Лекция 9

Динамика твердого тела.

1. Момент силы.
2. Момент импульса тела.
3. Уравнение моментов.
4. Закон сохранения момента импульса.
5. Тензор инерции.
6. Осевые и центробежные моменты инерции.
7. Главные и центральные оси вращения.
8. Свободные оси вращения.

Момент силы относительно некоторого центра

- Пусть в системе отсчета K задан вектор силы **F**, действующей на материальную точку.
- ***Моментом*** $\mathbf{M}_o$ ***силы*** **F**
- относительно некоторого центра (точки) O называется векторное произведение радиуса-вектора **r**, проведенного
- из этого центра к материальной точке,
- на вектор силы **F**:
- $$\mathbf{M}_o = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$
-

Момент силы относительно оси

- ***Моментом*** **M** ***силы*** **F**
- ***относительно некоторой оси*** называется
- составляющая на эту ось момента силы
- относительно любой точки O этой оси.
- ***Моментом*** **M** ***силы*** **F**
- ***относительно некоторой оси*** называется момент составляющей этой силы на плоскость, перпендикулярную этой оси, относительно точки $O_п$ пересечения оси с этой плоскостью.
-

Момент сил, действующих на систему материальных точек

- **Момент сил**, действующих на системуматериальных точек, относительно центра O равен сумме моментов всех сил, действующих на эти материальные точки:
- $$\mathbf{M}_o = \Sigma_i \mathbf{M}_{oi} = \Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i)$$

Момент сил, действующих на систему материальных точек

Суммы всех сил на точку i (внешних и внутренних):

- $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{ie} + \sum_j \mathbf{F}_{ij}$
- сумма всех внешних сил
- обозначена как
- $\mathbf{F}_{ie} = \Sigma \mathbf{F}_{i\text{внешн}}$

Момент сил, действующих на систему материальных точек

- Рассмотрим моменты **внутренних** сил для точек i и j. Положение этих точек i и j определяют радиус-векторы $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}_j$ соответственно. Вектор $\mathbf{r}_{ji}$ направим из точки j в точку i, а вектор $\mathbf{r}_{ij}$ в обратном
- направлении. На точку i со стороны точки j действует сила $\mathbf{F}_{ij}$, а на точку j со стороны точки i – сила $\mathbf{F}_{ji}$. Будем учитывать соотношения между векторами: $\mathbf{r}_i=\mathbf{r}_j+\mathbf{r}_{ji}$, $\mathbf{r}_{ji} = -\mathbf{r}_{ij}$ и $\mathbf{F}_{ij}= -\mathbf{F}_{ji}$.

Момент сил, действующих на систему материальных точек

- Рассмотрим моменты **внутренних** сил
- только для одной пары точек i и j:
- $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}$ *и* $\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}$.
- Имеем для суммы этих моментов:
- $(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji})=$
- $=\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} +(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{ji}) \times (-\mathbf{F}_{ij})=$
- $= \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} - \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_{ji} \times \mathbf{F}_{ij} =0,$

т. к. векторы $\mathbf{r}_{ji}$ и $\mathbf{F}_{ij}$ параллельны.

Момент сил, действующих на систему материальных точек

- Сумму моментов **внутренних** сил для всех точек системы можно представить в виде:
- $\Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{iвнутр}) = \Sigma_{ij}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}) =$
- $=(1/2)(\Sigma_{ij}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}) = 0,$
- где коэффициент 1/2 позволяет учесть половину удвоенной суммы и для каждой пары точек
- $(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}) = 0$

Момент сил, действующих на систему материальных точек

- Вывод:
- сумма моментов всех ***внутренних сил*** равна нулю:
- $\Sigma_{ij}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij})=0$

Момент сил, действующих на систему материальных точек

- Сумма моментов
- **всех внешних** сил относительно центра О определена выше:
- $\Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ie})=\Sigma_i \mathbf{M}_{oi}=\mathbf{M}_o$

Выводы:

- 1. **Сумма моментов** всех **внутренних** сил равна **нулю**:
- $$\Sigma_{ij}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij})=0$$
- 2. Сумма **моментов** всех **внешних** сил равна
- $$\Sigma_i(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ie})=\mathbf{M}_o.$$
- $\mathbf{F}_{ie}$ — сумма всех внешних сил, действующих на точку i.

