Лекция 16

- 1. Свободные колебания систем с одной степенью свободы.
- 2. Гармонические колебания.
- 3. Сложение гармонических колебаний.
- 4. Затухающие колебания. Коэффициент затухания и логарифмический коэффициент (декремент) затухания.
- 5. Добротность колебательной системы.

Свободные колебания систем
с одной степенью свободы.
Гармонические колебания.

- **Гармоническим осциллятором**
- называется система, в которой могут возникнуть и поддерживаться ***малые колебания*** относительно
- **положения равновесия**.

Свободные колебания систем с одной степенью свободы. Гармонические колебания.

- **Периодическим**
- называется движение,
- закон которого удовлетворяет соотношению:
- $$x(t)=x(t+T)$$
- T – **период** движения.

Свободные колебания систем с одной степенью свободы. Гармонические колебания.

- Система совершает малые **гармонические** колебания, если закон движения – **гармоническая функция**.
- $x(t)=x_o \cdot \sin(\omega t+\varphi)$
- x_o – амплитуда колебаний,
- ω – круговая частота колебаний,
- φ – начальная фаза колебаний.

Свободные колебания систем с одной степенью свободы

- **Собственными** (свободными) называются такие колебания, которые возникают в системе в результате **внешнего** воздействия, после которого
- колебания поддерживаются системой, *предоставленной самой себе*.

Свободные колебания систем с одной степенью свободы

Полная энергия E в положении равновесия x_0 равна сумме кинетической T и потенциальной $U(x_0)$ энергий:

- $$E=T+U(x_0)$$

Если система **выведена** из положения равновесия в новое x, то:

энергия E изменится за счет обоих слагаемых: $E=T+U(x)$

Свободные колебания систем с одной степенью свободы

- Границы движения определяются законом сохранения энергии (кинетическая энергия на границе переходит в потенциальную):

$$E=U(x)$$

Решение этого уравнения определяет границы движения: $x_{мин}$, $x_{макс}$

Пример. Шарик массы m, закрепленный в начале координат на пружине жесткости k: $U(x)=k\cdot x^2/2=E$, $x_{1,2}=+-\sqrt{(2\cdot E/k)}$

Свободные колебания систем с одной степенью свободы

Если минимум потенциальной энергии $U(x_0)$ достигается в точке x_0, то сделаем замену переменных

- $x' = x - x_0$

(перенос начала координат в точку x_0). Опускаем штрих, чтобы упростить. Новое x соответствует x'

- $U(x_0) \to U(0)$, $U(x') \to U(x)$,

Свободные колебания систем с одной степенью свободы

- Разложим потенциальную энергию U(x) в ряд Тейлора
- в окрестности положения равновесия (точки 0):
- $U(x)=U(0) + U'(x)|_{x=0}\cdot x +$
- $+(1/2)\cdot U''(x)|_{x=0}\cdot x^2 +$
- $+\ldots$

Свободные колебания систем с одной степенью свободы

- Отметим:
- 1. Функция $U(x)$ – без особенностей
- 2. Точка $x=0$ – положение *устойчивого* **равновесия**
- 3. Малые колебания: $x^2 << x$, слагаемые x^3 в степени 3 и выше отбрасываем

Свободные колебания систем с одной степенью свободы

- 4. **Нормировка**
- потенциальной энергии:
- $U(0)=0$
- 5. $U'(x)|_{x=0}=0$
- (касательная горизонтальна)
- 6. Обозначим:
- $U''(x)|_{x=0}=k$

Свободные колебания систем с одной степенью свободы

- 7. Потенциальная энергия:
- $U(x)=k\cdot x^2/2$
- 8. Сила:
- $F(x)= - dU(x)/dx= - k\cdot x.$

Свободные колебания систем с одной степенью свободы

- Сила:
- $F(x) = -dU(x)/dx = -k \cdot x.$
- Если $x>0$, то сила $F(x)<0$
- Если $x<0$, то сила $F(x)>0$

Сила $F(x)$ ***возвращает*** систему в положение равновесия:

положение равновесия **устойчиво**.

