = A_2 / A_1 = 2 \cdot Z_1 / (Z_1 + Z_2)$$

Отражение и преломление волн на границе раздела двух сред

Определения:

1. Коэффициент **отражения** энергии:

$$ER_{\text{отр}} = (B_1/A_1)^2 = (Z_1 - Z_2)^2 / (Z_1 + Z_2)^2$$

2. Коэффициент **прохождения**
энергии:

$$ER_{\text{пр}} = (A_2/A_1)^2 = 4 \cdot Z_1^2 / (Z_1 + Z_2)^2$$

Отражение и преломление волн на границе раздела двух сред

Анализ формул для амплитуд:

$$B_1 = A_1 \cdot (Z_1 - Z_2) / (Z_1 + Z_2)$$

$$A_2 = A_1 \cdot 2 \cdot Z_1 / (Z_1 + Z_2)$$

1. Нет границы, одна среда: $Z_2 = Z_1$

$$B_1 = 0 \quad \text{нет отраженной волны,}$$

$$A_2 = A_1 \quad \text{амплитуды прошедшей и падающей волн равны.}$$

Отражение и преломление волн на границе раздела двух сред

$$B_1 = A_1 \cdot (Z_1 - Z_2) / (Z_1 + Z_2)$$

$$A_2 = A_1 \cdot 2 \cdot Z_1 / (Z_1 + Z_2)$$

Анализ:

1. Нет границы: $Z_2 = Z_1$

$R_{\text{отр}} = 0$ нет отраженной волны,

$R_{\text{пр}} = 1$ амплитуды прошедшей и падающей волн равны.

Отражение и преломление волн на границе раздела двух сред

$$B_1 = A_1 \cdot (Z_1 - Z_2) / (Z_1 + Z_2)$$

$$A_2 = A_1 \cdot 2 \cdot Z_1 / (Z_1 + Z_2)$$

Анализ:

2. **Конец** $x=0$ жестко **закреплен**: $Z_2 \rightarrow \infty$

$$B_1 = -A_1 \quad \text{фаза отраженной}$$

волны **изменяется** на π ,

$$A_2 = 0 \quad \text{нет прошедшей волны.}$$

Отражение и преломление волн на границе раздела двух сред

$$B_1 = A_1 \cdot (Z_1 - Z_2) / (Z_1 + Z_2)$$

$$A_2 = A_1 \cdot 2 \cdot Z_1 / (Z_1 + Z_2)$$

Анализ:

3. **Конец** $x=0$ **свободен**: $Z_2 \rightarrow 0$

$B_1 = A_1$ **фаза отраженной** волны **не изменяется**,

$A_2 = 2 \cdot A_1$ «хлопок» на конце струны (кнута) из-за увеличения амплитуды.

Основные случаи граничных условий

- **Условия на границе раздела** двух сред (на примере **трубы с газом**) для **продольных** волн. На границе раздела $x=0$ непрерывны:
 - 1. **скорости частиц** $(v(t)|_{0-\varepsilon} = v(t)|_{0+\varepsilon})$:
 - $\partial \xi / \partial t|_{0-\varepsilon} = \partial \xi / \partial t|_{0+\varepsilon}$
 - 2. **избыточное акустическое давление**:
 - $\Delta p(t)|_{0-\varepsilon} = \Delta p(t)|_{0+\varepsilon}$

Основные случаи граничных условий

- **Условия на границе раздела** двух сред (на примере **тонкого стержня**) для **продольных** волн. На границе раздела $x=0$ непрерывны:
 - 1. **скорости частиц** $(v(t)|_{0-\varepsilon} = v(t)|_{0+\varepsilon})$:
 - $\partial \xi / \partial t|_{0-\varepsilon} = \partial \xi / \partial t|_{0+\varepsilon}$
 - 2. **напряжения** $(\sigma(x,t)|_{0-\varepsilon} = \sigma(x,t)|_{0+\varepsilon})$:
 - $E \cdot \partial \xi / \partial x|_{0-\varepsilon} = E \cdot \partial \xi / \partial x|_{0+\varepsilon}$

Стоячие волны

Рассмотрим **объем**, **ограниченный**

- **двумя** границами раздела:

- 1) $x=0$,

- 2) $x=l$.

- Импеданс Z **среды** конечен.