Момент импульса относительно центра

- Пусть в системе отсчета K задан вектор количества движения (импульса)
- $\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v}$
- некоторой материальной точки.

Момент импульса относительно центра

- ***Моментом импульса*** $\mathbf{L}_o$ материальной точки относительно некоторого центра О называется
- векторное произведение
- радиуса-вектора **r**, проведенного из этого центра к материальной точке, на вектор импульса **p**:
- $$\mathbf{L}_o = \mathbf{r} \times \mathbf{p}.$$

Момент импульса относительно оси

- ***Моментом импульса L относительно некоторой оси*** называется
- составляющая на эту ось
- момента импульса
- относительно любой точки О этой оси.

Момент импульса относительно оси

- ***Моментом импульса*** **L** ***относительно***
- ***некоторой оси***
- называется
- момент составляющей импульса на плоскость, перпендикулярную этой оси, относительно точки $O_п$ пересечения оси с этой плоскостью.
-

Момент импульса системы материальных точек

- ***Момент импульса***
- ***системы материальных точек*** относительно некоторого центра О равен сумме моментов импульса всех материальных точек системы относительно того же центра О:
- $$\mathbf{L}_o = \Sigma \mathbf{L}_{oi} = \Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i).$$

Уравнение моментов для материальной точки

- 1. Уравнение моментов можно получить, используя уравнение Ньютона. Составим векторные произведения радиуса-вектора **r** на левую d**p**/dt и правую **F** части уравнения Ньютона:
- $$\mathbf{r} \times d\mathbf{p}/dt = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$
- Это соотношение и определяет уравнение моментов
- $$d\mathbf{L}_o/dt = \mathbf{M}_o,$$

так как $\mathbf{L}_o = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, $\mathbf{M}_o = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ и $d\mathbf{r}/dt \times \mathbf{p} = 0$.

Уравнение моментов для материальной точки

- Производная по времени момента импульса $\mathbf{L}_o$ материальной точки относительно центра О равна моменту сил относительно того же центра:
- $$d\mathbf{L}_o/dt=\mathbf{M}_o$$

Уравнение моментов для материальной точки

- 2. Уравнение моментов также можно получить, если продифференцировать соотношение $\mathbf{L}_o = r \times \mathbf{p}$:
- $$d\mathbf{L}_o/dt = d\mathbf{r}/dt \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times d\mathbf{p}/dt =$$
- $$= \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}_o.$$
- **Уравнение моментов** для материальной точки:
- $$d\mathbf{L}_o/dt = \mathbf{M}_o$$

Закон сохранения момента импульса материальной точки

- Если момент сил $\mathbf{M}_o$, действующих на материальную точку относительно центра О, равен 0, то **момент импульса** этой точки
- относительно этого центра **сохраняется.**
- Если $\mathbf{M}_o = 0$, то $d\mathbf{L}_o/dt = 0$ и
- момент импульса материальной точки относительно этого центра О сохраняется:
- $$\mathbf{L}_o = \text{const}$$

Закон сохранения момента импульса материальной точки

- Если материальная точка движется в поле центральных сил, действующих из силового центра О, то **момент импульса** этой точки
- относительно этого центра **сохраняется**:
- Так как **r** ‖ **F**, то
- $$\mathbf{M}_o=0 \text{ и } d\mathbf{L}_o/dt=0.$$
- Поэтому в поле центральных сил момент импульса материальной точки сохраняется:
- $$\mathbf{L}_o= \text{const}$$

Закон сохранения момента импульса материальной точки

- Так как векторы
- **r** *и* $\mathbf{L}_o = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$
- **перпендикулярны**, то
- радиус- вектор **r** материальной точки при ее движении остается
- в одной **плоскости**, перпендикулярной вектору $\mathbf{L}_o$. Это означает, что **траектория** материальной точки лежит в этой **плоскости**.

Закон сохранения момента импульса материальной точки

- Пример.
- **Траектория** движения Земли вокруг Солнца лежит в одной **плоскости**.