Свободные колебания систем с одной степенью свободы

- 9. Уравнение **движения**:
- $m \cdot d^2x/dt^2 = -k \cdot x$
- 10. Обозначение: $\omega_0^2 = k/m$
- ω_0 – круговая частота свободных колебаний
- Уравнение **колебаний**:
- $d^2x/dt^2 + \omega_0^2 \cdot x = 0$

Свободные колебания систем с одной степенью свободы

- 11. **Решение** уравнения колебаний (проверить подстановкой) - закон движения:
- $$x(t)=A\cdot\sin(\omega_0 t) + B\cdot\cos(\omega_0 t)$$
- Две постоянные:
- $$A \text{ и } B.$$
- Определим:
- $$x_0=\sqrt{(A^2+B^2)}$$
- $$\cos\varphi=A/\sqrt{(A^2+B^2)}$$
- $$\sin\varphi=B/\sqrt{(A^2+B^2)}$$
-

Свободные колебания систем с одной степенью свободы

- Решение:
- $$x(t)= x_0 \cdot \sin(\omega_0 t+\varphi)$$
- x_0 – амплитуда колебаний
- $\omega_0 t+\varphi$ – фаза колебаний
- φ – начальная фаза колебаний
- ω_0 – круговая частота

  $T=2\pi/\omega_0$ – период колебаний
- $v=1/T$ – частота колебаний
- Также решение:
- $$x(t)=x_0 \cdot \cos(\omega_0 t+\varphi_1)$$

Свободные колебания систем с одной степенью свободы

- Решение:
- $x(t)=x_0 \cdot \sin(\omega_0 t+\varphi)$
- Две постоянные:
- x_0 – амплитуда колебаний,
- φ – начальная фаза колебаний.

Свободные колебания систем с одной степенью свободы

- Два **начальных условия**:
- 1. Начальное смещение:
- $x_{t=0}=x_0 \cdot \sin(\varphi)$
- 2. Начальная скорость:
- $v_0=dx/dt_{t=0}=x_0 \cdot \omega_0 \cdot \cos(\varphi)$

Свободные колебания систем с одной степенью свободы

- Два **начальных условия** для определения двух постоянных:
- Начальная фаза:
- $tg(\varphi)=x_{t=0}\cdot\omega_0/v_0$
- Амплитуда:
- $x_0=\sqrt{((x_{t=0})^2+(v_0/\omega_0)^2)}$

Свободные колебания систем с одной степенью свободы

- Решение в комплексном виде:
- $$X(t)=X_k \cdot \exp(i\omega_0 t)$$
- Комплексная амплитуда
- $$X_к=X_0 \cdot \exp(i\varphi)$$
- Формула Эйлера:
- $$\exp(i\varphi)=\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$$

Свободные колебания систем с одной степенью свободы

- Смещение:
- $$x(t)=x_0\cdot\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

Свободные колебания систем с одной степенью свободы

- Смещение:
- $x(t)=x_0 \cdot \sin(\omega_0 t+\varphi)$
- Скорость: амплитуда $v_0=x_0 \cdot \omega_0$
- $x'(t)=x_0 \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t+\varphi)=$
- $=v_0 \cdot \sin(\omega_0 t+\varphi+\pi/2)=$
- $=v_0 \cdot \sin(\omega_0 t+\varphi+\pi/2)$

Опережает смещение по фазе на $\pi/2$

Свободные колебания систем с одной степенью свободы

- Смещение:
- $x(t)=x_0\cdot\sin(\omega_0 t+\varphi)$
- Ускорение: амплитуда $a_0=x_0\cdot\omega_0{}^2$
- $x''(t)=-x_0\cdot\omega_0{}^2\cdot\sin(\omega_0 t+\varphi)=$
- $=a_0\cdot\sin(\omega_0 t+\varphi+\pi)$
- ***Опережает*** смещение по фазе на π, а скорость – на π/2.