- **Слева** от границы $x=0$ и

- **справа** от границы $x=l$

- импеданс бесконечно велик.

- $Z \rightarrow \infty$.

Стоячие волны

- 1. В среде **возбуждается** плоская
- волна (зависимость от одной
- координаты в пределах $0 < x < l$):

- $$\xi_{\text{п}} = \xi_0 \cdot e^{i(\omega \cdot t - k \cdot x)}$$

Стоячие волны

- 2. На границе $x=l$ возникает **отраженная** волна

- $$\xi_{\text{отр}} = -\xi_0 \cdot e^{i(\omega \cdot t + k \cdot x)}$$

- Фаза **отраженной** волны смещена на π !

- $$e^{i \cdot \pi} = \cos \pi + i \cdot \sin \pi = -1$$

Стоячие волны

- 3. В среде происходит интерференция, сложение двух волн:

- $$\xi = \xi_{\text{п}} + \xi_{\text{отр}} =$$
- $$= \xi_0 \cdot e^{i(\omega \cdot t - k \cdot x)} - \xi_0 \cdot e^{i(\omega \cdot t + k \cdot x)} =$$
- $$= \xi_0 \cdot e^{i\omega t} \cdot (e^{-ikx} - e^{ikx})$$

Стоячие волны

3. Сумма двух волн:

- $\xi = \xi_{\text{п}} + \xi_{\text{отр}} =$
- $= \xi_0 \cdot e^{i\omega t} \cdot (e^{-ikx} - e^{ikx}) =$
- $= \xi_0 \cdot e^{i\omega t} \cdot (\cos kx - i \cdot \sin kx -$
- $\quad - \cos kx - i \cdot \sin kx)$
- $= -2 \cdot \xi_0 \cdot i \cdot \sin kx \cdot e^{i\omega t}$

Стоячие волны

4. **Условие** на границе $x=l$:

- $\xi(l,t) = -2 \cdot \xi_0 \cdot i \cdot \sin kl \cdot e^{i\omega t} = 0,$

или $\sin kl = 0$

- $(\omega/c) \cdot l = \omega \cdot (l/c) = n \cdot \pi$

- $n = 1, 2, 3, \dots$

- 0 исключается, нет волны

Стоячие волны

- 5. В среде возможны волны с **собственными** (нормальными) частотами:

- $\omega_n = n \cdot (\pi \cdot c / l)$
- $n = 1, 2, 3, \dots$
- (целое число $\lambda/2$)

Стоячие волны

- 0) **Основной** тон: $n=1$
- $\omega_1 = \pi \cdot c / l, \quad l = \lambda / 2.$
- На длине l размещается
- **половина длины волны** $\lambda / 2.$
- 1) **Первый** обертон: $n=2$
- $\omega_2 = 2\pi \cdot c / l, \quad l = \lambda,$
- На длине l размещается
- **длина волны** $\lambda.$

Стоячие волны

- 2) **Второй** обертон: $n=3$
 - $\omega_3 = 3\pi \cdot c/l,$ $l = 3\lambda/2$
 - На длине l размещается
 - $3/2$ **длины волны** λ .
- 3) Третий обертон: $n=4$
- $\omega_4 = 4\pi \cdot c/l,$ $l = 2\lambda$
 - На длине l размещается
 - 2 **длины волны** λ .
 - и т. д. ...

Стоячие волны

В **каждом сечении** x ($0 < x < l$)

среды частички совершают

колебания **по закону**):

$$\xi = 2 \cdot \xi_0 \cdot \sin(\omega \cdot x / c) \cdot \sin \omega t$$

Частоты $\omega_n = n \cdot (\pi \cdot c / l)$,

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

- Возникает ***стоячая волна***.

Стоячие волны

Амплитуда колебаний

изменяется от точки к

точке по закону:

$$A=2\cdot\xi_0\cdot\sin(\omega\cdot x/c)$$

$$\omega_n=n\cdot(\pi\cdot c/l), \quad n=1,2,3,\dots$$

Стоячие волны

Узлы смещений — это

точки, в которых

амплитуда A

обращается в ноль:

$$A=0.$$

Эти точки остаются в

покое.