Уравнение моментов для системы материальных точек

- ***Момент импульса*** системы материальных точек относительно центра О определяется как сумма моментов импульса точек системы относительно того же центра О:
- $$\mathbf{L}_o = \Sigma \mathbf{L}_{oi} = \Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i).$$

Уравнение моментов для системы материальных точек

- Продифференцируем по времени вектор $\mathbf{L}_o$:
- $d\mathbf{L}_o/dt=d(\Sigma\mathbf{L}_{oi})/dt=$
- $=\Sigma d(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i)/dt=$
- $=\Sigma(d\mathbf{r}_i /dt \times \mathbf{p}_i)+\Sigma (\mathbf{r}_i \times d\mathbf{p}_i/dt)=$
- $=\Sigma (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i\text{внеш}})=\Sigma\mathbf{M}_{io}=\mathbf{M}_o.$

Уравнение моментов для системы материальных точек

- Производная по времени момента импульса $\mathbf{L}_o$ системы материальных точек относительно центра О равна моменту внешних сил относительного того же центра:

$$d\mathbf{L}_o/dt=\mathbf{M}_o.$$

$$(\mathbf{L}_o=\Sigma\mathbf{L}_{oi},\ \mathbf{M}_o=\Sigma\mathbf{M}_{io})$$

Закон сохранения момента импульса для системы материальных точек

- Если система материальных точек **изолирована**, то момент импульса этой системы **сохраняется**.
- $\mathbf{L}_o = const$
- В случае изолированной системы нет внешних сил. Момент сил $\mathbf{M}_o = 0$.

$$d\mathbf{L}_o/dt = \mathbf{M}_o = 0, \quad \mathbf{L}_o = const$$

Закон сохранения момента импульса для системы материальных точек

- Демонстрации:
- 1) скамья Жуковского
- 2) двойная спираль

Тензор инерции

- Модель: ***твердое тело***
- состоит из материальных точек i массы Δm_i, расположенных на расстояниях $\mathbf{r_i}$ от центра О системы Oxyz. Скорости движения этих материальных точек i равны $\mathbf{v_i}$. По формуле Эйлера $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$, где $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения относительно оси, проходящей через центр О.

Тензор инерции

- Для вращающегося с угловой скоростью **ω** твердого тела
- (как системы материальных точек)
- момент импульса относительно неподвижного центра O лабораторной системы координат Oxyz равен:
- $\mathbf{L}_o = \Sigma \Delta m_i \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) =$
- $= \Sigma \Delta m_i \cdot (\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)).$

Тензор инерции

- Определим проекции *векторов* $\mathbf{r}_i$,$\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{L}_o$, входящих в равенство
- $$\mathbf{L}_o = \Sigma \Delta m_i \cdot (\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)),$$
- на оси системы Oxyz
- $\mathbf{r}_i \rightarrow x_i, y_i, z_i$
- $\boldsymbol{\omega} \rightarrow \omega_x, \omega_y, \omega_z$
- $\mathbf{L}_o \rightarrow L_x, L_y, L_z$

Тензор инерции

Раскрывая двойное векторное произведение, получим для моментa импульса

- относительно ***неподвижного*** центра О выражение из двух членов:

- $$\mathbf{L}_o = \Sigma \Delta m_i \cdot (\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)) =$$

$$= \Sigma \Delta m_i \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i) - \Sigma \Delta m_i \cdot \mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) =$$

$$= \Sigma \Delta m_i \cdot r_i^2 \cdot \boldsymbol{\omega} -$$

- $$-\Sigma \Delta m_i \cdot \mathbf{r}_i \cdot (x_i \cdot \omega_x + y_i \cdot \omega_y + z_i \cdot \omega_z).$$

Тензор инерции

- $\mathbf{L}_o = \Sigma \Delta m_i \cdot r_i^2 \cdot \boldsymbol{\omega} -$
- $-\Sigma \Delta m_i \cdot \mathbf{r}_i \cdot (x_i \cdot \omega_x + y_i \cdot \omega_y + z_i \cdot \omega_z)$
- Рассмотрим проекции векторов на ось Ox:
- $L_x = \Sigma \Delta m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2) \cdot \omega_x -$
- $-\Sigma \Delta m_i \cdot x_i \cdot y_i \cdot \omega_y -$
- $-\Sigma \Delta m_i \cdot x_i \cdot z_i \cdot \omega_z$