Свободные колебания систем с одной степенью свободы

- Смещение:
- $$x(t)=x_0\cdot\sin(\omega_0 t+\varphi)$$
- Скорость:
- $x'(t)=x_0\cdot\omega_0\cdot\cos(\omega_0 t+\varphi)=v_0\cdot\sin(\omega_0 t+\varphi+\pi/2)$
- ***Опережает*** смещение по фазе на $\pi/2$
- Ускорение:
- $x''(t)= -x_0\cdot\omega_0^2\cdot\sin(\omega_0 t+\varphi)=a_0\cdot\sin(\omega_0 t+\varphi+\pi)$
- ***Опережает*** смещение по фазе на π

Свободные колебания систем с одной степенью свободы

- **Кинетическая** энергия:
- $T=m\cdot v^2/2=m\cdot x_0^2\cdot\omega_0^2\cdot\cos^2(\omega_0 t+\varphi)/2$
- **Потенциальная** энергия:
- $U=k\cdot x^2/2=k\cdot x_0^2\cdot\sin^2(\omega_0 t+\varphi)/2$
- Сумма энергий **постоянна**
- и равна полной энергии E:
- $E=T+U=k\cdot x_0^2/2$

Свободные колебания систем с одной степенью свободы

- Средняя кинетическая энергия за период:
- $\langle T\rangle = m\cdot x_0^2\cdot\omega_0^2\cdot\langle\cos^2(\omega_0 t+\varphi)\rangle/2 =$
- $= k\cdot x_0^2/4$
- Средняя потенциальная энергия за период:
- $\langle U\rangle = k\cdot x_0^2\cdot\langle\sin^2(\omega_0 t+\varphi)\rangle/2 = k\cdot x_0^2/4$

Свободные колебания систем с одной степенью свободы

Равенство средних за период величин кинетической и потенциальной энергий:

- $<T>=<U>=k\cdot x_0^2/4$
- Сумма средних энергий равна полной энергии:
- $<T>+<U>=k\cdot x_0^2/2=E$

Свободные колебания систем с одной степенью свободы

- Кинетическая энергия:
- $T = m \cdot v2/2 = m \cdot x_0^2 \cdot \omega_0^2 \cdot \cos^2(\omega_0 t + \varphi)/2 =$
- $= m \cdot x_0^2 \cdot \omega_0^2 \cdot (1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi))/4$
- Потенциальная энергия:
- $U = k \cdot x^2/2 = k \cdot x_0^2 \cdot \sin^2(\omega_0 t + \varphi)/2 =$
- $= k \cdot x_0^2 \cdot (1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi))/4$
- Вывод: частота колебаний энергии $2\omega_0$.
- Колебания кинетической и потенциальной энергий происходят
- с **удвоенной частотой** в *противофазе*.

Математический маятник

- Уравнение движения (угол φ мал):
- $$m \cdot l^2 \cdot d^2\varphi/dt^2 = -m \cdot g \cdot l \cdot \varphi$$
- Уравнение колебаний:
- $d^2\varphi/dt^2 + (g/l) \cdot \varphi = 0$, $d^2\varphi/dt^2 + \omega^2 \cdot \varphi = 0$
- Круговая частота:
- $$\omega^2 = g/l$$
- Период:
- $$T = 2\pi\sqrt{(l/g)}$$

Физический маятник

- Уравнение движения (угол φ мал):
- $J\cdot d^2\varphi/dt^2 = -m\cdot g\cdot a\cdot\varphi$
- a – расстояние от оси до центра масс.
- Уравнение колебаний:
- $d^2\varphi/dt^2 + (m\cdot g\cdot a/J)\cdot\varphi = 0$
- $d^2\varphi/dt^2 + \omega^2\cdot\varphi = 0$

Круговая частота:

- $\omega^2 = m\cdot g\cdot a/J$
- Период:
- $T = 2\pi\sqrt{(J/(m\cdot g\cdot a))}$

Физический маятник

- Приведенная длина физического маятника
- $$l = J/(m \cdot a)$$
- По теореме Гюйгенса
- $$J = J_0 + m \cdot a^2 \qquad (1)$$
- 1. Положим (r_0 – радиус инерции):
- $$J_0 = m \cdot r_0^2$$
- 2. Поделим (1) на ($m \cdot a$):
- $$l = a + r_0^2/a$$
- 3. Определим новую точку подвеса на расстоянии b по другую сторону от центра масс:
- $$b = r_0^2/a \qquad (2)$$