Стоячие волны

Амплитуда смещений

увеличивается от нуля у узла до максимального значения:

$$A=2\cdot\xi_0$$

В **пучности** между узлами и *уменьшается до нуля к следующему узлу.*

Стоячие волны

Пучности смещений —

это точки, в которых

амплитуда имеет

максимальное

значение:

$$A = 2 \cdot \xi_0$$

Стоячие волны

Узлы смещений, как и **пучности**, расположены друг относительно друга на расстоянии $\lambda/2$.

Стоячие волны

Фаза колебаний

для всех точек **между**

двумя **соседними узлами**

одна и та же.

Стоячие волны

При **переходе**
через узел
фаза колебаний
изменяется на π .

Стоячие волны в линейной системе

Стоячие волны — это колебания каждой точки системы с постоянной амплитудой, изменяющейся от нуля в узле смещений до максимального значения в пучности и снова уменьшающейся до нуля в следующем узле.

Стоячие волны в линейной системе

Точки системы

между соседними узлами

колеблются в фазе,

которая изменяется на π

при переходе через узел.

Стоячие волны в линейной системе

4'. Новое **условие** $Z=0$

(свободный конец) на границе
 $x=l$:

- $\xi(l,t) = -2 \cdot \xi_0 \cdot i \cdot \sin kl \cdot e^{i\omega t} = \xi_{\text{макс}},$

ИЛИ

$$\sin kl = 1$$

Стоячие волны в линейной системе

- 5'. Согласно условию $\sin kl = 1$

- в среде ВОЗМОЖНЫ ВОЛНЫ С

собственными

(нормальными) частотами:

$$(\omega/c) \cdot l = \omega \cdot (l/c) = n \cdot \pi + \pi/2$$

- $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

(целое число $\lambda/2$ плюс $\lambda/4$)

Нормальные колебания стержня, струны, столба газа

- 1. Нормальные колебания
стержня.
- 2. Нормальные колебания
струны.
- 3. Нормальные колебания
столба газа.
- Труба Рубенса.

Нормальные колебания тел.

- 1. **Фигуры Хладни**
 - на поверхности
 - 1) овала
 - 2) четырехугольника
 - 3) треугольника
- 2. Тазик из китайского монастыря эпохи династии Сун (10 век н.э.)
- 3. Объемные резонаторы.

Акустические резонаторы

- **Резонатор Гельмгольца** –
сосуд шаровой формы с
узким горлом –
характеризуется
единственной частотой
собственных (нормальных)
колебаний объема воздуха.

Акустические резонаторы

- Резонатор Гельмгольца.
- V – объем сосуда,
- S – сечение горловины,
- l – длина горловины,
- ρ – плотность воздуха.
- $m = \rho S l$ – масса столба воздуха в горловине.
- Δp – акустическое давление.

Акустические резонаторы

- Уравнение Ньютона для столба воздуха
- в горловине резонатора:
- $ma=F$
- S – сечение горловины,
- l – длина горловины,
- ρ – плотность воздуха

Акустические резонаторы

- *Масса* столба: $m = \rho \cdot S \cdot l$
- *Смещение* столба: x
- *Ускорение*: $a = d^2x/dt^2$
- *Сила*: $F = \Delta p \cdot S$
- $\Delta p = c^2 \cdot \Delta \rho = c^2 \cdot \rho \cdot \Delta \rho / \rho,$
- $\Delta \rho / \rho = -\Delta V / V = -S \cdot x / V$
- $F = \Delta p \cdot S = -c^2 \cdot S^2 \cdot x \cdot \rho / V$

Акустические резонаторы

- **Уравнение Ньютона** для столба воздуха в горловине:

- $\rho \cdot S \cdot l \cdot d^2x/dt^2 = -c^2 \cdot S^2 \cdot x \cdot \rho / V$

- **Уравнение колебаний:**

- $d^2x/dt^2 + \omega_0^2 \cdot x = 0$

- $\omega_0^2 = c^2 \cdot S / (V \cdot l)$

Акустические резонаторы

Частота

- резонатора *Гельмгольца*:

- $\omega_0 = c \cdot \sqrt{S / (V \cdot l)}$

- Больше объем —

- меньше частота

Акустические резонаторы

Частота

- резонатора *Гельмгольца*:
- $\omega_0 = c \cdot \sqrt{S/(V \cdot l)}$
- Для газа с меньшей плотностью (*гелиевая смесь*) скорость звука $c = \sqrt{\gamma \cdot p_0 / \rho_0}$
- и частота увеличиваются.