Тензор инерции

- $\mathbf{L}_o = \Sigma\Delta m_i \cdot r_i^2 \cdot \boldsymbol{\omega} -$
- $-\Sigma\Delta m_i \cdot \mathbf{r}_i \cdot (x_i \cdot \omega_x + y_i \cdot \omega_y + z_i \cdot \omega_z)$
- Рассмотрим проекции векторов на ось Oy:
- $L_y = -\Sigma\Delta m_i \cdot y_i \cdot x_i \cdot \omega_x +$
- $+\Sigma\Delta m_i \cdot (x_i^2 + z_i^2) \cdot \omega_y -$
- $-\Sigma\Delta m_i \cdot y_i \cdot z_i \cdot \omega_z .$
-

Тензор инерции

- $\mathbf{L}_o = \Sigma \Delta m_i \cdot r_i^2 \cdot \boldsymbol{\omega} -$
- $-\Sigma \Delta m_i \cdot \mathbf{r}_i \cdot (x_i \cdot \omega_x + y_i \cdot \omega_y + z_i \cdot \omega_z)$
- Рассмотрим проекции векторов на ось Oz:
- $L_z = -\Sigma \Delta m_i \cdot z_i \cdot x_i \cdot \omega_x -$
- $-\Sigma \Delta m_i \cdot z_i \cdot y_i \cdot \omega_y +$
- $+\Sigma \Delta m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2) \cdot \omega_z.$

Тензор инерции

- $\mathbf{L}_o = \Sigma\Delta m_i \cdot r_i^2 \cdot \boldsymbol{\omega} -$
- $-\Sigma\Delta m_i \cdot \mathbf{r}_i \cdot (x_i \cdot \omega_x + y_i \cdot \omega_y + z_i \cdot \omega_z).$
- **Проекции** векторов на координатные оси**:**
- $L_x = \Sigma\Delta m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2) \cdot \omega_x -$
- $-\Sigma\Delta m_i \cdot x_i \cdot y_i \cdot \omega_y - \Sigma\Delta m_i \cdot x_i \cdot z_i \cdot \omega_z .$
- $L_y = -\Sigma\Delta m_i \cdot y_i \cdot x_i \cdot \omega_x +$
- $+\Sigma\Delta m_i \cdot (x_i^2 + z_i^2) \cdot \omega_y - \Sigma\Delta m_i \cdot y_i \cdot z_i \cdot \omega_z .$
- $L_z = -\Sigma\Delta m_i \cdot z_i \cdot x_i \cdot \omega_x -$
- $- \Sigma\Delta m_i \cdot z_i \cdot y_i \cdot \omega_y + \Sigma\Delta m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2) \cdot \omega_z .$

Тензор инерции

- ***Проекции* двух векторов**
- **L** и **ω** **с**вязаны между собой компонентами матрицы **I**:
- $L_x = I_{xx} \cdot \omega_x + I_{xy} \cdot \omega_y + I_{xz} \cdot \omega_z$
- $L_y = I_{yx} \cdot \omega_x + I_{yy} \cdot \omega_y + I_{yz} \cdot \omega_z$
- $L_z = I_{zx} \cdot \omega_x + I_{zy} \cdot \omega_y + I_{zz} \cdot \omega_z$

Тензор инерции

- Компоненты матрицы **I** – это элементы тензора инерции тела:

$$\mathbf{I} = \begin{matrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{matrix}$$

- Тензор инерции:

$$I = \begin{matrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{matrix}$$

Тензор инерции

- Определим **осевые**
- моменты инерци:
- $I_{xx}=\Sigma\Delta m_i\cdot(y_i^2+z_i^2)$
- $I_{yy}=\Sigma\Delta m_i\cdot(x_i^2+z_i^2)$
- $I_{zz}=\Sigma\Delta m_i\cdot(y_i^2+x_i^2)$

Тензор инерции

- и **центробежные** моменты инерции:
- $I_{xy}=I_{yx}=-\Sigma\Delta m_i\cdot x_i\cdot y_i$
- $I_{xz}=I_{zx}=-\Sigma\Delta m_i\cdot x_i\cdot z_i$
- $I_{zy}=I_{yz}=-\Sigma\Delta m_i\cdot y_i\cdot z_i$
- (тензор симметричен).