Физический маятник

- 4. Приведенная длина
- $$l=a+b$$
- Покажем, что эти две точки являются взаимными (сопряженными).
- Для взаимных точек подвеса периоды колебаний одинаковы.
- 5. Для новой точки подвеса:
- $$l'=b+r_0^2/b \qquad (3)$$

Физический маятник

- 6. Подставим в (3) значение b из (2):
- $$l'=a+r_0^2/a=l$$
- 7. Равенство приведенных длин
- $$l'=l$$
- означает равенство периодов для сопряженных точек.
-

Физический маятник

- 8. Оборотный маятник Катера для измерения g.
- 9. Новая точка подвеса называется
- центром качаний
- физического маятника.

Фазовая траектория

- Определим
- ***фазовую плоскость***
- с координатами x, v.
- 1. По абсцисс –
- смещение x,
- 2. по оси ординат –
- скорость v.

Фазовая траектория

- Точка на фазовой плоскости отображает состояние колебательной системы в данный момент времени. Эта точка в процессе колебаний движется по ***фазовой траектории.***

Фазовая траектория

- 1. Смещение:
- $x/x_0=\sin(\omega_0 t + \varphi)$
- 2. Скорость:
- $x'/(x_0\,\omega_0) = \cos(\omega_0 t + \varphi)$
- 3. Уравнение ***фазовой траектории***:
- $(x/x_0)^2 + (x'/(x_0\,\omega_0))^2 = 1.$
- Точка на фазовой траектории отображает состояние колебательной системы.
- Так как **скорость опережает** смещение, то точка движется по фазовой траектории
- **по часовой стрелке.**

Сложение колебаний

- 1. Сложение колебаний, происходящих в **одном направлении**:
- $$x(t)=\Sigma a_i \cdot \sin(\omega_i \cdot t+\varphi_i)$$
- Сложение колебаний, происходящих в одном направлении с *одинаковой* частотой (но с разными амплитудами и начальными фазами):
- $$x(t)=\Sigma a_i \cdot \sin(\omega \cdot t+\varphi_i)$$
- 2. Сложение векторов (длина вектора – амплитуда, угол с осью абсцисс – начальная фаза).
- Векторная диаграмма.
- 3. Сложение комплексных величин.

Сложение колебаний с близкими частотами. Биения

- 1. Колебание $x_1 = a_1 \cdot \sin\omega_1 t$,
- 2. Колебание $x_2 = a_2 \cdot \sin\omega_2 t$,
- Пусть: $a_1 = a_2 = a$, $\omega_1 > \omega_2$, $\omega_1 - \omega_2 << \omega_2$
- $x_1 + x_2 = a \cdot \sin\omega_1 t + a \cdot \sin\omega_2 t =$

$= 2 \cdot a \cdot \sin((\omega_1 + \omega_2) \cdot t/2) \cdot \cos((\omega_1 - \omega_2) \cdot t/2)$

- $x_1 + x_2 = a(t) \cdot \sin(\omega \cdot t)$.
- $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$,
- $a(t) = 2 \cdot a \cdot \cos((\omega_1 - \omega_2) \cdot t/2)$

Сложение гармонических колебаний с близкими частотами. Биения.

Переменная амплитуда:

- $a(t)=2\cdot a\cdot\cos((\omega_1-\omega_2)\cdot t/2)$
- Средняя частота:
- $\omega=(\omega_1+\omega_2)/2$
- Частота биений Ω (в два раза больше $(\omega_1-\omega_2)/2$):
- $\Omega=\omega_1-\omega_2=2\cdot(\omega_1-\omega_2)/2$

Сложение колебаний

- Сложение двух колебаний в **перпендикулярных** направлениях (амплитуды и начальные фазы различны, частоты одинаковы).
- 1. Колебание по оси x:
- $x = a \cdot \sin\omega t$
- 2. Колебание по оси y:
- $y = b \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

Сложение двух колебаний в перпендикулярных направлениях

Для вывода уравнения траектории исключим зависимость от времени:

- 1. Колебание по оси x:
- $\sin\omega t = x/a$
- 2. Колебание по оси y:
- $y/b = \sin(\omega t + \varphi) = \sin\omega t \cdot \cos\varphi + \cos\omega t \cdot \sin\varphi$
- $\cos^2\omega t = 1 - \sin^2\omega t = (1 - (x/a)^2$

Сложение двух колебаний в перпендикулярных направлениях

Для вывода уравнения траектории

- 1. Колебание по оси x:
- $\sin\omega t = x/a$
- 2. Колебание по оси y:
- $y/b = \sin(\omega t + \varphi) = \sin\omega t \cdot \cos\varphi + \cos\omega t \cdot \sin\varphi$
- $y/b - \sin\omega t \cdot \cos\varphi = \cos\omega t \cdot \sin\varphi$
- $(y/b - x/a \cdot \cos\varphi)^2 = (1 - (x/a)^2) \cdot \sin^2\varphi$
- Уравнение эллипса:
- $(y/b)^2 - 2 \cdot (x/a) \cdot (y/b) \cdot \cos\varphi + (x/a)^2 = \sin^2\varphi$

Сложение колебаний

- Сложение двух колебаний
- $(y/b)^2 - 2\cdot(x/a)\cdot(y/b)\cdot\cos\varphi + (x/a)^2 = \sin^2\varphi$
- 1. Колебания в фазе, $\varphi=0$:
- $y/b=x/a$
- (прямая).

Сложение колебаний

- Сложение двух колебаний
- $(y/b)^2 - 2\cdot(x/a)\cdot(y/b)\cdot\cos\varphi + (x/a)^2 = \sin^2\varphi$
- 2. Колебания по оси y
- опережают по фазе на $\varphi = \pi/2$ колебания по оси x:
- $$(y/b)^2 + (x/a)^2 = 1$$
- (правый эллипс, точка движется по часовой стрелке)

Сложение колебаний

- Сложение двух колебаний
- $(y/b)^2 - 2\cdot(x/a)\cdot(y/b)\cdot\cos\varphi + (x/a)^2 = \sin^2\varphi$
- 3. Колебания
- в противофазе, $\varphi=\pi$:
- $$y/b = -x/a$$
- (прямая).

Сложение колебаний

- Сложение двух колебаний
- $(y/b)^2 - 2\cdot(x/a)\cdot(y/b)\cdot\cos\varphi + (x/a)^2 = \sin^2\varphi$
- 4. Колебания по оси y опережают по фазе на $\varphi = 3\pi/2$
- колебания по оси x:
- $$(y/b)^2 + (x/a)^2 = 1$$
- (левый эллипс, точка движется против часовой стрелки)

Затухающие колебания.

- В колебательной системе
- энергия не сохраняется, если существенны процессы диссипации энергии.
- Модель жидкого трения:
- $$F_т = -b \cdot v$$
- Уравнение движения с учетом сил жидкого трения:
- $$m \cdot x'' = -k \cdot x - b \cdot x'$$

Затухающие колебания.

- Из $m \cdot x'' + b \cdot x' + k \cdot x = 0$

следует уравнение

затухающих колебаний:

- $x'' + 2 \cdot \gamma \cdot x' + \omega_0^2 \cdot x = 0$,

где использованы обозначения:

- $k/m = \omega_0^2$, $b/m = 2 \cdot \gamma$.

Коэффициент затухания и логарифмический коэффициент затухания.

- Коэффициент
- затухания:
- $\gamma = b/(2\cdot m)$,

коэффициент γ имеет размерность частоты

Коэффициент затухания и логарифмический коэффициент затухания.

- Случай малого
- затухания:
- $\gamma << \omega_0$

Коэффициент затухания и логарифмический коэффициент затухания.

- Решение уравнения затухающих колебаний ищем в виде:
- $$x = a \cdot e^{i\omega t}$$
- Вычислим производные
- $$x' = a \cdot i \cdot \omega \cdot e^{i\omega t}$$
- $$x'' = -a \cdot \omega^2 e^{i\omega t}$$

Коэффициент затухания и логарифмический коэффициент затухания.

- В уравнение
- $$x'' + 2\cdot\gamma\cdot x' + \omega_0^2\cdot x = 0$$
- подставим выражения
- $x = a\cdot e^{i\omega t}$, $x' = a\cdot i\cdot\omega\cdot e^{i\omega t}$, $x'' = -a\cdot\omega^2 e^{i\omega t}$
- Получим:
- $$a\cdot(-\omega^2 + 2\cdot\gamma\cdot i\cdot\omega + \omega_0^2)\cdot e^{i\omega t} = 0.$$

Коэффициент затухания и логарифмический коэффициент затухания.

- Уравнение:
- $$\omega^2 - 2\cdot\gamma\cdot i\cdot\omega - \omega_0^2=0.$$
- Решение:
- $$\omega=i\cdot\gamma \pm\sqrt{(\omega_0^2 -\gamma^2)}.$$
- Обозначим:
- $$\Omega=\sqrt{(\omega_0^2 -\gamma^2)}.$$
- $$\omega=i\cdot\gamma \pm \Omega.$$

Коэффициент затухания и логарифмический коэффициент затухания.

Случай малого затухания:

- $\gamma << \omega_0$
- $\Omega \approx \omega_0$, $\Omega < \omega_0$
- Так как силы трения ***замедляют*** движение, то
- **период**
- $T = 2\pi/\Omega$
- **увеличивается**.

Коэффициент затухания и логарифмический коэффициент затухания.

- Случай большого затухания:
- $\omega_0 < \gamma$
- $\Omega = i \cdot \sqrt{(\gamma^2 - \omega_0^2)}$.
- Апериодическое движение.

Коэффициент затухания и логарифмический коэффициент затухания.

- Случай малого затухания.
- Решение уравнения затухающих колебаний:
- $x = a \cdot e^{-\gamma t} \cdot e^{i\Omega t}$
- $\Omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)}.$
- $x = a \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos(\Omega t + \varphi)$
- Затухающие колебания
- **квазипериодические**.

Коэффициент затухания и логарифмический коэффициент затухания.

- Определения:
- Коэффициент (декремент) затухания:
- $$\gamma = b/(2 \cdot m)$$
- Время релаксации:
- $$\tau = 1/\gamma$$

Коэффициент затухания и логарифмический коэффициент затухания

- Две последовательные (через период колебаний) амплитуды:
- $x_1 = a \cdot e^{-\gamma t}$
- $x_2 = a \cdot e^{-\gamma (t+T)}$
- Отношение этих амплитуд:
- $x_1 / x_2 = e^{\gamma T}$

Коэффициент затухания и логарифмический коэффициент затухания

- Отношение двух последовательных амплитуд:
- $$x_1/x_2=e^{\gamma T}$$
- **Логарифмическим коэффициентом** (декрементом) затухания называется
- логарифм отношения двух последовательных амплитуд
-
- $$\theta=\ln(x_1/x_2)=\gamma\cdot T=T/\tau$$

Коэффициент затухания и логарифмический коэффициент затухания.

Две амплитуды через N периодов:

- $x_1 = a \cdot e^{-\gamma t}$
- $x_{1+N} = a \cdot e^{-\gamma (t+N \cdot T)}$

•Отношение: $x_1 / x_{1+N} = e^{\gamma \cdot N \cdot T} = e^{\theta \cdot N}$

Если приравнять показатель экспоненты единице (амплитуда колебаний за время N периодов уменьшается в **е** раз), то получим $\theta \cdot N = 1$, или $\theta = 1/N$

Коэффициент затухания и логарифмический коэффициент затухания.

- Другое определение:
- Логарифмический коэффициент (декремент) затухания равен обратной величине
- числа периодов, в течении которых амплитуда колебаний уменьшается в **е** раз.
- $$\theta = 1/N$$

Энергия затухающих колебаний

- **Амплитуда** затухающих колебаний уменьшается по закону:
- $a(t) \sim a_0 \cdot e^{-\gamma t}$.
- **Энергия**, запасенная в колебательной системе, пропорциональна квадрату амплитуды:
- $E(t) \sim a^2(t) \sim a_0^2 \cdot e^{-2\gamma t}$

Энергия затухающих колебаний

- **Энергия** (механическая), запасенная в колебательной системе, в результате действия сил трения **уменьшается** (не сохраняется):
- $E(t) \sim a^2(t) \sim a_0{}^2 \cdot e^{-2\gamma t}$