Тензор инерции

- Направления *векторов*
- **L** и **ω**
- в общем случае
- **не совпадают!**

Тензор инерции

- Проекции двух векторов **L и ω** связаны через тензор инерции согласно правилу умножения матрицы на вектор **L**=I·**ω**:
- **L** = I · **ω**

вектор **L** тензор инерции I вектор **ω**

- L_x I_{xx} I_{xy} I_{xz} ω_x
- L_y I_{yx} I_{yy} I_{yz} ω_y
- L_z I_{zx} I_{zy} I_{zz} ω_z

Главные оси инерции

- Можно показать, что существуют такие три взаимно перпендикулярные направления в пространстве, что *в системе координат*, оси которой совпадают с этими направлениями, *тензор инерции* принимает ***диагональный*** вид. Оси, совпадающие с этими направлениями, называются
- **главными осями** инерции:

$$I = \begin{matrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{matrix}$$

Главные оси инерции

- При ***вращении*** тела вокруг главных осей инерции **направления** векторов
- **L и ω**
- **совпадают**
- Эти оси называют
- главными осями вращения.

Главные центральные оси инерции (вращения)

- Если ***начало*** координат системы, оси которой совпадают с главными осями инерции, *совмещено* с положением **центра масс** твердого тела**,** то оси этой системы называются **главными центральными осями** инерции (вращения). Осевые моменты инерции вычисляются относительно этих осей:

$$I = \begin{matrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{matrix}$$

Свободные оси вращения

- Ось вращения может ***удерживаться*** в **неподвижном** положении подшипниками
- или какими-либо
- другими
- внешними устройствами.

Свободные оси вращения

- **Оси** вращения называются ***свободными***,
- если они сохраняют
- *неизменную ориентацию*
- в пространстве
- без воздействия
- внешних устройств.

Свободные оси вращения

- **Свободные** оси вращения совпадают с **главными** осями инерции (вращения).
- **Устойчивое** вращение реализуется для главной оси, для которой осевой момент инерции имеет **максимальное** значение.

Свободные оси вращения

Свободное вращение вокруг оси Ox:

- $$\mathbf{L}_x = I_x \cdot \boldsymbol{\omega}_x$$
- Уравнение моментов:
- $d\mathbf{L}_x/dt = I_x \cdot d\boldsymbol{\omega}_x/dt = \mathbf{M}_x$
- $I_x = I_{xx} = \Sigma \Delta m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2)$ – момент инерции и
- $\mathbf{M}_x$ – момент сил относительно оси Ox.
- $\boldsymbol{\omega}_x$– вектор угловой скорости, направленный вдоль оси Ox

Свободные оси вращения

Свободное вращение вокруг оси Оу:

- $$\mathbf{L}_y = I_y \cdot \boldsymbol{\omega}_y$$
- Уравнение моментов:
- $$d\mathbf{L}_y/dt = I_y \cdot d\boldsymbol{\omega}_y/dt = \mathbf{M}_y$$

$I_y = I_{yy} = \Sigma\Delta m_i \cdot (z_i^2 + x_i^2)$ – момент инерции и

- $\mathbf{M}_y$ – момент сил относительно оси Оу.
- $\boldsymbol{\omega}_y$ – вектор угловой скорости, направленный вдоль оси Оу

Свободные оси вращения

Свободное вращение вокруг оси Oz:

- $$\mathbf{L}_z = I_z \cdot \boldsymbol{\omega}_z$$
- Уравнение моментов:
- $d\mathbf{L}_z/dt = I_z \cdot d\boldsymbol{\omega}_z/dt = \mathbf{M}_z$

$I_z = I_{zz} = \Sigma \Delta m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2)$ – момент инерции и $\mathbf{M}_z$ – момент сил относительно оси Oz.

- $\boldsymbol{\omega}_z$ – вектор угловой скорости, направленный вдоль оси Oz.