Энергия затухающих колебаний

- **Оценим** работу сил трения:
- $\delta A = dE = F_т \cdot dx = -\, b \cdot v \cdot v \cdot dt = -\, b \cdot v^2 \cdot dt$
- Среднее изменение энергии за период:
- $\langle dE/dt \rangle = \langle -\, b \cdot v^2 \rangle = \langle -(b/m) \cdot 2 \cdot m \cdot v^2/2 \rangle =$
- $= -\, 2 \cdot \gamma \cdot \langle 2 \cdot T \rangle = -\, 2 \cdot \gamma \cdot \langle E \rangle \rightarrow$
- Уравнение:
- $$d\langle E \rangle / \langle E \rangle = -\, 2 \cdot \gamma \cdot dt$$

Решение (энергия колебаний в момент t):

- $$\langle E(t) \rangle = E_0 \cdot e^{-2\gamma t}$$

Добротность колебательной системы

Энергия уменьшается по закону:

- $$E(t)=E_0\cdot e^{-2\gamma t}$$
- Время $\mathbf{t_e}$, в течении которого
- энергия уменьшается в **e** раз:
- $E(t)=E_0\cdot\exp(-2\cdot\gamma\cdot t_e)=E_0\cdot e^{-1}.$
- $$2\cdot\gamma\cdot t_e=1 \rightarrow$$
- $$t_e=1/(2\cdot\gamma)=m/b=\tau/2.$$

Добротность колебательной системы

- ***Добротность*** колебательной системы с затуханием определяется как **изменение фазы** в радианах
- при уменьшении ***энергии*** в **е** раз:
- $x(t)=a\cdot e^{-\gamma t}\cdot\cos(\Omega t+\varphi)$
- $x(t+t_e)=a\cdot e^{-\gamma(t+te)}\cdot\cos(\Omega(t+t_e)+\varphi)$
- 1. Изменение фазы в радианах – это **добротность**:
- $Q=\Omega\cdot t_e=\Omega/(2\cdot\gamma)=\Omega\cdot m/b$

Добротность колебательной системы

- Малое затухание:
- $$Q = \Omega/(2\cdot\gamma) \approx \omega_0\,/(2\cdot\gamma)$$
- $Q \approx \omega_0\,/(2\cdot\gamma) = 2\pi/T/(2\cdot\gamma) = \pi/\theta$
- 2. **Добротность:**
- $$Q = \pi/\theta$$
- $$Q = \pi\cdot N$$

Добротность колебательной системы

- Энергия в момент времени t:
- $$E(t)=E_0 \cdot e^{-2\gamma \cdot t}$$
- Энергия в момент времени (t+T) (через период):
- $$E(t+T)=E_0 \cdot e^{-2\gamma(t+T)}$$

Добротность колебательной системы

- Разность энергий ΔE(энергия, теряемая за период):
- $\Delta E = E(t) - E(t+T) =$
- $= E_0 \cdot e^{-2\gamma \cdot t} \cdot (1 - \exp(-2\gamma \cdot 2\pi/\omega_0)) =$
- $= E_0 \cdot e^{-2\gamma \cdot t} \cdot (1 - \exp(-2\pi/Q)) =$
- $= E_0 \cdot e^{-2\gamma \cdot t} \cdot 2\pi/Q = E(t) \cdot 2\pi/Q \rightarrow$
- $Q/2\pi = E(t)/\Delta E$

Добротность колебательной системы

- 3. **Добротность** колебательной системы с затуханием, поделенная на 2π, равна *отношению* энергии, запасенной в системе, к энергии, теряемой за период:
- $$Q/2\pi = E(t)/\Delta E$$

5 определений добротности

- 1. Изменение фазы колебаний при уменьшении энергии в **e** раз.
- 2. $Q \approx \pi/\theta = \pi \cdot N$
- 3. Умноженное на 2π отношение энергии, запасенной в системе, к энергии, теряемой за период,
- 4. Отношение амплитуды при резонансе к статическому смещению.
- 5. Отношение резонансной частоты к ширине резонансной кривой.