Свободные оси вращения

- Существование свободных осей вращения. Рассмотрим две одинаковые элементарные массы dm_i, раположенные
- по разные стороны от оси вращения. Рассмотрим:

силы df_i на массы dm_i,
силы dF_i на ось и
моменты сил относительно оси.

Свободные оси вращения

Условия равновесия:

1. Сумма сил равна нулю. Согласно этому условию распределение массы тела относительно оси должно быть симметричным.
2. Сумма моментов сил равна нулю. Согласно этому условию ось вращения должна быть перпендикулярной плоскостям, в которых определены скорости элементов тела.

Свободные оси вращения

- Опыты:
- 1. Кольцо. 3 оси.
- 2. Диск (цилиндр). 3 оси.
- 3. Квадрат. 3 оси.
- 4. Цепочка на валу.

Осевые моменты инерции

- ***Моментом инерции*** I_z **тела относительно оси z**
- называется сумма:
- $$I_z = \Sigma \Delta m_i \cdot d_i^2 ,$$
- где $d_i = \sqrt{(x_i^2 + y_i^2)}$ – расстояние элементарной части i тела массы Δm_i от оси Oz.

Осевые моменты инерции

- Теорема Гюйгенса-Штейнера.
- Момент инерции I тела относительно некоторой оси равен сумме:
- $$I = I_ц + m \cdot d^2 ,$$
- где $I_ц$ момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной данной,
- d – расстояние между осями,
- m – масса тела.

Осевые моменты инерции

- Теорема Гюйгенса-Штейнера.
- Момент инерции относительно оси Ox системы Oxyz:
- $$I_x = I_{xx} = \Sigma\Delta m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2)$$
- Из центра масс $O_ц$ проведем оси системы $O_цXYZ$ *параллельно* осям системы Oxyz.
- Имеем для произвольной точки i тела:
- $$y_i = Y_i + y_ц$$
- $$z_i = Z_i + z_ц$$
- $$I_x = \Sigma\Delta m_i \cdot ((Y_i + y_ц)^2 + (Z_i + z_ц)^2)$$

Осевые моменты инерции

- Теорема Гюйгенса-Штейнера.
- $I_x = \Sigma\Delta m_i \cdot ((Y_i + y_ц)^2 + (Z_i + z_ц)^2) =$
- $= \Sigma\Delta m_i \cdot (Y_i^2 + Z_i^2) + \Sigma\Delta m_i \cdot (y_ц^2 + z_ц^2) +$
- $+ 2 \cdot \Sigma\Delta m_i \cdot ((Y_i \cdot y_ц) + (Z_i \cdot z_ц)) =$
- $= I_{XX} + m \cdot d^2 = I_ц + m \cdot d^2$
- где:
- $I_{XX} = I_X = I_ц = \Sigma\Delta m_i \cdot (Y_i^2 + Z_i^2)$,
- $m \cdot d^2 = (\Sigma\Delta m_i) \cdot (y_ц^2 + z_ц^2)$,
- $(\Sigma\Delta m_i \cdot Y_i) \cdot y_ц + (\Sigma\Delta m_i \cdot Z_i) \cdot z_ц = 0$.

Теорема для плоских тел

- Осевые моменты инерции
- **плоских** тел удовлетворяют равенству:
- $I_z = I_x + I_y$
- Доказательство:
- $I_z = \Sigma \Delta m_i \cdot (x^2 + y^2)$
- $I_x = \Sigma \Delta m_i \cdot y^2$
- $I_y = \Sigma \Delta m_i \cdot x^2$
- Сумма левых и правых частей двух последних равенств доказывает утверждение.

Теорема для плоских тел

- Пример:
- Момент инерции плоского диска относительно диаметра
- $$I_z = I_x + I_y = 2 \cdot I_x$$
- $$(1/2) \cdot m \cdot r^2 = 2 \cdot I_x$$
- $$I_x = (1/4) \cdot m \cdot r^2$$

Теорема для плоских тел

- Примеры:
- Моменты инерции
- 1) однородного кубика
- 2) однородного параллелепипеда
- 3) однородного цилиндра радиуса R и длины L относительно оси, перпендикулярной оси симметрии